بسم الله الرحمن الرحیم

هندسه (۲)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

راهنمای معلم

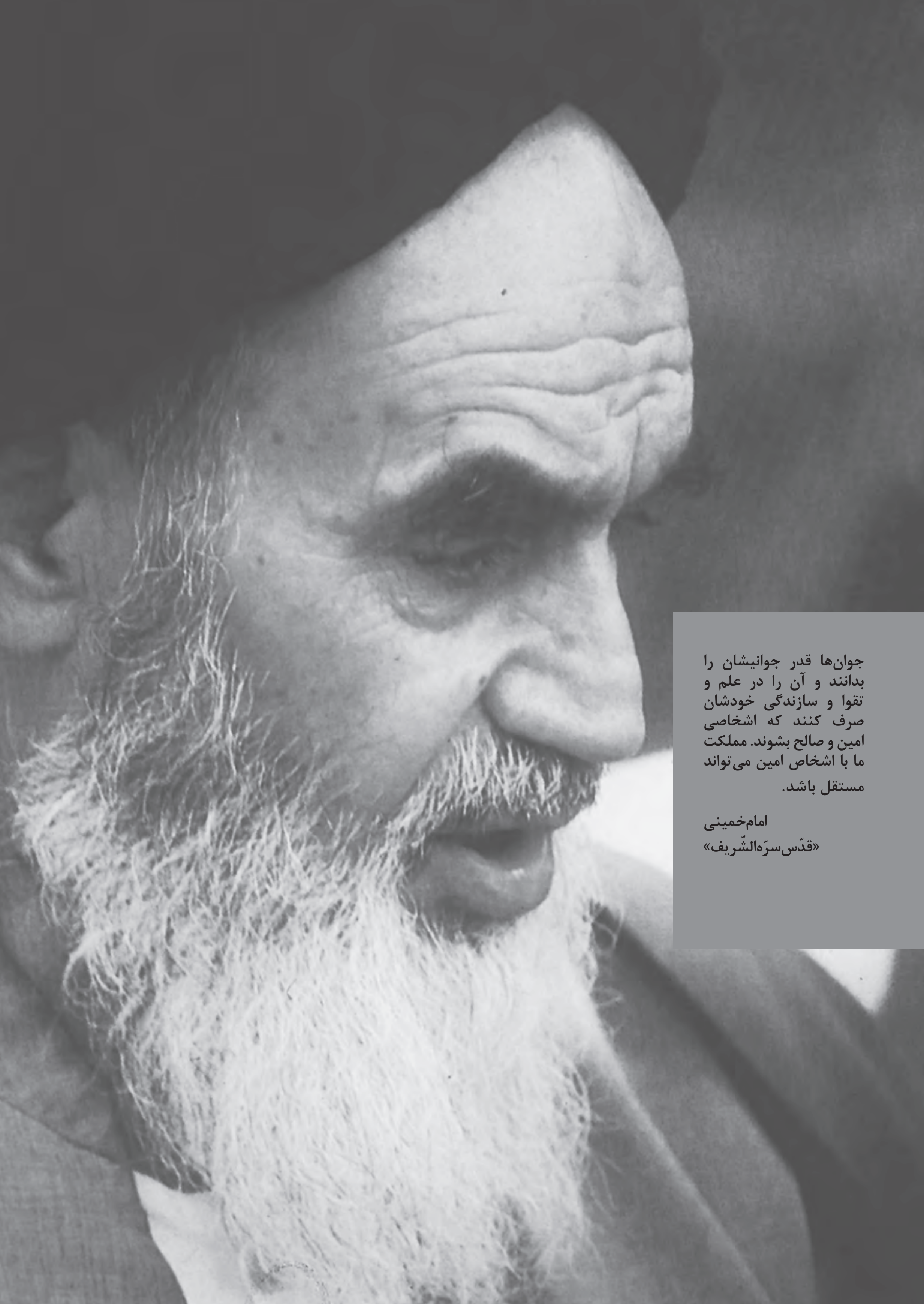
پایهٔ یازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای معلم هندسه(۲) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۱۳۶۵
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
طاهره اسدی، اسحاق اسفندیاری، مریم اعیان‌منش، مهدی ایزدی، زهرا رحیمی، محمدرضا سید صالحی، هوشنگ شرقی، سمیه سادات میرمعینی و محمود نصیری (اعضای گروه تألیف) ـ سید باقر میر عبداللّهی (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امورفنی‌وچاپ) ـ جواد صفری(مدیرهنری) ـ سمیه قنبری(صفحه‌آرا) ـ الهام محبوب (رسام) ـ فاطمه باقری‌مهر، علی نجمی، سیف‌الله بیک محمد دلیوند، زینت بهشتی‌شیرازی، حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۶

شابک ۳ـ۳۰۳۱ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3031-3



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدّس‌سرّه‌الشّریف»

فهرست

مقدمه

هندسه به عنوان یک مهارت پایه‌ای ریاضی، در برنامه درسی ریاضی بسیاری از کشورها، مورد تأیید و توجه قرار گرفته و تفکر هندسی و آموزش هندسه، در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. از همین رو در تألیف کتاب درسی سعی بر آن بوده است که نخست حوزهٔ هندسه و اندازه‌گیری و چگونگی آموزش آن، مورد بازاندیشی قرار گیرد و سپس محتوای کتاب با تکیه بر آخرین دستاوردهای پژوهشی در این حوزه و با تبعیت از اسناد بالا دستی از جمله سند برنامه درسی ملی، تنظیم و پیشنهاد شود.

بدین ترتیب برخی اصول و رویکردهای کلی، هدایتگر مؤلفین این کتاب بوده است. ازجمله اینکه در تنظیم و تدوین محتوای کتاب، متوسط هوش و توان یادگیری دانش‌آموزان مد نظر می‌باشد. روند آموزش در این کتاب به آرامی از شهود آغاز شده و به سمت تجرید پیش می‌رود و مشابه با سایر کتاب‌های درسی جدیدالتألیف، با اخذ توجه بیشتر به فعالیت دانش‌آموزان، سعی بر آن است که شیوهٔ آموزش از معلم محوری فاصله گرفته و طالب مشارکت بین معلم و دانش‌آموزان باشد. نگاه کاربردی و برقراری ارتباط هندسه با زندگی روزمره، رویکرد دیگری است که در تدوین کتاب مورد توجه قرار گرفته و تلاش شده که تلفیقی از هندسه با سایر حوزه‌های مطالعاتی نظیر معماری، هنر و زیبایی‌شناسی ارائه شود.

در این کتاب تلاش شده است با زمینه‌سازی برای آشنایی دانش‌آموزان با انواع استدلال و تقویت توانمندی تشخیص اثبات‌های معتبر از اثبات‌های نامعتبر ــ همسو با آرمان‌های سند برنامه درسی ملی ــ بستر لازم برای تربیت و پرورش انسان‌هایی که در برخورد با مسائل می‌توانند به طور منطقی استدلال کنند و قدرت تجزیه و انتزاع بیشتری دارند، فراهم شود.

همچنین سعی بر آن بوده است که بر تقویت و توسعهٔ روحیه پرسشگری، پژوهشگری و خلاقیت در دانش‌آموز تأکید شود. بدین ترتیب با زمینه‌سازی برای ایجاد نظم فکری با توجه به سلسله مراتب اصول و قضایا و تشخیص روابط منطقی بین مفاهیم و زمینه‌سازی برای دست‌یابی به علم نسبت به پدیده‌ها، روابط، رویدادها و قوانین جهان آفرینش، به دانش‌آموز کمک می‌شود که به درک قانونمندی‌های طبیعت نائل آید.

بیان دقیق ایده‌های هندسی با به‌کارگیری زبان هندسی و تقویت گفتمان ریاضی، پرورش ذهن خلاق و بالا بردن درک فضایی دانش‌آموزان، شناسایی و تحلیل ویژگی‌ها و مشخصه‌های اشکال هندسی در صفحه و فضا اهداف دیگری است که در راستای تقویت تفکر تجسمی ــ که مورد تأکید برنامه درسی ملی است ــ هدایتگر تنظیم محتوای این کتاب بوده است. بدین ترتیب در این قسمت سعی شده است که بدون ورود به حیطهٔ محاسبات و استدلال و تنها به کمک درک شهودی، دانش‌آموزان با مهم‌ترین سازه‌های ساختمان هندسه آشنا شده و به زبان تصاویر و اشکال هندسی گفت و گو کنند.

فصل اوّل

۱

دایــره

عکس: محمدرضا دومیری گنجی

قلعهٔ فلک الافلاک که از دوره ساسانیان در شهرستان خرم آباد برجای مانده است.

چرا در ساخت بسیاری از قلعه‌ها در کشورمان از شکل دایره استفاده شده است؟

اهداف کلی فصل ۱

۱ آشنایی با وضعیت‌های مختلف خط و دایره نسبت به هم و اثبات برخی قضایای مربوط به آنها؛

۲ آشنایی با زوایای مرکزی، محاطی، ظلی و اثبات قضایایی در خصوص ارتباط بین اندازه زوایای مذکور و اندازه کمان‌های متقابل یا محصور بین آن زوایا؛

۳ آشنایی و اثبات قضایایی درباره روابط طولی در دایره و استفاده از آن روابط در حل مسائل؛

۴ آشنایی با چندضلعی‌ها و دایره‌های محاطی و محیطی و درک ویژگی‌های آنها با تأکید بر مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها و چندضلعی‌های منتظم.

درس اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

اهداف درس

۱ آشنایی با تعریف دایره و مفاهیم کلیدی در دایره نظیر : وتر، کمان، قطر و زاویه مرکزی؛

۲ بیان وضعیت نقطه نسبت به دایره و مشخص کردن نزدیک‌ترین و دورترین نقطه روی دایره نسبت به یک نقطه خاص؛

۳ تشخیص وضعیت خط و دایره نسبت به هم و بیان حالت‌های مختلف آن؛

۴ رسم خط مماس از یک نقطه در روی دایره بر آن؛

۵ آشنایی با زاویه مرکزی، قطاع و پیدا کردن اندازه زاویه مرکزی، طول کمان روبه‌رو و محیط و مساحت قطاع؛

۶ تعریف زاویه محاطی و اثبات اندازه آن و پیدا کردن اندازه زوایای محاطی در دایره؛

۷ تعریف زاویه ظلی و اثبات اندازه آن و پیدا کردن اندازه زوایای ظلی بر دایره؛

۸ پیدا کردن اندازه زاویه بین دو قاطع بر دایره و زاویه بین دو وتر متقاطع در داخل دایره براساس اندازه کمان‌های محصور بین آنها.

چند نکته خطاب به همکاران محترم قبل از تدریس درس اول :

۱ از قبل به دانش‌آموزان گفته شود که خط‌کش و پرگار همراه داشته باشند.

۲ درس اول را می‌توان در ۳ یا ۴ جلسه ۷۵ دقیقه‌ای، با توجه به آمادگی دانش‌آموزان، ارائه داد.

۳ مطالبی که پیشنهاد می‌شود در جلسه اول ارائه شود : مفاهیم اولیه دایره، اوضاع نسبی نقطه نسبت به

دایره، اوضاع نسبی خط و دایره، رسم مماس بر دایره از نقطه روی آن، زاویه مرکزی و پیدا کردن طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی (صفحات ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ تا انتهای «کار در کلاس» صفحه ۱۲).

انجام فعالیت صفحه ۱۳ به عنوان تمرین از دانش‌آموز خواسته شود.

مطالبی که پیشنهاد می‌شود در جلسه دوم ارائه شود :

شروع با انجام فعالیت پایین صفحه ۱۳ کتاب درسی، تعریف زاویه محاطی و اثبات اندازه آن در سال‌های مختلف به همراه حل چند نمونه مثال، تعریف زاویه ظلی به همراه پیدا کردن اندازه آن و حل چند نمونه سؤال ارائه شود. (صفحات ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ تا ابتدای فعالیت پایین صفحه ۱۵).

پیشنهاد می‌شود در جلسه سوم این مطالب بیان شود : زوایای بین دو وتر متقاطع در داخل دایره، زاویه بین دو قاطع بر دایره در خارج آن، رابطه طولی بین وترهای در داخل و خارج دایره (صفحات ۱۵ و ۱۶ و ۱۸) تمرینات صفحه ۱۶ و ۱۷ برای حل در منزل پیشنهاد می‌شود.

در جلسه چهارم، حل تمرین‌های صفحه ۱۶ و ۱۷ و برگزاری آزمون احتمالی پیشنهاد می‌شود.

روش تدریس درس اوّل

می‌توان با استفاده از مفهوم مکان هندسی، وارد مبحث دایره شد؛ یعنی یک نقطه روی تخته رسم می‌کنیم و آن را O می‌نامیم. به کمک خط‌کش، یک نقطه فرضی به فاصله ۱۰cm از O رسم می‌کنیم. سپس نقطه دیگری پیدا می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا چند نقطه به‌دست آید. آن‌گاه دانش‌آموزان خواهند گفت که این نقاط دایره هستند. سپس دایره را تعریف می‌کنیم و نوع نمایش را، مطابق با رسم‌الخط کتاب، بیان می‌کنیم. (لازم به ذکر است که نیازی به ارائه تعریف دایره به‌عنوان مکان هندسی نیست. چون که جزء اهداف کتاب نمی‌باشد).

سپس وارد مباحث وضعیت نقطه نسبت به دایره می‌شویم؛ یعنی چند نقطه روی تخته رسم می‌کنیم و وضعیت آن را نسبت به مرکز دایره مقایسه می‌کنیم. در اینجا بد نیست به تقسیم نقاط صفحه به سه مجموعه اشاره شود و بعد وضعیت نقطه و دایره بیان شود. جای خالی صفحه ۱۰ کتاب را کامل می‌کنیم. حال وارد مبحث وضعیت خط و دایره می‌شویم. قبل از شروع این مبحث، بهتر است ابتدا به «یادآوری» پایین صفحه ۱۰ اشاره و فاصله نقطه تا خط بیان شود و نشان داده شود این اندازه از هر فاصله دیگر نقطه تا خط کوتاه‌تر است. آن‌گاه به وضعیت خط و دایره اشاره و تعاریف بیان شود. سپس جای خالی صفحه ۱۱ را به‌صورت زیر کامل می‌کنیم.

الف) ۲ ب) یک خط بر دایره مماس است. پ) نقطه مشترک ندارند.

فعالیت صفحه ۱۱ انجام می‌شود.

این فعالیت دو هدف دارد :

۱ درک اینکه خط مماس بر دایره، بر شعاع دایره در نقطه تماس، عمود است.

۲ آشنایی با نحوه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی آن.

دقت شود که این ۲ موضوع بعد از حل فعالیت توسط دانش‌آموزان بیان شود.

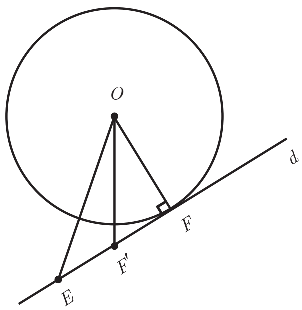
انجام فعالیت صفحه ۱۱ کتاب :

الف) نقطه F نزدیک‌ترین نقطه روی خط نسبت به O است؛ زیرا F تنها نقطه روی خط d است که روی دایره قرار دارد و بقیه نقاط خط d خارج دایره هستند. می‌دانیم که نقاط روی دایره با شعاع دایره برابرند، ولی نقاط خارج دایره، از شعاع بیشترند.

ب) نقطه F نزدیک‌ترین نقطه روی خط نسبت به O است؛ زیرا به خلف فرض می‌کنیم که خط عمود در نقطه دیگری مانند F' خط D را قطع کند. آن‌گاه نقطه‌ای مانند E را روی خط d در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که $FF'=F'E$ در دو مثلث $O\overset{\Delta}{F}F'$ و $O\overset{\Delta}{F}E$ داریم :

$$O\overset{\Delta}{F}F' \cong O\overset{\Delta}{F'}E \begin{cases} OF' = OF' \\ F'_1 = F'_2 = ۹۰ \\ EF' = FF' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض زض}} OF = OE = r$$

یعنی نقطه E نیز روی دایره قرار دارد که این با خط مماس d بر دایره C در تناقض است.



پ) **نتیجه** : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F بر هم عمودند.

قسمت پ «فعالیت» طریقه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی آن است. بهتر است این ترسیم مهم جلوه داده شود.

طریقه رسم خط مماس از نقطه F روی دایره

نقطه F روی دایره را در نظر می‌گیریم. از نقطه F به مرکز دایره O وصل می‌کنیم. سپس از نقطه F روی خط OF بر آن عمود می‌کنیم. این خط بر دایره مماس است.

مفاهیم کلی مانند شعاع، وتر، قطر، کمان و زوایای مرکزی، به همراه رسم شکل، تعریف شود. زاویه مرکزی را تعریف و اندازه زاویه مرکزی و کمان روبه‌رو را بیان کنیم. سپس به دنبال پیدا کردن طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی باشیم. حل «کار در کلاس» صفحه ۱۲ به دنبال این موضوع است که دانش‌آموز، با حل آن، اندازه کمان و طول کمان روبه‌رو به یک زاویه مرکزی را یاد می‌گیرد. سپس به کمک آنها محیط و مساحت قطاع بیان می‌شود.

حل «کار در کلاس» صفحه ۱۲ :

۱ در مورد رابطه نوشته شده توضیح داده می‌شود که چگونه به‌دست آمده است.

۲ $$\text{طول } \widehat{AB} = \frac{۶۰}{۳۶۰} \times ۲\pi . OA = \frac{\pi}{۳} \times OA \qquad \widehat{AB} = ۶۰^\circ$$

$$\text{طول } \widehat{A_۱B_۱} = \frac{۶۰}{۳۶۰} \times ۲\pi . OA_۱ = \frac{\pi}{۳} \times OA_۱ \qquad \widehat{A_۱B_۱} = ۶۰^\circ$$

۳ $$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{۳۶۰} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{L}{۲\pi R} \Rightarrow L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$$

می‌دانیم یک درجه برابر $\frac{۱}{۳۶۰}$ دایره است. پس مساحت زاویه مرکزی ۱° برابر $\frac{۱}{۳۶۰}$ مساحت دایره است؛ یعنی مساحت قطاع به اندازه زاویه α درجه برابر α برابر مساحت قطاع یک درجه است.

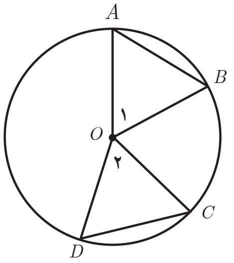
$$S = \alpha \times \frac{۱}{۳۶۰} \times \pi R^۲ = \frac{\pi R^۲}{۳۶۰}\alpha$$

«فعالیت» صفحه ۱۳ چند هدف دارد : در شماره ۱ و ۲ می‌خواهیم بیان کنیم اگر دو وتر مساوی باشند، کمان‌های نظیر آنها برابرند و برعکس. در ۳ و ۴ و ۵ می‌خواهیم بیان کنیم قطر عمود بر وتر، وتر و کمان روبه‌رو به وتر را نصف می‌کند و برعکس. از این هدف نتیجه می‌توان گرفت که عمودمنصف هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد.

فعالیت صفحه ۱۳

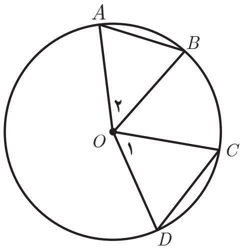
۱ زاویه‌های $O_۱$ و $O_۲$ زوایای مرکزی هستند. اندازه هر زاویه مرکزی با کمان روبه‌رو برابر است.

$$\hat{O}_۱ = \widehat{AB}$$
$$\hat{O}_۲ = \widehat{DC} \qquad \widehat{AB} = \widehat{DC} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$



دو مثلث $O\overset{\Delta}{A}B$ ، $O\overset{\Delta}{D}C$ را در نظر می‌گیریم.

$$O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{D}C \begin{cases} OA=OD=r \\ OB=OC=r \\ \hat{O}_{۱}=\hat{O}_{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} AB=DC$$

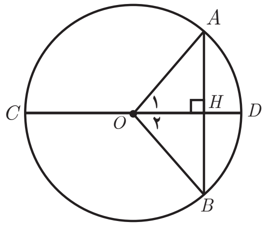


۲ فرض $AB=CD$ حکم $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

$$O\overset{\Delta}{A}B \cong O\overset{\Delta}{C}D \begin{cases} OA=OC=r \\ OB=OD=r \\ AB=CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \hat{O}_{۱}=\hat{O}_{۲}$$

$O_{۱}$ و $O_{۲}$ زوایای مرکزی‌اند. $O_{۲}=\overset{\frown}{AB}$ و $O_{۱}=\overset{\frown}{CD}$ در نتیجه

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$



۳ $O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{H}B \begin{cases} OA=OB \\ OH=OH \end{cases}$

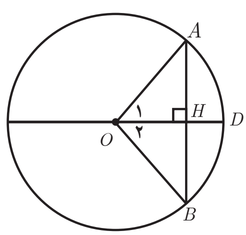
دو مثلث $O\overset{\Delta}{A}H$ و $O\overset{\Delta}{H}B$ بنا به برابری وتر و یک ضلع قائمه، همنهشت هستند.

در نتیجه $AH=HB$ و $\hat{O}_{۱}=\hat{O}_{۲}$ و $O_{۱}$ و $O_{۲}$ زوایای مرکزی هستند.

$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$

۴ O را به A و B وصل می‌کنیم.

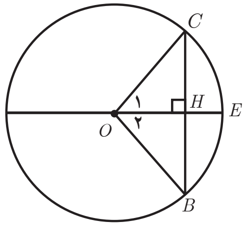
$$O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{H}B \begin{cases} OA=OB \\ OH=OH \\ AH=HB \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \left.\begin{matrix} O_{۱}=O_{۲} \\ O_{۱}=\overset{\frown}{AD} \\ O_{۲}=\overset{\frown}{DB} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$$



و از طرفی $\hat{H}_{۱}=\hat{H}_{۲}$ و $\hat{H}_{۱}+\hat{H}_{۲}=۱۸۰$ در نتیجه $\hat{H}_{۱}=\hat{H}_{۲}=۹۰$

۵ E وسط کمان $\overset{\frown}{CB}$ است؛ یعنی $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{EB}$

$O_۱$ و $O_۲$ زوایای مرکزی هستند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱=\overset{\frown}{CE}\\ \hat{O}_۲=\overset{\frown}{EB}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$$

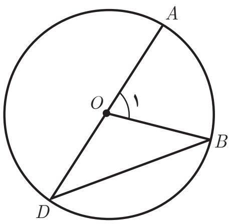
$$O\overset{\Delta}{C}H\cong O\overset{\Delta}{H}B\begin{cases}OC=OB\\ O_۱=O_۲\\ OH=OH\end{cases}\longrightarrow \begin{array}{l}CH=BH\\ H_۱=H_۲\end{array}$$

از طرفی $H_۱+H_۲=۱۸۰\rightarrow H_۱=H_۲=۹۰$

۶ با توجه به فعالیت شماره ۴ و ۵ کافی است وسط کمان را به وسط وتر وصل کنیم و ادامه دهیم تا دایره را قطع کند. این پاره‌خط قطر دایره و عمود بر وتر است.

موضوع «فعالیت» پایین صفحه ۱۳ اندازه زاویه محاطی است. ابتدا زاویه محاطی را تعریف و یک زاویه محاطی رسم کنید. سپس قضیه را ثابت کنید. سه حالت برای قضیه در نظر گرفته شده است.

فعالیت صفحه ۱۳

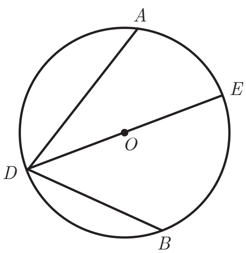


۱ B را به O وصل می‌کنیم. مثلث OBD متساوی‌الساقین است.

$OB=OD\rightarrow \hat{D}=\hat{B}$ و $O_۱$ زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین است.

$$\hat{O}_۱=\hat{D}+\hat{B}=۲\hat{D}\Rightarrow \hat{D}=\frac{\hat{O}_۱}{۲}$$

از طرفی $\hat{O}_۱=\overset{\frown}{AB}$ در نتیجه $\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$



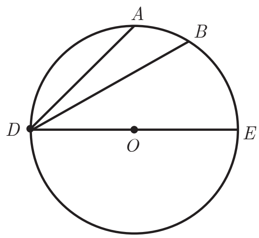
۲ در حالت دوم فرض می‌کنیم O بین اضلاع زاویه محاطی واقع باشد.

D را به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا کمان روبه‌رو را در E قطع کند.

$$A\hat{D}E=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲} \text{ و } E\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{EB}}{۲}$$

$$A\hat{D}B=A\hat{D}E+E\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{EB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۳ در این حالت، مرکز دایره خارج زاویه مرکزی قرار دارد.
از نقطه D به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. آن‌گاه بنا به قسمت الف داریم :



$$A\hat{D}E=\frac{\overset{\frown}{ABE}}{۲} \text{ و } B\hat{D}E=\frac{\overset{\frown}{BE}}{۲}$$

$$A\hat{D}B=A\hat{D}E-B\hat{D}E=\frac{\overset{\frown}{ABE}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{BE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{ABE}-\overset{\frown}{BE}}{۲}$$

$$A\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

در اینجا بهتر است از چند مثال برای یافتن اندازه زاویه محاطی استفاده شود. چند نمونه مثال در ادامه در قسمت مثال‌های فصل اول درس ۱ ارائه شده است.

در انتها، به‌صورت یک قضیه، اندازه زاویه محاطی را بیان می‌کنیم (قضیه صفحه ۱۴). حال، زاویه ظلی را تعریف و چند زاویه ظلی رسم می‌کنیم. به کمک حل فعالیت صفحه ۱۴ اندازه زاویه ظلی به‌دست می‌آید. بعد از حل فعالیت این صفحه، قضیه صفحه ۱۵، که نتیجه فعالیت است، بیان می‌شود. هدف این فعالیت پیدا کردن اندازه ظلی در دایره است.

حل فعالیت صفحه ۱۴ :

الف) $D\hat{A}C=۹۰^\circ$ و بنابراین $D\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ABD}$

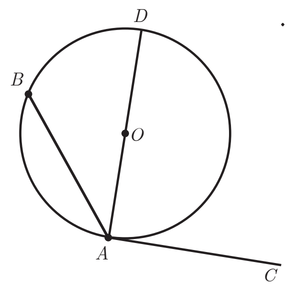
ب) زاویه DAB یک زاویه محاطی است؛ بنابراین : $D\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB}$

پ) از (الف) و (ب) داریم : $D\hat{A}C-D\hat{A}B=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DBA}-\overset{\frown}{DB})$

$$B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$

ت) فرض می‌کنیم زاویه $B\hat{A}C$ منفرجه باشد. نقطه A را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند.

$$D\hat{A}C=۹۰^\circ \rightarrow D\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DA}$$



زاویه DAB یک زاویه محاطی است $D\hat{A}B=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}$

$$B\hat{A}C=B\hat{A}D+D\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}+\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DA}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BDA}$$

در این قسمت چند مثال بیان کنید تا دانش‌آموزان اندازه زاویه ظلی را یاد بگیرند.

«کار در کلاس» صفحه ۱۵ حل شود. هدف، بیان نتیجه‌ای است که در ادامه آن بیان شده است. از این کار در کلاس برای اثبات فعالیت بعدی کمک گرفته می‌شود؛ بنابراین، بدون انجام دادن کار در کلاس، وارد فعالیت نشوید.

حل کار در کلاس صفحه ۱۵ :

۱ **الف)** زوایای $B\hat{A}D$ و $A\hat{D}C$ با هم برابرند؛ زیرا :

$$AB \parallel CD \text{ و } AD_{\text{مورب}} \Rightarrow B\hat{A}D=A\hat{D}C$$

ب) کمان‌های $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{AC}$ برابرند زیرا زوایای $B\hat{A}D$ و $A\hat{D}C$ محاطی هستند؛ پس،

$$B\hat{A}D=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}$$

$$A\hat{D}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

۲ **الف)** وترهای EF و GH رسم می‌شود و پاره‌خط EH را رسم می‌کنیم.

ب) زوایای FEH و EHG برابرند؛ زیرا :

$$\left.\begin{array}{l} F\hat{E}H=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FH} \\ E\hat{H}G=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{EG} \end{array}\right\} \Rightarrow F\hat{E}H=E\hat{H}G$$

بنا به عکس قضیه خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌شود وتر EF موازی GH است.

می‌خواهیم زوایای بین دو وتر متقاطع در داخل یا امتداد آنها در خارج دایره را پیدا کنیم. با حل فعالیت پایین صفحه ۱۵ و ۱۶ این مقدار به‌دست می‌آید.

هدف این فعالیت؛ پیدا کردن زاویه بین امتداد دو وتر متقاطع در خارج دایره و زاویه بین دو وتر متقاطع در داخل دایره است.

حل فعالیت صفحه ۱۵ :

۱ $AD \| CF$ و AE مورب $\Rightarrow D\hat{A}E = F\hat{C}E$

زاویه FCE یک زاویه محاطی است.

$F\hat{C}E = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}$

۲ $BF \| AD$ و BE مورب $\Rightarrow F\hat{B}E = D\hat{A}E$

زاویه $F\hat{B}E$ یک زاویه محاطی است. $F\hat{B}E = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}$

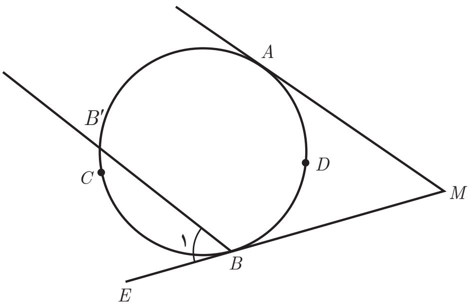
حل تمرین صفحه ۱۶ :

۱ **الف) راه اول** : از نقطه B موازی MA رسم می‌کنیم. $MA \| BB'$ و MB \ $\rightarrow \hat{M} = \hat{B}_۱$

$MA \| BB'$ پس $\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{ADB}$

زاویه $B_۱$ یک زاویه ظلی است و اندازه آن برابر است با $\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BB'}}{۲}$

$$\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$$

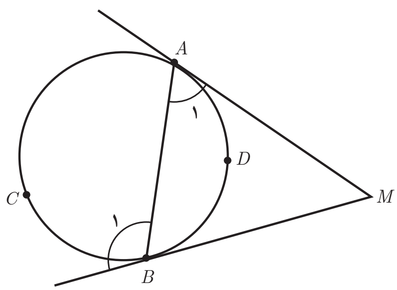


راه دوم : $\hat{B}_۱$ زاویه خارجی مثلث AMB است.

$$\hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{M} \rightarrow \hat{M} = \hat{B}_۱ - \hat{A}_۱$$

$\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲}$ زاویه ظلی و $\hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲}$ زاویه ظلی

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{ADB}}{۲}$$



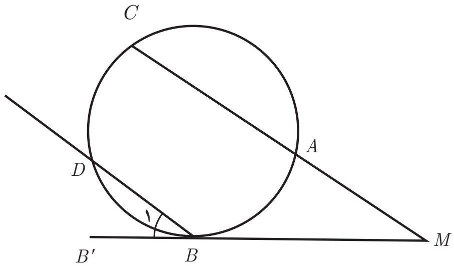
۱۲

ب) راه اول : از B خطی موازی AC رسم می‌کنیم. $MC\|BD$ و $MB' \backslash \to \hat{M}=\hat{B}_۱$

$B_۱=\dfrac{\overset{\frown}{DB}}{۲}$ زاویه ظلی است.

از طرفی وتر BD موازی AC است؛ بنابراین $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

$$\hat{M}=\hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{DB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CDB}-\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CDB}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

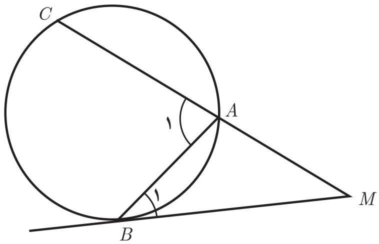


راه دوم : از A به B وصل می‌کنیم. $\hat{A}_۱$ زاویه خارجی مثلث MAB است.

$$\hat{A}_۱=\hat{B}_۱+\hat{M}\Rightarrow\hat{M}=\hat{A}_۱-\hat{B}_۱$$

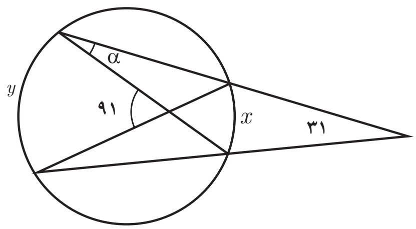
$\hat{B}_۱=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ زاویه ظلی و $\hat{A}_۱=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$ زاویه محاطی

بنابراین داریم $M=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}-\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$



۲

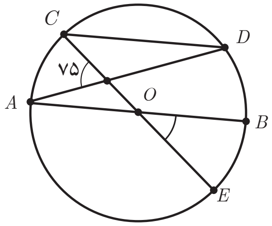
$$۳۱=\frac{y-x}{۲}\to y-x=۶۲$$
$$۹۱=\frac{y+x}{۲}\to y+x=۱۸۲$$
$$x=۶۰\ ,\ y=۱۲۲$$
$$\alpha=\frac{x}{۲}=۳۰$$



۳ $\widehat{MN}=x\ ,\ \hat{C}=\frac{\widehat{MQN}-\widehat{MN}}{۲}=\frac{(۳۶۰-x)-x}{۲}=۷۰\Rightarrow x=۱۱۰$

$\widehat{QP}=y\ ,\ \hat{B}=\frac{\widehat{QMP}-\widehat{QP}}{۲}=\frac{(۳۶۰-y)-y}{۲}=۸۰\Rightarrow y=۱۰۰$

$\hat{A}=\frac{\widehat{QM}-\widehat{PN}}{۲}=\frac{۳۶۰-(x+y)}{۲}=\frac{۳۶۰-(۱۱۰+۱۰۰)}{۲}=۷۵$



۴ شعاع CO را ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.

$CD \parallel AB \rightarrow \widehat{CA}=\widehat{DB}$

$CD \parallel AB\ ,\ \underbrace{CE}_{\text{مورب}} \rightarrow \hat{C}=\hat{O}$

زاویه O یک زاویه مرکزی است و اندازه آن چنین است : $\hat{O}=\widehat{BE}$. C یک زاویه محاطی است و اندازه آن چنین است : $\hat{C}=\frac{\widehat{DE}}{۲}$؛ بنابراین $\frac{\widehat{DE}}{۲}=\widehat{BE}$. بنابراین $\widehat{CA}=\widehat{DB}=\widehat{BE}$

$۷۵=\frac{\widehat{CA}+\widehat{DE}}{۲}=\frac{۳\widehat{CA}}{۲}\Rightarrow \widehat{CA}=۵۰$ و $\widehat{DB}=۵۰$ و $\widehat{CD}=۱۸۰-۱۰۰=۸۰$

۵ AB قطر دایره است؛ بنابراین① $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$. از طرفی $AC \| BD$. پس وترهای محصور به این دو وتر موازی، مساوی هستند؛ یعنی : $\widehat{AD}=\widehat{CB}$ ②

طرفین رابطه ۱ را از طرفین رابطه ۲ کم می‌کنیم.

$\widehat{ACB}-\widehat{CB}=\widehat{ADB}-\widehat{AD}\Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{DB}$

اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر به آن دو کمان برابرند؛ یعنی : $AC=DB$.

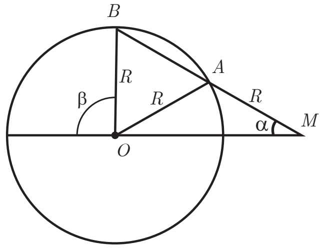
۶ مثلث AMO و ABO متساوی‌الساقین هستند.

$OA=AM=R\rightarrow A\hat{O}M=\alpha$

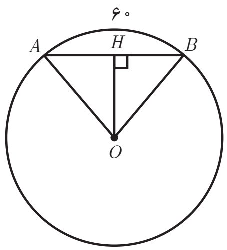
از طرفی $B\hat{A}O$ زاویه خارجی مثلث AOM است؛ پس $B\hat{A}O=A\hat{O}M+\alpha=۲\alpha$

مثلث ABO متساوی‌الساقین است. $BO=AO$ در نتیجه $M\hat{B}O=B\hat{A}O=۲\alpha$

زاویه β زاویه خارجی مثلث BMO است؛ پس $\beta = A\hat{B}O + \hat{\alpha} = ۳\alpha$



۷ راه اول: در مثلث متساوی‌الساقین $A\overset{\Delta}{B}O$ ، ارتفاع OH نیمساز و میانه است.



$$\hat{O} = \widehat{AB} = ۶۰$$
$$\hat{O}_۱ = \frac{۱}{۲}\hat{O} = ۳۰$$

$$O\overset{\Delta}{H}B : \tan ۳۰ = \frac{HB}{OH} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۵}{OH} \Rightarrow OH = \frac{۱۵}{\sqrt{۳}} = ۵\sqrt{۳}$$

راه دوم: در مثلث OHB زاویه $\hat{O}_۱ = ۳۰$ پس $HB = \frac{۱}{۲}OB = \frac{۱}{۲}R$ پس $R=۲H=۱۰$

$$OH^۲ = OB^۲ - HB^۲ = ۱۰۰ - ۲۵ = ۷۵$$
$$OH = ۵\sqrt{۳}$$

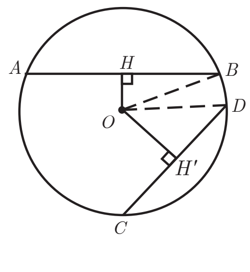
راه سوم: مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. $OA=OB=AB=۱۰$

و OH طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع است که برابر است با $OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱۰$

$$OH = ۵\sqrt{۳}$$

۸ از O بر دو وتر عمود می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

$$HB = \frac{۱}{۲}AB \quad , \quad H'D = \frac{۱}{۲}CD$$
$$AB > CD \to \frac{۱}{۲}AB > \frac{۱}{۲}CD \to HB > H'D$$
$$\Leftrightarrow HB^۲ > H'O^۲ \leftrightarrow HB^۲ - H'O^۲ > ۰ \ : ①$$



در مثلث‌های قائم‌الزاویه OHB و ODH' بنا به رابطه فیثاغورس داریم :

$$\begin{rcases} OH^۲ + HB^۲ = OB^۲ \\ OH'^۲ + H'D^۲ = OD^۲ \end{rcases} \Leftrightarrow OH^۲ + HB^۲ = OH'^۲ + H'D^۲$$

$$\Leftrightarrow HB^۲ - H'D^۲ = OH'^۲ - OH^۲$$

بنا به رابطه ۱ سمت چپ تساوی فوق مثبت است پس سمت راست تساوی هم مثبت است یعنی

$$OH'^۲ - OH^۲ > ۰ \Leftrightarrow OH'^۲ > OH^۲ \Leftrightarrow OH' > OH$$

مسائل تکمیلی درس اول

۱ دایره به مرکز $(۰,۰)$. شعاع $\sqrt{۵}$ مفروض است. نقطه $A(m,m-۱)$ خارج دایره قرار ندارد. محدوده m کدام است؟

$$OA \le r \Rightarrow \sqrt{m^۲ + (m-۱)^۲} \le \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow ۲m^۲ - ۲m - ۴ \le ۰$$

m		-۱		۲	
$۲m^۲-۲m-۴$	+		−		+

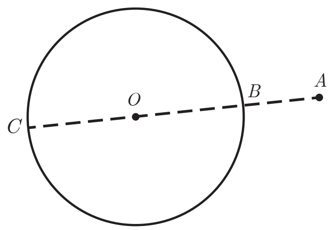
$$m \in [-۱,۲]$$

۲ نزدیک‌ترین فاصله نقطه A به دایره $C(O,R)$ برابر ۲ و دورترین فاصله نقطه A تا دایره برابر ۱۰است. اگر A خارج دایره باشد، شعاع دایره چقدر است؟

از نقطه A بر دایره عمود می‌کنیم؛ یعنی از A به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. AC بر دایره عمود است؛ زیرا بر خط مماس در نقاط A و C عموداند. کمترین فاصله A تا دایره AB و بیشترین فاصله A تا دایره AC است.

$$\begin{rcases} AB = OA - OB = ۲ \\ AC = OA + OB = ۱۰ \end{rcases} \Rightarrow ۲OA = ۱۲ \Rightarrow OA = ۶$$

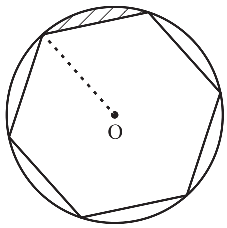
$$۶ - OB = ۲ \Rightarrow OB = ۴$$



۳ در شکل زیر مساحت قسمت هاشور زده را به‌دست آورید. (شعاع دایره ۴ است و شش‌ضلعی منتظم است)

اگر وترها در دایره برابر باشند، کمان‌های نظیر برابرند. شش‌ضلعی منتظم است؛ پس کمان‌های نظیر ضلع‌های شش‌ضلعی برابرند؛ یعنی : $6x = 360^\circ \longrightarrow x = 60^\circ$

از طرفی O زاویه مرکزی است.



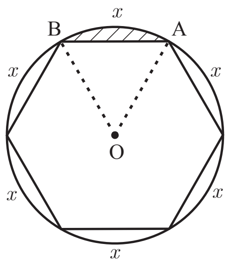
مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است.

$$S_{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(16) = \sqrt{3}$$

از طرفی مساحت قطاع AOB برابر است با

$$\frac{\pi(4)^2(60)}{360} = \frac{8\pi}{3}$$

S هاشور = S قطاع − S مثلث $= \frac{8\pi}{3} - \sqrt{3}$



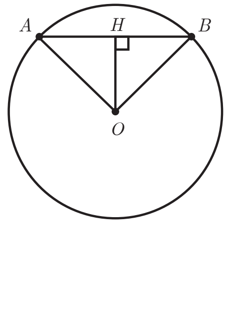
۴ طول وتر AB در دایره $C(O,R)$ برابر ۱۰ سانتی‌متر است. اگر فاصله وتر AB تا مرکز دایره برابر $5\sqrt{3}$ باشد. طول کمان AB را به‌دست آورید.

مثلث OAB متساوی‌الساقین است و OH نیمساز و میانه است از طرفی قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

$$OH^2 + HB^2 = OB^2 \Rightarrow (5\sqrt{3})^2 + (5)^2 = OB^2 \Rightarrow OB = 10$$

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و $\hat{O} = 60^\circ$، حال طول کمان AB برابر است با

$$AB \text{ طول کمان} = \frac{\pi(10)}{180} \times 60 = \frac{\pi}{3}$$



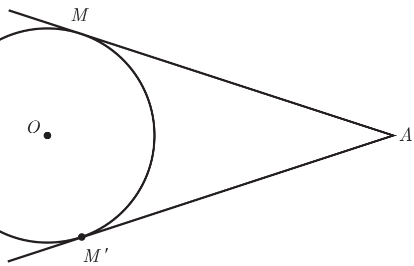
۵ در شکل زیر $\hat{A}=۶۰^\circ$ است و شعاع دایره برابر ۴ سانتی‌متر است. طول کمان MM' و مساحت قطاع OMM' را به‌دست آورید.

از O به M و M' وصل می‌کنیم و $\hat{M}=\hat{M}'=۹۰^\circ$

پس $M\hat{O}M'=۱۲۰$ بنابراین، مساحت قطاع MOM' برابر است با :

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{\pi(۴)^۲\times ۱۲۰}{۳۶۰}=\frac{۱۶\pi}{۳}$$

و طول کمان MM' برابر است با $\frac{\pi(۴)}{۱۸۰}\times ۱۲۰=\frac{۸\pi}{۳}$



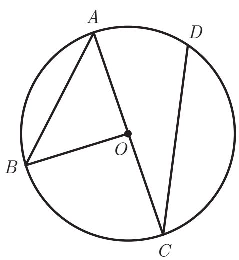
۶ در شکل زیر $\overset{\frown}{AB}=۱۰۰$ و $\overset{\frown}{DC}=۱۵۰$ ، اندازه $\hat{C}$ و $\hat{A}$ و $B\hat{O}C$ را بیابید.

AC قطر دایره است. $\overset{\frown}{BC}=۱۸۰-۱۰۰=۸۰^\circ$ ، زاویه A محاطی است.

$$\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}=۴۰^\circ$$
$$\overset{\frown}{AD}=۱۸۰-\overset{\frown}{DC}=۳۰$$

$\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}=۱۵$ زاویه محاطی است.

زاویه BOC مرکزی است و اندازه آن برابر است با $\overset{\frown}{BC}=۸۰$



۷ در شکل صفحه بعد $B\hat{A}C=\alpha-۱۰$ و $B\hat{O}C=\alpha+۱۵$ است. مقدار α و $B\hat{A}C$ و $B\hat{O}C$ را بیابید.

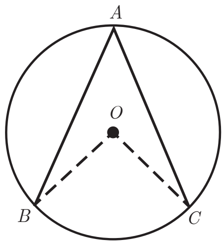
زاویه BAC یک زاویه محاطی است و اندازه آن $B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$

و زاویه O یک زاویه مرکزی است

$$B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود که :

$$B\hat{O}C = ۲B\hat{A}C$$



$$\alpha+۱۵=۲(\alpha-۱۰) \Rightarrow \alpha=۲۵$$

$$B\hat{O}C = ۴۰ \quad , \quad B\hat{A}C = ۱۵$$

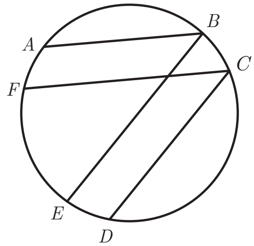
۸ در شکل زیر $AB \| FC$ و $CD \| BE$ و $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $\overset{\frown}{CD} = ۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۱۱۰^\circ$ ، آن‌گاه زاویه $F\hat{C}D$ چند درجه است.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel FC \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} \\ BE \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{BC} \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED} = x$$

$$۳x + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF} = ۳۶۰ \rightarrow ۳x + ۶۰ + ۴۰ + ۱۱۰ = ۳۶۰$$

$$x = ۵۰$$

$$F\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{FD}}{۲} = \frac{۵۰+۱۱۰}{۲} = ۸۰$$



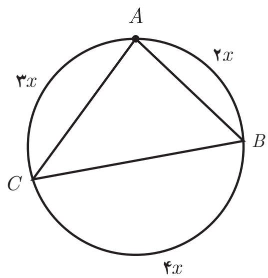
۹ در شکل زیر اندازه x و اندازه زوایای A و B و C را به‌دست آورید.

$$۲x + ۳x + ۴x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۲۰$$

$$\hat{A} = \frac{۱}{۲}(۴x) = ۴۰$$

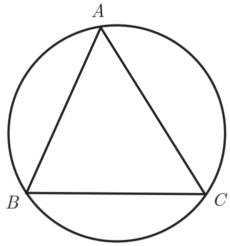
$$\hat{B} = \frac{۱}{۲}(۳x) = ۳۰$$

$$\hat{C} = \frac{۱}{۲}(۲x) = ۲۰$$



۱۰ با استفاده از زوایای محاطی ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر مثلث °۱۸۰ درجه است.
دایره‌ای رسم می‌کنیم که از سه رأس مثلث بگذرد. زوایای A و B و C محاطی هستند آن‌گاه

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}\\ \hat{B}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}\\ \hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}\end{array}\right\}\xrightarrow{+}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC})=۱۸۰^\circ$$



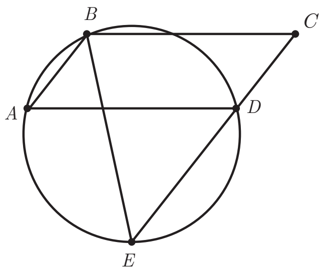
۱۱ در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. ثابت کنید مثلث BCE متساوی‌الساقین است.

چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. $\hat{A}=\hat{C}$ ①

از طرفی E و A زوایای محاطی هستند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}\\ \hat{E}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{E} \text{ ②}$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود $\hat{E}=\hat{C}$ ، مثلث BEC متساوی‌الساقین است.



۱۲ در شکل زیر اندازه x را به‌دست آورید.

زاویه O یک زاویه مرکزی است.

$\hat{O}=\overset{\frown}{BC}=۸۰^\circ$

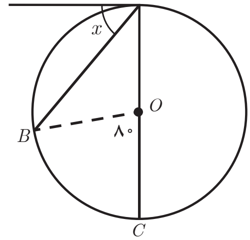
زاویه محاطی $B\hat{A}C=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}=۴۰$

زاویه EAB یک زاویه ظلی است.

$E\hat{A}B=x=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$

$\overset{\frown}{AB}=۱۸۰-\overset{\frown}{BC}=۱۰۰$

$E\hat{A}B=x=\frac{۱}{۲}(۱۰۰)=۵۰$



۱۳ اگر در شکل زیر اندازه زاویه ظلی $A\hat{T}x$ برابر ۱۰−۳α و اندازه کمان $\overset{\frown}{AT}$ برابر ۱۲۰+α باشد، α و β زاویه ATx را بیابید.

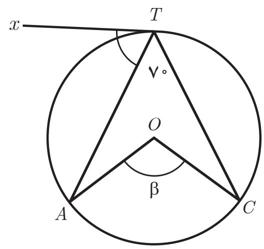
$$A\hat{T}C = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۱۴۰$$

$$\hat{\beta} = \overset{\frown}{BC} = ۱۴۰$$

$$A\hat{T}x = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AT} \Rightarrow ۳\alpha - ۱۰ = \frac{۱}{۲}(\alpha + ۱۲۰)$$

$$\alpha = \frac{۱۴۰}{۵} = ۲۸$$

$$A\hat{T}x = ۳(۲۸) - ۱۰ = ۷۴$$

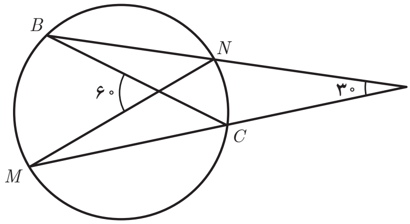


۱۴ در شکل زیر اندازه $\overset{\frown}{BM}$ و $\overset{\frown}{NC}$ را بیابید.

$$۶۰ = \frac{\overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{NC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{NC} = ۱۲۰$$

$$۳۰ = \frac{\overset{\frown}{BM} - \overset{\frown}{NC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BM} - \overset{\frown}{NC} = ۶۰$$

از حل دستگاه $\overset{\frown}{BM} = ۹۰$ و $\overset{\frown}{NC} = ۳۰$ به‌دست می‌آید.



۱۵ در شکل صفحه بعد اندازه $\overset{\frown}{DC}$ و $\overset{\frown}{BE}$ را بیابید.

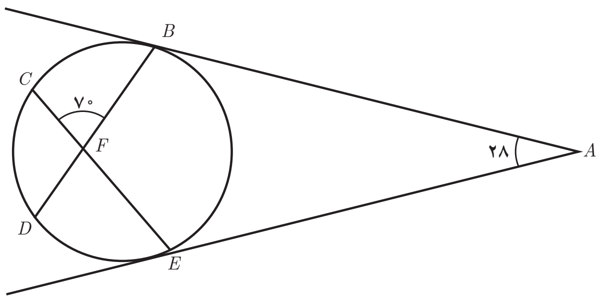
$$۷۰ = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE} = ۱۴۰$$

$$۲۸ = \frac{(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{CD}) - (\overset{\frown}{BE})}{۲} = \frac{۱۴۰ + \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BE}}{۲}$$

$$\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BE} = -۸۴$$

$$\frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BE}}{۲}=۱۱۰ \Rightarrow \overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BE}=۲۲۰$$

$$\overset{\frown}{CD}=۱۵۲ \quad , \quad \overset{\frown}{BE}=۶۸$$



۱۶ در شکل زیر M وسط کمان EF است. نشان دهید $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$

نقطه M وسط $\overset{\frown}{EF}$ است. $\overset{\frown}{EM}=\overset{\frown}{MF}$

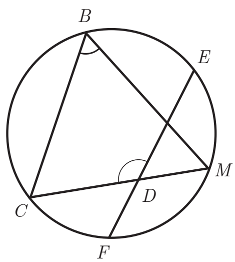
دو وتر FE و CM در داخل دایره متقاطع هستند.

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{CBE}+\overset{\frown}{FM}}{۲} \quad ①$$

زاویه محاطی $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CM}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{FM}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{EM}}{۲} \quad ②$

روابط ۱ و ۲ را با هم جمع می‌کنیم.

$$\hat{D}+\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CBE}+\overset{\frown}{FM}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{EM}}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰$$

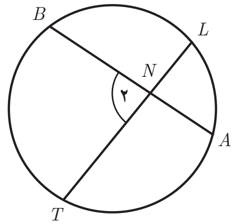


۱۷ در شکل زیر مقدار x و اندازه زاویه $N_۱$ را به‌دست آورید.

$$\widehat{AL}=۱۰x-۱۰ \quad , \quad \widehat{BT}=۹x+۱۷ \quad , \quad \hat{N}_۲=۶x+۲۸$$

$$\hat{N}_۲=\frac{\widehat{BT}+\widehat{AL}}{۲}\Rightarrow ۶x+۲۸=\frac{(۱۰x-۱۰)+(۹x+۱۷)}{۲}$$

$$x=۷\Rightarrow N=۷۰$$



۱۸ در شکل زیر؛ الف) اگر $\hat{M}=۴۵$ و $\hat{C}=۱۲۰$ باشد کمان a و b را بیابید.

$$۱۲۰+a+b=۳۶۰\Rightarrow a+b=۲۴۰$$

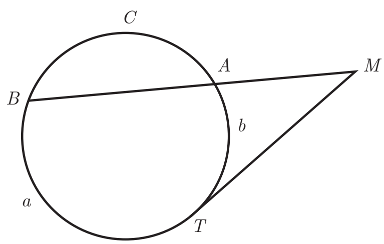
$$\frac{a-b}{۲}=\hat{M}\Rightarrow a-b=۲(\hat{M})=۴۵$$

$$\overline{a=۱۴۲/۵\ ,\ \ b=۹۷/۵}$$

ب)اگر $\frac{c}{۵}=\frac{b}{۴}=\frac{a}{۶}$ اندازه زاویه M را بیابید.

$$\begin{aligned} &a=۶x\\ &b=۴x \quad \Rightarrow a+b+c=۱۵x=۳۶۰\Rightarrow x=۲۴\Rightarrow \begin{array}{l} a=۱۴۴\\ b=۹۶\end{array}\\ &c=۵x\end{aligned}$$

$$\hat{M}=\frac{a-b}{۲}=\frac{۱۴۴-۹۶}{۲}=۲۴$$



درس دوم

رابطه طولی در دایره

اهداف درس

۱ پیدا کردن طول پاره‌خط‌هایی که در دایره ایجاد می‌شود و پاره‌خط‌هایی که دو وتر متقاطع در دایره می‌سازند یا دو قاطع بر دایره ایجاد می‌کنند؛

۲ رسم خط مماس بر یک دایره از نقطه‌ای خارج دایره بر آن؛

۳ بیان وضعیت دو دایره نسبت به هم و پیدا کردن تعداد مماس‌های مشترک آنها؛

۴ رسم مماس مشترک خارجی و داخلی بر دو دایره؛

۵ حل مسائل کاربردی به کمک روابط طولی در دایره.

تعداد و مباحث جلسات درس دوم :

جلسه اول : ادامه رابطه طولی در دایره، قضایای صفحه ۱۸، رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره، فعالیت «کار در کلاس» صفحه ۲۰ و وضعیت دو دایره نسبت به هم صفحه ۲۰.

جلسه دوم : مماس مشترک‌ها و رسم مماس مشترک داخلی و خارج دو دایره و حل تمرین صفحه ۲۳.

روش تدریس درس دوم

جلسه اول :

در این درس به رابطه بین اندازه پاره‌خط‌های حاصل از دو وتر متقاطع در دایره یا امتداد آن دو در خارج دایره یا پاره‌خط‌هایی که به واسطه یک خط مماس و قاطع از یک نقطه خارج دایره رسم می‌شود می‌پردازیم. هدف این درس، پیدا کردن طول این پاره‌خط‌ها به کمک رابطه بین پاره‌خط‌ها است.

در تدریس این درس بهتر است به تشابه دو مثلث در حالت دو زاویه اشاره، و سپس شکلی رسم شود که دو وتر متقاطع باشد و طول سه پاره‌خط معلوم باشد امّا طول پاره‌خط چهارم مشخص نباشد. از دانش‌آموز سؤال می‌کنیم چگونه می‌توان طول این قسمت مجهول را پیدا کرد. با این مثال، وارد بحث می‌شویم و قضیه صفحه ۱۸ را بیان می‌کنیم. با حل فعالیت صفحه ۱۸، قضیه ثابت می‌شود و دانش‌آموزان یاد می‌گیرند چگونه طول پاره‌خط مجهول را بیابند. به همین ترتیب، ادامه فعالیت به اثبات قضیه دوم (صفحه ۱۹) می‌پردازد. بعد از اثبات آن حتماً به چند مثال اشاره و از دانش‌آموز خواسته شود مثال‌ها را حل کنند. نمونه‌ای از این مثال‌ها در ادامه آمده است.

حل فعالیت صفحه ۱۸

۱ زاویه A و C دو زاویه محاطی هستند.

$$\hat{A}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}\ ,\ \hat{C}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DB}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$$

$$A\overset{\Delta}{B}M \sim C\overset{\Delta}{M}B\begin{cases}\hat{A}=\hat{C}\\ M_1=M_2\end{cases}\xrightarrow{\text{زز}}\frac{AM}{CM}=\frac{DM}{MB}\Rightarrow AM.MB=CM.DM$$

۲ برای این شکل همانند قسمت (۱) عمل می‌کنیم و به همان نتیجه می‌رسیم.

۳ زاویه MTA یک زاویه ظلی است و اندازه آن برابر است با : $M\hat{T}A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$. از طرفی، زاویه TBM یک زاویه محاطی است $T\hat{B}M=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$ در نتیجه : $M\hat{T}A=T\hat{B}M$

$$M\overset{\Delta}{T}A \sim M\overset{\Delta}{T}B\begin{cases}\hat{M}=\hat{M}\\ M\hat{T}A=T\hat{B}M\end{cases}\xrightarrow{\text{زز}}\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{MB}\Rightarrow MA.MB=MT^2$$

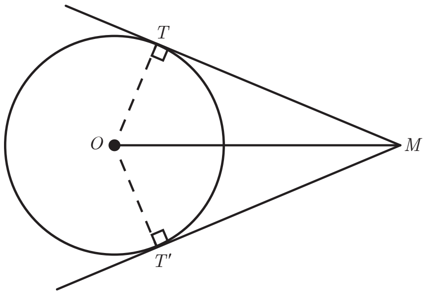
یکی از مباحث مهم دایره، رسم خط مماس از یک نقطه خارج دایره است. برای رسم خط مماس، ابتدا ویژگی خط مماس بیان می‌شود. طریقه رسم خط مماس را بیان می‌کنیم. سعی می‌کنیم به دانش‌آموزان آموزش دهیم به دقت رسم را انجام دهند. سپس به کمک «کار در کلاس» صفحه ۲۰ نشان می‌دهیم طول مماس‌هایی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود، برابر است. «کار در کلاس» را خود دانش‌آموزان حل کنند.

حل کار در کلاس صفحه ۲۰

الف) از O به T و T' وصل می‌کنیم. در مثلث MTO و $MT'O$ ($OM=OM$ و $OT=OT'$) وتر و

یک ضلع قائمهٔ همنهشت هستند از همنهشتی نتیجه می‌شود : $MT=MT'$. همچنین از همنهشتی نتیجه می‌شود :

$.M_1=M_2$



حالت‌های دو دایره را نسبت به هم، به کمک رسم شکل، بیان می‌کنیم و به کمک ریاضی نیز نشان می‌دهیم که دو دایره متخارج در چه حالتی اتفاق می‌افتد. به همین ترتیب برای حالت‌های دیگر، بعد از بیان حالت‌ها، از چند مثال استفاده می‌کنیم.

جلسه دوم : مماس مشترک و رسم مماس مشترک دو دایره

دو دایره و چند خط برد و دایره مماس رسم می‌کنیم. آن‌گاه مماس مشترک را تعریف می‌کنیم. سپس به کمک حل فعالیت صفحه ۲۱ طول مماس مشترک دو دایره متخارج را به‌دست می‌آوریم. سپس طریقه رسم مماس مشترک داخلی و خارجی را بیان می‌کنیم که با حل فعالیت نیز به این هدف می‌رسیم. در این قسمت باید دایره به دقت رسم شود. از دانش‌آموزان به عنوان یک کار عملی، خواسته شود تمام مماس مشترک دو دایره در حالت‌های مختلف را دقیق رسم کند و برای جلسه بعدی به کلاس بیاورد. در این فعالیت، طول مماس مشترک دایره را حساب و آنها را رسم می‌کنیم. کتاب در این قسمت اشاره‌ای به مماس مشترک داخلی و خارجی نکرده است. بهتر است مماس مشترک خارجی و داخلی را برای دانش‌آموزان بیان کنید.

حل فعالیت صفحه ۲۱

۱ الف) OT و OT' شعاع‌های دایره‌ها هستند که هر دو بر خط مماس MT عمودند؛ یعنی : $\hat{T}=\hat{T'}=90$ از طرفی $OT\perp TT'$ و $O'H \| TT'$ بنابه قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود. $\hat{H}_1=90$ در نتیجه زاویه چهارم چهار ضلعی $TT'O'H$ قائمه است؛ بنابراین، چهار ضلعی یک مستطیل است. پس : $OT=O'T'=R'$ و $O'H=TT'$.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه $OO'H$ بنابه رابطه فیثاغورس داریم :

$$OO'^2=OH^2+O'H^2 \quad , \quad O'H=TT' \quad , \quad d=OO' \quad , \quad OH=R-R'$$

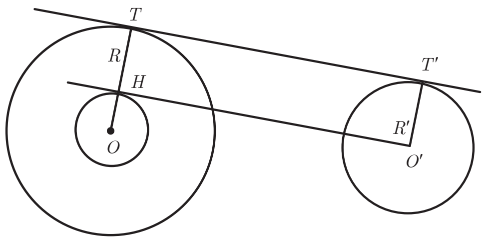
$$d^۲ = OH^۲ + TT'^۲ \Rightarrow TT' = \sqrt{d^۲ - OH^۲} = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲}$$

پ) خط‌های m و n بر هر دو دایره مماس‌اند.

مماس‌های MT و MT'' بر دایره مماس‌اند. بنابه «کار در کلاس» قبل $O'M$ نیمساز زاویه M است. به‌همین دلیل OM نیمساز زاویه M است. از آنجا که زاویه M فقط یک نیمساز دارد، پس OM و $O'M$ بر هم منطبق‌اند؛ یعنی OO' از M می‌گذرد.

ت) خط $O'H$ بر دایره مماس است.

ث) به مرکز O و به شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و آن را C'' می‌نامیم. از نقطه O' بر دایره C'' مماس رسم می‌کنیم و نقطه تماس را H می‌نامیم. O را به H وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا دایره C را در T قطع کند. حال از T خطی به موازات $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه T' بر دایره C' مماس است. TT' مماس مشترک خارجی دو دایره است.



۲ مثلث $OO'H$ قائم‌الزاویه است. و چهار ضلعی $O'H\,TT'$ یک مستطیل است.

$TH=O'T=R \quad , \quad O'H=TT'$

بنابه رابطه فیثاغورس در مثلث داریم:

$$OO'^۲=O'H^۲+OH^۲ \Rightarrow d^۲=TT'^۲+(R+R')^۲$$

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲}$$

۳ اگر دو دایره مماس خارج باشند، آن‌گاه $d=R+R'$ با جایگذاری در رابطه مماس مشترک خارجی دو دایره داریم.

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{(R+R')^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۲RR'}$$

۴ $OB=OA=R$ نقطه O از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است؛ پس روی عمودمنصف AB واقع است. به همین ترتیب $O'A=O'B=R'$ نقطه O' هم روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. هر پاره‌خط فقط یک عمودمنصف دارد. پس OO' روی عمودمنصف AB واقع‌اند.

حل تمرین‌های صفحه ۲۳ :

۱ $\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲}$ با توجه به اینکه طول وتر CD برابر ۹ است، پس : $DM=۳$ و $MC=۶$ و طول $MA=x$ آن‌گاه طول $BM=۱۱-x$ است بنابه رابطه طولی در دایره داریم :

$$DM\,.\,CM=AM\,.\,MB \Rightarrow ۳\times۶=x(۱۱-x) \Rightarrow x^۲-۱۱x-۱۸=۰$$

$$x=۲,۹$$

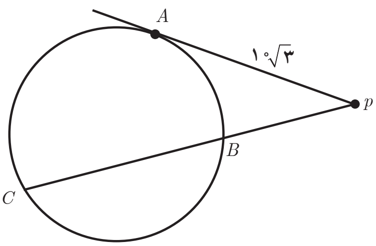
$$\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۹}$$

۲ $PA^۲=PB\,.\,PC$

$$(۱۰\sqrt{۳})^۲=x(x+۲۰) \Rightarrow x^۲+۲۰x-۳۰۰=۰$$

-۳۰ , $x=۱۰$ که $x=-۳۰$ قابل قبول نیست.

$PB=۱۰$, $PC=۱۰+۲۰=۳۰$



۳ شعاع دایره بزرگ را R می‌نامیم. $ON=R-۱۰$, $OM=R-۱۶$

از طرفی قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. $ON=ON'=R-۱۰$ بنابه رابطه طولی در دایره داریم :

$$NO\,.\,ON'=OM\,.\,OB \Rightarrow (R-۱۰)^۲=(R-۱۶)R \Rightarrow R=۲۵$$

شعاع دایره کوچک برابر است با نصف MB یعنی $R'=\frac{۱}{۲}(MB)=\frac{۱}{۲}(R+(R-۱۶))=۱۷$

۴ MT و $MT_۳$ بر یک دایره مماس‌اند $MT=MT_۳$ از طرفی MT و $MT_۴$ بر یک دایره مماس‌اند $MT=MT_۴$.

MT و $MT_۱$ بر یک دایره مماس‌اند پس $MT=MT_۱$ به همین ترتیب $MT=MT_۲$.

۵ $d=۸$, $TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=۳\sqrt{۷} \Rightarrow R-R'=۱$

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۱۵} \Rightarrow R+R'=۷$$

از حل دستگاه داریم :

$R=۴$

$R'=۳$

۶ هر یک قطاع ۱۲۰ درجه است. پس مجموعه سه قطاع ۱۲۰° داریم یعنی یک دایره کامل داریم پس طول نخ برابر محیط یک دایره به‌علاوه ۳ برابر طول AB که ۲ برابر شعاع دایره است.

طول نخ = محیط دایره + $۳AB=۲\pi r+۳(۲r)=۲\pi r+۶r$

مساحت هاشور برابر است با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع منهای مساحت ۳ قطاع

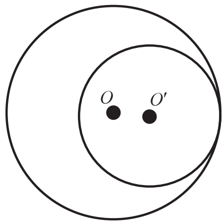
هاشور $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^۲-۳(\frac{\pi(r)^۲\times۶۰}{۳۶۰})=r\sqrt{۳}-\frac{\pi r^۲}{۲}$

۷ $d=۲$، دو دایره مماس درون برابر است : $d=R-R'=۲$ مساحت محصور به دو دایره برابر است.

$$\pi R^۲-\pi R'^۲=۱۶\pi \Rightarrow R^۲-R'^۲=۱۶$$

$$(R-R')(R+R')=۱۶ \Rightarrow R+R'=۸$$

$$\begin{cases}R+R'=۸\\R-R'=۲\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}R=۵\\R'=۳\end{matrix}$$



۸ هاشور $S=$ مساحت مثلث − مساحت قطاع

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲-\frac{\pi(۶۰)(۴)^۲}{۳۶۰}=۴\sqrt{۳}-\frac{۸}{۳}\pi$$

مسائل تکمیلی درس دوم

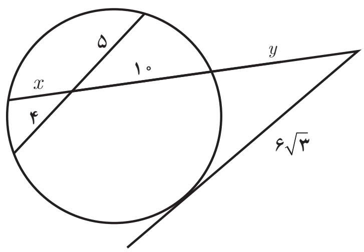
۱ در شکل زیر مقادیر x را بیابید.

الف)

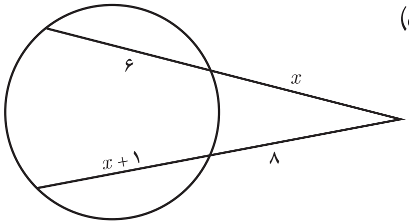
$$x\times۱۰=۵\times۴\Rightarrow x=۲$$

$$(۶\sqrt{۳})^۲=y(y+۱۰+x)=y^۲+۱۲y$$

$$y^۲+۱۲y-۱۰۸=۰\Rightarrow\begin{cases}y=-۱۸ & \text{غ ق ق}\\y=۶\end{cases}$$



ب)

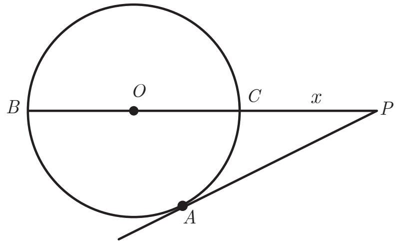


$x(x+۶)=۸(x+۱)$

$x^۲+۶x-۸x-۸=۰$

$x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

۲ از نقطه P مماس PA به طول ۱۲ بر دایره $C(O,R)$ رسم شده است. اگر دورترین فاصله نقطه P با دایره برابر ۱۶ باشد، قطر دایره چقدر است؟



$PA=۱۲$

$PB=۱۶$

$PA^۲=PC.PB \Rightarrow ۱۲^۲=x\times ۱۶$

$x=\frac{۱۴۴}{۱۶}=۹$

$۲R=۱۶-x=۷$

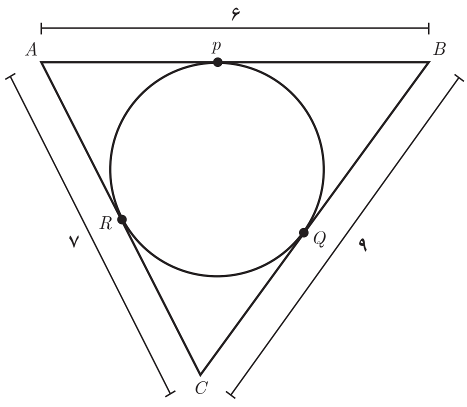
۳ در مثلث با اضلاع $AB=۶$ و $AC=۷$ و $BC=۹$ دایره‌ای محیط کردیم. طول مماسی، که از A بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟

$AP=AR=x \ , \ BP=BQ=۶-x \ , \ CR=CQ=۷-x$

$CQ=۷-x \ , \ BQ=۶-x$

$CQ+QB=۹ \Rightarrow ۷-x+۶-x=۹$

$x=۲$



۴ در شکل زیر AE و AF و BC بر دایره مماس هستند. اگر نقطه D از E به سمت F حرکت کند، ثابت کنید با تغییر نقطه D بین E و F محیط مثلث ABC ثابت است.

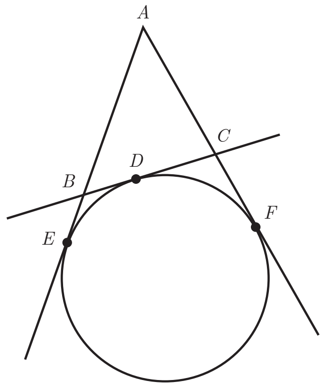
طول مماس بر دایره با هم برابرند.

$$AE=AF\ ,\ CD=CF\ ,\ BD=DE$$

$$ABC\ \text{محیط مثلث} = AB+BC+AC=AB+(BD+DC)+AC$$

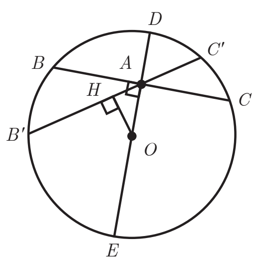
$$=(AB+\underbrace{\cancel{BD}}_{BE})+(\underbrace{\cancel{DC}}_{CF}+AC)=AE+AF=AE$$

محیط مثلث ABC به نقطه D بستگی ندارد.



۵ از نقطه A در داخل دایره $C\,(O,R)$ بی‌شمار وتر می‌گذرد. وتر BC در نقطه A بر قطر عبوری از این نقطه عمود است. ثابت کنید BC کوتاه‌ترین وتر است که از نقطه A می‌گذرد.

فرض می‌کنیم BC کوتاه‌ترین وتری که از نقطه A می‌گذرد نباشد و فرض می‌کنیم وتر دیگر $B'C'$ کوتاه‌ترین وتر عبوری از نقطه A باشند. از O بر $B'C'$ عمود می‌کنیم و در مثلث قائم‌الزاویه OAB طول وتر OA از طول ضلع قائمه OH بزرگ‌تر است. $OH<OA$ ، هرچه فاصله وتر به مرکز دایره کمتر باشد بزرگ‌تر است؛ بنابراین، وتر $B'C'$ از وتر BC بزرگ‌تر است.



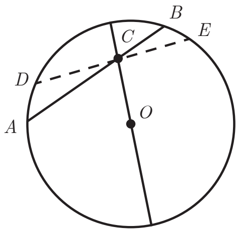
۶ نقطه C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه C کدام است.

$$\frac{BC}{AC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow BC=۳\ ,\ AC=۶$$

از نقطه C قطر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم وتری که بر قطر عمود باشد کوتاه‌ترین وتر است. این وتر توسط قطر دایره نصف می‌شود. $CE=DC=x$ بنابه رابطه طولی در دایره داریم :

$$AC.CB=DC.CE\Rightarrow ۶\times۳=x.x\Rightarrow x^{۲}=۱۸$$

$AB=۶\sqrt{۲}$ و طول وتر $x=۳\sqrt{۲}$



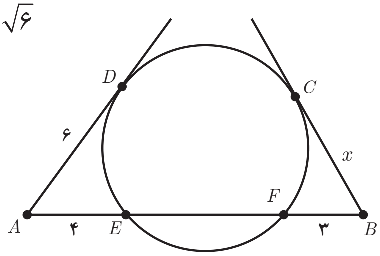
۷ در شکل زیر مقدار x کدام است؟

$$AD^{۲}=AE.AF\Rightarrow ۳۶=۴(۴+y)$$

$$\Rightarrow y=۵$$

$$BC^{۲}=BF.BE\Rightarrow x^{۲}=۳(۳+۵)=۲۴$$

$$x=۲\sqrt{۶}$$



۸ دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۲ مفروض‌اند. در حالت‌های زیر وضعیت دو دایره را بیان کنید.

الف) فاصله دو مرکز دایره ۵

ب) فاصله دو مرکز دایره ۱/۵

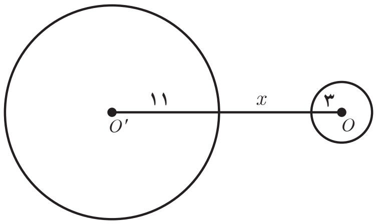
الف) دو دایره مماس خارجند، زیرا $d=R+R'\Rightarrow ۵=۳+۲$

ب) دو دایره متقاطع‌اند. $d=۱/۵\ ,\ R+R'=۵\ ,\ R-R'=۱$

$$R-R'<d<R+R'$$

۹ طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $۳\sqrt{۳۳}$ سانتی‌متر است. کمترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

$$TT'^{۲} = \sqrt{d^{۲} - (R-R')^{۲}}$$
$$۳\sqrt{۳۳} = \sqrt{d^{۲} - (۱۱-۳)^{۲}}$$
$$d^{۲} = ۳۶۱ \Rightarrow d = ۱۹$$
$$x = d - (R+R') = ۱۹ - (۱۱+۳) = ۵$$



۱۰ اگر بین شعاع‌های دو دایره و d طول خط‌المرکزین روابط $r_۱ + r_۲ = \frac{۳d}{۴}$ و $r_۱ - r_۲ = \frac{d}{۴}$ برقرار باشد، شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دو دایره مماس است چقدر است؟

دو دایره متخارج هستند. کمترین فاصله دو دایره به‌صورت زیر است:

$$r_۱ + r_۲ = \frac{۳d}{۴} < d$$

$$d - (r_۱ + r_۲) = d - \frac{۳d}{۴} = \frac{d}{۴}$$

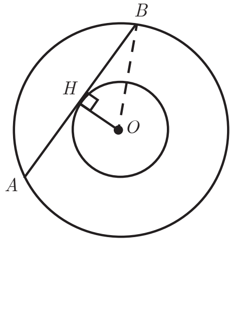
کمترین فاصله دو دایره برابر $\frac{d}{۴}$ است و شعاع دایره‌ای که بر هر دو مماس باشد $\frac{\frac{d}{۴}}{۲}$ یعنی $\frac{d}{۸}$ است.

۱۱ دو دایره هم مرکزند. شعاع دایره بزرگ‌تر ۵ و شعاع دایره کوچک‌تر ۳ سانتی‌متر است. طول وتری را در دایره بزرگ‌تر بیابید که بر دایره کوچک‌تر مماس باشد.

$$OH^{۲} + HB^{۲} = OB^{۲} \Rightarrow ۹ + HB^{۲} = ۲۵ \Rightarrow HB = ۴$$

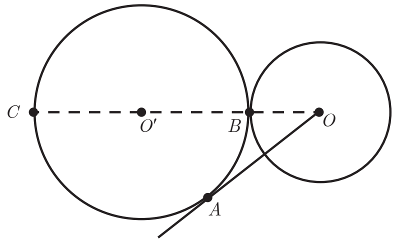
می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

$$AH = HB$$
$$AB = ۲(۴) = ۸$$



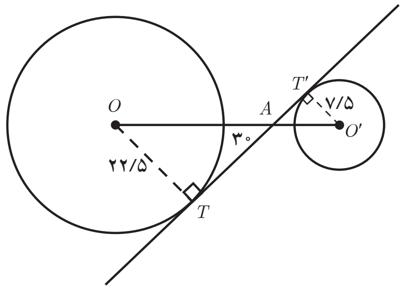
۱۲ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

$$OA^۲=OB.OC \Rightarrow OA^۲=۴\times(۲۱+۴)$$
$$OA^۲=۱۰۰$$
$$OA=۱۰$$



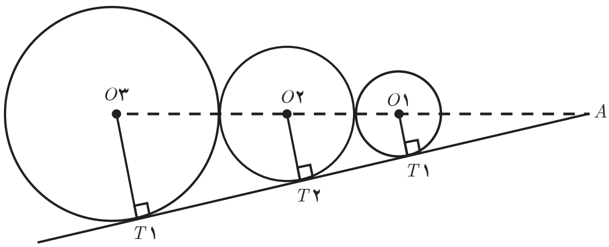
۱۳ شعاع دو دایرهٔ خارج هم به ترتیب ۲۲/۵ و ۷/۵ سانتی‌متر است. اگر زاویه بین مماس داخل و خط‌المرکزین دو دایره ۳۰ درجه باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

$$O\overset{\Delta}{A}T : \sin ۳۰ = \frac{OT}{OA} \Rightarrow OA = ۴۵$$
$$O'\overset{\Delta}{T'}A : \sin ۳۰ = \frac{O'T'}{O'A} \Rightarrow O'A = ۱۵$$
$$OO' = OA + O'A = ۴۵+۱۵=۶۰$$



۱۴ سه دایره به شعاع $r_۱=۱$ و $r_۲=۲$ و $r_۳$ برهم مماس خارج هستند. شعاع دایره سوم کدام است؟

$$O_۱O_۲=۱+۲=۳$$
$$O_۳O_۲=۲+r_۳$$
$$O_۱T_۱ \parallel O_۲T_۲ \Rightarrow \frac{O_۱A}{O_۲A}=\frac{O_۱T_۱}{O_۲T_۲} \Rightarrow \frac{x}{x+۳}=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow x=۳$$
$$O_۱T_۱ \parallel O_۳T_۳ \Rightarrow \frac{O_۱A}{O_۳A}=\frac{O_۱T_۱}{O_۳T_۳} \Rightarrow \frac{x}{x+۳+۲+r_۳}=\frac{۱}{r_۳}$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۸+r_۳}=\frac{۱}{r_۳} \Rightarrow r_۳=۴$$

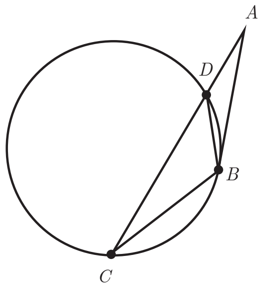


۱۵ دو دایره به شعاع ۵ متخارج‌اند. اگر طول مماس مشترک داخلی آنها $۴\sqrt{۶}$ باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره کدام است؟

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}} \Rightarrow ۴\sqrt{۶} = \sqrt{d^{۲} - (۵+۵)^{۲}}$$

$$۹۶+۱۰۰=d^{۲} \Rightarrow d^{۲}=۱۹۶ \Rightarrow d=۱۴$$

۱۶ در شکل زیر مماس AB و وتر BC طول برابر دارند. ثابت کنید مثلث ABD متساوی‌الساقین است.



$$AB = BC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

زاویه C یک زاویه محاطی است $\hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{۲}$

زاویه DBA ظلی است $D\hat{B}A = \frac{۱}{۲}\frac{\widehat{BD}}{۲}$

در نتیجه $\hat{C} = D\hat{B}A$ بنابراین $\hat{A} = D\hat{B}A$ یعنی مثلث ADB متساوی‌الساقین است.

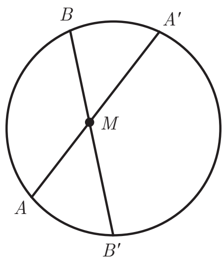
۱۷ دو پاره خط AA' و BB' را در نقطه M همدیگر را قطع می‌کنند. اگر $MA.MA' = MB.MB'$ باشد ثابت کنید دایره از چهار نقطه A و A' و B و B' می‌گذرد.

از سه نقطه A و A' و B یک دایره می‌گذرد. اگر این دایره از B' نگذرد، آن‌گاه از نقطه دیگری مانند D می‌گذرد. آن‌گاه دو وتر AA' و BD در M متقاطع‌اند. بنابه رابطه طولی در دایره داریم:

$$AM.MA' = MB.MD$$

بنابه فرض داریم: $MD = MB'$

یعنی: B' و D برهم منطبق‌اند یعنی دایره از B' می‌گذرد.



۱۸ از نقطه A دو مماس بر دایره $C\ (۰,۶)$ رسم می‌کنیم. تا در نقاط T و T' بر دایره مماس باشند. زاویه $A=۶۰^\circ$

الف) فاصله A تا مرکز دایره را بیابید.

ب) مساحت چهار ضلعی $ATOT'$ را به‌دست آورید.

ج) مساحت محدود به دو خط مماس و دایره را به‌دست آورید.

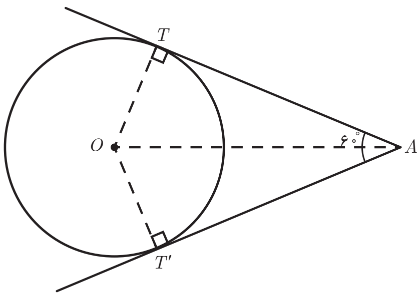
الف) A را به O وصل می‌کنیم.

$$\sin A_1=\frac{OT}{OA}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{OA}$$
$$OA=۱۲$$

ب)
$$AT^۲=OA^۲-OT^۲=۱۴۴-۳۶=۱۰۸\Rightarrow AT=۶\sqrt{۳}$$
$$S_{ATOT'}=۲S_{ATO}=۲(\frac{۱}{۲}(OT.AT))=۶\times۶\sqrt{۳}=۳۶\sqrt{۳}$$

ج) مساحت محدود به دو خط مماس و دایره برابر است با مساحت چهارضلعی $ATOT'$ منهای مساحت قطاع

$$\text{مساحت قطاع}=\frac{\pi(۶)^۲۱۲۰}{۳۶۰}=۱۲\pi$$
$$\text{مساحت محصور}=۳۶\sqrt{۳}-۱۲\pi=۱۲(۳\sqrt{۳}-\pi)$$



۱۹ از نقطه A دو مماس AT و AT' را بر دایره $C\ (O,R)$ رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

الف) $TT'.OA=۲\times R.AT$

ب) $R^۲=OH.OA$

الف) مساحت چهار ضلعی

دو مثلث $\overset{\Delta}{OTH}$ و $\overset{\Delta}{OTA}$ با هم متشابه‌اند.

$$\overset{\Delta}{OTH}\sim\overset{\Delta}{OTA}\begin{cases}\hat{O}=\hat{O}\\ H_1=T=۹۰\end{cases}\xrightarrow{\text{زز}}\qquad\frac{OT}{OA}=\frac{TH}{AT}\Rightarrow OT.AT=OA.TH$$

از طرفی قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

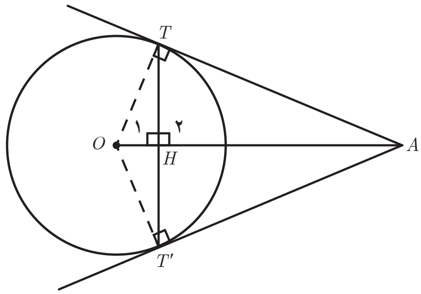
$$TH = \frac{۱}{۲}TT'$$

$$\Rightarrow R.AT = OA \times \frac{TT'}{۲} \Rightarrow OA.TT' = ۲R.AT$$

ب) دو مثلث OTH و OTA متشابه‌اند.

$$\frac{OT}{OA} = \frac{OH}{OT} \Rightarrow OT^{۲} = OA.OH$$

$$\Rightarrow R^{۲} = OA.OH$$



دانستنی‌هایی برای دبیران

دایره و کاربردهای آن

اشکال هندسی در زندگی، همواره، کاربردهای فراوان داشته و برای فعالیت‌های انسان الهام‌بخش و سمبل بوده است. دایره یکی از این اشکال است. ابتدایی‌ترین کاربرد دایره، چرخ و چرخ‌دنده‌ها هستند که از قدیم‌الایام کاربرد داشته است. همچنین ابزارآلات زینتی چون تاج، گردنبند، خلخال و حلقه‌ها، کاربردی به اندازه تاریخ بشری دارند. دایره در فرهنگ‌ها، انجمن‌ها،شهرسازی، اندیشه‌های هنری و ریشه‌دار، به‌خصوص در ابزارآلات نجومی، جایگاه نمادین دارد.

۱ **دایره در هنرهای اسلامی ایران :** دایره‌ها در هنرهای اسلامی ایرانی، به شکل شمس و حلقه نورانی در اطراف سر ائمه علیهم‌السلام و بزرگان دین دیده می‌شود. همچنین با توجه به کرامت صورتگری و مجسمه‌سازی در اسلام و ظریف‌اندیشی شیعه، هنرهای اسلامی به شکل‌های اسلیمی، گل وبوته و نقشه‌هایی ختایی سوق داده شد. اشکال و خطوط و ترکیب رنگ در مینیاتورها، تذهیب‌ها و فرش‌ها با زینت و ترکیب و نقش‌ونگار پخته‌تری تکامل یافتند.

بطلمیوس، در دو قرن پیش از میلاد، براساس تفاوت حرارت، سرزمین‌های شناخته شده آن روزگار را به

هفت اقلیم تقسیم کرده است. از آنجا که تقسیم‌بندی بطلمیوس براساس دایره‌های مداری است، اقلیم‌های هفتگانه را «اقلیم‌های هندسی» نیز نامیده‌اند. به نظر صاحب‌نظران، اصطلاح «هفت شهر»، «هفت اقلیم» و «هفت وادی» که در ادبیات و حکمت ایرانی وارد شده است، الهامی از نظریات بطلمیوسی را در خود دارد. اجرام آسمانی به دو دسته ثوابت و اجرام متحرک و متغیر تقسیم شده و اجرام متغیر شناخته شده آن روز، (خورشید، زمین، بهرام، تیر، عطارد، مشتری و زحل) هر یک در مداری و آسمانی تصور شدند. آسمان اول، آسمان دوم، ... تا هفت آسمان (نور راسخون، ۱۳۸۸).

۲ **کاربرد دایره در علوم نجوم** : دایره «هندسی»، که به «دایره هندی» نیز معروف است، دایره‌ای است خط‌دار (دارای خطوط فنی و علمی) بر صفحه‌ای مستوی و تراز، با نصب شاخص مخروطی‌شکل بر مرکز آن، که این خطوط در وهله اول چهار جهت اصلی را نشان می‌دهد. از دایره هندی در هندوستان برای تعیین مختصات جغرافیایی، نصف‌النهار محل و ساعت آفتابی استفاده می‌شده است. با توجه به اینکه استفاده از دایره هندسی برای تعیین مختصات جغرافیایی بسیار ساده است و نیازی به داشتن قواعد ریاضی و به‌کارگیری وسایل و تجهیزات رصدی نیست، لذا ابوریحان بیرونی از این روش برای قبله‌یابی استفاده کرد و دیری نپایید که استفاده از آن مرسوم شد (کانون نجوم زادنس ۱۳۹۴).

۳ **دایره در ورزش‌های باستانی** : دایره، با توجه به نماد آسمانی و قداست افلاکی‌اش در ورزش‌های باستانی از جمله زورخانه و گوی‌بازی ورزشکاران باستانی‌کار نیز کاربرد دارد.

دایره برای رفع مشکلات شهرها و شهرسازی :

توسعه شهرها، تأمین نیازمندی‌های آنان، چاره‌جویی برای توسعه‌های آینده شهر، اتخاذ تصمیماتی که بتواند مشکلات شهری را به حداقل برساند و بالاخره آنکه چگونه رابطه منطقی بین انسان با محیط طبیعتش حفظ شود، به تحولاتی در امر شهرسازی منجر شد. نخستین نظریه در زمینه شهرسازی، مربوط به شخصی به نام هیپوداموس (۴۸۰ سال قبل از میلاد)است و بعد از آن نظریات و راهکارهای متفاوت شهرسازی به‌وجود آمد. ولی پیدایش دانش امروزی شهرسازی به قرن نوزده میلادی می‌رسد. از میان نظریه‌های شهرسازی می‌توان نظریه‌های زیر را نام برد :

۱ **نظریه متحدالمرکز** : در این نظریه، الگوی ساخت شهر بر این اصل استوار است که توسعه شهر از ناحیه مرکزی به طرف خارج شهر صورت گرفته و تعداد مناطق متحدالمرکز را تشکیل می‌دهد. این مناطق با ناحیه مشاغل مرکزی شروع شده و به‌وسیله منطقه در حال تحول احاطه می‌شود.

۲ **نظریه قطاعی** : تعدیل و تغییر در جهات مختلف، مبنای این نظریه است. شهرها برای همیشه نمی‌توانند حالت متحدالمرکزی مناطق را حفظ کنند. ساخت واحدهای گران‌قیمت از کانون اصلی در طول

شبکه‌های رفت و آمد، ساخت واحدهای مسکونی دیگر و ارزان‌تر به سوی فضاهای باز و جابه‌جایی ساختمان‌های اداری و تجاری، توسعه واحدهای مسکونی گران‌قیمت را در جهت عمومی عملی سازد. آپارتمان‌های لوکس در مجاورت بخش‌های تجاری و مسکونی قدیمی به‌وجود آمده و واحدهای گران‌قیمت شهر به‌طور اتفاقی و نامنظم جابه‌جا نمی‌شوند. راه‌های شعاعی از مرکز شهر به اطراف کشیده می‌شود و عامل دسترسی به این راه‌ها و قیمت زمین‌ها را در مناطق مختلف شهر تعیین می‌کند.

۳ **مدل حلقه‌ای** : در این مدل، به‌جای آنکه خطوط اصلی حمل‌ونقل به‌صورت خطی گسترش یابد، به‌شکل دایره‌ای به موازات مرکز شهر، حواشی ناحیه مرکزی و بافت‌های اطراف آن گسترش می‌یابد و دور تا دور بافت را گره‌های شهری به‌وجود می‌آورد و فعالیت‌ها شکل حلقه‌ای یا زنجیره‌ای به خود می‌گیرند.

۴ **طرح مکمل مدل کهکشانی** : این طرح براساس نظریه ویکتورکروئن در بیشتر شهرهای بزرگ کاربرد دارد. شهر از مراکز متعددی تشکیل یافته و هر یک واحدهای دیگری را به‌وجود می‌آورد و به‌وسیله شبکه‌های ارتباطی مشترک و مستقل و منطقه‌ای، بافت‌ها با همدیگر مرتبط می‌شوند. مجموعه این بافت‌ها و شبکه‌ها یک شبکه کهکشانی را به‌وجود می‌آورد. خدمات مرکزی در وسط بافت و جایگاه صنایع در نواحی اطراف شهر و خارج از بافت اصلی پیش‌بینی می‌شود.

این فصل درباره مفهوم دایره است. دانش‌آموزان برای درک بهتر مفاهیم ارائه شده در این فصل باید به پیش‌نیازهای ارائه شده در کتاب‌های درسی سال‌های قبل،به‌خصوص هندسه (۱) تسلط داشته باشند. از مهم‌ترین پیش‌نیازهای این فصل می‌توان به این مباحث اشاره کرد : قضیه تالس، خطوط موازی و حالت‌های تشابه مثلث‌ها و چندضلعی‌ها و ویژگی‌های چندضلعی‌ها.

درس سوم

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

اهداف درس

۱ درک مفهوم محاطی و محیطی بودن چندضلعی و آشنایی با شرایط لازم و کافی برای محاطی و محیطی بودن چندضلعی (به‌ویژه چهار ضلعی‌ها)؛

۲ آشنایی با نحوه رسم دایره‌های محاطی و محیطی در چندضلعی در صورت وجود؛

۳ آشنایی با دایره محاطی خارجی مثلث و رابطهٔ شعاع دایره محاطی خارجی مثلث با محیط، مساحت و اضلاع آن مثلث.

روش تدریس درس سوم

درس با ارائه تعریفی از چندضلعی محاطی و دایرهٔ محیطی آن چندضلعی آغاز می‌شود. پس از ارائه تعریف، طی یک قضیه دو شرطی، شرط لازم و کافی محاطی بودن چندضلعی بیان می‌شود. انتظار می‌رود دانش‌آموزان، با توجه به تعریف چندضلعی محاطی و دایره محیطی آن، همچنین خواص دایره و ویژگی‌های عمودمنصف پاره‌خط که در کتاب هندسه و در درس گذشته این فصل خوانده‌اند بتوانند این قضیه دو شرطی را اثبات کنند.

در ادامه تعریف چند ضلعی محیطی و دایره محاطی آن را ارائه می‌شود. پس از تعریف فعالیتی ارائه می‌شودکه انتظار می‌رود دانش‌آموزان پس از انجام آن فعالیت، شرط لازم و کافی محیطی بودن یک چندضلعی را درک کنند و بتوانند از این فعالیت در حل مسائل و اثبات قضایا استفاده کنند.

مثلث، به‌عنوان یکی از پرکاربردترین چندضلعی‌ها در هندسه، از منظر محاطی و محیطی بودن، بررسی

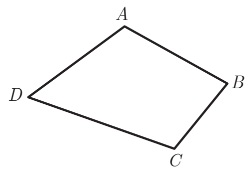
می‌شود و دانش‌آموزان با توجه به خواص مثلث و دایره درمی‌یابند که هر مثلث هم محیطی است و هم محاطی و مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، نقطهٔ همرسی سه عمود منصف آن و مرکز دایره محاطی هر مثلث، نقطه همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن است.

انتظار می‌رود دانش‌آموزان براساس «کار در کلاس» صفحه ۲۵ که در خصوص رابطه بین مساحت یک n ضلعی محیطی با محیط آن و شعاع دایرهٔ محاطی‌اش است، بتوانند رابطه بین مساحت هر مثلث محیطی با محیط آن و شعاع دایره محاطی‌اش را به‌دست آورند.

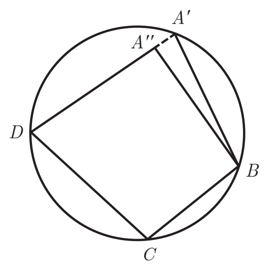
در صفحهٔ ۲۶ دایرهٔ محاطی خارجی نظیر هر رأس مثلث معرفی و فعالیتی ارائه می‌شود که در آن نحوهٔ محاسبهٔ شعاع دایره محاطی خارجی تبیین می‌شود.

در صفحهٔ ۲۷ و ۲۸ طی دو قضیه دو شرطی و اثبات آنها، شرایط لازم و کافی برای محاطی و محیطی بودن هر چهارضلعی بیان می‌شود.

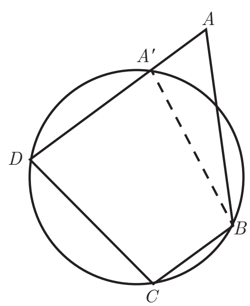
در قضیه اول شرط لازم و کافی برای محاطی بودن هر چهارضلعی، مکمل بودن دو زاویه مقابل آن چهارضلعی ارائه و اثبات می‌شود. برای این قضیه دو شرطی، طرف اول قضیه (فرض : چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. حکم : دو زاویه مقابل آن چهارضلعی مکمل هم هستند.) به‌راحتی با استفاده از تعریف زاویه محاطی و دایره اثبات می‌شود.



طرف دوم قضیه (فرض : دو زاویه مقابل چهارضلعی $ABCD$ مکمل هم هستند. حکم : چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.) با استفاده از برهان خلف اثبات می‌شود. روند اثبات این‌گونه است که با توجه به اثبات این امر که هر مثلث محاطی است، مطمئناً می‌توان یک دایره محاطی که از سه رأس چهارضلعی می‌گذرد رسم کرد. و این دایره از رأس چهارم چهارضلعی (به‌عنوان مثال A) نمی‌گذرد (فرض خلف). بر این اساس و با توجه به شکل (۱) و (۲).



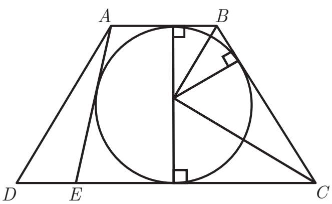
(۱)



(۲)

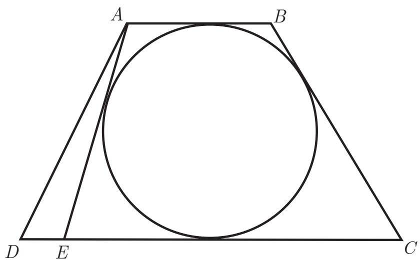
از رأس B به نقطه A' که روی ضلع AD یا در امتداد آن قرار دارد وصل می‌کنیم. چهارضلعی $A'BCD$ یک چهارضلعی محاطی است. سپس با توجه به قسمت اول قضیه، $\hat{C}$ و $B\hat{A'}D$ مکمل هم هستند و با توجه به فرض قضیه که $\hat{C}$ با $\hat{A}$ مکمل هستند، نتیجه گرفته می‌شود که $\hat{A}=B\hat{A'}D$ که این ممکن نیست؛ زیرا در شکل (۱) زاویه $BA'D$ زاویه داخلی غیر مجاور با زاویه خارجی A در مثلث ABA' و در شکل (۲) زاویه A زاویه داخلی غیر مجاور با زاویه خارجی $BA'D$ در مثلث ABA' است که در هر دو مورد دو زاویه A و $BA'D$ با هم مساوی نیستند و این تناقضی است که مبنای اثبات قضیه است.

در قضیه دوم، شرط لازم و کافی برای محیطی بودن چندضلعی بیان می‌شود. قسمت اول قضیه با فرض محیطی بودن چهارضلعی و حکم برابر بودن مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل با مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر، براساس هم اندازه بودن در پاره‌خط مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره اثبات می‌شود. برای اثبات عکس قضیه، با توجه به شکل ارائه شده، ابتدا با استفاده از رسم نیمساز دو زاویه B و C، رسم دایره‌ای محاطی که بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است، نتیجه گرفته می‌شود برای اثبات مماس بودن دایره مفروض بر ضلع AD از برهان خلف استفاده می‌شود.



فرض خلف این است که دایره مفروض بر ضلع AD مماس نیست و پاره‌خط دیگری مانند AE مماس است. با توجه به اینکه E بین دو رأس C و D باشد و یا D بین C و E باشد، دو حالت پیش می‌آید که در ادامه این قسمت قضیه را برای هر دو حالت اثبات می‌کنیم :

حالت اول : E بین C و D قرار دارد :



$$\left.\begin{array}{ll} ۱\ \ AB+CD=BC+AD & \text{بنا بر فرض قضیه} \\ ۲\ \ AB+CE=BC+AE & \text{با توجه به قسمت اول قضیه (شرط محیطی بودن چهارضلعی)} \end{array}\right\} \overset{۱ \text{ و } ۲}{\Rightarrow}$$

$$CD-CE=AD+AE \xrightarrow{CD=CE+DE} \cancel{CE}+DE-\cancel{CE}=AD+AE$$

$$\Rightarrow AD+AE=DE$$

که این رابطه، با توجه به نامساوی مثلث‌ها، امکان ندارد؛ بنابراین، قضیه اثبات می‌شود.

حالت دوم : D بین C و E قرار دارد :

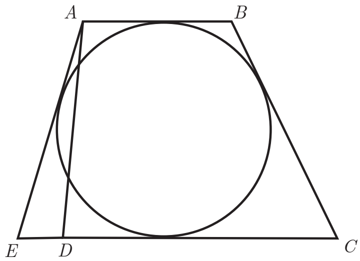
$$۱\ \ AB+CD=BC+AD \quad \text{فرض قضیه}$$

$$۲\ \ AB+CE=BC+AE \quad \text{شرط محیطی بودن چهارضلعی}$$

$$۲-۱ \Rightarrow CE-CD=AE-AD \xRightarrow{CE=CD+ED}$$

$$\cancel{CD}+ED-\cancel{CD}=AE-AD \Rightarrow ED+AD=AE$$

که این رابطه نیز با توجه به نامساوی بودن مثلث‌ها امکان ندارد و قضیه در این حالت نیز اثبات می‌شود.



در «کار در کلاس» صفحه ۲۸ انتظار می‌رود که دانش‌آموزان با توجه به قضایای مربوط محاطی و محیطی بودن چهارضلعی‌ها و همچنین ویژگی‌های چهارضلعی‌های مختلف بتوانند محاطی یا محیطی بودن هر یک از آنها را مشخص کنند.

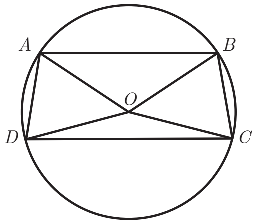
پس از انجام «کار در کلاس» صفحه ۲۸ چندضلعی محدب منتظم تعریف می‌شود. در صفحه ۲۹ فعالیتی ارائه می‌شود که دانش‌آموزان با انجام آن درک می‌کنند که هر چندضلعی محدب منتظم، هم محاطی و هم محیطی است.

مجله ریاضی به‌عنوان مطلبی خواندنی برای علاقه‌مندان در خصوص زاویه‌های دید و کمان شامل (حاوی) پس از تمرین‌های این درس ارائه می‌شود که جزء محتوای درس نیست و فقط جهت مطالعه برای دانش‌آموزان است.

حل تمرین‌های درس

۱ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

فرض : ذوزنقه محاطی است. **حکم** : $AD = BC$



$$\left.\begin{array}{l} AB \| DC \ , \ AD \text{ مورب } \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \\ \text{طبق شرط محاطی بودن ذوزنقه} \leftarrow \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{D}=\widehat{C}$$

$$\text{شرط محاطی بودن ذوزنقه} \leftarrow \left\{\begin{array}{l} \widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\widehat{D}=\widehat{C}} \widehat{A}=\widehat{D}$$

در این ذوزنقه،زاویه‌های مجاور به ساق برابرند؛ بنابراین، ذوزنقه، متساوی‌الساقین است.

فرض : ذوزنقه متساوی‌الساقین است. **حکم** : ذوزنقه محاطی است.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow[\text{با توجه به فرض متساوی‌الساقین بودن ذوزنقه}]{\widehat{C}=\widehat{D}} \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}=\widehat{B}} \widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

ذوزنقه $ABCD$ محاطی است.

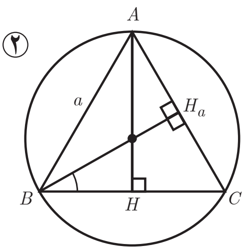
۲ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، نقطه O محل برخورد نیمسازها نیز است.

بنابراین :

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AH.BC}{۲}$$

$$AH = OA + OH \Rightarrow AH = R + OH \quad ①$$



$$O\overset{\Delta}{B}H : \widehat{B}_۱ = ۳۰^\circ \rightarrow \sin\widehat{B}_۱ = \frac{OH}{OB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{OH}{R} \rightarrow OH = \frac{R}{۲} \quad ②$$

$$۱ \text{ و } ۲ \rightarrow AH = R + \frac{R}{۲} \Rightarrow AH = \frac{۳}{۲}R$$

$$O\overset{\Delta}{B}H : \widehat{B}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow \cos\widehat{B}_۱ = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{R} \Rightarrow$$

$$BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R \xRightarrow{\text{ میانه } BC \text{ نیز است.} AH} BC = ۲BH \Rightarrow BC = \sqrt{۳}R$$

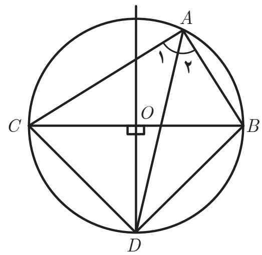
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{R}{۲} \times \sqrt{۳}R = \frac{\sqrt{۳}}{۴} R^{۲}$$

۳ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

فرض می‌کنیم AD نیمساز زاویه A دایره محیطی مثلث ABC را در نقطه D قطع کند.

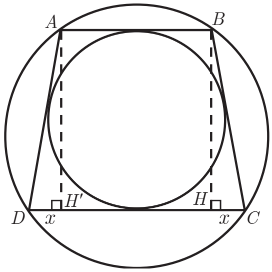
$$\widehat{A}_{۱} = \widehat{A}_{۲} \xrightarrow{\text{خواص زاویه محاطی}} \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{DB}$$

بنابراین، فاصله D از دو سر ضلع BC به یک اندازه است و این یعنی اینکه D روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد. پس نیمساز زاویه A و عمودمنصف ضلع مقابل به زاویه A یعنی BC همدیگر را روی نقطه‌ای روی دایره محیطی مثلث ABC قطع می‌کند.



۴ یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

چون ذوزنقه $ABCD$ محاطی است، طبق سؤال ۱، متساوی‌الساقین است یعنی رابطه ۱ : $AD = BC$.



از طرفی چون ذوزنقه $ABCD$ محیطی است پس داریم : رابطه ۲ $AB+DC=AD+BC$.

۳ $$\text{۲ و ۱} \Rightarrow ۲BC=AB+DC \Rightarrow BC=\frac{AB+DC}{۲}$$

۴ $$B\overset{\Delta}{H}C: BC^{۲}=BH^{۲}+HC^{۲} \Rightarrow BC^{۲}=BH^{۲}+x^{۲}$$

۵ $$AB\overset{\frown}{C}D: DC=۲x+HH' \xrightarrow{HH'=AB} DC=۲x+AB \Rightarrow x=\frac{DC-AB}{۲}$$

$$\text{۵ و ۴} \Rightarrow BC^{۲}=BH^{۲}+x^{۲} \Rightarrow BH=\sqrt{BC^{۲}-x^{۲}} \xrightarrow{\text{با جایگذاری ۵ و ۳}}$$

$$BH=\sqrt{\left(\frac{AB+DC}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{DC-AB}{۲}\right)^{۲}}=\sqrt{AB.DC}$$

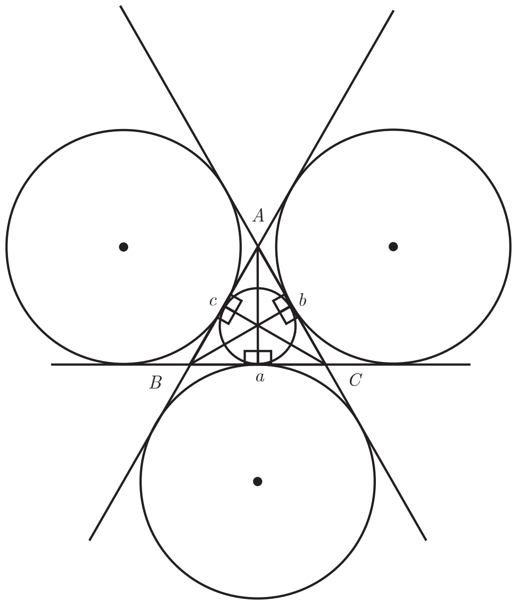
$$S_{AB\overset{\frown}{C}D}=\left(\frac{AB+DC}{۲}\right)\sqrt{AB.DC}$$

۵ اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید :

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$



اگر محیط مثلث ABC را $۲p$ و S را مساحت آن در نظر بگیریم در دایره محاطی مثلث ABC داریم :

$$S = rp \Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{p}{s}$$

در دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC داریم :

$$\left.\begin{aligned} r_a &= \frac{s}{p-a} \Rightarrow \frac{۱}{r_a} = \frac{p-a}{s} \\ r_b &= \frac{s}{p-b} \Rightarrow \frac{۱}{r_b} = \frac{p-b}{s} \\ r_c &= \frac{s}{p-c} \Rightarrow \frac{۱}{r_c} = \frac{p-c}{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c} = \frac{p-a}{s}+\frac{p-b}{s}+\frac{p-c}{s} = \frac{۳p-(a+b+c)}{s} = \frac{۳p-۲p}{s} = \frac{p}{s} = \frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع مثلث ABC باشند داریم :

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{۲s}{a} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} = \frac{a}{۲s} \\ s &= \frac{۱}{۲}bh_b \Rightarrow h_b = \frac{۲s}{b} \Rightarrow \frac{۱}{h_b} = \frac{b}{۲s} \\ s &= \frac{۱}{۲}ch_c \Rightarrow h_c = \frac{۲s}{c} \Rightarrow \frac{۱}{h_c} = \frac{c}{۲c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c} = \frac{a}{۲s}+\frac{b}{۲s}+\frac{c}{۲s} = \frac{a+b+c}{۲s} = \frac{۲p}{۲s} = \frac{p}{s} = \frac{۱}{r}$$

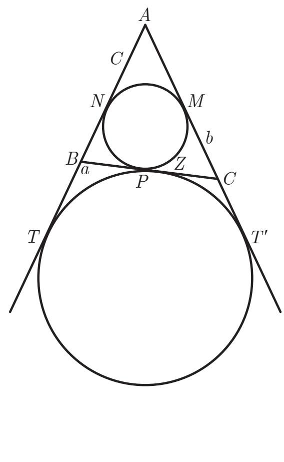
۶ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N، M و P باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند نشان دهید :

$$AM = AN = P - a$$

$$BN = BP = P - b \;,\; CM = CP = P - C$$

$$AT = AT' = P$$

$$AM = AN = P - a$$



$$\left.\begin{aligned} AN &= C - BN \\ AM &= b - CM \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM + AN = b + c - (BN + CM)$$

$$\xrightarrow[BN=BP\,,\,CM=CP]{AM=AN} ۲AM = b + c - (\underbrace{BP + CP}_{a}) = b + c - a$$

$$\Rightarrow ۲AM = ۲p - ۲b \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$$BN = BP = P - b$$

$$\left.\begin{array}{l} BN = C - AN \\ BP = a - cp \end{array}\right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP)$$

$$\xrightarrow[AN = AM,\, CP = CM]{BP = BN} ۲BN = a + C - (\underbrace{AM + CM}_{b}) = a + c - b$$

$$۲BN = ۲p - ۲b \Rightarrow BN = BP = P - b$$

$$CM = CP = P - C$$

$$\left.\begin{array}{l} CM = b - AM \\ CP = a - BP \end{array}\right\} \Rightarrow CM + CP = b + a - (AM + BP)$$

$$\xrightarrow[AN = AM,\, BP = BN]{CM = CP} ۲CM = b + a - (\underbrace{AN + BN}_{c}) = b + a - c$$

$$\Rightarrow ۲CM = ۲P - ۲C \Rightarrow CM = CP = P - C$$

$$AT = AT' = P$$

$$AT + AT' = C + BT + b + CT' \xrightarrow[BT = BZ,\, CT' = CZ]{AT = AT'}$$

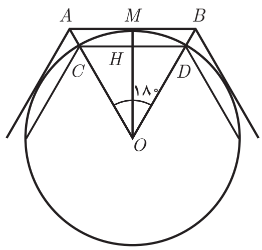
$$۲AT = C + b + \underbrace{BZ + CZ}_{a} = c + b + a = ۲P \Rightarrow$$

$$AT = AT' = P$$

۷ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$.

$$\overset{\Delta}{OHD} : \widehat{H} = ۹۰^\circ \rightarrow \sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{OH}{OD} \xrightarrow[۲]{OD = r} \sin\frac{۱۸۰}{n} =$$

$$\frac{DH}{r} \overset{\times ۲}{\Rightarrow} ۲\sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲DH}{r} \xrightarrow{۲DH = CD} CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$

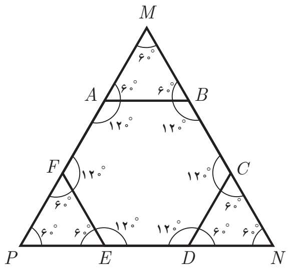


$$\overset{\Delta}{OMB} : \widehat{M} = ۹۰^\circ \rightarrow \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{OM} \xrightarrow{OM = r} \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r}$$

$$\overset{\times ۲}{\Rightarrow} ۲\tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲MB}{r} \xrightarrow{۲MB = AB} AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$$

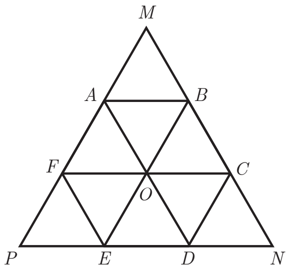
۸ شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است. با توجه به شکل و با توجه به اینکه اندازه هر زاویه داخلی شش‌ضلعی منتظم $^\circ$۱۲۰ است، اندازه زاویه‌های M، N و P $^\circ$۶۰ است؛ بنابراین مثلث MNP، متساوی‌الاضلاع است.



ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی دو سوم مساحت مثلث MNP است. اگر قطرهای شش‌ضلعی منتظم را رسم کنیم، شش مثلث متساوی‌الاضلاع داخل شش‌ضلعی و ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع در داخل مثلث MNP به‌وجود می‌آید.

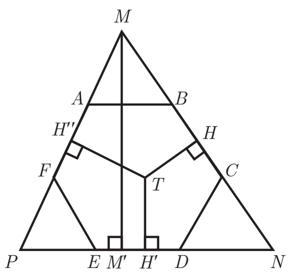
$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{\overset{\Delta}{MNP}}} = \frac{۶S_{\overset{\Delta}{OAB}}}{۹S_{\overset{\Delta}{OAB}}} = \frac{۲}{۳}$$



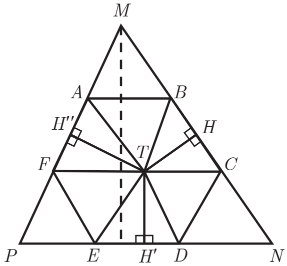
پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مجموع فواصل هر نقطه از سه ضلع مثلث برابر طول ارتفاع مثلث است بنابراین :

$$TH + TH' + TH'' = MM'$$



ت) مجموع مساحت‌های مثلث TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :



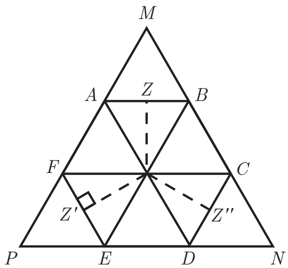
$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = \frac{۱}{۲}\ TH.BC + \frac{۱}{۲}\ TH'\ .\ ED + \frac{۱}{۲}\ TH''.AF \ \underline{\underline{\underline{BC = ED = AF}}}$$

$$\frac{۱}{۲}BC(\underbrace{TH + TH' + TH''}_{h}) = \frac{۱}{۲}BC.h$$

$$S_{MNP} = \frac{۱}{۲}MN.h \xrightarrow{MN = ۳BC} \frac{S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}}{S_{MNP}} =$$

$$\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}BC.\cancel{h}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}۳BC.\cancel{h}} = \frac{۱}{۳}$$



$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = \frac{۱}{۲}\ BC.h \qquad ①$$

$$S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = \frac{۱}{۲}\ CD.\ TZ'' + \frac{۱}{۲}\ EF.IZ' + \frac{۱}{۲}\ AB.\ TZ.$$

$$\underline{\underline{\underline{AB = BC = CD = ED = EF = AF}}} \ \frac{۱}{۲}\ BC\ (TZ + TZ' + TZ'') \ \underline{\underline{\underline{TZ + TZ' + TZ'' = h}}}$$

$$\frac{۱}{۲}\ BC.h \quad ②$$

$$۱ \text{ و } ۲ \Rightarrow S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = \frac{۱}{۲}\ BC.h$$

۹ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم، چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کند. نشان دهید هشت‌ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

$$\left.\begin{array}{l} OB = OA = OD = OC \\ \widehat{O}_1'' = \widehat{O}_2'' = \widehat{O}_3''' = \widehat{O}_4''' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$O\overset{\Delta}{A}B = O\overset{\Delta}{A}D = O\overset{\Delta}{D}C = O\overset{\Delta}{C}B$ (ض ز ض)

$\Rightarrow AB = AD = DC = CB \quad 1$

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90 \quad 2$ همچنین (زاویه‌های محاطی رو به رو به قطر)

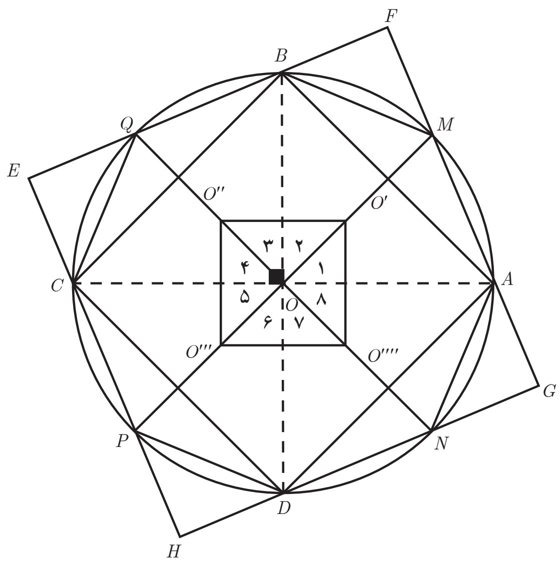
چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است. $\Rightarrow$ ۲ و ۱

عمود منصف هر ضلع در مربع، نیمساز زاویه مقابل ضلع نیز هست، پس :

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \widehat{O}_5 = \widehat{O}_6 = \widehat{O}_7 = \widehat{O}_8 = 45^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA \\ \widehat{M} = \widehat{B} = \widehat{Q} = \widehat{C} = \widehat{P} = \widehat{D} = \widehat{N} = \widehat{A} = \dfrac{7\overset{\frown}{AM}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

هشت‌ضلعی $AMBQCPDN$، منتظم است.



توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود در تدریس این درس، همانند سایر درس‌ها، نکات آموزشی زیر توسط همکاران محترم لحاظ شود :

۱ تا حد امکان به دانش‌آموزان فرصت بحث و بررسی مسائل و ارائهٔ استدلال و نقد استدلال‌های دیگران داده شود.

۲ تا حد امکان از پاسخ مستقیم به دانش‌آموزان و اثبات کامل قضایا و حل تمرین‌ها خودداری شود و سعی شود دانش‌آموزان با بحث و کار گروهی اثبات‌ها را انجام یا تکمیل نمایند و به حل تمرین‌ها بپردازند.

۳ در صورت امکان سعی شود پس از اثبات یا حل هر مسئله‌ای از دانش‌آموزان خواسته شود به دنبال راه حل جدید یا اثبات جدیدی باشند. طبیعی است این امکان برای تمامی قضایا و سؤالات فراهم نیست، ولی برای برخی قضایا و مسائل مطمئناً این امکان وجود دارد؛ بنابراین، لازم است از این فرصت‌ها برای تقویت قدرت استدلال و اثبات و حل مسئله دانش‌آموزان استفاده شود.

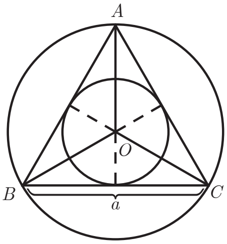
۴ در انجام فعالیت‌ها سعی کنید تا حد امکان دانش‌آموزان بتوانند خود با آن مواجه شوند و آن را حل کنند. شما بر روند انجام فعالیت توسط آنان فقط نظارت کنید. در صورت نیاز، به حداقل راهنمایی اکتفا کنید.

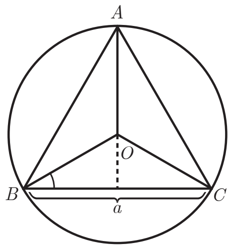
بدفهمی‌ها و اشتباهات رایج دانش‌آموزان :

یکی از رایج‌ترین بدفهمی‌های دانش‌آموزان، استفاده از شرط لازم و کافی برای محاطی بودن یک چندضلعی در خصوص محیطی بودن آن چندضلعی است. شایع‌ترین علت این بدفهمی، درک نادرست از مفهوم محاطی و محیطی بودن و تمایز نگذاشتن بین این دو مفهوم است. برای برطرف کردن این بدفهمی پیشنهاد می‌شود همکاران در این درس با ارائهٔ نمونه‌های مختلف اشکال محاطی و محیطی و بحث در خصوص تمایز بین آنها (محیطی و محاطی بودن یک شکل) موجب درک عمیق در دانش‌آموزان گردند.

نمونه سؤالات تکمیلی درس سوم

۱ با توجه به شکل زیر، اندازه شعاع دایره محیطی و محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به‌دست آورید. (راهنمایی : می‌دانیم فاصلهٔ نقطهٔ همرسی میانه‌ها در هر مثلث تا پای هر میانه برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ آن میانه است).





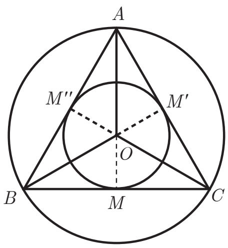
حل :

پیدا کردن اندازه شعاع دایره محیطی : با توجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC و اینکه هر ارتفاعی، نیمساز، عمود منصف و میانه نیز هست، برای محاسبه شعاع دایره محیطی، کافی است اندازه OA را که $\frac{۲}{۳}$ میانه OM هست، به‌دست آوریم.

$$O\overset{\Delta}{B}M : \cos B_{۱} = \frac{BM}{OB} \quad \xrightarrow{\widehat{B}_{۱} = ۳۰^{\circ}} \quad \cos ۳۰^{\circ} = \frac{\frac{a}{۲}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} r = \frac{a}{۲} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}a}{۳}$$

محاسبه اندازه شعاع دایره محاطی : با توجه به شکل دیده می‌شود که شعاع دایره محیطی $\frac{۲}{۳}$ میانه AM و شعاع دایره محاطی $\frac{۱}{۳}$ میانه AM است و چون $r_{\text{محیطی}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ پس : $r_{\text{محاطی}} = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$



۲ اندازه شعاع‌های دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به‌دست آورید.

حل : با توجه به اینکه اندازه شعاع‌های دایره محاطی خارجی هر مثلث از فرمول صفحه بعد به‌دست می‌آیند.

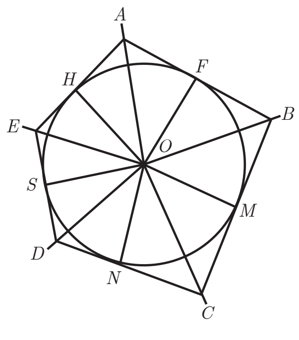
$$\begin{cases} r_a = \dfrac{S}{p-a} \\ r_b = \dfrac{S}{p-b} \\ r_c = \dfrac{S}{p-c} \end{cases} \xrightarrow[\text{مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع : } S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲]{\text{در مثلث متساوی‌الاضلاع : } p=\frac{۳a}{۲}}$$

$$r_a = r_b = r_c = \dfrac{\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\dfrac{۳a}{۲}-a} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

۳ نشان دهید مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با حاصل ضرب نصف محیط در شعاع دایرهٔ محاطی آن.

$S = P \ . \ r$

یک چند ضلعی محیطی را در نظر بگیریم از مرکز دایره به رئوس چندضلعی و نقاط مماس چندضلعی بر دایره وصل می‌کنیم. به‌عنوان نمونه پنج‌ضلعی محیطی دلخواهی را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه در نقطه مماس، شعاع بر ضلع پنج‌ضلعی عمود است مجموع مساحت مثلث‌های حاصل، برابر مساحت پنج‌ضلعی محیطی مورد نظر است.



$$S_{ABCDE} = \frac{OH.AH}{۲} + \frac{OH.EH}{۲} + \frac{OS.ES}{۲} + \frac{OS.SD}{۲} + \frac{ON.DN}{۲} + \frac{ON.NC}{۲} + \frac{OM.MC}{۲}$$

$$+\frac{OM.MB}{۲} + \frac{OF.FB}{۲} + \frac{OF.FA}{۲} \xRightarrow{OH=OF=OM=ON=OS=r} \frac{r}{۲}\ (AH + HE + ES + SD + DN + NC + CM + MB + BF + FA) = \frac{r}{۲}\ .\ ۲P = P\ .\ r$$

۴ توضیح دهید چرا در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، اندازه شعاع دایره محیطی آن، دو برابر اندازه شعاع دایره محاطی‌اش است.

همان‌گونه که در شکل سؤال ۱ مشخص است، شعاع دایره محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع، بخش

کوچک میانه، و شعاع دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع، بخش بزرگ‌تر میانه است. با توجه به قضیه‌ای که دانش‌آموزان در خصوص میانه‌ها در سال گذشته خوانده‌اند، نسبت قسمت بزرگ‌تر میانه به قسمت کوچک‌ترش ۲ به ۱ است؛ یعنی شعاع دایره محیطی، ۲ برابر شعاع دایره محاطی است.

۵ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

ــ چهار رأس هر چهارضلعی محاطی بر یک دایره واقع است. ✓

ــ چهار ضلع هر چهارضلعی محیطی بر یک دایره مماس است. ✓

ــ مربع چهار ضلعی محیطی است ولی محاطی نیست. ×

ــ هر متوازی‌الاضلاعی محاطی است ولی محیطی نیست. ×

ــ دایره‌های محاطی و محیطی هر مربع مساوی یکدیگرند. ×

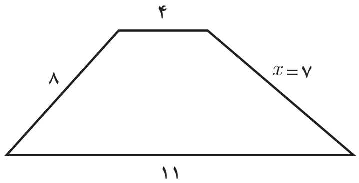
ــ لوزی یک چهار ضلعی محاطی است. ×

ــ مستطیل چهار ضلعی محاطی است ولی هر مستطیلی چهارضلعی محیطی نیست. ×

۶ دو زاویه مجاور از یک چهارضلعی محاطی ۶۰° و ۱۱۰° اند، دو زاویه دیگر چهارضلعی را تعیین کنید. ۶۰ و ۱۱۰

۷ اندازه‌های سه ضلع مجاور یک چهارضلعی محیطی به ترتیب ۴، ۸ و ۱۱ سانتی‌متر است. اندازه ضلع چهارم آن را تعیین کنید.

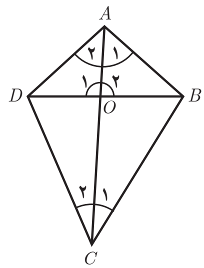
$x + ۸ = ۴ + ۱۱ \rightarrow x = ۷$



۸ ثابت کنید اگر دو ضلع مجاور از یک چهارضلعی محیطی مساوی یکدیگر باشند، دو قطر چهارضلعی بر هم عمودند. آیا یکدیگر را نصف هم می‌کنند؟ با توجه به محیطی بودن چهارضلعی و برابر بودن دو ضلع مجاور داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB+DC=AD+BC \\ AD=AB \text{ طبق فرض سؤال} \end{array}\right\} \rightarrow DC=BC$$

$$\left.\begin{array}{l} AD=AB \\ DC=BC \\ AC=AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \begin{array}{l} \widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲ \\ \widehat{C}_۱=\widehat{C}_۲ \end{array}$$



$$\overset{\Delta}{ADO}\ ,\ \ \overset{\Delta}{ABO}: \left.\begin{matrix}\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲\\ OA=OA\\ AB=AD\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ADO}\cong \overset{\Delta}{ABO}\Rightarrow \widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲=۹۰^\circ$$

بنابراین قطرها بر هم عمودند.

اما در پاسخ به این پرسش که آیا قطرها همدیگر را نصف نیز می‌کنند باید گفت همیشه این گونه نیست؛ مثلاً در شکلی همانند کایت که تمامی این شرایط را دارد، قطرها همدیگر را نصف نمی‌کنند.

۹ ثابت کنید اگر متوازی‌الاضلاعی در دایره‌ای محاط باشد، آنگاه مستطیل است و اگر متوازی‌الاضلاعی بر دایره‌ای محیط باشد، آنگاه لوزی است.

اثبات قسمت اول : اگر متوازی‌الاضلاعی محاطی باشد $\Leftarrow$ مستطیل است.

با توجه به محاطی بودن: $\widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ$ ۱

$\widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$ ۲

با توجه به متوازی‌الاضلاع بودن: $\widehat{B}=\widehat{D}$ ۳

$\widehat{A}=\widehat{C}$ ۴

$$\left.\begin{matrix}۱,۳\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{D}=۹۰^\circ\\ ۲,۴\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{C}=۹۰^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$ چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است

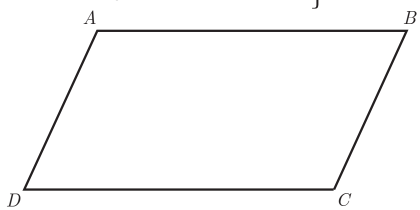
اثبات قسمت دوم : اگر متوازی‌الاضلاعی محیطی باشد لوزی است.

با توجه به محیطی بودن: $AB+DC=BC+AD$ ۱

با توجه به لوزی بودن: $AB=DC$ ۲

$AD=BC$ ۳

$$\left.\right\}\ ۱,۲,۳\Rightarrow AB=BC=DC=AD$$



۱۰ ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، دایرهٔ محاطی داخلی بر سه دایرهٔ محاطی برونی مماس است.

با توجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC داریم که نیمساز هر زاویه داخلی مثلث، عمود منصف ضلع مقابل آن زاویه نیز هست؛ یعنی نقطه F نقطه وسط ضلع AB است.

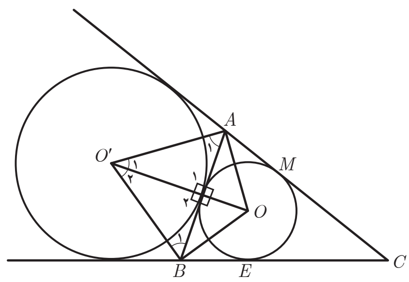
اگر دایره محاطی خارجی نظیر ضلع AB را در نظر بگیریم، با توجه به اینکه مرکز دایره محاطی خارجی

نظیر ضلع AB، نقطه محل برخورد نیمسازهای خارجی در زاویه A و B است، پس طبق شکل و با توجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC داریم :

$$\left.\begin{array}{l} A\overset{\Delta}{O'}F \,,\, B\overset{\Delta}{O'}F : \widehat{A}_1=\widehat{B}_1=60^\circ \quad (1) \\ \widehat{F}_1=\widehat{F}_2=90^\circ \quad (2)\ \text{در نقطه مماس بودن بر ضلع } AB \\ \widehat{A}_1+\widehat{F}_1+\widehat{O'}_1=\widehat{A}_2+\widehat{F'}_2+\widehat{O'}_2=180^\circ \xrightarrow{\text{۱ و ۲}} \widehat{O'}_1=\widehat{O'}_2=30^\circ \\ O'F=O'F \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})}$$

$$A\overset{\Delta}{O'}F \cong B\overset{\Delta}{O'}F \Rightarrow AF=BF$$

یعنی F نقطه وسط AB است. با توجه به اینکه پاره‌خط AB یک نقطه وسط دارد، بنابراین هم دایره محاطی داخلی و هم دایره محاطی خارجی نظیر ضلع AB، در نقطه وسط بر ضلع AB مماس هستند، پس، دو دایرهٔ مذکور در همان نقطه بر هم مماس هستند. به طریقی مشابه ثابت می‌شود که دایرهٔ محاطی داخلی مثلث بر دو دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC نیز در دو نقطه وسط ضلع نظیر مماس است؛ بنابراین، در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، دایرهٔ محاطی داخلی بر سه دایرهٔ محاطی برونی مماس است.



۲

فصل دوم

تبدیل‌های هندسی و کاربردها

عکس: محمدرضا دومیری گنجی

تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.

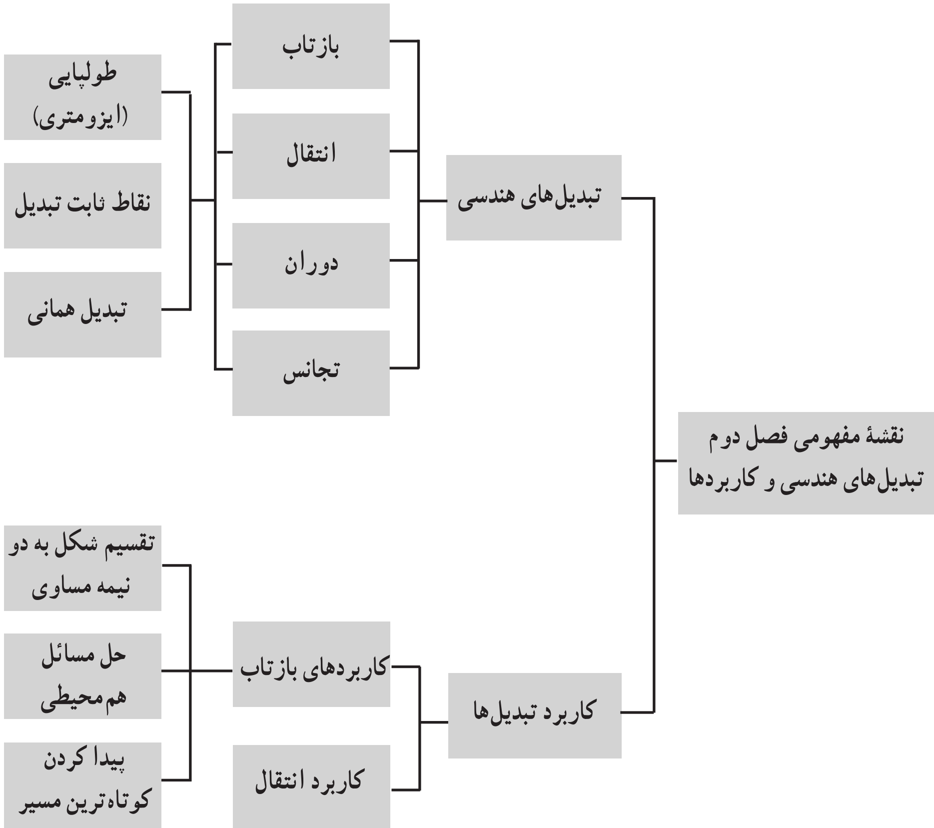
تصویر عنوانی

ـ معماران ایرانی از دانش هندسه در ساخت بناهای تاریخی استفاده می‌کرده‌اند و با دیدن این بناها می‌توان به میزان آگاهی و دانش ریاضی ایرانیان پی برد.

تصویر عنوانی این فصل از کتاب، یکی از زیباترین مساجد ایران از لحاظ کاشی‌کاری و مقرنس و یکی از مساجد قدیمی شهر شیراز به نام مسجد نصیرالملک است که در محله گود عربان (محله اسحق بیگ) واقع در جنوب خیابان لطفعلی‌خان زند در نزدیکی شاهچراغ در کوچه نصیرالملک قرار دارد.

این بنا، به دستور «میرزا حسن علی‌خان»، ملقب به «نصیرالملک» که از اعیان و اشراف شیراز بود، ساخته شد و معماری آن کار محمد حسن معمار بوده است. شیشه‌های رنگی، طاق‌های بلند و کاشی‌کاری‌های فوق‌العاده آن بسیار زیباست. کاشی‌های فیروزه‌ای کف، نقش گل و بوته و آیات قرآنی سقف و ستون‌های سنگی، نمای داخلی آن را بسیار دل‌انگیز کرده است. در ساعات اولیه صبح، بخصوص در فصل پاییز و زمستان، تابش آفتاب از پس شیشه‌های رنگی درهای ورودی بر کاشی‌کاری‌ها و ستون‌ها و کف و دیواره شبستان، منظره‌ای فوق‌العاده را می‌آفرینند که در هیچ تابلوی نقاشی یافت نمی‌شود و به همین علت به آن «مسجد صورتی» نیز می‌گویند.

به دلیل وجود تقارن‌های زیبای هندسی در بنای این مسجد، به عنوان تصویر عنوانی این فصل انتخاب گردیده است.


نقشهٔ مفهومی فصل دوم
تبدیل‌های هندسی و کاربردها
تبدیل‌های هندسی
بازتاب
انتقال
دوران
تجانس
طولپایی
(ایزومتری)
نقاط ثابت تبدیل
تبدیل همانی
کاربرد تبدیل‌ها
کاربردهای بازتاب
کاربرد انتقال
تقسیم شکل به دو
نیمه مساوی
حل مسائل
هم‌محیطی
پیدا کردن
کوتاه‌ترین مسیر

نگاه کلی به فصل

هندسه، مطالعه ویژگی‌هایی از یک مجموعه است که تحت یک گروه از تبدیل‌ها، روی آن مجموعه حفظ می‌شوند. **(فلیکس کلاین)**

اقلیدس سعی کرد انطباق مثلث‌ها را، با حرکت دادن یک مثلث و منطبق کردن آن بر مثلث دیگر، ثابت کند.

اواین حرکت‌ها را تعریف نکرده بود و فقط به‌طور شهودی آنها را در شکل‌ها نشان داده بود. در سال ۱۸۲۷.

ریاضی‌دان و ستاره‌شناس آلمانی، «موبیوس»، به‌وسیله تعمیم حرکت در تمام صفحه، مفهومی از ترکیب حرکت‌ها را ارائه کرد.

تبدیل‌ها در صفحه، نوعی از تابع روی نقاط هستند که نقطه‌هایی از صفحه تحت آنها به نقاط دیگری از آن صفحه نظیر می‌شوند. «فلیکس کلاین» یکی از هندسه‌دانان بزرگ اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم در دانشگاه «ارلانگر» آلمان، برنامه‌ای در سال **۱۸۷۲** ارائه کرد که بر اساس آن هندسه باید به‌صورت مطالعه تبدیل‌ها و اشیائی که تحت تبدیل‌ها تغییر نمی‌کنند یا ثابت می‌مانند تعریف شود. این دیدگاه به نام «برنامه ارلانگر» شناخته می‌شود.

اگر برنامه ارلانگر را در هندسه اقلیدسی به‌کار ببریم، در این هندسه، تبدیل‌ها چه ویژگی‌هایی باید داشته باشند؟ یعنی تحت چه تبدیل‌هایی، شکل‌های اساسی هندسه اقلیدسی مانند خط‌ها، پاره‌خط‌ها،مثلث‌ها و دایره‌ها پایا می‌مانند؟ پاره‌خط‌ها ساختار اصلی بیشتر شکل‌های هندسی هستند؛ بنابراین، تبدیل‌های اقلیدسی باید حداقل، اندازه پاره‌خط‌ها را حفظ کنند؛ یعنی باید طول را ثابت نگه دارند.

بنابراین روشی جدید در هندسه وجود دارد که در آن می‌توان هدف اقلیدس را به روش دقیق ریاضی منظم کرد. این کار با تعریف مفهوم کلی حرکت صلب یا طولپا به کمک تبدیل‌های هندسی انجام می‌گیرد و «**هندسه تبدیلاتی**» نام دارد.

در این فصل ابتدا تبدیل‌های هندسی بازتاب، انتقال و دوران به شکل شهودی مرور می‌شود و سپس ویژگی‌های آنها به شکل استنتاجی بررسی خواهد شد. تبدیل تجانس نیز در ادامه، معرفی و بررسی خواهد شد.

درس اوّل

تبدیل‌های هندسی

اهداف درس

۱ آشنایی با تبدیل‌های هندسی و یادآوری اطلاعات قبلی؛
۲ شناخت تبدیل به عنوان تابع؛
۳ درک مفهوم طولپایی (ایزومتری) و تعریف آن؛
۴ شناخت ویژگی‌های تبدیل‌های طولپا؛
۵ شناخت بازتاب، انتقال، دوران و تجانس و ویژگی‌های هر یک از آنها؛
۶ آشنایی با نقطه ثابت تبدیل و تعریف آن؛
۷ آشنایی با ویژگی‌های تجانس مستقیم و معکوس، انقباض و انبساط؛
۸ شناخت تبدیل همانی و تعریف آن.

توصیه‌های آموزشی

۱ برای انجام فعالیت اول فصل، زمان کافی در نظر بگیرید تا فرصت تأمل و تفکر به دانش‌آموزان داده شود؛ چون در قسمت‌های بعدی نیاز به صرف وقت زیاد نخواهید داشت.

۲ در این کتاب، تمرکز اصلی بر روی دیدگاه هندسی است. لذا از ورود به مباحث تحلیلی و جبری اجتناب کنید.

۳ در ابتدای تدریس هر یک از تبدیل‌ها و بیان ویژگی‌های آن، سعی شود هر ویژگی، در تبدیل‌های قبلی یادآوری و از دانش‌آموزان سؤال شود تا بتوانند مقایسه بین تبدیل‌ها را به خوبی یاد بگیرند.

۴ استفاده از تصاویر مربوط به بناهای تاریخی و معماری ایرانی می‌تواند هم در آموزش بهتر مطالب راهگشا باشد و هم باعث افزایش عشق به هنر و میهن گردد.

روش تدریس درس اوّل

ایجاد انگیزه

با نمایش دادن تصاویری از معماری ایرانی، که تبدیل‌های هندسی در آنها به‌کار رفته است، از دانش‌آموزان بخواهیم ویژگی‌های تصاویر را بیان کنند. این ویژگی‌ها را به‌طور شهودی بررسی کنیم.

آموزش تبدیل‌های هندسی در این کتاب با مرور مفاهیم سال‌های قبل شروع می‌شود. کتاب می‌کوشد، ضمن یادآوری مفهوم بازتاب، دوران و انتقال، ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی بیان کند.

در اولین فعالیت فصل، مفهوم بازتاب، انتقال و دوران، ضمن حل چند سؤال، یادآوری شده، در ادامه با طرح سؤالات متنوع، این مفاهیم و ویژگی‌های تبدیل‌های فوق بررسی می‌شوند. پس از انجام این فعالیت، تعریف دقیق تبدیل T، به عنوان یک تابع روی نقاط صفحه، بیان می‌گردد و با چند مثال ویژگی‌های تابع بودن T نشان داده می‌شود. آنگاه پس از تعریف طولپایی (ایزومتری) به فعالیت بعدی می‌پردازیم که در آن اولین ویژگی تبدیل‌های طولپا بررسی شده است و سپس قضیه مربوط به آن نتیجه‌گیری می‌شود. محتوای این درس در یک جلسه ارائه می‌شود.

در جلسه بعد، تبدیل‌های بازتاب، انتقال و دوران معرفی و بررسی می‌شود.

۱ **بازتاب**: ابتدا روش به‌دست آوردن بازتاب یک نقطه را از دانش‌آموزان سؤال می‌کنیم و از آنان می‌خواهیم، با رسم شکل روی تابلو، مفهوم بازتاب را بیان کنند و خود به تعریف دقیق آن می‌پردازیم و همچنین خط بازتاب یا محور بازتاب را معرفی می‌کنیم.

در ادامه، یک نقطه روی محور بازتاب می‌گذاریم و از دانش‌آموزان می‌خواهیم بازتاب این نقطه را نسبت به محور فوق پیدا کنند و سپس نقطه ثابت تبدیل را تعریف می‌کنیم.

حال از دانش‌آموزان در مورد تعداد نقطه‌های ثابت بازتاب سؤال می‌کنیم و با راهنمایی، آنان را به پاسخ «بی‌شمار نقطه ثابت» می‌رسانیم. در ادامه یک «فعالیت» برای اثبات طولپا بودن بازتاب طراحی شده و فعالیت بعدی به بررسی این ویژگی اختصاص دارد که آیا بازتاب، شیب‌خط را حفظ می‌کند یا خیر. «کار در کلاس» بعدی نکات بیشتری درباره ویژگی‌های آن را دربردارد.

۲ در جلسه بعد، بحث «تبدیل انتقال» را مطرح می‌کنیم. در ابتدا «بردار و ویژگی‌های آن» و «دو بردار برابر» یادآوری می‌شوند. سپس انتقال یک شکل به کمک بردار انتقال توضیح داده شده، تعریف انتقال بیان

می‌شود. با انجام «فعالیت» بعد از آن، طولپا بودن انتقال بررسی شده، قضیه مربوط به آن نیز بیان می‌شود. در ادامه فعالیت، قضیه حفظ شیب خط در حالت‌های مختلف مطرح می‌شود که می‌توان از فراگیران خواست آن را به عنوان تمرین انجام و در جلسه بعدی ارائه دهند.

۳ تبدیل بعدی، دوران است. با نشان دادن تصاویر کتاب، تعریف دوران و نحوه و جهت دوران یک شکل توضیح داده می‌شود. در فعالیت بعدی قضیه طولپا بودن دوران بررسی شده، با حل «کار در کلاس» مفاهیم تثبیت می‌شود.

تمرین‌های صفحه بعد به عنوان تکلیف در منزل در نظر گرفته شده، این مبحث در این جلسه آموزشی به پایان می‌رسد. در جلسه بعد، بحث تبدیل تجانس اولین بار برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود. با نمایش تصاویر کتاب و ارتباط دادن آن با تشابه می‌توان ذهن دانش‌آموزان را به مطلب جدید نزدیک و سپس تجانس را تعریف کرد و نحوه پیدا کردن تصویر یک نقطه را در تجانس توضیح داد.

در فعالیت بعدی حالت‌های مختلف تجانس با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای نسبت تجانس بررسی شده است. دقت داشته باشید که در قسمت اول این فعالیت دانش‌آموز هنوز از رابطهٔ $\frac{A'B'}{AB}=K$ اطلاع ندارد و لذا نسبت تجانس را به کمک صفحه شطرنجی و طبق تعریف تجانس از مقایسه OA' و OA تشخیص می‌دهد.

در ادامهٔ این فعالیت و با پر کردن جدول داده شده، برای مقادیر مختلف نسبت تجانس، ویژگی‌های تجانس جمع‌بندی می‌شود. دقت داشته باشید که تجانس همواره (حتی برای مقادیر منفی از نسبت تجانس) جهت شکل را حفظ می‌کند.

در دو «فعالیت» بعدی، دو قضیه مربوط به حفظ شیب خط و اندازه زاویه در تجانس ثابت شده‌اند. در این فعالیت نسبت تجانس مثبت است و مرکز تجانس بیرون خط و زاویه در نظر گرفته شده. اثبات در حالتی که نسبت تجانس منفی است، به دانش‌آموز واگذار شده است.

در «کار در کلاس» بعدی نیز، ویژگی‌های دقیق‌تری از تجانس طرح و بررسی می‌شود.

در فعالیت بعدی، «تبدیل همانی» تعریف شده و در شرایط مختلف بازتاب، انتقال، دوران و تجانس بررسی می‌شود.

طولپایی تبدیل همانی، سؤالی است که می‌توان به عنوان تحقیق برای دانش‌آموزان در نظر گرفت که آن را در جلسه بعدی ارائه دهند.

درس دوم

کاربرد تبدیل‌ها

اهداف درس

۱ آشنایی با کاربرد تبدیل‌ها در محیط اطراف؛
۲ آشنایی با کاربرد بازتاب در حل مسئله تقسیم یک شکل به قطعه‌های مساوی؛
۳ آشنایی با کاربرد بازتاب در حل مسئله هم‌پیرامونی؛
۴ آشنایی با کاربرد بازتاب در حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر؛
۵ حل مسئله‌های نمونه مثال‌های کتاب.

توصیه‌های آموزشی

۱ از دانش‌آموزان بخواهید در این درس به شکل‌های کتاب توجه کرده، آنها را توضیح دهند.
۲ از دانش‌آموزان بخواهید کاربردهایی از تبدیل‌ها، به‌خصوص بازتاب را که با آن برخورد داشته‌اند، بیان کنند.

روش تدریس درس دوم

در این درس چند کاربرد از «تبدیل هندسی بازتاب» مطرح شده است. در ابتدا با نمایش تصاویری از هنر و معماری ایرانی، کاربرد تبدیل‌ها را در تصاویر بررسی کنید و از دانش‌آموزان بخواهید آنها را تفسیر کنند دقت داشته باشید که در این قسمت اشاره دقیق به تبدیل‌های به کار رفته مدنظر نیست و تنها سعی شده است که از جلوه‌های هنری برای جلب توجه و تقویت انگیزه دانش‌آموزان استفاده شود. سپس با طرح سه مسئله «تقسیم کیک به قطعه‌های مساوی»، «هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی» و «پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر»،

کاربرد بازتاب را بررسی می‌کنیم. در ادامه، با حل مسئله‌های «کار در کلاس» و تمرین مربوط به آن، یادگیری عمیق می‌شود.

کج‌فهمی‌ها و اشتباهات رایج

مواردی که ممکن است دانش‌آموزان در آنها دچار کج‌فهمی یا اشتباه در درک مطلب شوند و لازم است معلمان بر آن تأکید بیشتر کنند عبارت‌اند از :

۱ **درک مفهوم نقطه ثابت تبدیل** : بهتر است با استفاده از تصاویر مختلف و نمایش نقاط ثابت تبدیل در آن، به درک بهتر مفهوم آن کمک کنید؛

۲ زاویه منفی در درس مثلثات معرفی می‌شود در این کتاب زاویه منفی نداریم؛

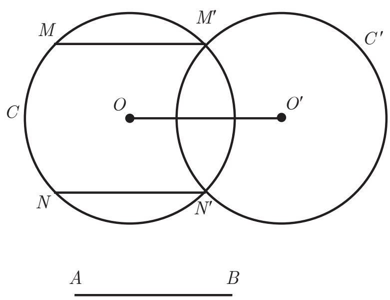
۳ **تجانس مستقیم و معکوس** : با مثال‌ها و تصاویر مختلف نشان دهیم که به ازای همه مقادیر k، تجانس جهت شکل را حفظ می‌کند و حتی در تجانس معکوس هم جهت تغییر نمی‌کند.

۴ **انقباض و انبساط** : در این بخش با شکل نشان دهیم که برای $|k|<1$ در شکل انقباض صورت می‌گیرد و تصویر مجانس نسبت به شکل اولیه کوچک‌تر می‌شود. همچنین برای $|k|>1$ انبساط صورت می‌گیرد و مجانس نسبت به شکل اولیه بزرگ‌تر می‌شود. استفاده از جدول‌های صفحه ۴۶ و ۴۷ به درک بهتر و تمایز بین این حالت‌ها کمک می‌کند.

سؤالات ارزشیابی

۱ دایره C و پاره‌خط AB مفروض‌اند. چند وتر مساوی و موازی AB در دایره رسم می‌شود؟

حل : اگر C' انتقال‌یافته دایره C تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ باشد و C و C' در نقاط M' و N' متقاطع باشند، جواب‌های مسئله MM' و NN' است؛ پس مسئله، حداکثر، دو جواب دارد.



۲ مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC با نسبت تجانس ۳ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با ۱۰ باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ چقدر است؟

حل: $\frac{S'}{S} = K^{۲} \rightarrow \frac{S'}{۱۰} = ۹ \rightarrow S' = ۹۰$

۳ دو دایره متساوی مماس خارج‌اند. این دو دایره با چه نسبتی مجانس یکدیگرند؟

حل : K=−۱ و مرکز تجانس آنها نقطه تماس دو دایره است.

۴ دو دایره C و C' مفروض‌اند. چند مثلث متساوی‌الاضلاع با رأس ثابت A وجود دارد که به رأس دیگرش روی دو دایره باشد؟

حل : اگر دایره C را به مرکز A و زاویه $\alpha=۶۰^\circ$ دوران دهیم حداکثر در دو نقطه با دایره C' متقاطع خواهد بود. پس حداکثر دو مثلث متساوی‌الاضلاع با شرایط فوق قابل رسم است.

۵ در شکل زیر نقطه O مرکز تجانس و A مجانس B است. حدود نسبت تجانس را تعیین کنید؟

حل :

$$\overrightarrow{OA} = K\overrightarrow{OB} \Rightarrow K < ۰ \quad , \quad |K| > ۱ \Rightarrow K < -۱$$

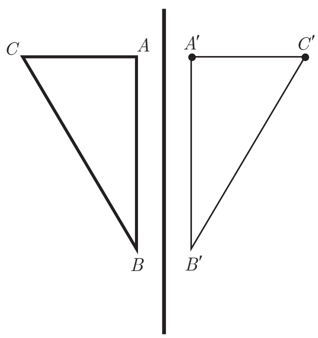
پاسخ «فعالیت‌ها» «کار در کلاس»ها و تمرین‌ها

فعالیت صفحه ۳۴

۱

الف) ۲ ب) ۳ و ۱ پ) ۱ و ۳

۲



الف) از رأس‌های مثلث بر خط d عمود کرده، به اندازه آن پاره‌خط، امتداد می‌دهیم تا تصویرش به‌دست آید. سپس نقاط تصویر یعنی A' و B' و C' را به هم وصل می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC است.

خط d عمود منصف پاره‌خط‌هایی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند.

ب) موقعیت را تغییر می‌دهد، ولی اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

پ) خیر؛ شیب پاره‌خط BC با شیب پاره‌خط متناظرش $B'C'$ برابر نیست.

ت) اگر خط مورد نظر، موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد،

آن‌گاه شیب آن حفظ می‌شود؛ مثلاً در شکل صفحهٔ قبل، پاره‌خط AC بخشی از خط عمود بر d است و تصویر آن هم روی همان خط عمود قرار دارد و به همین دلیل شیب پاره‌خط‌های AC و $A'C'$ برابر است. همچنین پاره‌خط AB موازی محور بازتاب است و تصویرش هم با آن موازی است؛ پس شیب هر دو یکی است.

۳

الف) با توجه به اندازه بردار $\vec{V}$ رأس‌های مربع را ۵ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم و نقاط تصویر را به‌دست می‌آوریم. سپس نقاط تصویر را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. مربع $A'B'C'D'$ انتقال یافته مربع $ABCD$ تحت بردار V است. پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می کند با هم و با بردار V موازی و مساوی‌اند.

ب) موقعیت شکل را حفظ نمی‌کند، ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) بله　　　ت) بله

۴

ب) موقعیت شکل را حفظ نمی کند، ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) خیر، شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویرش برابر نیست.

ت) اگر زاویه دوران مضارب π باشد (۰، ۱۸۰، ۳۶۰) دوران تحت آن شیب خط را حفظ می کند.

فعالیت صفحه ۳۶

دقت داشته باشید که این فعالیت یک تبدیل را در حالت کلی نشان می‌دهد و انتقال نیست. با توجه به طولپایی تبدیل داریم :

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{cases} \overset{\text{ض‌ض‌ض}}{\Longrightarrow} O\overset{\Delta}{A}B \cong O'\overset{\Delta}{A'}B' \overset{\text{اجزای متناظر}}{\Longrightarrow} A\hat{O}B = A'\hat{O'}B' = \alpha$$

فعالیت صفحه ۳۸

الف) می‌دانیم مستطیلی چهار ضلعی است که همه زاویه‌های آن قائمه است. AB موازی d است

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} AH = BH' \Rightarrow ۲AH = ۲BH' \xrightarrow[BH'=B'H']{AH=A'H} AA' = BB' \\ \left.\begin{array}{l} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \end{array}\right\}$$

دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی پس $\Rightarrow ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است

و بنابراین $AB = A'B'$

$$\left.\begin{array}{l} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \parallel d$$

از طرفی متوازی‌الاضلاع $ABB'A'$ زاویه قائمه دارد. پس چهار ضلعی $ABB'A'$ یک مستطیل است.

ب) اگر هر دو نقطه ابتدا و انتهای پاره‌خط روی خط بازتاب باشند در این حالت بازتاب پاره‌خط MA بر روی خودش منطبق است.

$$\begin{matrix} S(M)=M \\ S(A)=A \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad MA=MA$$

همنهشتی مثلث‌ها

$$\left.\begin{matrix} AH=A'H \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \\ MH=MH \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} M\overset{\Delta}{A}H \cong M\overset{\Delta}{A'}H \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MA=MA'$$

خاصیت عمود منصف یک پاره‌خط : خط d عمود منصف پاره‌خط AA' است؛ بنابراین، هر نقطه مثل M روی خط d از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است؛ یعنی $MA=MA'$

پ) قبلاً اشاره شد که تبدیل یافته هر خط راست البته یک خط راست است. بنابراین تبدیل یافته خط MB خط MB' است و هر نقطه مثل A روی خط MB بازتابی مثل A' دارد که روی خط MB' قرار دارد.

پس :

$$\left.\begin{matrix} AB=MB-MA \\ A'B'=MB'-MA' \\ MB=MB', MA=MA' \quad \text{از قسمت ب داریم} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

ت) طبق آنچه در (پ) گفته شد بازتاب خط AB خطی مثل $A'B'$ است.

حال داریم :

$$\left.\begin{matrix} AB=AM+MB \\ A'B'=A'M+B'M \\ MB=MB' \ , \ AM=A'M \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

فعالیت صفحه ۳۹

الف) خط n موازی خط بازتاب d است. دو نقطه دلخواه مانند A و B را روی n انتخاب می کنیم. طبق قسمت (الف) در فعالیت صفحه قبل می‌دانیم که تصویر پاره‌خط AB نسبت به خط بازتاب d یعنی پاره‌خط $A'B'$ با پاره‌خط AB و خط d موازی است. از طرفی چون خط n' تصویر خط n است، پس نقاط A' و B' نیز روی n' قرار دارند؛ در نتیجه خط n' موازی n و d خواهد بود.

وقتی دو خط موازی باشند، در صورت وجود شیب، شیب‌ها با هم برابرند؛ پس شیب خط حفظ می‌شود. وقتی شیب برای یکی از خط‌ها تعریف نشود، برای دیگری نیز تعریف نمی‌شود؛ پس در این حالت، بازتاب شیب خط را حفظ می کند.

ب) حفظ نمی‌کند.

بدیهی است که اگر خط داده شده در راستای عمود بر محور بازتاب باشد، در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

کار در کلاس صفحه ۴۰

الف) A

چون خط d عمود منصف پاره‌خط AA' است، بنابراین : $d \perp AA'$ و $A'H = AH$

پس اگر از A' بر خط d عمود کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم، نقطه A به‌دست می‌آید.

ب) خود آن نقطه است.

$$(A')'=A \qquad\qquad S(S(A))=S(A')=A$$

پ) مثلث ــ همنهشت

ت) موازی یا عمود

ث) روی خط d ــ بی‌شمار

فعالیت صفحه ۴۱

الف) A' تصویر A است، پس بنا به تعریف انتقال $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{V}$ یعنی اندازه پاره‌خط AA' مساوی طول بردار $\overrightarrow{V}$ و با آن موازی است. B' تصویر B است و به‌طور مشابه $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{V}$ درنتیجه AA' و BB' موازی و مساویند و با توجه به راهنمایی فوق چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است؛ پس $AB = A'B'$

ب)

۱)
$$\begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \\ AA' = BB' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

۲)

$$\left.\begin{cases} AB = AA' - BA' \\ A'B' = BB' - BA' \\ AA' = BB' \end{cases}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

۲ در هر یک از حالت‌های فوق نشان می‌دهیم انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند. در حالت الف) نتیجه گرفتیم که چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است؛ پس $AB \parallel A'B'$ درنتیجه شیب پاره‌خط‌ها یکی است.

در حالت (ب) و (پ) هر پاره‌خط با تصویرش بر روی یک خط قرار دارند؛ (به عبارت دیگر نقاط A، B، A'، B' روی یک خط قرار دارند) پس شیب آنها با هم برابر است.

فعالیت صفحه ۴۲

الف) $O_1 + O_2 = O_3 + O_2 = \alpha \quad \Leftarrow \quad AOB = A'OB'$

همنهشتی دو مثلث :

$$\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ AOB = A'OB' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} A\overset{\Delta}{O}B \cong A'\overset{\Delta}{O}B' \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AB = A'B'$$

ب) با توجه به شکل داریم :

$$\begin{cases} A\hat{O}B = \hat{\alpha} + A'\hat{O}B \\ A'\hat{O}B' = \hat{\alpha} + A'\hat{O}B \end{cases} \Rightarrow AOB = A'OB' \Rightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{cases} \overset{\text{ض‌زض}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow A\overset{\Delta}{O}B \cong A'\overset{\Delta}{O}B' \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AB = A'B'$$

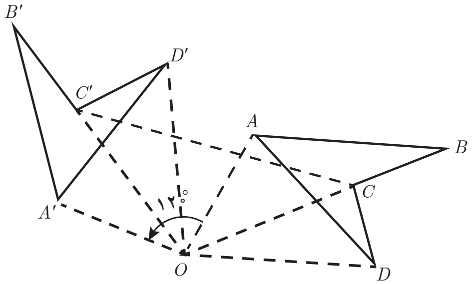
پ)

$$\left.\begin{matrix} AB = AO + OB \\ A'B' = A'O + OB' \\ AO = A'O \ , \ OB = OB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

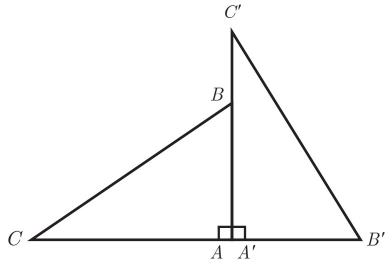
ت)

$$\left.\begin{matrix} AB = AO - OB \\ A'B' = A'O - OB' \\ AO = A'O \ , \ OB = OB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

کار در کلاس صفحه ۴۳



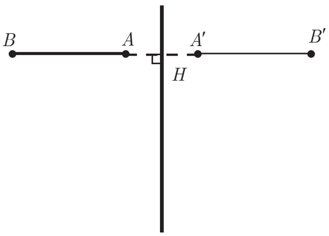
(ب)



(الف)

تمرین صفحه ۴۴

۱ از تعریف بازتاب $BH = B'H \Rightarrow AB + AH = B'A' + A'H \xrightarrow{AH=A'H} AB = A'B'$



۲ در بازتاب این نقاط، جهت حرکت خلاف عقربه‌های ساعت است. خیر؛ می‌توان گفت که بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

۳

الف) $AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' \xrightarrow[A'H'=H'A'']{AH=HA'} AA'' = ۲HA' + ۲A'H'$

$\Rightarrow AA'' = ۲\underbrace{(HA' + A'H')}_{m} \Rightarrow AA'' = ۲m$

ب) بنابر قسمت (الف) به روش مشابه می‌توان نتیجه گرفت :

$BB'' = CC'' = ۲m$

پ) با یک انتقال تحت برداری که اندازه آن دو برابر فاصله بین دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ یعنی $۲m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است، می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه : دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی داشته باشند، یک انتقال را نتیجه می‌دهند.

۴

الف) خط $d_۱$ محور بازتاب است؛ پس نیمساز زاویه AOA′ است؛ یعنی $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

خط $d_۲$ محور بازتاب است؛ پس نیمساز زاویه A′OA″ است؛ یعنی : $\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$

$$A\hat{O}A'' = \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ + \hat{O}_۴ \xrightarrow[\hat{O}_۳=\hat{O}_۴]{\hat{O}_۱=\hat{O}_۲} A\hat{O}A'' = ۲\hat{O}_۲ + ۲\hat{O}_۳$$

$$\Rightarrow A\hat{O}A'' = ۲(\hat{O}_۲ + \hat{O}_۳) \Rightarrow AOA'' = ۲\theta$$

ب) طبق قسمت (الف) و به‌طور مشابه ثابت می‌شود : $B\hat{O}B'' = C\hat{O}C'' = ۲\theta$

پ) با توجه به برابری OA ، OA' و OA'' با یک دوران به مرکز O (نقطه برخورد دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$) و زاویه‌ای به اندازه دو برابر زاویه بین دو خط (۲θ) می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه : دو بازتابی که محورهای بازتاب متقاطع داشته باشند، یک دوران را نتیجه می‌دهند.

پاسخ چرا در پایین صفحه ۴۵

اگر در تجانس به مرکز O و نسبت K، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت K باشد، آنگاه :

$$K > ۰ \Rightarrow OM' = KOM \overset{\times(\frac{۱}{K})}{\Rightarrow} \frac{۱}{K}OM' = OM$$

$$K < ۰ \Rightarrow OM' = |K|OM \overset{\times\left|\frac{۱}{K}\right|}{\Rightarrow} \left|\frac{۱}{K}\right|.OM' = OM$$

بنابراین نقطه M مجانس نقطه M' به نسبت $\frac{۱}{K}$ است.

فعالیت صفحه ۴۶

الف) ۱ با توجه به تعریف تجانس نقاط B و B' در یک طرف O قرار دارند پس $K>۰$ در نتیجه :

$OB' = K.OB \Rightarrow K = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow K = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow K = ۳$ (بدون محاسبه دقیق هم به کمک صفحه شطرنجی واضح است که OB' سه برابر OB است.)

$$OC' = K.OC \Rightarrow K = \frac{OC'}{OC} \Rightarrow K = \frac{۱۰}{۵} \Rightarrow K = ۲$$

ب)

خیر؛ زیرا اندازه پاره‌خط‌ها حفظ نمی‌شود.

پ) **در مربع :** طول تصویر هر پاره‌خط ۳ برابر شده و در واقع این عدد همان نسبت تجانس است. همچنین

$$A'B' = ۳AB \qquad B'C' = ۳BC$$

$$C'D' = ۳CD \qquad D'A' = ۳DA$$

در مثلث : طول تصویر هر پاره‌خط ۲ برابر شده و در واقع این عدد همان نسبت تجانس است.

$$A'B' = ۲AB \qquad B'C' = ۲BC$$

$$AC = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳} \qquad A'C' = \sqrt{۱۶+۳۶} = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow A'C' = ۲AC$$

ت) **در مربع :** $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{۳۶}{۴} = ۹ = ۳^۲$ **در مثلث :** $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}\times۴\times۶}{\frac{۱}{۲}\times۲\times۳} = ۴ = ۲^۲$

در نتیجه مساحت تصویر نسبت به مساحت هر شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس است.

۲

الف) از رأس‌های هر شکل به مرکز O وصل می‌کنیم و به اندازه نسبت تجانس K امتداد می‌دهیم. اگر K مثبت باشد، نقطه و تصویرش در یک طرف نقطه O، و اگر K منفی باشد، نقطه و تصویرش در دو طرف نقطه O قرار دارند.

ب)

تجانس

ن	د	د	د	ن
د	د	د	د	د
ن	د	د	د	ن
ن	د	د	د	ن
د	د	د	د	د
ن	د	د	د	ن

پ) $K = ۱$ یا $K = -۱$ به عبارتی $|K| = ۱$

ت) این خطوط در مرکز تجانس یعنی نقطه O همرس‌اند.

فعالیت صفحه ۴۸

ب) بنابر عکس قضیه تالس $AB \parallel A'B'$ $\Rightarrow$ $OB' = K.OB \Rightarrow \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = K \Rightarrow AB \parallel A'B'$

فعالیت صفحه ۴۸

با توجه به شکل و قضیه قبل داریم :

۱ $\hat{B}_۱ = \hat{B'}_۱ \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}}$ $AB \parallel A'B'$, OB' مورب

۲ $\hat{B}_۲ = \hat{B'}_۲ \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}}$ $BC \parallel B'C'$, OB' مورب

از جمع دو طرف رابطه ۱ و ۲ داریم :

$$\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = \hat{B'}_۱ + \hat{B'}_۲ \Rightarrow A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$$

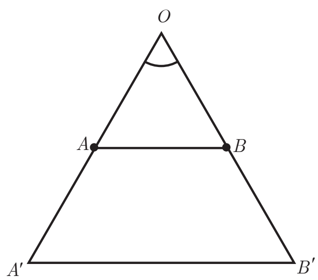
کار در کلاس صفحه ۴۹

۱ الف)

حالت اول : برای سادگی مسئله را تنها برای حالتی بررسی می‌کنیم که نقطه O روی پاره‌خط AB قرار ندارد. اگر $K > ۰$ در نتیجه :

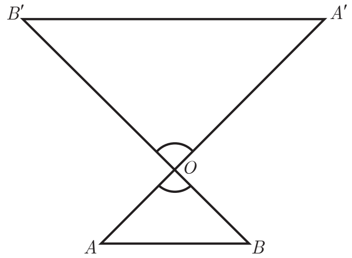
$$\left.\begin{array}{l} OA' = K.OA \\ OB' = K.OB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}}$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = K$$



حالت دوم : در این حالت نقطه O روی پاره‌خط AB قرار ندارد و $K<0$ در نتیجه :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA'=K.OA\\OB'=K.OB\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=K\\ \\ A'\hat{O}B'=A\hat{O}B\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{مثلث}]{\text{ق ۲ تشابه دو}} A\overset{\Delta}{O}B\sim A'\overset{\Delta}{O}B'\Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}=K$$



۱ ب)

فرض کنیم A_n ...... $A_۲$ $A_۱$ یک n ضلعی و نقطه O مرکز تجانس و K نسبت تجانس و چندضلعی A'_n ...... $A'_۲$ $A'_۱$ مجانس آن باشد، بنابر تعریف تجانس داریم :

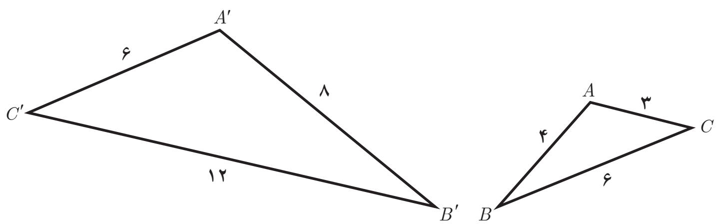
طبق الف:

$$\left.\begin{array}{l}OA'_۱=|K|.OA_۱\\OA'_۲=|K|.OA_۲\\ \vdots\\ OA'_n=|K|.OA_n\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{OA'_۱}{OA_۱}=\frac{OA'_۲}{OA_۲}=\frac{OA'_۳}{OA_۳}=\cdots=\frac{OA'_n}{OA_n}=|K|$$

چون اضلاع دو چند ضلعی متناسب هستند، و تجانس اندازه زاویه‌ها را ثابت نگه می‌دارد پس دو nضلعی متجانس حتماً مشابه هستند.

۲ تجانس شیب خط را حفظ می‌کند. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، ولی چون شیب خط‌هایی که شامل ضلع‌های مثلث‌ها می‌باشند حفظ نشده است، پس دو مثلث متجانس نیستند.

$K=۲$



فعالیت صفحه ۴۹

الف) انتقال در صورتی همانی است که بردار انتقال با بردار صفر برابر باشد.

دوران در صورتی همانی است که زاویه دوران صفر درجه یا ۳۶۰ درجه باشد.

تجانس در صورتی همانی است که در آن $K = 1$.

ب) بله؛ زیرا هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می‌کند. $T(A) = A \ , \ T(B) = B \Rightarrow AB = AB$

پ)

۱ خیر؛ زیرا هر نقطه باید تحت یک بردار غیرصفر در صفحه بلغزد؛ بنابراین، نمی تواند بر روی خودش بلغزد.

۲ مرکز دوران تحت هر دورانی ثابت می‌ماند؛ پس نقطه ثابت تبدیل است.

۳ مرکز تجانس، تصویرش روی خودش قرار می‌گیرد؛ پس نقطه ثابت تبدیل است.

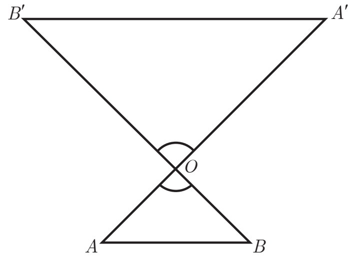
کار در کلاس صفحه ۵۰

	طول پاره‌خط	اندازه زاویه	شیب‌خط	جهت شکل	مساحت شکل
بازتاب	د	د	ن	ن	د
انتقال	د	د	د	د	د
دوران	د	د	ن	د	د
تجانس	ن	د	د	د	ن

تمرین صفحه ۵۰

۱ الف) اگر نقاط A' و B' مجانس‌های A و B باشند داریم :

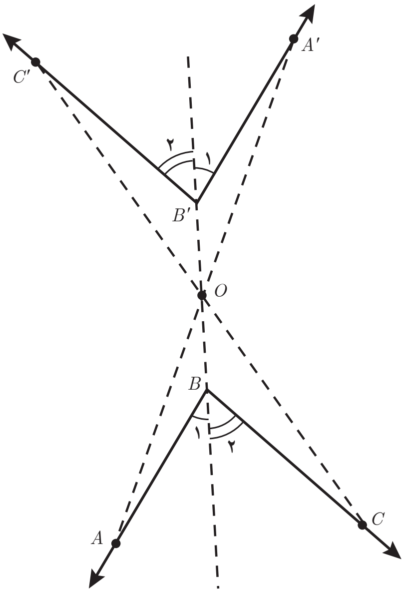
$$\begin{matrix} OA' = K.OA \\ OB' = K.OB \end{matrix} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow$$ شیب دو خط مساوی است



ب) چون تجانس شیب‌خط را حفظ می‌کند، پس داریم :

$$AB \parallel A'B' \text{ , } BB' \text{ مورب } \Rightarrow \hat{B}_{۱} = \hat{B}'_{۱}$$

$$BC \parallel B'C' \text{ , } BB' \text{ مورب } \Rightarrow \hat{B}_{۲} = \hat{B}'_{۲}$$

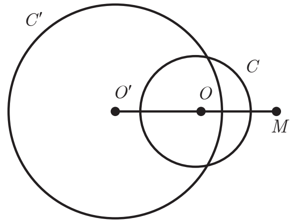


از جمع طرفین دو رابطه خواهیم داشت :

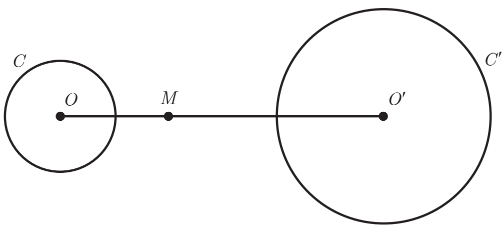
$$\hat{B}_{۱} + \hat{B}_{۲} = \hat{B}'_{۱} + \hat{B}'_{۲}$$

$$\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

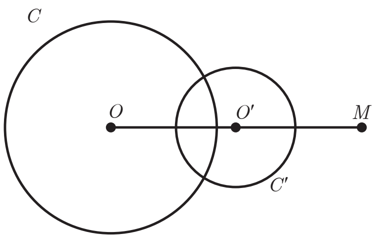
۲ الف) $K = ۲$



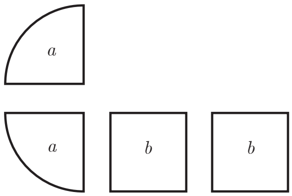
ب) $K = -۲$



پ) $K = \frac{۱}{۲}$



سؤال صفحه ۵۲ (مسئله تقسیم کیک)



شکل‌های a، نسبت به محور بازتاب، قرینه‌اند؛ پس با هم همنهشت‌اند. همچنین شکل‌های b هم نسبت به محور بازتاب خود قرینه‌اند و در نتیجه همنهشت‌اند. پس به هر نفر یک سهم a و یک سهم b می‌دهیم.

سؤال صفحه ۵۲ (مسئله هم پیرامونی)

در شکل از نقطه B به D وصل می‌کنیم. سپس آن را به عنوان محور بازتاب در نظر می‌گیریم و تصویر نقاط B، C و D را نسبت به این محور به‌دست می‌آوریم. واضح است که تصویر نقاط B و D روی خودشان منطبق است ولی تصویر نقطه C نقطه C' است.

یکسان بودن محیط‌ها : با توجه به اینکه بازتاب یک تبدیل طولپاست پس داریم :

$$BC = BC' \quad \text{و} \quad CD = C'D$$

$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA$$

$$P_{ABCDE} = AB + BC' + C'D + DE + EA \Rightarrow P_{ABCDE} = P_{ABC'DE}$$

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر صفحه ۵۳

۱ زیرا با توجه به تعریف بازتاب خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' است و نقاط M و M_1 روی این خط هستند. بنابر خاصیت عمودمنصف $AM = A'M$ و $AM_1 = A'M_1$

۲ بنابر قضیه نامساوی مثلثی، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

ادعای هرون (اثبات)

$$\left.\begin{array}{l} A'B = A'M + MB \xrightarrow{A'M = AM} A'B = AM + MB \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad A'B < A'M_1 + M_1B \end{array}\right\} \Rightarrow AM + MB < A'M_1 + M_1B$$

و چون نقطه M_1 دلخواه است، پس ادعای هرون ثابت می‌شود.

مسئله صفحه ۵۵

مسئله هرون، مردی که می‌خواهد از رودخانه آب بردارد و به اسطبل ببرد.

۲ در واقع نقطه C تحت بردار انتقالی به طول ۴ به D منتقل شده و نقطه B' نیز تحت همان بردار به B

منتقل شده است؛ بنابراین، با توجه به خواص تبدیل انتقال چهارضلعی $CDBB'$ متوازی‌الاضلاع است؛ پس :

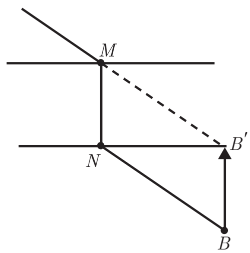
$$\text{مسیر } ACDB = AC + CD + DB \xrightarrow[CB'=DB]{CD=B'B} ACDB = AC + CB' + B'B = ACB'B \text{ مسیر}$$

۱ ابتدا نقطه B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ و موازی رودخانه و در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می‌دهیم. حال مسئله شبیه مسئله اسطبل می‌شود. بازتاب نقطه A را نسبت به خط کنار رودخانه به دست می‌آوریم؛ یعنی نقطه A' سپس A' به B' وصل می‌کنیم و نقطه C به دست می‌آید. از نقطه C موازی رودخانه به سمت شهر B و به طول ۴ متر حرکت می‌کنیم تا نقطه D به دست آید. به این ترتیب، کوتاه‌ترین مسیر رسم می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۵۵

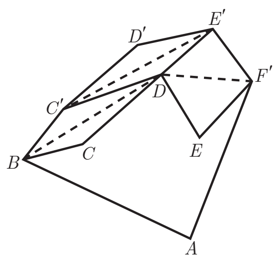
نقطه B را تحت برداری مساوی و عمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می‌دهیم. سپس از B' به A وصل می‌کنیم تا نقطه M به دست آید. به این ترتیب، محل احداث پل MN به دست می‌آید، به طوری که مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر است. مشابه مسئله قسمت (پ) می‌دانیم که مسیر $AMB'B$ کوتاه‌ترین است پس :

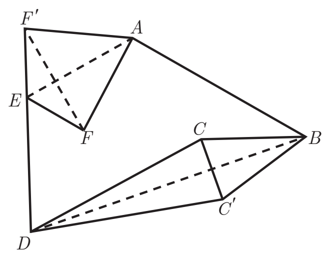
$$\text{مسیر } AMB'B = AM + MB' + BB' \xrightarrow[MN=BB']{MB'=NB} AMB'B \text{ مسیر} = AM + NB + MN = AMNB$$



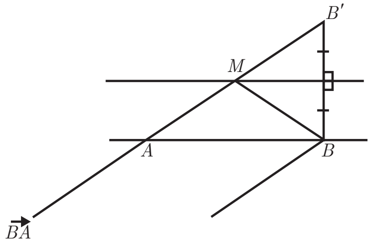
تمرین صفحه ۵۶

۱

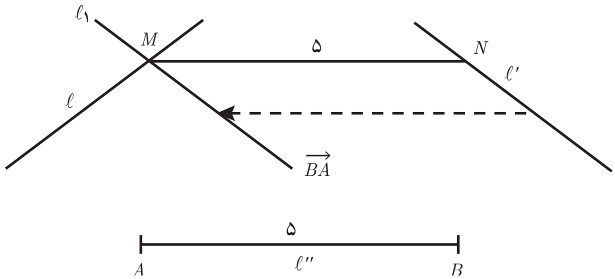




۲ با توجه به شکل، واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت در نظر گرفته شده است. پس از نقطه B یا A روش هرون را برای پیدا کردن نقطه M اجرا می‌کنیم.



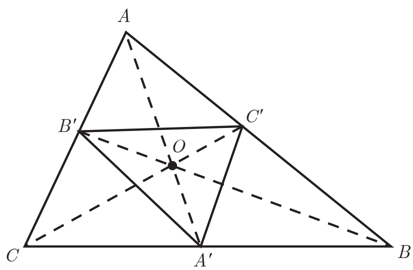
۳ خط L' را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ (برداری به موازات خط L'' و به طول ۵ واحد) انتقال می‌دهیم تا خط $L_۱$ به‌دست آید. این خط، خط L را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. از نقطه M موازی خط L'' خطی رسم می‌کنیم تا خط L' را در نقطه N قطع کند. پاره‌خط MN جواب مسئله است.



۴

الف) A' وسط BC، B' وسط AC و C' وسط AB قرار دارند. با توجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{۱}{۲} GA$ همچنین نقطه G بین A و A' قرار دارد؛ پس نقطه A' مجانس نقطه A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $K = -\frac{۱}{۲}$ است. همین مطلب در مورد نقاط B' و C' نیز صدق می‌کند.

ب) با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC است.



۳

فصل سوم

روابط طولی در شکل‌های هندسی

عکس: فرهاد کولی‌وند

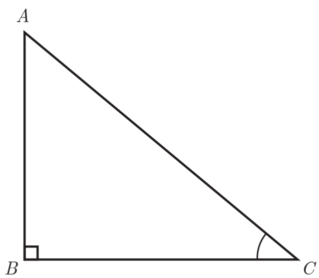
یکی از کاربردهای مهم روابط طولی، محاسبهٔ فاصله‌های غیر قابل دسترس است.

تصویر عنوانی

محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس، یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. محاسبه ارتفاع کوه‌های بلند از جمله این محاسبه‌ها است. تصویر ابتدای این فصل، مربوط به اُشتران کوه، معروف به آلپ ایران، رشته کوهی در شرق استان لرستان و یکی از بلندترین رشته کوه‌های زاگرس است. سن‌بران بلندترین قلهٔ این رشته کوه به ارتفاع ۴۱۵۰ متر است. این رشته کوه، سرچشمه یکی از سرشاخه‌های رود دز به نام ماربره است که در دوره کوه‌زایی جدید ایجاد شده است. این کوه از جمله کوه‌های جوان است که حدود ۳۰ میلیون سال پیش ایجاد شده است. قله‌های بلند و پربرف، دره‌های ژرف و طولانی، رودهای دائمی، پوشش گیاهی و جانوری بسیار متنوع و روستاهای کوهپایه‌ای از جمله ویژگی‌های اشتران‌کوه می‌باشد که، به سبب بلندی، از فاصله ۱۰۰ کیلومتری نیز به خوبی پیداست. گفته می‌شود این رشته‌کوه، به سبب وجود قله‌های ۸ گانه، که هر یک بلندتر از ۴۰۰۰ متر و مانند کاروانی از شتر به ردیف قرار گرفته است، به شتر کوه و یا اشتران‌کوه معروف شده است.

همان‌گونه که در تصویر دیده می‌شود، در مثلث ABC به کمک دوربین زاویه‌سنج (طول‌یاب) زاویه دید AB از نقطه دید C ($\hat{C}$) و طول AC اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها ارتفاع قله (AB) به دست می‌آید.

$$\frac{AC}{\sin 90} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{AC.\sin C}{\sin 90^\circ} = AC.\sin C$$



- روابط طولی در مثلث
  - قضیهٔ سینوس‌ها
    - برخی از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه
  - قضیه کسینوس‌ها
  - قضیهٔ نیمسازهای زاویه‌های داخلی و محاسبه طول نیمسازها
    - قضیهٔ نیمسازهای زاویه‌های داخلی
    - محاسبهٔ طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث
  - قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)
    - محاسبه مساحت مثلث به کمک دستور هرون
    - محاسبه ارتفاع‌های مثلث به کمک دستور هرون
    - محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل چهار درس است که در آن به روابط طولی در هر مثلث دلخواه اشاره می‌شود. در هندسه (۱) برخی از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه بیان و اثبات شد. در این فصل، قضیه سینوس‌ها، قضیه کسینوس‌ها، قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی و محاسبه طول آنها و قضیه هرون بیان و اثبات می‌شود. در درس چهارم می‌توان با استفاده از دستور هرون، طول ارتفاع‌های نظیر اضلاع هر مثلث را محاسبه کرد. در این درس، دستور دیگری نیز برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی بیان شده است.

درس اوّل

قضیه سینوس‌ها

اهداف درس

در پایان این درس از دانش‌آموز انتظار می‌رود بتواند :

۱ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه را بیان کند؛

۲ با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، مسائل مرتبط را حل کند؛

۳ قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه را بیان کند؛

۴ نشان دهد قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه برقرار است؛

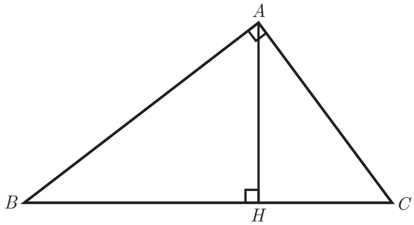
۵ در حل مسائل مرتبط، از قضیهٔ سینوس‌ها استفاده کند؛

۶ نمونه‌هایی از کاربرد قضیه سینوس‌ها در زندگی را مثال بزنند.

روش تدریس درس اوّل

معلم در ابتدا می‌تواند، با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه و ارتفاع نظیر وتر، روابط طولی ذکر شده در کتاب هندسه (۱) را یادآوری کند. همچنین می‌تواند بیان فارسی روابط طولی را از دانش‌آموزان بخواهد تا این روابط به صورت بهتری در ذهن دانش‌آموزان ماندگار شود.

۱ و ۲ $\begin{matrix} AB^2 = BC.BH \\ AC^2 = BC.CH \end{matrix}$ ، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع هر ضلع زاویه قائمه برابر است با حاصل‌ضرب اندازه وتر در اندازه تصویر آن ضلع بر وتر.



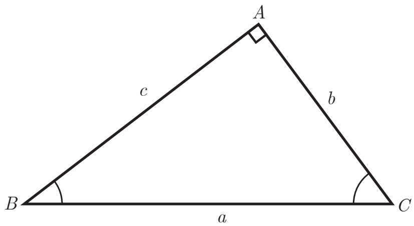
۳ $AH^{2} = BH \cdot CH$، در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین اندازه دو قطعه روی وتر است.

۴ $AB^{2} + AC^{2} = BC^{2}$، رابطه فیثاغورس : در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازه وتر برابر است با مجموع مربع‌های اندازه دو ضلع زاویه قائمه.

۵ $AB \cdot AC = BC \cdot AH$، در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل‌ضرب اندازه‌های اضلاع زاویه قائمه برابر است با اندازه وتر در اندازه ارتفاع وارد بر وتر.

ــ در ادامه درس، با طرح سه فعالیت، قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه اثبات می‌شود.

ــ **در فعالیت (۱)** معلم می‌تواند، با یادآوری تعریف نسبت‌های مثلثاتی و تکمیل جاهای خالی توسط دانش‌آموزان، به این نتیجه برسد که در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن، برابر است با اندازه وتر.



$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

$$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$

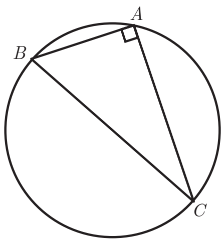
ــ در ادامه، قضیه سینوس‌ها در سه حالت اثبات می‌شود :

حالت اوّل : $\hat{A}$ قائمه باشد.

حالت دوم : $\hat{A}$ حاده باشد.

حالت سوم : $\hat{A}$ منفرجه باشد.

حالت اوّل در فعالیت (۱) : و **حالت دوم و سوم در فعالیت (۲)** بررسی می‌شود.

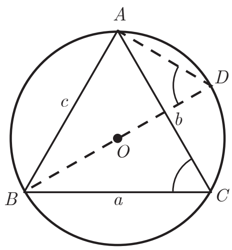


فعالیت (۲) : انجام دادن این فعالیت، نیازمند یادآوری دو مطلب توسط معلم است :

۱ عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند؛

۲ نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، مرکز دایره محیطی مثلث است. پس از یادآوری این مطالب، دانش‌آموز به این نتیجه می‌رسد که مرکز دایره محیطی در این شکل، وسط وتر BC در مثلث قائم‌الزاویه ABC است؛ و چون $\hat{A}$ مساوی $۹۰°$ است و همچنین $\hat{A}$ محاطی است، پس باید روبه‌رو به قطر دایره باشد؛ یعنی وتر مثلث ABC همان قطر دایره است. معلم در پایان، بر نتیجه این فعالیت چنین تأکید می‌کند : «در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن ضلع، برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.»

فعالیت (۳) : دانش‌آموزان در این فعالیت با پاسخ به موارد ۱ و ۲ و ۳ و ۴، حالت دوم قضیه سینوس‌ها در مثلث دلخواه $ABC(\hat{A}<۹۰°)$ را اثبات می‌کنند.



۱ زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ محاطی روبه‌روی کمان AB و اندازه آنها برابر با نصف کمان AB است.

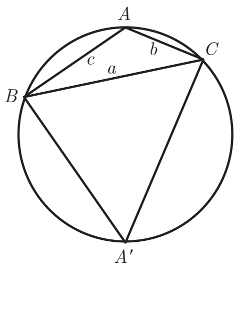
۲ مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؛ چون محاطی روبه‌رو به قطر است.

۳ با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ داریم :

$$\sin C=\sin D \ , \ \sin D=\frac{AB}{BD}\Rightarrow \sin C=\frac{c}{۲R}\Rightarrow \frac{c}{\sin C}=۲R$$

۴ دانش‌آموز در این قسمت به طور مشابه به این نتایج دست می‌یابد :

$$\frac{a}{\sin A}=۲R \ , \ \frac{b}{\sin B}=۲R$$



۵ دانش‌آموز با پاسخ‌گویی به سؤالات این قسمت، قضیه سینوس‌ها در حالت سوم یعنی مثلث $ABC(\hat{A}>۹۰°)$ را اثبات می‌کند؛ نقطه‌ای دلخواه (A') روی کمان BC را در نظر می‌گیرد و آن را به B و C وصل می‌کند. زاویه‌های A و A' نسبت به یکدیگر مکمل‌اند؛ زیرا :

$$\hat{A}+\hat{A}'=\frac{\widehat{BA'C}}{۲}+\frac{\widehat{BAC}}{۲}=\frac{\widehat{BA'C}+\widehat{BAC}}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰°$$

و چون $\hat{A} > ۹۰^\circ$ است پس $\hat{A}'$ حاده است.

می‌دانیم : $\sin A = \sin(۱۸۰ - \hat{A}') = \sin A'$

اکنون در مثلث $A'BC$، طبق نتیجه قسمت (۳)، می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{a}{\sin A'} = ۲R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = ۲R$$

بنابراین : در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن، برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.

معلم در ادامه، قضیه سینوس‌ها را بیان می‌کند.

قضیهٔ سینوس‌ها : در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$ داریم :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

ــ مثال ۱ : این سؤال به کمک قضیه سینوس‌ها حل می‌شود و برای زاویهٔ B دو جواب به دست می‌آید.

$\hat{B} = ۱۳۵^\circ$ قابل قبول نیست؛ چون مثلث ABC نمی‌تواند دو زاویه منفرجه داشته باشد.

ــ مثال ۲ : این مثال، یک مثال کاربردی از قضیه سینوس‌هاست که با الگوسازی و رسم مثلث حل می‌شود.

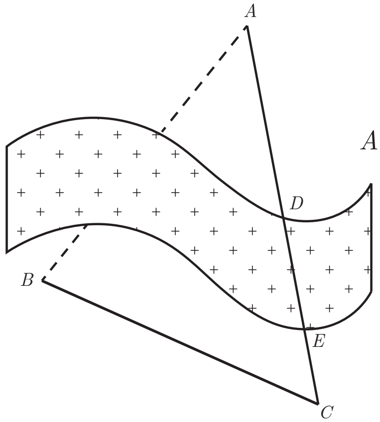
«در کار در کلاس»، مسئلهٔ کاربردی دیگری از قضیه سینوس‌ها آورده شده که دانش‌آموزان، با تکمیل راه‌حل، فاصله دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه را به دست می‌آورند :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin\left(۱۸۰ - (B + C)\right)} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B + C)}$$

در حل این مسئله از این نکته استفاده می‌شود : با توجه به اینکه مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، داریم :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰ - (\hat{B} + \hat{C})$$

در ادامه حل سؤال، با جای‌گذاری اندازه‌های داده شده در فرمول، طول تقریبی AB به دست می‌آید :

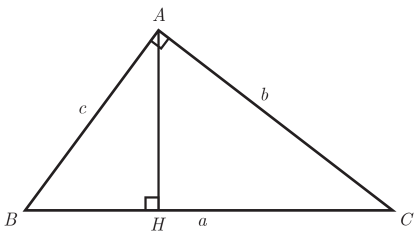


$$AB=\frac{۳\times\sin ۶۰}{\sin(۶۰+۷۰)}=\frac{۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sin(۱۸۰-۵۰)}=\frac{۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sin ۵۰}\simeq ۳/۳۹$$

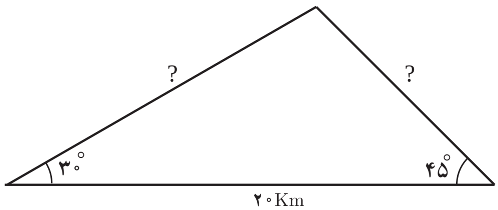
حل تمرین‌های درس اوّل

۱ از سمت راست تساوی شروع می‌کنیم و به سمت چپ تساوی می‌رسیم. در حل این سؤال از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، که در ابتدای درس یادآوری شد، استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=\frac{۱}{a.HC}+\frac{۱}{a.BH}=\frac{۱}{a}\left(\frac{۱}{HC}+\frac{۱}{BH}\right)=\frac{۱}{a}\times\frac{HC+BH}{HC.BH}=\frac{۱}{a}\times\frac{a}{h_a^۲}=\frac{۱}{h_a^۲}$$



۲ در حل این سؤال باید سینوس ۱۰۵° را به دست آوریم.



$$\sin ۱۰۵^{\circ} = \sin\left(۱۸۰-(۳۰+۴۵)\right) = \sin(۳۰+۴۵) =$$

$$\sin ۳۰ \times \cos ۴۵ + \cos ۳۰ \times \sin ۴۵ = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴} + \frac{\sqrt{۶}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

$$\frac{x}{\sin ۳۰} = \frac{y}{\sin ۴۵} = \frac{۲۰}{\sin ۱۰۵} \Rightarrow x = \frac{۲۰ \times \sin ۳۰}{\sin ۱۰۵} = \frac{۲۰ \times \frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}} = \frac{۴۰}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}$$

$$= \frac{۴۰\left(\sqrt{۲}-\sqrt{۶}\right)}{-۴} = ۱۰\left(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}\right)$$

$$y = \frac{۲۰ \times \sin ۴۵}{\sin ۱۰۵} = \frac{۲۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}} = \frac{۴۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۶}} = ۲۰\sqrt{۳} - ۲۰$$

درس دوم

قضیه کسینوس‌ها

اهداف درس

در پایان این درس از دانش‌آموز انتظار می‌رود بتواند :

۱ قضیه کسینوس‌ها در هر مثلث را بیان کند؛

۲ اثبات قضیه کسینوس‌ها در هر مثلث را نشان دهد؛

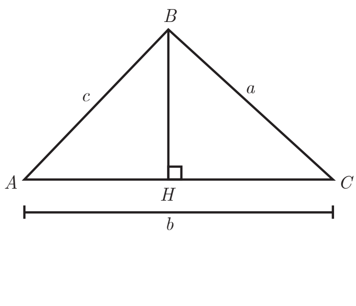
۳ نمونه‌هایی از کاربرد قضیه کسینوس‌ها در زندگی را مثال بزنند؛

۴ مسائلی را که در حل آنها از قضیه کسینوس‌ها استفاده می‌شود از دیگر مسائل تمییز دهد.

روش تدریس درس دوم

در ابتدای تدریس، معلّم می‌تواند با طرح این سؤال، ذهن دانش‌آموزان را آماده کند : می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه رابطه‌ای بین اضلاع وجود دارد. آیا تا به حال فکر کرده‌اید که ممکن است در هر مثلث دلخواه، بین اضلاع رابطه‌ای باشد.

در فعالیت (۱) هدف این است که دانش‌آموز با تکمیل جاهای خالی برای هر مثلث دلخواه ABC در دو حالت $(\hat{A}<۹۰^\circ , \hat{A}>۹۰^\circ)$ به این نتیجه برسد که قضیه کسینوس‌ها در هر مثلث دلخواه برقرار است.



ــ در مثلث ABC $(\hat{A}<۹۰^\circ)$، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. دانش‌آموز به کمک نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه، جاهای خالی را تکمیل می‌کند.

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c.\cos A\ ,\ CH = b - AH = b - c.\cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c.\sin A$$

$$\Delta BHC : BC^{۲} = BH^{۲} + CH^{۲} \Rightarrow a^{۲} = (c.\sin A)^{۲} + (b - c.\cos A)^{۲}$$

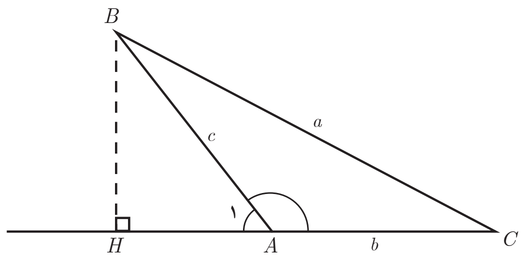
در ادامه به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی $(\sin^{۲} A + \cos^{۲} A = ۱)$ رابطه $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A$ به‌دست می‌آید.

$$a^{۲} = (c.\sin A)^{۲} + (b - c.\cos A)^{۲} = c^{۲}\sin^{۲} A + b^{۲} - ۲bc\cos A + c^{۲}.\cos^{۲} A$$

$$= c^{۲}\underbrace{(\sin^{۲} A + \cos^{۲} A)}_{۱} + b^{۲} - ۲bc\cos A \Rightarrow a^{۲} = c^{۲} + b^{۲} - ۲bc\cos A$$

در قسمت بعدی فعالیت (۱) با درنظرگرفتن مثلث ABC $(\hat{A} > ۹۰^\circ)$، ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه زاویه $A_۱$ خارجی رأس A است، داریم :

$$\hat{A}_۱ = ۱۸۰ - \hat{A} \Rightarrow \begin{cases} \sin \hat{A}_۱ = \sin A \\ \cos \hat{A}_۱ = -\cos A \end{cases} \quad (۱)$$



در مثلث ABH با نوشتن تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم :

$$\cos A_۱ = \frac{AH}{C}, \sin A_۱ = \frac{BH}{C} \Rightarrow AH = c.\cos A_۱ \overset{(۱)}{=} -c\cos A, BH = c.\sin A_۱ \overset{(۱)}{=} c.\sin A$$

$$CH = b + AH = b - c.\cos A$$

$$\Delta BHC:\ BC^{۲} = BH^{۲} + CH^{۲} \Rightarrow a^{۲} = (c.\sin A)^{۲} + (b - c.\cos A)^{۲} =$$

$$C^{۲}\sin^{۲} A+b^{۲}-۲bc\cos A+c^{۲}.\cos^{۲} A=C^{۲}(\underbrace{\sin^{۲} A+\cos^{۲} A}_{۱})+b^{۲}-۲bc\cos A$$

$$\Rightarrow a^{۲}=c^{۲}+b^{۲}-۲bc\cos A$$

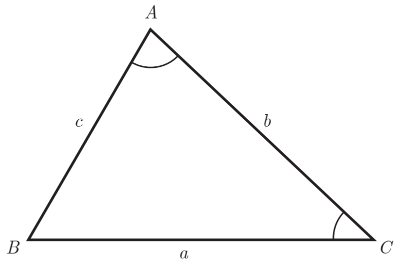
ــ در پاسخ به سؤال آخر این فعالیت، دانش‌آموز در می‌یابد که اگر زاویه A قائمه باشد، پس کسینوس زاویه A صفر می‌شود و رابطه به‌صورت $a^{۲}=c^{۲}+b^{۲}$ در می‌آید که همان رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه است.

پس از انجام دادن فعالیت توسط دانش‌آموز، قضیه کسینوس‌ها توسط معلم بیان می‌شود.

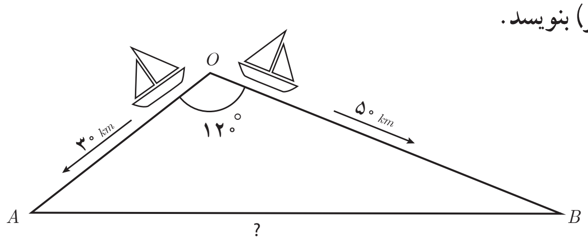
قضیه کسینوس‌ها : در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها.

$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc.\cos A$ $\qquad$ $b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}-۲ac.\cos B$

$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab.\cos C$



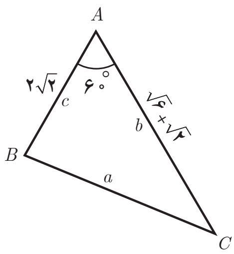
در ادامه، یک مثال کاربردی از قضیه کسینوس‌ها مطرح و پیشنهاد می‌شود معلم از ابتدا مسافتی را که هر قایق پس از نیم‌ساعت طی می‌کند از دانش‌آموزان سؤال کند و اعداد حاصل را برروی شکل (برحسب واحد کیلومتر) بنویسد.



ــ در سؤال ۱ «کار در کلاس»، دانش‌آموز به این نتیجه می‌رسد که اگر در مثلثی اندازه دو ضلع و زاویه بین آنها مشخص باشد، آنگاه به کمک قضیه کسینوس‌ها می‌توان اندازه ضلع سوم را به‌دست آورد.

$$BC^{۲}=(۲\sqrt{۲})^{۲}+(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^{۲}-۲\times۲\sqrt{۲}\times(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\times\cos۶۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow BC^{۲}=۸+(۸+۲\sqrt{۱۲})^{۲}-۲\sqrt{۱۲}-۴\Rightarrow BC^{۲}=۱۲\ ,\ BC=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$



ـ در سؤال ۲ «کار در کلاس» به کمک قضیه سینوس‌ها، اندازه $\hat{C}$ به‌دست می‌آید.

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۶۰}\Rightarrow \sin C=\frac{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat{C}=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{B}=۱۸۰-(۶۰+۴۵)=۷۵^\circ$$

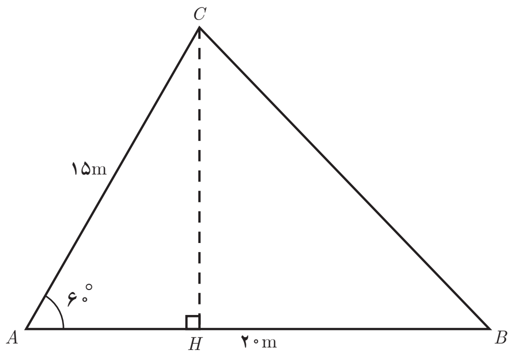
حل تمرین‌های درس دوم

۱ الف)

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB.AC.\cos A$$

$$BC^۲=۲۰^۲+۱۵^۲-۲\times ۲۰\times ۱۵\times\cos ۶۰\Rightarrow$$

$BC^۲=۴۰۰+۲۲۵-۳۰۰=۳۲۵\ ,\ BC=\sqrt{۳۲۵}=۵\sqrt{۱۳}\ (m)$ طول درخت



ب) قسمت ب سؤال را می‌توان به دو روش حل کرد :

روش اوّل) استفاده از قضیه سینوس‌ها

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۱۵}{\sin B}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\sin B=\frac{۱۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۵\sqrt{۱۳}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}\simeq ۰/۷۲$$

$$\Rightarrow\sin B\simeq ۰/۷۲\xrightarrow{\text{به‌کمک ماشین‌حساب}}\hat{B}\simeq ۴۶^\circ$$

روش دوم) استفاده از قضیه کسینوس‌ها

$$۱۵^۲=۲۰^۲+(۵\sqrt{۱۳})^۲-۲\times ۲۰\times(۵\sqrt{۱۳}).\cos B\Rightarrow ۲۲۵=۴۰۰+۳۲۵-۲۰۰\sqrt{۱۳}\cos B\Rightarrow$$

$$۲۰۰\sqrt{۱۳}\cos B=۵۰۰\Rightarrow\cos B=\frac{۵}{۲\sqrt{۱۳}}\times\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۲۶}\simeq ۰/۶۹$$

$$\cos B\simeq ۰/۶۹\xrightarrow{\text{به کمک ماشین حساب}}\hat{B}\simeq ۴۶^\circ$$

پ)

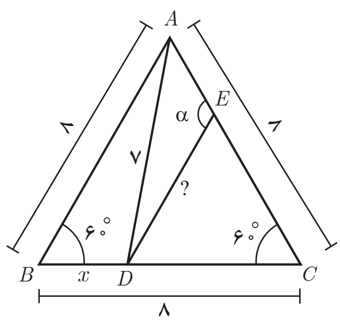
$$\sin A=\frac{CH}{AC}\Rightarrow CH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۵=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$$

۲

$$\overset{\Delta}{ABD}\ ,\ ۷^۲=۸^۲+x^۲-۲\times ۸\times x\times\cos ۶۰^\circ$$

$$۴۹=۶۴+x^۲-۸x\Rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰\Rightarrow(x-۳)(x-۵)=۰\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=۳\\x=۵\end{cases}\xRightarrow{CD>BD}x=۳\ \text{ق ق}\Rightarrow DC=۸-۳=۵$$



برای به‌دست آوردن فاصله نقطه E از D، دو روش مطرح می‌شود :

روش اول)

$EC = DC = ۵ \Rightarrow \overset{\Delta}{EDC}$ متساوی‌الساقین ، $\hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{E} = \hat{D} = \frac{۱۸۰-۶۰}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow$

$\overset{\Delta}{EDC}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow ED = ۵$

روش دوم)

$$ED^۲ = ۵^۲ + ۵^۲ - ۲ \times ۵ \times ۵ \times \cos ۶۰^\circ = ۲۵ + ۲۵ - ۲۵ = ۲۵ \Rightarrow ED = ۵$$

$$A\hat{E}D = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

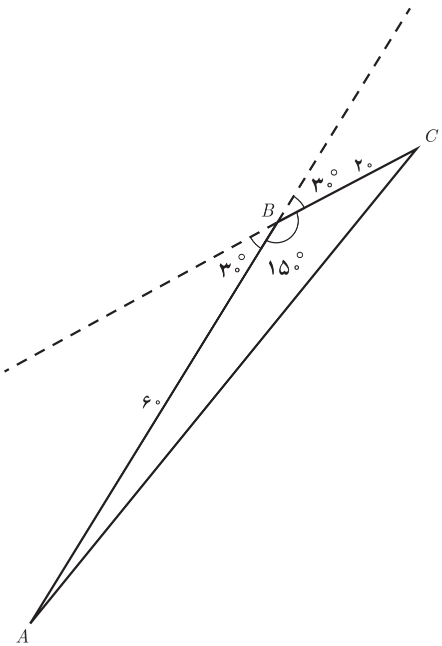
۳

$$d = V.t \Rightarrow \begin{cases} AB = ۶۰ \times ۱ = ۶۰\ km \\ AC = ۴۰ \times ۰/۵ = ۲۰ km \end{cases}$$

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC \,.\, AB \,.\, \cos ۱۵۰^\circ$$

$$BC^۲ = ۶۰^۲ + ۲۰^۲ - ۲ \times ۶۰ \times ۲۰ \times \cos(۱۸۰ - ۳۰) = ۳۶۰۰ + ۴۰۰ + ۲۴۰۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$= ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} \Rightarrow BC = \sqrt{۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳}} \simeq ۷۷/۹۶$$



۴

$$\Delta AMC\,,\ b^۲=AM^۲+(\frac{a}{۲})^۲-۲\times AM\times\frac{a}{۲}\times\overbrace{\cos(۱۸۰^\circ-\alpha)}^{-\cos\alpha}\ ①$$

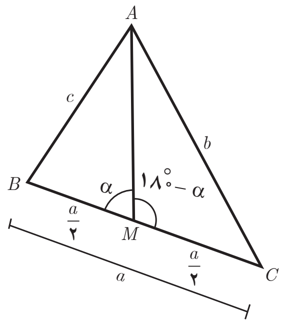
$$\Delta AMB\,,c^۲=AM^۲+(\frac{a}{۲})^۲-۲\times AM\times\frac{a}{۲}\times\cos\alpha\ ②$$

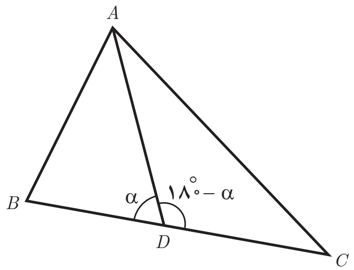
طرفین تساوی‌های ۱ و ۲ را با یکدیگر جمع می‌کنیم. اکنون داریم :

$$b^۲+c^۲=۲AM^۲+\frac{a^۲}{۲}\ \text{(قضیه میانه‌ها)}$$

حالت خاص؛ $AB=۴$ و $AC=۶$ و $BC=۸$

$$۶^۲+۴^۲=۲AM^۲+\frac{۸^۲}{۲}\Rightarrow ۳۶+۱۶=۲AM^۲+۳۲\Rightarrow ۲AM^۲=۲۰\Rightarrow AM^۲=۱۰\Rightarrow AM=\sqrt{۱۰}$$





۵ برای اثبات قضیه استوارت؛ از طرف راست تساوی شروع می‌کنیم و با جایگذاری، به‌طرف چپ تساوی می‌رسیم.

می‌دانیم :

$$\Delta ADB\,,AB^۲=AD^۲+BD^۲-۲AD.BD.\cos\alpha\ ①$$

$$\Delta ADC\,,\ AC^۲=AD^۲+DC^۲-۲AD.DC.\underbrace{\cos(۱۸۰^\circ-\alpha)}_{-\cos\alpha}\ ②$$

طرف راست : $AB^۲.DC+AC^۲.DB\ \underset{۱\,و\,۲}{\overset{\text{جایگذاری}}{=\!=\!=}}$

$(AD^۲+BD^۲-۲AD.BD.\cos\alpha).DC+(AD^۲+DC^۲+۲AD.DC.\cos\alpha).DB=$

$AD^۲.DC+BD^۲.DC-۲\cancel{AD.BD}.\cancel{DC.}\cos\alpha+AD^۲.DB+DC^۲.DB+۲\cancel{AD.DC}.\cancel{DB.}\cos\alpha=$

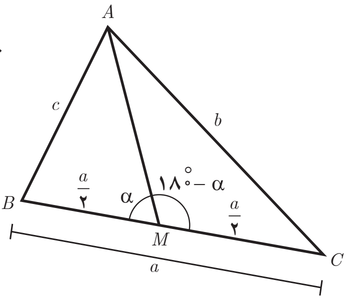
$$AD^۲(DC+DB)+BD.\ DC(BD+DC)=AD^۲.\ BC+BD.\ DC.\ BC$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه می‌گیریم،چون AM میانه است پس

$$BM=MC=\frac{a}{۲}$$

قضیه استوارت : $AB^۲ . MC+AC^۲ . MB=AM^۲ . BC+BM.\ MC.\ BC \xrightarrow{BM=MC=\frac{a}{۲}}$

$$c^۲.\frac{a}{۲}+b^۲.\frac{a}{۲}=AM^۲.a+\frac{a}{۲}.\frac{a}{۲}.a\Rightarrow$$



قضیه میانه‌ها :

$$\cancel{\frac{a}{۲}}(c^۲+b^۲)=\cancel{\frac{a}{۲}}(۲.AM^۲+\frac{a^۲}{۲})\Rightarrow b^۲+c^۲=۲AM^۲+\frac{a^۲}{۲}$$

۶ حل مسئله ۲، با استفاده از قضیه استوارت

قضیه استوارت در مثلث ABC : $۸^۲\times DC+۸^۲\times BD=۷^۲\times ۸+BD\ .\ DC\times ۸\ \Rightarrow$

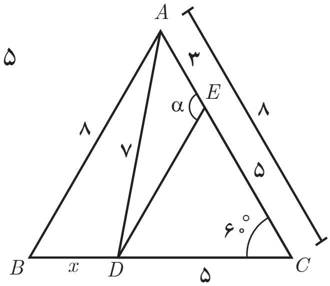
$$۸^۲(\underbrace{DC+BD}_{۸})=۷^۲\times ۸+BD\ .(۸-BD)\times ۸\xrightarrow{\div ۸}$$

$$۶۴=۴۹+۸BD-BD^۲\ \Rightarrow\ BD^۲-۸BD+۱۵=۰\ \Rightarrow$$

$$(BD-۳)(BD-۵)=۰\Rightarrow \begin{matrix}BD=۳\\ BD=۵\end{matrix}\xrightarrow{DC>BD}\begin{matrix}BD=۳\\ DC=۸-۳=۵\end{matrix}$$

قضیه استوارت در مثلث ADC : $۵^۲\times ۳+۷^۲\times ۵=DE^۲\times ۸+۳\times ۵\times ۸\ \Rightarrow\ ۷۵+۲۴۵=۸DE^۲+۱۲۰\Rightarrow$

$$۸DE^۲=۲۰۰\Rightarrow DE^۲=\frac{۲۰۰}{۸}=۲۵\Rightarrow DE=\sqrt{۲۵}=۵$$



درس سوم

قضیهٔ نیمسازهای زاویه‌های داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

اهداف درس

در پایان این درس از دانش‌آموز انتظارمی‌رود که بتواند :

۱ قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث را بیان کند؛

۲ قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث را اثبات کند؛

۳ با استفاده از قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث، مسائل مرتبط را حل کند؛

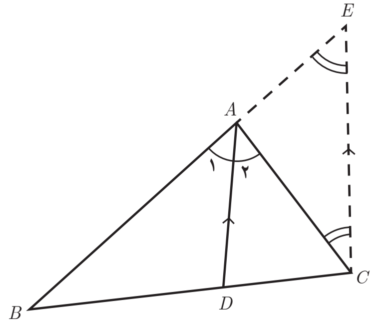
۴ قضیه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث را بیان کند؛

۵ با استفاده از قضیه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث، مسائل مرتبط را حل کند.

روش تدریس درس سوم

در این درس معلم دو مطلب را آموزش می‌دهد : ۱ــ قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث؛ ۲ــ قضیه محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث.

۱ برای اثبات قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی، از نقطه C خطی موازی با نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.



الف و ب)

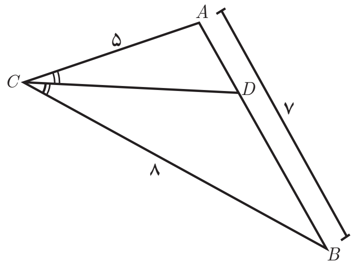
$$\left.\begin{array}{l} AD\|EC \text{ و (قاطع) مورب } BE \Rightarrow \hat{A}_{۱}=\hat{E} \\ AD\|EC \text{ و (قاطع) مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_{۲}=\hat{C} \\ \text{نیمساز است } AD \text{ طبق فرض } \hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}=\hat{C} \Rightarrow \overset{\Delta}{AEC} \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow AE=AC \quad (۱)$$

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC داریم :

$$AD \parallel EC \xRightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AE} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \frac{AB}{AC}$$

مثالی که در ادامه آورده شده است، نشان می‌دهد که با معلوم‌بودن اندازه‌های سه ضلع هر مثلث، می‌توان طول قطعاتی که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را محاسبه کرد.

حل «کار در کلاس» نیز مشابه مثال داده شده است. با رسم نیمساز زاویه C داریم :



$$\frac{۸}{۵}=\frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{۸+۵}{۵}=\frac{BD+AD}{AD} \Rightarrow \frac{۱۳}{۵}=\frac{۷}{AD}$$

$$\Rightarrow AD=\frac{۷\times۵}{۱۳}=\frac{۳۵}{۱۳}$$

$$BD=۷-\frac{۳۵}{۱۳}=\frac{۹۱-۳۵}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳}$$

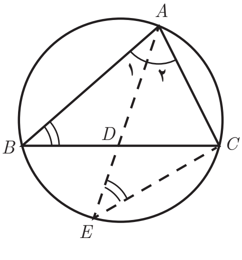
۲ محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه A، AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.

اکنون داریم :

الف) $\hat{E}=\hat{B}$ زیرا محاطی رو به یک کمان است.

ب) مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؛ زیرا :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ \hat{B} = \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز، ز)}} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEC}$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر : $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EC}{BD}$

ت) از تناسب اوّل نتیجه می‌گیریم :

$$AB.AC = AD.\ AE \overset{\text{جایگذاری}}{=\!=\!=} AD(AD + DE) = AD^۲ + AD.DE$$

می‌دانیم $AD.\ DE = BD.\ DC$ زیرا طبق قضیه فصل (۲)، از تشابه دو مثلث ABD و CDE داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ \text{ متقابل به رأس‌اند}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز، ز)}} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{CDE} \Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{BD}{DE} \Rightarrow AD.DE = BD.DC$$

بنابراین : $AD^۲ = AB.\ AC - BD.\ DC$

و این یعنی (قضیه ۲) : در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

برای حل مثالی که در ادامه مطرح می‌شود از دو قضیه ۱ و ۲ استفاده می‌شود.

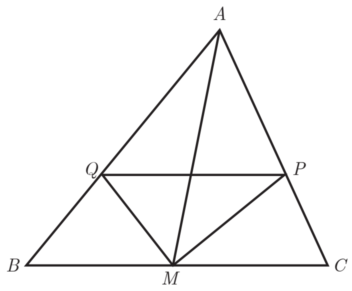
حل تمرین‌های درس سوم

۱ MP نیمساز زاویه AMC و MQ نیمساز زاویه AMB است : فرض و M وسط BC $(MB = MC)$

حکم : $PQ \| BC$

حل)

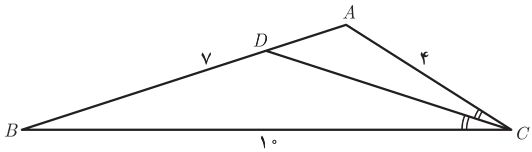
$$\left.\begin{array}{l}\text{است } AMC \text{ نیمساز زاویه } MP \Rightarrow \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AP}{PC} \\ \text{است } AMB \text{ نیمساز زاویه } MQ \Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AQ}{QB}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AQ}{QB} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \| BC$$



۲

CD : نیمساز زاویه C است $\dfrac{۴}{۱۰}=\dfrac{AD}{DB} \Rightarrow \dfrac{۴+۱۰}{۱۰}=\dfrac{AD+DB}{DB} \Longrightarrow$

$$\frac{۱۴}{۱۰}=\frac{۷}{DB} \Rightarrow DB=\frac{۷\times ۱۰}{۱۴}=۵ \quad AD=۷-۵=۲$$

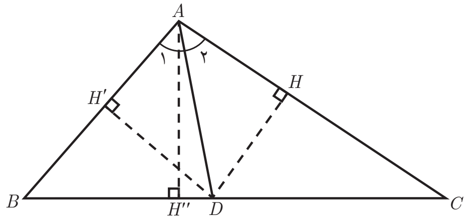


۳ AD نیمساز زاویه A است.

الف) چون نقطه D روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طبق خاصیت نیمساز، از دو ضلع زاویه A به یک فاصله است؛ یعنی $DH=DH'$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}DH'\times AB}{\frac{۱}{۲}DH\times AC}=\dfrac{AB}{AC} \quad (۱) \\[2ex] \dfrac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}BD\times AH''}{\frac{۱}{۲}CD\times AH''}=\dfrac{BD}{CD} \quad (۲) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$$



درس چهارم

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

اهداف درس

از دانش‌آموز انتظار می‌رود که در پایان این درس بتواند :

۱ قضیه هرون را تبیین کند؛

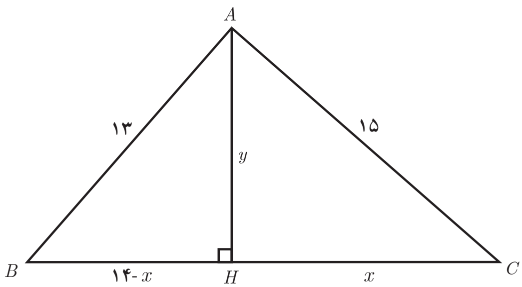
۲ توضیح دهد چه موقع از قضیه هرون استفاده می‌شود؛

۳ نشان دهد مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها؛

۴ با معلوم بودن اندازه مساحت هر مثلث و اندازه هر ضلع، اندازه ارتفاع نظیر آن ضلع را به‌دست آورد.

روش تدریس درس چهارم

ــ در این درس معلم می‌تواند با یادآوری مسئله‌ای از کتاب هندسه (۱)، که در آن اندازه‌های اضلاع مثلث معلوم است، مساحت مثلث و سپس اندازه ارتفاع‌های مثلث را به‌کمک دانش‌آموزان محاسبه کند.



ــ با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC اندازه‌های x و y به‌دست می‌آیند.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AHC: CH^۲+AH^۲+۱۵^۲\\ \Delta AHB: BH^۲+AH^۲=۱۳^۲\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x^۲+y^۲=۲۲۵\\ (۱۴-x)^۲+y^۲=۱۶۹\end{array}\right.\xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی‌ها را}} x^۲-(۱۴-x)^۲=۵۶\Rightarrow$$

$$x^۲-۱۹۶-x^۲+۲۸x=۵۶\Rightarrow ۲۸x=۵۶+۱۹۶=۲۵۲\Rightarrow x=\frac{۲۵۲}{۲۸}=۹$$

$$y=\sqrt{۱۵^۲-۹^۲}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

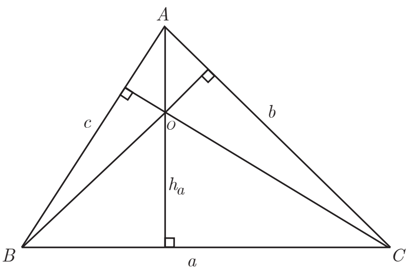
$$S=\frac{۱}{۲}BC.AH=\frac{۱}{۲}\times۱۴\times۱۲=۸۴$$

پس از حل مسئله، معلم اشاره می‌کند که با به‌کار بردن همین روش در مثلث دلخواه ABC، که $BC=a$، $AB=c$ و $AC=b$ نتیجه‌ای برای محاسبه مساحت مثلث به‌دست می‌آید که به قضیه هرون معروف است.

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\quad \text{(دستور هرون)}$$

که در این دستور $P=\frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط مثلث است.
با به‌دست آوردن مساحت مثلث، می‌توان ارتفاع نظیر هر ضلع را به‌دست آورد.

$$S=\frac{۱}{۲}.a.h_b\Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a}\ \text{و}\ h_b=\frac{۲S}{b}\ \text{و}\ h_c=\frac{۲S}{c}$$



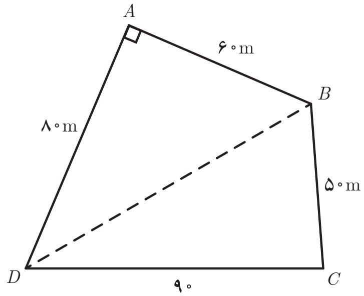
در ادامه مثالی آورده شده که در آن به کمک دستور هرون، مساحت و ارتفاع‌های مثلث به‌دست می‌آید.

$$h_b=\frac{۲\times۸۴}{۱۵}=۱۱/۲\qquad h_c=\frac{۲\times۸۴}{۱۳}\simeq۱۲/۹\qquad c=۱۳\ ,\ b=۱۵\ ,\ a=۱۴$$

ـ «کار در کلاس» یک سؤال کاربردی است که در آن مزرعه کشاورزی به شکل چهارضلعی‌ای است که تنها دو ضلع آن برهم عمودند. با مشخص نمودن طول اضلاع این زمین، و با استفاده از دستور هرون، مساحت زمین به‌دست می‌آید.

الف) B را به D وصل می‌کنیم. طول BD با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABD به‌دست می‌آید.

$$BD^۲ = ۶۰^۲ + ۸۰^۲ = ۳۶۰۰ + ۶۴۰۰ = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow BD = ۱۰۰$$



ب) $S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{۸۰\times۶۰}{۲} = ۲۴۰۰$

پ) مساحت مثلث CBD به کمک دستور هرون به‌دست می‌آید.

$$P = \frac{۱۰۰+۵۰+۹۰}{۲} = ۱۲۰$$

$$S_{CBD} = \sqrt{۱۲۰\times۲۰\times۷۰\times۳۰} = \sqrt{۲^۳\times۵\times۳\times۲^۲\times۵\times۲\times۵\times۷\times۲\times۵\times۳}$$

$$= \sqrt{۲^۷\times۵^۴\times۳^۲\times۷} = ۲^۳\times۵^۲\times۳\sqrt{۱۴} = ۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

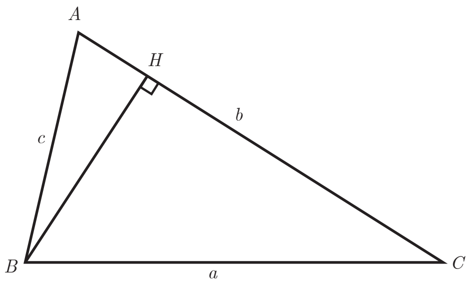
ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S = ۲۴۰۰ + ۶۰۰\sqrt{۱۴} \simeq ۴۶۴۵ \ (m^۲)$$

ــ در فعالیت دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث، به کمک نسبت‌های مثلثاتی به‌دست می‌آید.

در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

۱ $\sin A = \frac{BH}{C} \Rightarrow BH = C.\sin A \ (۱)$



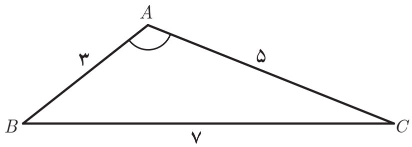
۲ مساحت مثلث ABC به کمک ارتفاع BH و جایگذاری رابطه (۱) به‌دست می‌آید.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} BH \times AC \overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲} .c.b.\sin A$$

در نتیجه، مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دوضلع در سینوس زاویه بین آنها.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} bc\sin A = \frac{۱}{۲} ab.\sin C = \frac{۱}{۲} ac.\sin B$$

ـ در «کار در کلاس» سؤالی مطرح شده است که در آن مساحت مثلث به دو روش به‌دست می‌آید :



۱ با استفاده از دستور هرون داریم؛

$$P = \frac{۵+۷+۳}{۲} = \frac{۱۵}{۲}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۹}{۲}} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$$

۲ با استفاده از دستور $S = \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin A$ مساحت مثلث ABC را می‌نویسیم :

$$\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳ از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه A به‌دست می‌آید :

$$\sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۱۲۰^\circ$$

حل تمرین‌های درس چهارم

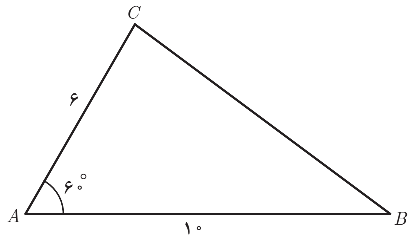
۱

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB\cos A = ۶^۲ + ۱۰^۲ - ۲ \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۶۰ = ۷۶$$

$$BC = \sqrt{۷۶} = ۲\sqrt{۱۹}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \sin A = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$$

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۶}{\sin B}=\frac{۲\sqrt{۱۹}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\sin B=\frac{۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۹}}\times\frac{\sqrt{۱۹}}{\sqrt{۱۹}}=\frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$$



۲

$$P_۱=\frac{۴+۱۵+۱۳}{۲}=۱۶ \qquad S_۱=\sqrt{۱۶\times۱۲\times۱\times۳}=۲۴$$

$$P_۲=\frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲}=۲۲ \qquad S_۲=\sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲}=۶۶$$

کل $S=۲۴+۶۶=۹۰$

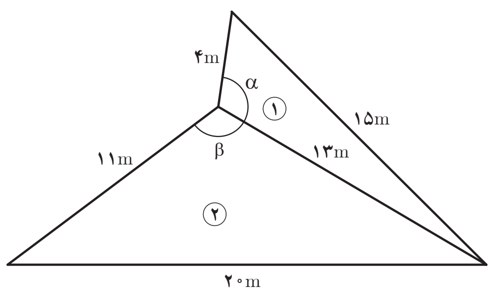
$$۱۵^۲=۴^۲+۱۳^۲-۲\times۴\times۱۳\times\cos\alpha\Rightarrow۲۲۵=۱۶+۱۶۹-۱۰۴\cos\alpha$$

$$\Rightarrow-۱۰۴\cos\alpha=۴۰\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۴۰}{۱۰۴}=-\frac{۵}{۱۳} \qquad ۱$$

$$۲۰^۲=۱۱^۲+۱۳^۲-۲\times۱۱\times۱۳\times\cos\beta\Rightarrow۴۰۰=۱۲۱+۱۶۹-۲۸۶\cos\beta$$

$$\Rightarrow-۲۸۶\cos\beta=۱۱۰\Rightarrow\cos\beta=\frac{۱۱۰}{-۲۸۶}=-\frac{۵}{۱۳} \qquad ۲$$

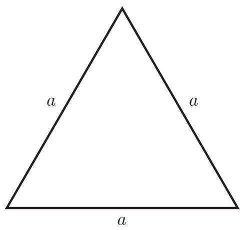
$$\overset{۱ \text{ و } ۲}{\Rightarrow}\alpha=\beta$$



۳

$$P=\frac{۳a}{۲}$$

$$S=\sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{۳a}{۲}-a)(\frac{۳a}{۲}-a)(\frac{۳a}{۲}-a)}=\sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{۳a}{۲}-a)^{۳}}=\sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\frac{a^{۳}}{۸}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$



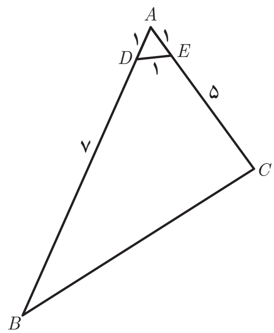
۴

متساوی الاضلاع $\overset{\Delta}{ADE}\Rightarrow\hat{A}=۶۰^{\circ}$

$$BC^{۲}=۸^{۲}+۶^{۲}-۲\times۸\times۶\times\cos۶۰=۶۴+۳۶-۴۸=۵۲\qquad BC=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{DECB}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}-S_{\overset{\Delta}{ADE}}=(\frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\sin۶۰^{\circ})-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱^{۲}=\frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$=۴۸\frac{\sqrt{۳}}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$



۵ با نوشتن مساحت مثلث ABC به‌صورت مجموع مساحت‌های دو مثلث ABD و ADC، دستور دیگری برای محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث به‌دست می‌آید.

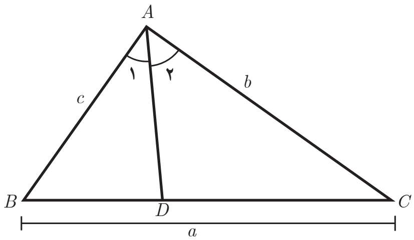
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{ABD}+S_{ACD}\Rightarrow\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A=\frac{۱}{۲}AB.AD.\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}AC.AD.\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A=AD.\sin\frac{A}{۲}(AB+AC)$$

$$\Rightarrow AD=\frac{AB.AC.\sin A}{(AB+AC).\sin\frac{A}{۲}}=\frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}.\cos\frac{A}{۲}}{(AB+AC).\sin\frac{A}{۲}}\Rightarrow AD=\frac{۲AB.AC.\cos\frac{A}{۲}}{AB+AC}$$

$$\Rightarrow \text{(نیمساز رأس } A\text{)}\ d_a=\frac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$

$$\text{(نیمساز رأس } B\text{)}= d_b=\frac{۲ac.\cos\frac{B}{۲}}{a+c}\qquad \text{(نیمساز رأس } C\text{)}=d_c=\frac{۲ab\cos\frac{C}{۲}}{a+b}$$

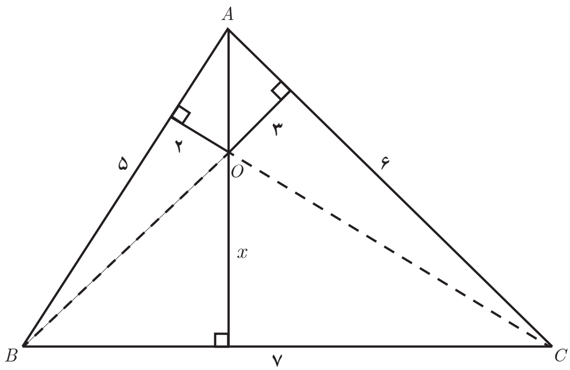


۶ با نوشتن مساحت مثلث ABC به‌صورت مجموع مساحت‌های سه مثلث AOB و BOC و COA، فاصله نقطه O از رأس بزرگ‌تر به دست می‌آید.

$$P=\frac{۵+۶+۷}{۲}=۹\qquad S=\sqrt{۹\times۴\times۳\times۲}=۶\sqrt{۶}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{AOB}}+S_{\overset{\Delta}{BOC}}+S_{\overset{\Delta}{COA}}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۵+\frac{۱}{۲}\times۳\times۶+\frac{۱}{۲}\times۷\times x=۱۴+\frac{۷}{۲}x$$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{۶}=۱۴+\frac{۷}{۲}x\Rightarrow\frac{۷}{۲}x=۶\sqrt{۶}-۱۴\Rightarrow ۷x=۱۲\sqrt{۶}-۲۸\Rightarrow x=\frac{۱۲\sqrt{۶}-۲۸}{۷}$$



۷ B را به D وصل می‌کنیم. سپس با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD، طول ضلع BD را به‌دست می‌آوریم. به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث BAD اندازه زاویه A به‌دست می‌آید. مساحت چهارضلعی $ABCD$ نیز از تفاضل مساحت‌های مثلث‌های ABD و BCD به‌دست می‌آید.

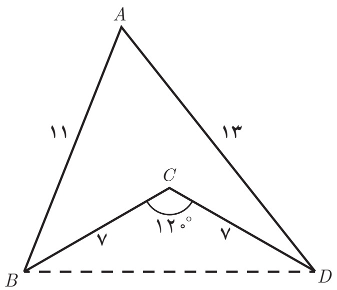
$$BD^۲ = ۷^۲ + ۷^۲ - ۲\times ۷\times ۷\times \cos ۱۲۰^\circ = ۴۹ + ۴۹ + ۹۸\times \frac{۱}{۲} = ۹۸ + ۴۹ = ۱۴۷،\ BD = \sqrt{۱۴۷} = ۷\sqrt{۳}$$

$$BD^۲ = ۱۱^۲ + ۱۳^۲ - ۲\times ۱۱\times ۱۳\times \cos A \Rightarrow ۱۲۱ + ۱۶۹ - ۲۸۶\cos A = ۱۴۷ \Rightarrow ۱۴۳ = ۲۸۶\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{۱۴۳}{۲۸۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{CBD} = \frac{۱}{۲}\times ۱۱\times ۱۳\times \underbrace{\sin ۶۰}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} - \frac{۱}{۲}\times ۷\times ۷\times \underbrace{\sin ۱۲۰}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$= \frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۹۴\sqrt{۳}}{۴}$$

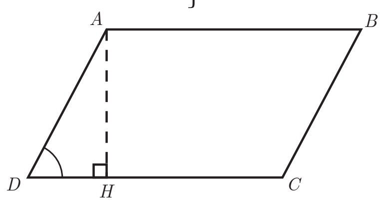


۸

روش اوّل

ارتفاع AH در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را رسم می‌کنیم. با استفاده از دستور مساحت متوازی‌الاضلاع و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی برای پیدا کردن طول ارتفاع متوازی‌الاضلاع، به حکم مسئله می‌رسیم.

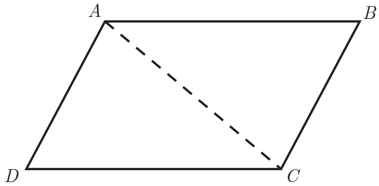
$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD} = DC\times AH \\ \Delta ADH;\sin D = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AH = AD.\sin D \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = DC.AD.\sin D$$



روش دوم : با استفاده از رسم قطر متوازی‌الاضلاع و این نکته که مساحت دو مثلث حاصل با هم برابرند و همچنین دستور مساحت مثلث، به حکم مسئله می‌رسیم :

$$\left.\begin{array}{l} S_{ADC}=\frac{۱}{۲}AD.DC.\sin D \\ S_{ABCD}=۲\times S_{ADC} \end{array}\right\}\Rightarrow S_{ABCD}=۲\times\frac{۱}{۲}\times AD.DC.\sin D$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=AD.DC.sinD$$



۹ به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC، موارد الف و ب و پ ثابت می‌شود. توجه شود که قسمت‌ها به‌صورت دو شرطی مطرح شده است؛ پس لازم است دو طرف اثبات شود :

الف) اگر $\hat{A}>۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲>b^۲+c^۲$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A}>۹۰^\circ\Rightarrow\cos A<۰ \\ -۲bc<۰ \end{array}\right\}\Rightarrow -۲bc\cos A>۰ \qquad ①$$

از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم :

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A\xRightarrow{①}a^۲>b^۲+c^۲$$

بالعکس؛ اگر $a^۲>b^۲+c^۲$ باشد آنگاه $\hat{A}>۹۰^\circ$

طبق فرض $a^۲>b^۲+c^۲$ است. از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$

پس :

$$a^۲>b^۲+c^۲\Rightarrow b^۲+c^۲-۲bc\cos A>b^۲+c^۲\Rightarrow -۲bc\cos A>۰$$

$$\Rightarrow CosA<۰\Rightarrow\hat{A}>۹۰^\circ$$

ب) اگر $\hat{A}<۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲<b^۲+c^۲$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A}<۹۰^\circ\Rightarrow\cos A>۰ \\ -۲bc<۰ \end{array}\right\}\Rightarrow -۲bc\cos A<۰ ①$$

از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم :

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A\xrightarrow{①}a^۲<b^۲+c^۲$$

بالعکس) اگر $a^۲<b^۲+c^۲$ آنگاه $\hat{A}<۹۰^\circ$

$$a^۲<b^۲+c^۲ \xrightarrow[\text{کسینوس‌ها}]{\text{قضیه}} b^۲+c^۲-۲bc\cos A<b^۲+c^۲ \Rightarrow -۲bc\cos A<۰$$

$$\Rightarrow \cos A>۰ \Rightarrow \hat{A}<۹۰^\circ$$

پ) اگر $\hat{A}=۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲=b^۲+c^۲$

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow \cos A=\cos ۹۰^\circ=۰ \Rightarrow -۲bc\cos A=۰ \quad (۱)$$

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A \xrightarrow{(۱)} a^۲=b^۲+c^۲$$

بالعکس؛ اگر $a^۲=b^۲+c^۲$ آنگاه $\hat{A}=۹۰^\circ$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \xrightarrow[\text{کسینوس‌ها}]{\text{قضیه}} b^۲+c^۲-۲bc\cos A=b^۲+c^۲ \Rightarrow -۲bc\cos A=۰ \Rightarrow \cos A=۰ \Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

۱۰ به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده، قائمه یا منفرجه بودن زاویه A در هر یک از مثلث‌ها مشخص می‌شود.

الف) $AB=۱۰$ و $AC=۶$ و $BC=۹$

$$\left.\begin{array}{l} a^۲=۹^۲=۸۱ \\ b^۲+c^۲=۶^۲+۱۰^۲=۳۶+۱۰۰=۱۳۶ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲<b^۲+c^۲ \Rightarrow \hat{A}<۹۰^\circ$$

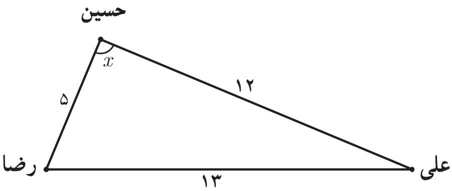
ب) $AB=۸$ ، $AC=۴$ ، $BC=۹$

$$\left.\begin{array}{l} a^۲=۹^۲=۸۱ \\ b^۲+c^۲=۴^۲+۸^۲=۱۶+۶۴=۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲>b^۲+c^۲ \Rightarrow \hat{A}>۹۰^\circ$$

پ) $AB=۸$ ، $AC=۱۵$ ، $BC=۱۷$

$$\left.\begin{array}{l} a^۲=۱۷^۲=۲۸۹ \\ b^۲+c^۲=۱۵^۲+۸^۲=۲۲۵+۶۴=۲۸۹ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

سؤالات ارزشیابی

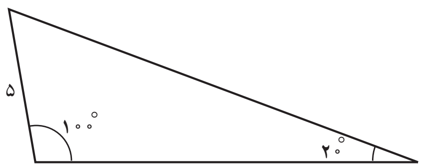


۱ علی، حسین و رضا، مطابق شکل مقابل و با فاصله‌های مشخص، در حیاط مدرسه ایستاده‌اند؛

الف) اندازه زاویه x را به‌دست آورید.

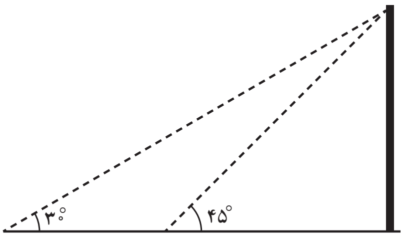
ب) اگر این سه نفر روی محیط یک دایره در وسط حیاط قرار گرفته باشند. شعاع دایره را به‌دست آورید.

۲ با استفاده از ماشین حساب اندازه اضلاع مثلث زیر را به‌دست آورید.



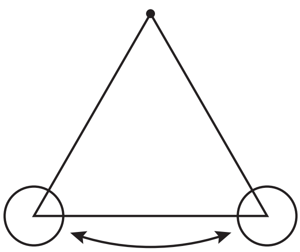
۳ مهندسی می‌خواهد دو سیم را مانند شکل روبه‌رو به نوک میله عمود بر زمین وصل کند. اگر فاصله بین دو سیم روی زمین ۱۰ متر باشد، چند متر سیم نیاز است؟

راهنمایی: ابتدا زاویه‌های مثلثی که دارای زاویه منفرجه است را پیدا کنید و سپس با استفاده از قضیه سینوس‌ها طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.



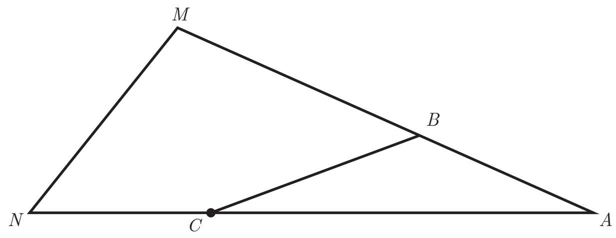
۴ پاندول ساعتی به طول $40\,cm$ با زاویه $30°$ جابه‌جا می‌شود. اندازه مسیری که به‌صورت مستقیم در یک بار حرکت طی شده را به‌دست آورید.

راهنمایی: مثلث را در نظر گرفته و از رابطه کسینوس‌ها استفاده کنید.

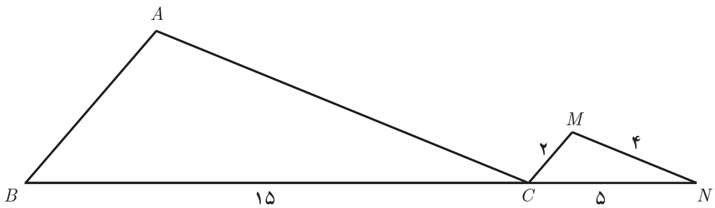


۵ در شکل زیر $\frac{AB}{AM}=\frac{CN}{AN}=\frac{۱}{۳}$ است. مساحت مثلث AMN چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

راهنمایی : از $\frac{CN}{AN}=\frac{۱}{۳}$ نتیجه می‌شود که $\frac{AC}{AN}=\frac{۲}{۳}$

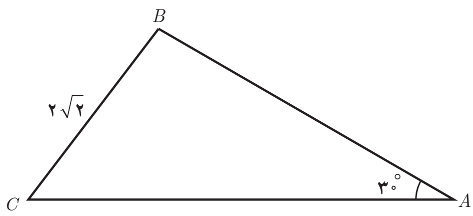


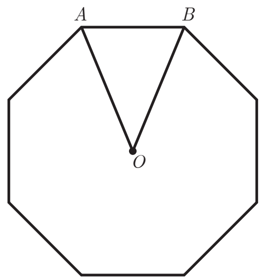
۶ دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{MNC}$ متشابه‌اند. اگر نیمساز زاویه C در مثلث ABC ضلع AB را در نقطه P قطع کند، طول AP و CP را به‌دست آورید.



۷ در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ نیمساز زاویه B ضلع AC را در D قطع می‌کند. اگر $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۴}$ و $AB=۸cm$ باشد، ضلع‌های مثلث را به‌دست آورید.

۸ شعاع دایره‌ای که از رأس‌های مثلث زیر می‌گذرد را به‌دست آورید.

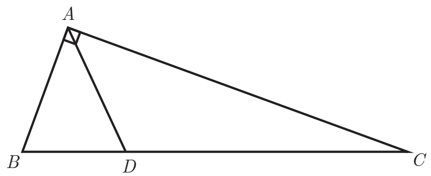




۹ در مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ زاویه مقابل بزرگ‌ترین ضلع را حساب کنید.

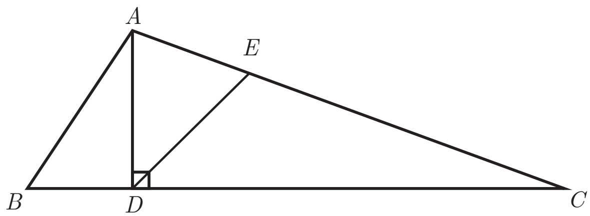
۱۰ در هشت ضلعی منتظم روبه‌رو $OA=OB=۶$ است. مساحت هشت ضلعی را محاسبه کنید.

راهنمایی: زاویه O را در مثلث OAB حساب کنید سپس مساحت مثلث را بیابید.



۱۱ مثلث روبه‌رو در رأس A قائمه است. اگر طول اضلاع قائمه ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد، طول نیمساز AD را حساب کنید.

۱۲ در شکل زیر AD نیمساز زاویه A است و $DE \parallel AB$ است.
اگر $AB=۸$ و $AC=۱۲$ باشد، اندازه AE را حساب کنید.
راهنمایی: از قضیه نیمساز و نسبت تالس هم‌زمان استفاده کنید.

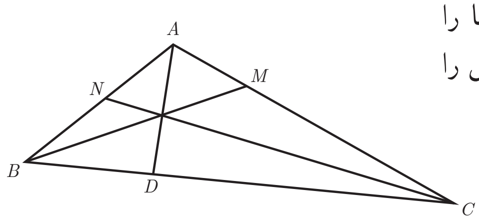


۱۳ محیط مثلثی ۳۰ سانتی‌متر است. نیمساز یکی از زاویه‌های این مثلث را رسم می‌کنیم. این نیمساز، ضلع مقابل زاویه را به پاره خط‌هایی به اندازه ۷/۸ و ۶/۲ تقسیم می‌کند. اندازه کوچک‌ترین ضلع مثلث را حساب کنید.

۱۴ اگر AD و BM و CN نیمسازهای زاویه‌های مثلث باشند، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{AM}{CM}\times\frac{CD}{BD}\times\frac{BN}{AN}$$

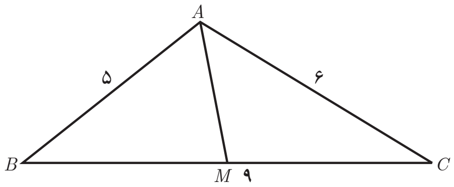
راهنمایی: برای سه نیمساز، قضیه نیمسازها را بنویسید و با جایگذاری در صورت سؤال، حاصل را حساب کنید.



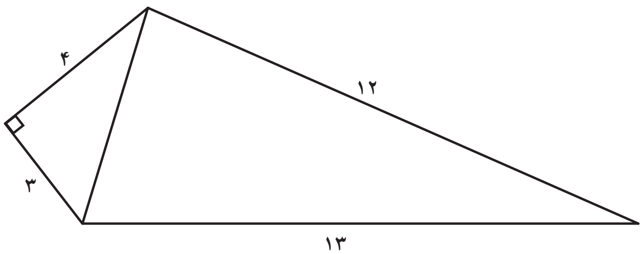
۱۵ در مثلث زیر طول میانه AM را حساب کنید.

راهنمایی : از رابط میانه‌ها استفاده کنید.

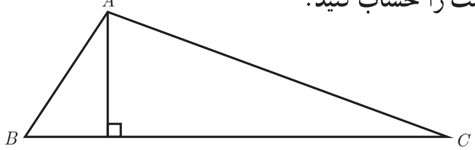
$$AB^۲ + AC^۲ = ۲AM^۲ + \frac{BC^۲}{۲}$$



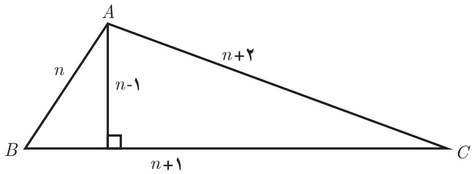
۱۶ مساحت شکل زیر را به‌دست آورید.



۱۷ در یک مثلث، طول‌های سه ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع متوسط، چهار عدد طبیعی متوالی است طول‌های ضلع‌های مثلث را حساب کنید.



راه‌حل : اگر n طول یک ضلع مثلث باشد و اندازه ضلع‌های دیگر $n+۱$ و $n+۲$ باشد، اندازه ارتفاع وارد بر ضلع متوسط $n-۱$ خواهد شد زیرا باید از n کوچک‌تر باشد.



$$۲P = n+(n+۱)(n+۲) = ۳n+۳$$

$$P = \frac{۳n+۳}{۲}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$S = \sqrt{\frac{۳n+۳}{۲}(\frac{۳n+۳}{۲}-n)(\frac{۳n+۳}{۲}-(n+۱)(\frac{۳n+۳}{۲}-(n+۲)))}$$

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\sqrt{(n+۱)(n+۳)(n+۱)(n-۱)} = \frac{\sqrt{۳}(n+۱)}{۴}\sqrt{(n+۳)(n-۱)} \quad (۱)$$

از طرفی $S = \dfrac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲} = \dfrac{(n+۱)(n-۱)}{۲} \quad (۲)$

$$(۱)=(۲) \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴}(n+۱)\sqrt{(n+۳)(n-۱)} = \frac{(n+۱)(n-۱)}{۲} \qquad \left(\begin{array}{c} n\text{عدد طبیعی است} \\ n+۱\neq ۰ \end{array}\right)$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{n^۲+۲n-۳} = n-۱$$

$$\sqrt{۳n^۲+۶n-۹} = ۲n-۲$$

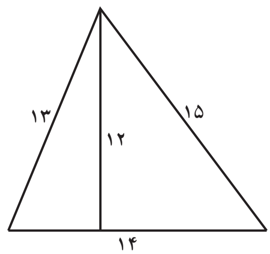
$$۳n^۲+۶n-۹ = ۴n^۲+۴-۸n$$

$$n^۲-۱۴n+۱۳=۰$$

$n=۱۳$ قابل قبول نیست (غ ق ق) $n-۱=۱-۱=۰$

$$(n-۱۳)(n-۱)=۰$$

$n=۱$



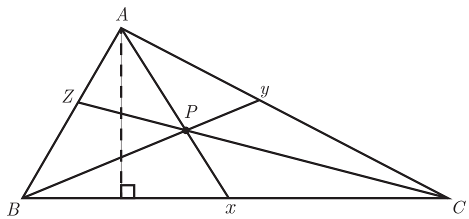
دانستنی‌هایی برای معلمان

در این بخش، ابتدا «قضیه ژان سوا» را بیان می‌کنیم و سپس، برای آشنایی بیشتر با دستاوردهای هرون اسکندرانی، یادداشتی تاریخی درباره او می‌آوریم.

قضیه ژان سوا

اگر در مثلث ABC سه خط سوایی Ax و By و Cz در نقطه P متقارب (همرس) باشند، رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{Bx}{xc}\times\frac{Cy}{yA}\times\frac{Az}{zB}=۱$$



حل : می‌دانیم اگر دو مثلث دارای ارتفاع‌های برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌هاست.

$$\frac{Bx}{xc}=\frac{S_{ABx}}{S_{Axc}}=\frac{S_{BPx}}{S_{Pxc}}=\frac{S_{ABx}-S_{BPx}}{S_{Axc}-S_{Pxc}}=\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}$$

همچنین می‌توان نوشت :

$$\frac{Cy}{yA}=\frac{S_{BPC}}{S_{ABP}},\frac{Az}{zA}=\frac{S_{APC}}{S_{BPC}}$$

$$\frac{Bx}{xC}\times\frac{Cy}{yA}\times\frac{Az}{zB}=\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}\times\frac{S_{BPC}}{S_{ABP}}\times\frac{S_{APC}}{S_{BPC}}=۱$$

حال اگر این سه خط سوایی، نیمساز، ارتفاع یا میانه باشند، طبق قضیه صفحهٔ قبل تساوی برقرار است.

هرون اسکندرانی

یکی از ریاضی‌دانانی که دستاوردهای علمی‌اش در ریاضیات کاربردی چشمگیر داشت، هرون اسکندرانی است. در مورد دوره زندگی این دانشمند اختلاف زیاد است.

او در نیمه دوم قرن اول بعد از میلاد می‌زیسته و حدود ۱۴ مقاله در ریاضیات کاربردی نوشته است. آثار هرون را به دو دسته تقسیم می‌کنند: مباحث هندسی و مباحث مکانیکی.

مهم‌ترین اثر هرون، «متریکا» است که در سه مقاله نوشته شده است. موضوع این اثر، اندازه‌گیری مساحت مربع‌ها، مستطیل‌ها، مثلث‌ها، ذوزنقه‌ها، چهارضلعی‌های خاص دیگر، دایره و قطعه‌های آن و ... است. فرمول بسیار استادانه این دانشمند در مورد محاسبه مساحت مثلث به‌وسیله اضلاع آن، در همین اثر آمده است.

آثار این دانشمند عبارت‌اند از:

۱ پنوماتیکا: هرون در این اثر از ۱۰۰ ماشین زمان خود یاد کرده و در مورد آنها مطالبی را نوشته است.

۲ دیوپترا: این کتاب، توصیف مهندسی یک زاویه‌یاب مساحی است.

۳ کاتوپتریکا: در این کتاب درباره خواص مقدماتی آینه‌ها، ساختن انواع آنها و استفاده از ریاضی بحث شده است.

بدفهمی‌ها

بدفهمی‌ها یا همان برداشت‌های ناقص یا نادرست دانش‌آموزان از یک مفهوم، باعث سردرگمی و موفق نشدن دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی می‌شود. گاهی نیز، به دلیل ماهیت به هم پیوسته مفاهیم ریاضی، بدفهمی‌ها باعث ایجاد مشکل در یادگیری‌های بعدی دانش‌آموزان می‌شود.

آگاهی درست دانش‌آموزان از اشتباهات و بدفهمی‌هایی که در یادگیری و حل مسئله‌های ریاضی دارند، عامل تعیین‌کننده برای رشد عملکرد و پیشرفت ریاضی آنان است. وقتی دانش‌آموز به درستی دریابد که دلایل و ریشه‌های بدفهمی و راه‌حل غلط او در کجا است و خود با راهنمایی‌های معلم درصدد تصحیح آنها برآید، بدون شک تجربه مهمی را در یادگیری ریاضی کسب کرده است که در موقعیت‌های دیگر یادگیری و حل مسائل ریاضی به او کمک خواهد کرد.

در ادامه، سؤالاتی که معمولاً دانش‌آموزان، به دلیل بدفهمی، در پاسخ به آنها در این فصل دچار مشکل‌اند، بیان می‌شود. ایجاد فرصت آشنایی با بدفهمی‌ها و مثال‌هایی از این گونه، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا درک بهتری از مفهوم به‌دست آورند و بدفهمی خود را اصلاح کنند و دانش خود درباره فرایندها را افزایش دهند.

۱ ضلع مثلثی برابر با $۲\sqrt{۳}$ سانتی‌متر و زاویه مقابل آن ۳۰° است. اگر ضلع دیگر مثلث برابر با ۶ سانتی‌متر باشد، زاویه مقابل آن را به‌دست آورید.

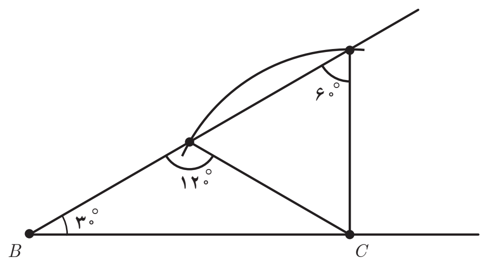
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{۶}{\sin A}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow\frac{۶}{\sin A}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\sin A=\frac{۶}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

زاویه مورد نظر چند درجه است؟

دانش‌آموزان اغلب پاسخ می‌دهند که زاویه ۶۰ درجه است. اما دو زاویه (بین ۰ و ۱۸۰) وجود دارد که سینوس آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است؛ بنابراین، این زاویه می‌تواند ۶۰ و یا ۱۲۰ درجه باشد.

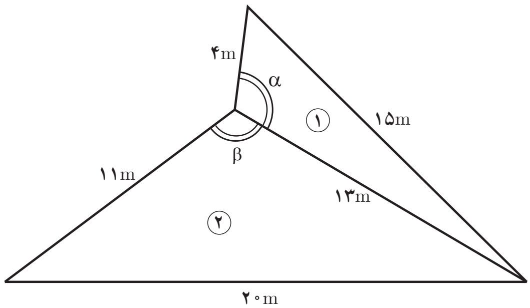
در رسم زیر وجود این دو زاویه را نشان می‌دهیم. ابتدا یک زاویه ۳۰° رسم می‌کنیم و یک ضلع آن را ۶ سانتی‌متر جدا می‌کنیم. از نقطه C به شعاع $۲\sqrt{۳}$ کمانی می‌زنیم. این کمان در دو نقطه ضلع دیگر زاویه را قطع می‌کند.



۲ دو زمین کوچکی به شکل مثلث، با یک دیوار به طول ۱۳ متر، مطابق شکل، از هم جدا شده است. ابعاد زمین‌ها در شکل مشخص شده است. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر است؟

نشان دهید دیوار مشترک، با لبه‌های ۴ متری و ۱۱ متری، زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha=\beta)$ (تمرین ۲ درس چهارم)

حل : حل زیر توسط دانش‌آموز انجام شده است :



$$P_۱ = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۳} = ۲۲ \qquad S_۱ = \sqrt{۱۲\times۱۱\times۹\times۲} = ۶۶$$

$$P_۲ = \frac{۴+۱۵+۱۳}{۲} = ۱۶ \qquad S_۲ = \sqrt{۱۶\times۱۲\times۱\times۳} = ۲۴$$

$$S=S_۱+S_۲=۶۶+۲۴=۹۰$$

$$\begin{matrix} S_۱ = \frac{۱}{۲}\times۱۳\times۱۱\times\sin\beta \\ S_۲ = \frac{۱}{۲}\times۱۳\times۴\times\sin\alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۶۶ = \frac{۱}{۲}\times۱۳\times۱۱\times\sin\beta \\ ۲۴ = \frac{۱}{۲}\times۱۳\times۴\times\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{۶۶}{۲۴} = \frac{۱۱\sin\beta}{۴\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{۶۶\times۴}{۲۴\times۱۱} = ۱$$

پس از اینکه دانش‌آموز در حل مسئله به نتیجه فوق رسید، به اشتباه از تساوی سینوس‌های دو زاویه، تساوی زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرد :

$$\sin\beta = \sin\alpha \Rightarrow \alpha=\beta$$

در اینجا لازم است معلم به این مهم اشاره کند که در این دو مثلث اگر $\sin\alpha = \sin\beta$ آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $\alpha=\beta$ زیرا امکان دارد زاویه‌های α و β مکمل یکدیگر باشند.

منابع

۱ کتاب هندسه، مویزودانز، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، چاپ چهارم، ۱۳۸۲.

۲ دایرةالمعارف هندسه، رستمی، محمدهاشم، انتشارات مدرسه، جلد هشتم، ۱۳۷۲.

۳ هندسه متوسطه، مبانی و مفهوم‌ها، نصیری، محمود، انتشارات مبتکران، ۱۳۹۴.

۴ تبدیل‌های هندسی، ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ۸ـ ای.م. یاگلم، ترجمه اسدالله کارشناس و عمیدرسولیان، مرکز نشر دانشگاهی، ۳ جلد.

۵ رستمی، محمدهاشم، دایرةالمعارف هندسه، انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، جلد پنجم.

۶ قراگزلو، جلیل‌ا...، مثلثات پایه، انتشارات فاطمی.

۷ Byer, O., Lazebnik, F., & Smeltzer, D. L. (2010). Methods for Euclidean geometry. MAA.

۸ Dodge, C. W. (2012). Euclidean geometry and transformational. Courier Corporation.

۹ Hvidsten. M. (2005). Geometry with geometry explorer™. McGraw-Hill.

۱۰ Kinsey, L. C., Moore. T. E., & Prassidis. S. (2011). Geometry & symmetry. John Wiley & Sons.

۱۱ Libeskind, S. (2008). Euclidean and transformational geometry: A deductive inquiry. Jones & Bartlett Publishers.

۱۲ Martin, G. E. (2012). The foundations of geometry and the non-Euclidean plane. Springer Science & Business Media.

۱۳ O'Leary, M.L. (2010). Revolutins of Geometry (Vol. 87). John Wiley & Sons.

۱۴ Posamentier. A. S. (1984). Excursions in advanced Euclidean geometry Addison - Wesley.

۱۵ Tapp, K. (2011). Symmetry: a mathematical exploration. Springer Science & Business Media.

۱۶ Umble, R. N., & Han, Z. (2014). Transformational Plane Geometry. CRC Press.