بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلیٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی (۳)

رشتهٔ علوم تجربی

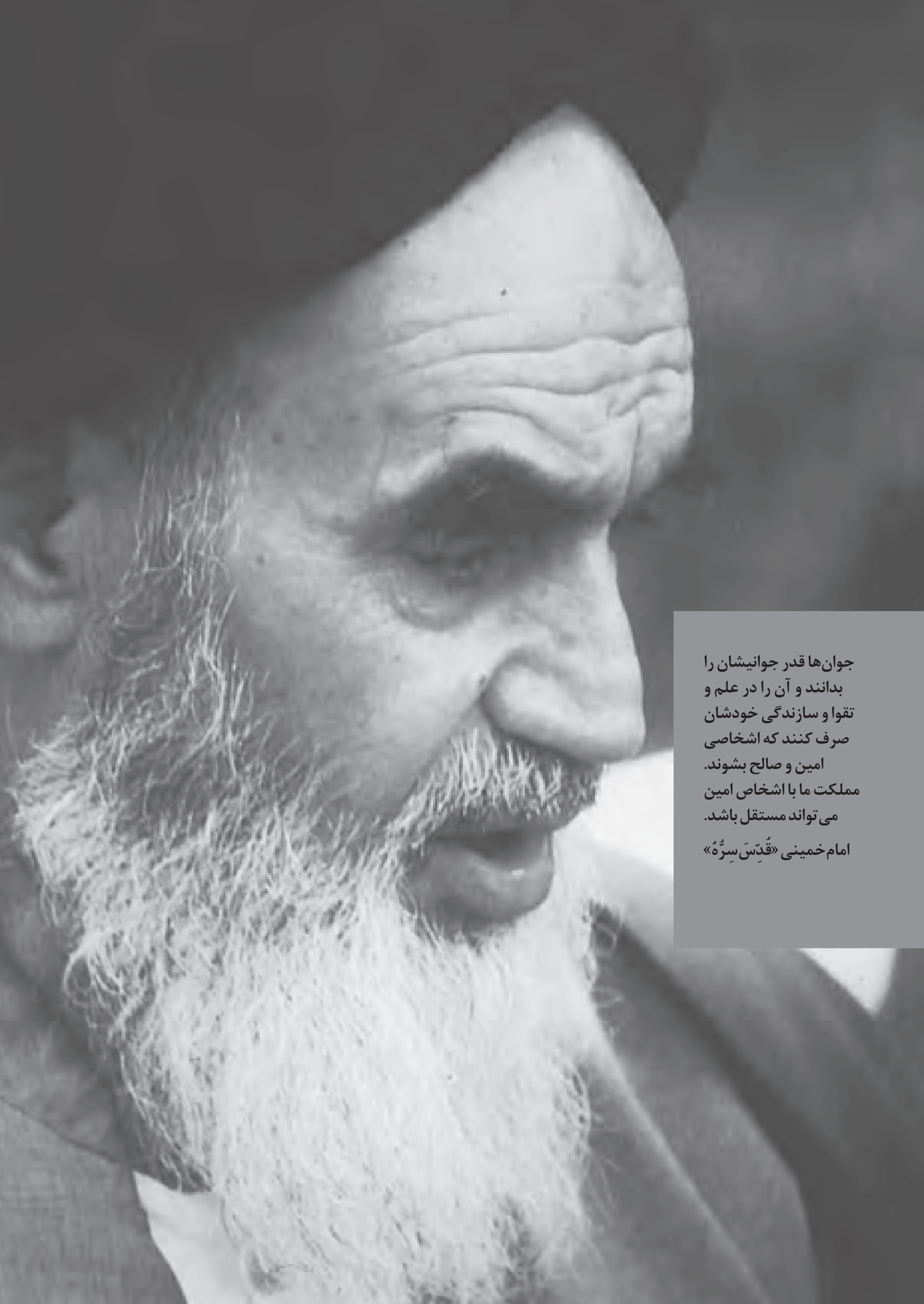
راهنمای معلم

پایهٔ دوازدهم
دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای معلم ریاضی (۳) ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۳۶۴
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
سعید حق‌جو، رضا حیدری‌قزلجه، زهرا رحیمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، آذر کرمیان، آناهیتا کمیجانی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ مریم نصرتی (صفحه‌آرا)ـ فاطمه رئیسیان‌فیروزآباد (رسام) ـ زهره برهانی‌زرندی، مرضیه اخلاقی، سیما لطفی، الهام جعفرآبادی، فاطمه پزشکی و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۸

شابک ۸ـ۳۴۲۹ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3429-8



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست

سخنی با همکاران

ساختار کتاب درسی ریاضی ۳ بر اساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین طراحی شده است. فعالیت‌ها، موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم ریاضی فراهم می‌کنند و مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان هستند. معلم در این میان نقش مهمّی برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها بر عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها توسط معلم وجود دارد. راهنمای حاضر بر اساس آن تنظیم شده است که کتاب درسی محور اصلی در فرایند آموزش باشد. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌گو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

برای تصویر عنوانی هر فصل، اطلاعاتی مناسب و مرتبط با آن در کتاب راهنما آمده است. اهداف هر فصل و اهداف هر درس در کتاب حاضر توضیح داده شده است. همچنین در روش تدریس ارائه شده برای هر درس، نحوه اجرای هر فعالیت و چالش‌های پیش رو، پیشنهادهایی برای غنی‌سازی هر فعالیت، بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان در آن فعالیت و نیز توصیه‌هایی برای ارزشیابی نیز ارائه شده است. علاوه بر این در مورد پاسخ بیشتر فعالیت‌ها و تمرینات، راهنمایی به عمل آمده است. در کنار این، بحث‌هایی نیز به عنوان دانستنی‌هایی برای معلم و همچنین نمونه سؤال‌هایی برای ارزشیابی ارائه شده است.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس باشند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد دربارهٔ یک مفهوم، حدود و ثغوری در کتاب مشخص شده است. رعایت این حد و مرزها، در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی الزامی است. روند کتاب نشان می‌دهد که حتی ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای آن در زندگی واقعی، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان

می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط، در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است. امید است که این موضوع، مد نظر معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفادهٔ افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درسی را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان

فصل ۱

تابع

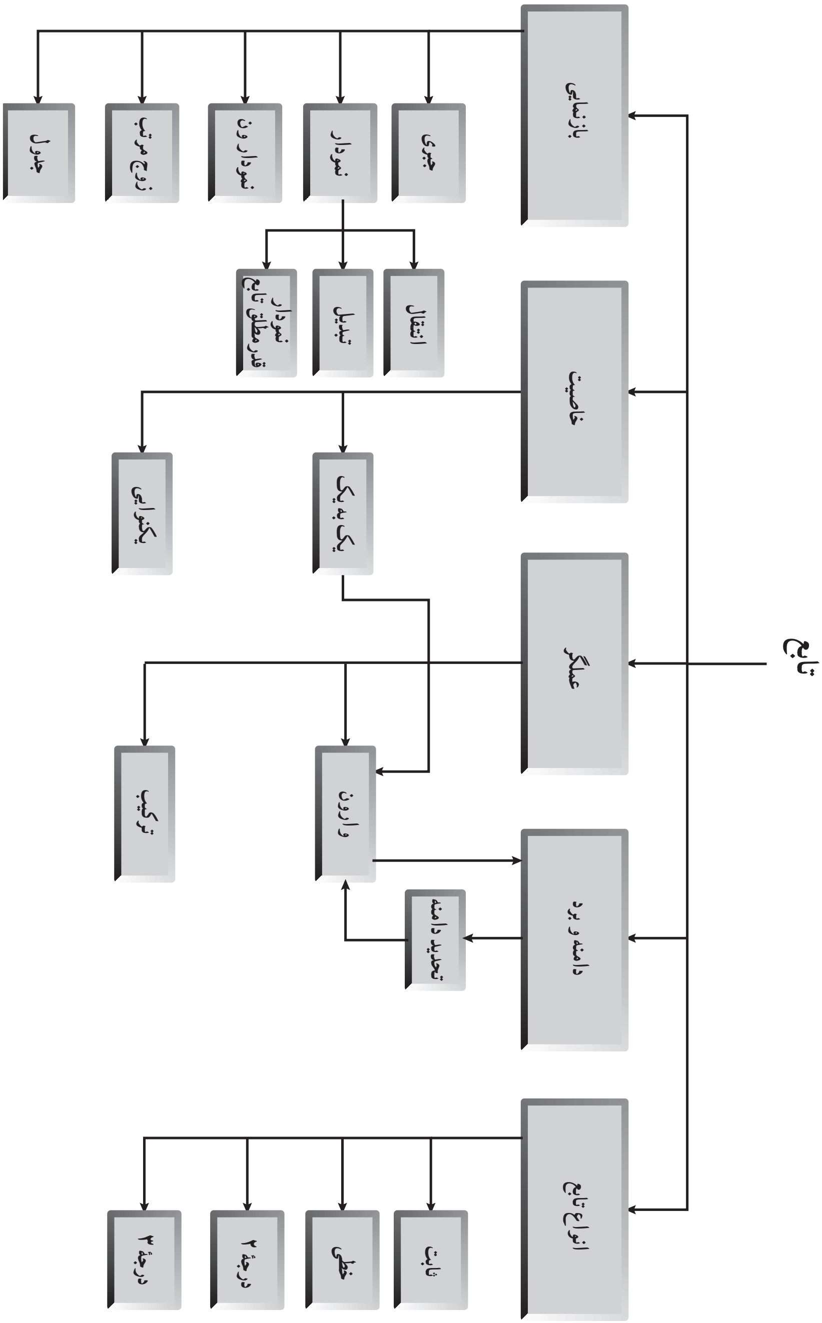
عکاس: سیدمهدی حسینی

پل سفید ـ اهواز

تصویر عنوانی

تصویر عنوانی مربوط به پل سفید اهواز است که یکی از پل‌های شهر اهواز بوده و از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانهٔ کارون ساخته شده است که دارای دوقوس فلزی ۱۲ و ۲۰متری است. این پل به‌عنوان یکی از آثار ملی ایران به ثبت رسیده است. قوس‌های این پل تابع درجهٔ دوم را نشان می‌دهند.

نقشه مفهومی


تابع
بازنمایی
جبری
نمودار
نمودار ون
زوج مرتب
جدول
انتقال
تبدیل
نمودار قدرمطلق تابع
خاصیت
یک به یک
یکنوایی
عملگر
وارون
ترکیب
دامنه و برد
تحدید دامنه
انواع تابع
ثابت
خطی
درجهٔ ۲
درجهٔ ۳

ارائهٔ تعریف در آغاز تدریس

گام آخر در علم ریاضی، صورت‌بندی مسائل از طریق اصل موضوعی ساختن آن است. این نقطهٔ پایانی، نباید به‌عنوان نقطهٔ آغازین تدریس ریاضی به‌حساب آید. (فرودنتال، ۱۹۹۱)

ــ دانش پداگوژیکی محتوا

اتصال دانش اولیه به دانش جدید ــ ارائهٔ تعریف: در حالی‌که می‌توان تعریفی را در قالب یک جمله بیان کرد، باز کردن یک تعریف یک کار شناختی دشوار است. (سلون ۱۹۹۲)

به‌نظرتال (۱۹۹۰) به عوض سروکار داشتن در ابتدا با تعاریف رسمی، که شامل عناصر ناآشنا برای یادگیرنده است، بهتر است کوشش شود تا رویکردی پیدا شود که بر مبنای آن ایده‌هایی باشند که دارای نقش دوگانه آشنا بودن برای دانش‌آموزان و نیز فراهم ساختن پایه‌ای برای رشد ریاضی بعدی باشند. تال چنین ایده‌ای را ریشهٔ شناختی می‌نامد. یک ریشهٔ شناختی از یک بنیان ریاضی متفاوت است. درحالی که یک بنیان ریاضی یک نقطهٔ شروع مناسب برای توسعهٔ منطقی یک موضوع است، یک ریشهٔ شناختی، مناسب‌تر برای پیشرفت برنامهٔ آموزشی است.

ویژگی اساسی تابع چیست؟ فرودنتال در تحلیل جامع خود (۱۹۸۳) دلخواه بودن ویکتایی (یک بنیانی بودن) را به‌عنوان ویژگی‌های اساسی تابع، به شکلی که در طول تاریخ تکامل پیدا کرده است درنظر می‌گیرد.

ــ Arbitrariness

طبیعت دلخواه تابع هم به ارتباط بین دو مجموعه‌ای که به وسیلهٔ آنها تعریف می‌شود و هم به خود مجموعه‌ها برمی‌گردد.

ــ Univalence

یکتایی به نوع ارتباط بین اعضای دو مجموعه برمی‌گردد.

بازنمایی‌های مختلف: درک یک مفهوم در یک بازنمایی آن، لزوماً به این معنی نیست که فرد آن را در هر بازنمایی دیگر نیز درک می‌کند. دانش‌آموزان باید مفاهیم را در بازنمایی‌های مختلف آن درک کنند و قادر باشند که آنها را به یکدیگر تبدیل کنند و بین آنها ارتباط برقرار کنند. بازنمایی‌های مختلف بصیرت‌های مختلفی را به دست می‌دهند که امکان یک درک بهتر، عمیق‌تر، نیرومندتر و کامل‌تر از مفهوم را به‌دست می‌دهد.

وقتی فرد با بازنمایی‌های متفاوت یک مفهوم ریاضی سروکار دارد، ممکن است مفهوم را با به دست آوردن خواص مشترک آن و نادیده گرفتن مشخصه‌های نامربوطی که برآن بازنمایی تحمیل شده‌اند، انتزاع کند.

اهداف کلی فصل اول

- ❑ آشنایی با توابع چندجمله‌ای
- ❑ آشنایی با توابع یکنوا و غیریکنوا
- ❑ آشنایی با ترکیب توابع
- ❑ آشنایی با تبدیل نمودار توابع
- ❑ درک مفهوم تابع وارون و محاسبهٔ آن
- ❑ آشنایی با تحدید دامنه

درس اول

توابع چندجمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

اهداف درس

❑ آشنایی با توابع چندجمله‌ای و ضابطهٔ کلی آنها

❑ آشنایی با تابع $y = x^۳$ و نمودار آن و انتقال عمودی و افقی نمودار آن (نمودارهایی باضابطهٔ $y=\pm(x\pm a)^۳ \pm b$)

❑ آشنایی با مفهوم یکنوایی و غیریکنوایی توابع

❑ توانایی تشخیص یکنوایی و غیریکنوایی تابع از روی نمودار آن در دامنهٔ تابع و بازه‌های دلخواه

در صفحهٔ ۲ از توابع چندجمله‌ای که در سال دهم و یازدهم فراگرفته‌اند مثال زده شده‌است. بهتر است دانش‌آموزان نیز مثال‌هایی را بیان کنند. تعریف رسمی تابع چندجمله‌ای در این صفحه آمده است. تابع درجهٔ۳ در صفحهٔ ۳ آورده شده است که در این کتاب تابع $y = x^۳$ موردنظر است. همچنین انتقال‌های عمودی و افقی آن نیز مدنظر بوده است. نمودار این تابع به کمک نقطه‌یابی رسم شده است. بهتر است از کاربردهای توابع چندجمله‌ای در شاخه‌های مختلف علوم در کلاس ذکر شود. به‌طور مثال در خواندنی همین صفحه از کاربرد این نوع توابع در الگوی کلی لانهٔ زنبور عسل توضیح مبسوط آورده است.

در فعالیت صفحهٔ ۴ مقایسه‌ای بین تابع درجهٔ ۳ و تابع درجهٔ ۲ انجام می‌شود. از آنجایی که تابع $y = x^۲$ برای دانش‌آموزان تابعی شناخته شده است می‌توانند تابع $y = x^۳$ را با آن مقایسه کنند. در نمودار رسم شده مشخص است که در بازهٔ (۱ ، ۰) نمودار تابع $x^۲$ در بالای نمودار $x^۳$ قرار گرفته است ولی برای xهای بزرگ‌تر از ۱ نمودار تابع $x^۳$ در بالای نمودار $x^۲$ قرار می‌گیرد. در فضای مشخص شده دانش‌آموزان باید نمودار این دو تابع را در بازهٔ [۰ ، ۱−] رسم کنند. در فعالیت بعدی نمودار $y = x^۳$ رسم شده است و انتقال‌های عمودی و افقی و نیز قرینه کردن نسبت به محور xها موردنظر بوده است که با هدایت و راهنمایی معلم باید

نمودار توابع خواسته شده رسم شوند.

کار در کلاس صفحهٔ ۵ نیز مشابه فعالیت قبل است با این تفاوت که ۹ ضابطه و ۹ نمودار داده شده است و دانش‌آموز باید ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کند.

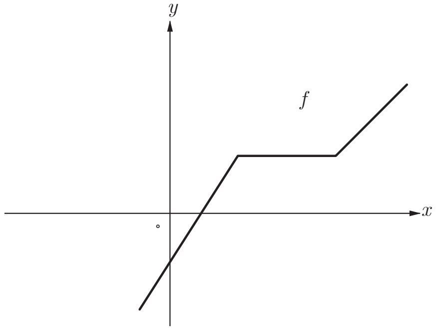
در این کار در کلاس یادآوری قواعد انتقال که در سال دهم آن را فراگرفته‌اند مدنظر بوده است. نمودارها با نرم‌افزار GeoGebra رسم شده‌اند و کاملاً دقیق‌اند. ممکن است دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال دچار اشتباه شوند، اشتباهات نیز می‌تواند بخشی از مسیر آموزش باشد. صرف پیدا کردن سریع جواب نباید برای معلم کفایت کند. مطلوب آن است که تمامی دانش‌آموزان درگیر حل مسئله شوند، باهم بحث و گفت‌وگو کنند، استدلال بیاورند، رد کنند، توجیه کنند و ... که همهٔ اینها فرایندهایی در آموزش ریاضیات هستند و به اندازهٔ جواب درست دارای ارزش هستند. در پاسخ‌های اشتباه ممکن است نکاتی نهفته باشد که معلم بتواند اشکالات دانش‌آموزان را دریابد و میزان تسلط آنها را بر قواعد انتقال بسنجد و در صورت لزوم آنها را در کلاس با مثال‌هایی از توابع درجهٔ ۲ و قدرمطلق که قبلاً یاد گرفته‌اند مرور نماید. به این موضوع باید توجه شود که در کتاب تنها رسم نمودارهایی باضابطهٔ $f(x) = \pm(x \pm a)^۳ \pm b$ مدنظر است و رسم نمودارهایی باضابطه‌هایی مانند $y = (\frac{x}{۲}+۲)^۳$ و $y = (۲x-۱)^۳$ از اهداف درس نیست.

در صفحهٔ ۶ مفهوم توابع صعودی و نزولی با مثالی در مورد موضوع کاهش بارندگی در کشورمان بیان شده است که برای مثال میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. میزان صعود یا نزول بین هردو سال می‌تواند دستمایهٔ بحث در کلاس باشد. برای مثال در دو قسمت الف و ب روند صعودی میزان بارندگی در شهر گرگان و روند نزولی میزان بارندگی در شهر ارومیه آورده شده است که با توجه به نمودار می‌توانند فاصله‌های زمانی را مشخص نمایند.

باید به این نکته توجه داشت که توابع رسم شده پیوسته نیستند و خطوط بین نقاط مشخص شده برای آماده‌سازی ذهنی دانش‌آموزان نسبت به مفهوم صعودی و نزولی روی نمودار تابع است. در صفحهٔ ۷ تعاریف تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی، صعودی و نزولی با نمودارهایی به‌صورت رسمی آورده شده است. توجه دانش‌آموزان به این موضوع معطوف گردد که نمودارهای رسم شده فقط مثال‌هایی برای هرکدام از این نوع توابع هستند. پس از بیان این چهار تعریف بهتر است مثال‌های دیگری توسط معلم و دانش‌آموزان بیان شود و این مفاهیم به‌طور دقیق بررسی شوند. همچنین تفاوت تابع اکیداً صعودی و صعودی و نیز تابع اکیداً نزولی و نزولی به دقت با مثال‌هایی بررسی شود و با پرسش‌هایی در مورد تفاوت این توابع و با ذکر مثال‌های مختلف کاملاً تسلط بر موضوع حاصل شود.

در همین صفحه پس از این چهار تعریف تابع هم صعودی و هم نزولی یعنی تابع ثابت تعریف شده است. همچنین تعریف تابع اکیداً یکنوا و یکنوا آورده شده که دانش‌آموزان با توجه به تعریف‌های قبلی می‌توانند

تفاوت این دو تابع را نیز درک کنند. همچنین ارتباط بین توابع اکیداً یکنوا و یکنوا مدنظر است که توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. عکس این رابطه به‌صورت سؤال آمده است. به این معنی که آیا توابع یکنوا همواره اکیداً یکنوا هستند. دانش‌آموزان می‌توانند نادرستی این جمله را با یک مثال بیان کنند.



برای مثال تابع f یک تابع صعودی است یعنی یکنواست ولی اکیداً یکنوا نیست، زیرا در بازه‌ای ثابت است.

تابع قدرمطلق که دانش‌آموزان کاملاً با آن آشنا هستند در صفحهٔ ۸ به‌عنوان تابعی غیریکنوا آورده شده است که در بازهٔ $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی و دربازهٔ $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است. اما در کل دامنهٔ خود یعنی $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی.

در کار در کلاس همین صفحه نمودار توابعی رسم شده‌اند که باید مشخص شود در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند. مثلاً تابع (الف) در بازهٔ $(-\infty, ۲)$ و $(۳, +\infty)$ اکیداً صعودی است. همچنین در تمام زیربازه‌های این بازه‌ها نیز اکیداً صعودی است. تابع (ب) در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. تابع (پ) در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است. تابع (ت) نیز در کل دامنهٔ خود یعنی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. تابع قسمت (ث) نیز در کل دامنهٔ خود یعنی بازهٔ $(۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

تابع (ج) در بازه‌های $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ اکیداً نزولی است. تابع (چ) در بازه $(-\infty, ۰)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(۰, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

تابع (ح) در بازه‌های $(-\pi, -\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۲}, \pi)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است. تابع (خ) نیز در کل دامنهٔ خود یعنی $(-۲, +\infty)$ اکیداً صعودی است. دقت شود که تمام زیربازه‌های بازه‌های گفته شده نیز می‌توانند به‌عنوان پاسخ صحیح درنظر گرفته شود. در کار در کلاس صفحهٔ ۹ دو تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ رسم شده است و زیر بازه‌هایی به طول $\frac{\pi}{۲}$ در جدول آورده شده است که باید صعودی یا نزولی بودن توابع در این بازه‌ها مشخص شود که با توجه به نمودارها به راحتی قابل تشخیص است.

در فعالیت صفحهٔ ۱۰ تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ بدون ذکر ضابطهٔ آن رسم شده است که تابعی اکیداً صعودی و یک‌به‌یک است.

برای پاسخ به قسمت (پ) می‌توان پاسخ به این‌صورت بیان شود که در تابع مثلاً اکیداً صعودی رابطهٔ زیر همواره برقرار است :

$$\forall x_1 , x_2 \in D_f \quad ; \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

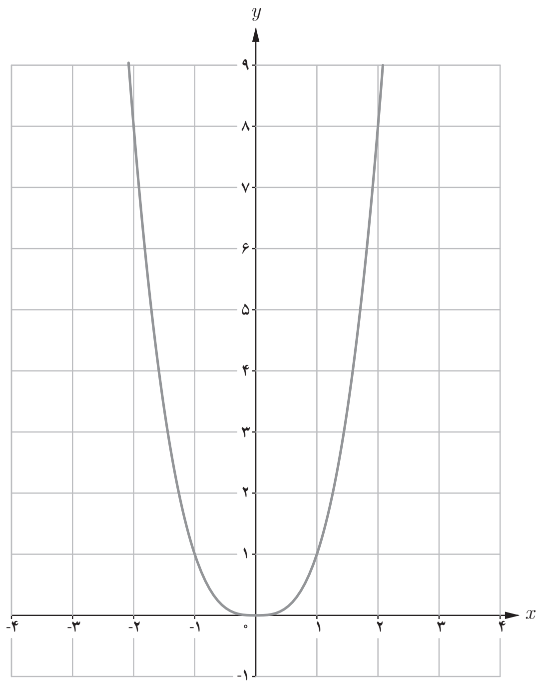
یعنی هیچ دو عضو متمایزی از دامنه پیدا نمی‌شوند که مقادیر آنها یکی باشد یعنی یک به یک است و تابعی وجود ندارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک‌به یک نباشد.

حل برخی از تمرین‌های صفحهٔ ۱۰

در تمرین‌های صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی در تمرین ۴، تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2^x + 2$ با توجه به مطالب فصل ۵ کتاب ریاضی ۲ و نیز قواعد انتقال رسم شود.

تمرین ۵ نیز ابتدا تابع $y = x^2 |x|$ برای دو بازهٔ $(+\infty ، 0)$ و $(0 ، -\infty)$ نوشته شود و سپس نمودار آن رسم شود.

$$x^2 |x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$



بنابراین با توجه به شکل مشخص است که حداکثر مقدار a، برای نزولی بودن این تابع در بازهٔ $[a ، -\infty)$، برابر صفر است.

در مورد سؤال ۶ دانش‌آموزان مثال‌های خود را بیان کنند و درستی و نادرستی آنها در کلاس بحث شود. مثال‌ها می‌توانند با ضابطه یا نمودار بیان شوند.

درس دوم

ترکیب توابع

اهداف درس

- ❑ درک مفهوم ترکیب توابع
- ❑ توانایی محاسبهٔ ضابطه و دامنهٔ تابع مرکب
- ❑ رسم نمودارهای $kf(x)$ و $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$ و تشخیص دامنه و برد آنها

در ابتدای درس دوم مثالی واقعی از کاربرد ترکیب توابع آورده شده است که توصیه می‌گردد بدون ذکر عنوان «ترکیب توابع» به حل این فعالیت با تمام جزئیات پرداخته شود. در ابتدا تابع $d(t)=۴t+۲$ برای $t\in[۰,۳]$ به‌عنوان تابع دما برحسب زمان معرفی شده است که برای tهای مختلف در بازهٔ $[۰,۳]$ دمای غذایی را که از یخچال بیرون آورده می‌شود محاسبه می‌کند. سپس تابع $n(d)=۲۰d^۲-۸۰d+۵۰۰$ برای $d\in[۲,۱۴]$ معرفی می‌شود که تابع تعداد باکتری برحسب دمای غذاست. یعنی در یک زمان مشخص پس از بیرون آوردن غذا از یخچال با استفاده از تابع d می‌توان دمای آن را محاسبه کرد و سپس با استفاده از مقدار d به دست آمده و تابع n، تعداد باکتری‌ها را در آن زمان مشخص کرد.

برای موارد گفته شده در صفحه ۱۲ جدول و نمودار ون رسم شده است. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما تعداد باکتری‌ها را مشخص کرد؟ در واقع تابع $n(t)$ ساخت؟ برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$n(d(t))=n(۴t+۲)=۲۰(۴t+۲)^۲-۸۰(۴t+۲)+۵۰۰$$
$$=۲۰(۱۶t^۲+۱۶t+۴)-۳۲۰t-۱۶۰+۵۰۰$$
$$=۳۲۰t^۲+۳۲۰t+۸۰-۳۲۰t-۱۶۰+۵۰۰=۳۲۰t^۲+۴۲۰$$

تابع $n(d(t))$ بدون دخالت دادن فاکتور دما، تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است. در شکل صفحهٔ ۱۲ مراحل ساخت تابع مرکب

$g(f(x))$ با جزئیات رسم شده است : در مرحلهٔ اول x به‌عنوان ورودی تابع f است و باید در دامنهٔ تابع f باشد و در مرحلهٔ دوم $f(x)$ باید در دامنهٔ تابع g باشد تا خروجی $g(f(x))$ حاصل شود. کتاب شرط تشکیل تابع مرکب gof را ناتهی بودن اشتراک برد f و دامنهٔ g لحاظ کرده است. دامنهٔ تابع مرکب در صفحهٔ ۱۳ با جملات سادهٔ فارسی و با نمودار ون و همچنین با علائم ریاضی توضیح داده شده است. اولین مثال از این مبحث با توابعی به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شده است که شرط تشکیل تابع مرکب gof را با تشکیل تک‌تک اعضای gof چک می‌کند و سپس در آخر تابع gof را می‌نویسد.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۴، مثال مشابهی از ترکیب توابع آورده شده است که توابع در جدول آورده شده‌اند. در دو مثال بعدی که در کتاب به‌طور کامل و با جزئیات حل شده‌اند توابع با ضابطهٔ جبری آورده شده‌اند و بهتر است تذکر این صفحه که توصیه می‌کند دامنهٔ توابع مرکب از تعاریف آن به‌دست آورده شود نه از روی ضابطهٔ آن، توسط دانش‌آموزان جدی گرفته شود زیرا در محاسبهٔ دامنه از روی ضابطهٔ تابع مرکب ممکن است ضابطه طوری ساده شود که مجموعهٔ دامنه تغییر کند. همچنین ذکر این نکته که در حالت کلی دو تابع مرکب fog و gof باهم مساوی نیستند در مثال دوم آورده شده است و در کلاس باید به آن توجه شود. توابعی که حاصل ترکیب یک تابع با خودشان است نیز می‌توانند به‌عنوان مثالی برای این مبحث باشند. در کار در کلاس پایان صفحهٔ ۱۴ ضابطهٔ دو تابع f و g داده شده و ضابطه و دامنهٔ توابع fog و fof خواسته شده است. با توجه به سطح کلاس می‌توان مثال‌های مشابهی را در کلاس مطرح ساخت و بهتر است مثال‌ها با بازنمایی‌های مختلف تابع باشند.

تبدیل نمودار توابع

دانش‌آموزان در سال یازدهم در کتاب ریاضی ۲، در فصل تابع با رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ آشنا شده‌اند و در کتاب ریاضی ۳ این موضوع به تفصیل یادآوری شده است. برای رسم نمودار $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار $y=f(x)$ را k برابر کنیم و طول نقاط عوض نمی‌شود. در مثال صفحهٔ ۱۵ نمودار تابع f رسم شده است و سه نقطه از آن نیز مشخص شده است. نمودار توابع $\frac{1}{2}f(x)$ ، $-f(x)$ و $2f(x)$ نیز در دستگاه‌های مختصات جداگانه رسم شده‌اند. مثلاً برای رسم تابع $\frac{1}{2}f(x)$ ، عرض نقاط تابع f در $\frac{1}{2}$ ضرب شده است، برای رسم تابع $-f(x)$، عرض نقاط تابع f قرینه شده است، در واقع تابع $-f$ قرینهٔ تابع f نسبت به محور xها است. همچنین برای رسم تابع $2f(x)$، عرض نقاط تابع f دو برابر شده است. در تمام این نمودارها طول نقاط با طول نقاط تابع اصلی یکی است و تغییری نمی‌کند و از این‌رو ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان هستند. دامنهٔ تابع $kf(x)$ نیز همان دامنهٔ تابع $f(x)$

است ولی برد آنها ممکن است متفاوت باشد و لزوماً یکسان نیست.

در صفحهٔ ۱۶ در اولین کار در کلاس ابتدا باید تابع $f(x)=|x-۲|$ در بازهٔ $[-۲, ۳]$ رسم شود و سپس به کمک آن توابع g ، h و k رسم شود. در کار در کلاس بعدی نیز توابع $\sin x$ ، $۲\sin x$ ، $-۲\sin x$ و $\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi$ و $\pi]$ رسم شده است. دانش‌آموزان از سال قبل تابع $y=\sin x$ را می شناسند و با استفاده از نقاط این نمودار می‌توانند تشخیص دهند که نمودار بنفش رنگ نمودار $y=\sin x$ است.

با توجه به مطالبی که در مورد ارتباط نمودار تابع $kf(x)$ و نمودار تابع $f(x)$ بیان شد مشخص است که عرض نقاط تابع $y=۲\sin x$ دو برابر عرض نقاط تابع $y=\sin x$ است یعنی نمودار قرمز رنگ نمودار تابع $y=۲\sin x$ است و به همین صورت نمودار سبزرنگ مربوط به تابع $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ و نمودار آبی رنگ نیز متعلق به تابع $y=-۲\sin x$ است. دامنهٔ این توابع بازهٔ $[-\pi$ و $\pi]$ و برد آنها در زیر مشخص شده است :

$$y=\sin x \quad \rightarrow \quad R=[-۱,۱]$$

$$y=۲\sin x \quad \rightarrow \quad R=[-۲,۲]$$

$$y=-۲\sin x \quad \rightarrow \quad R=[-۲,۲]$$

$$y=\frac{۱}{۲}\sin x \quad \rightarrow \quad R=\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$$

توصیه می‌شود در مورد تفاوت‌های بردهای توابع فوق و تأثیر ضریب تابع بر آنها بحث شود.

در کادر صفحهٔ ۱۷ حالت کلی تغییرات نمودار $f(x)$ برای تبدیل به نمودار $kf(x)$ بیان شده است و این تغییرات برای $k>۰$ و $k<۰$ به‌طور کامل توضیح داده شده است. نمودارهای رسم شده بدون ضابطه آورده شده‌اند و به خوبی تغییرات (انبساط و انقباض عمودی) را نشان می‌دهند.

رسم نمودار $|f|$ از روی نمودار f نیز در همین صفحه آورده شده است. این نوع نمودارها به ویژه در فصل مشتق و کاربرد مشتق استفاده شده‌اند.

با توجه به آنکه تابع $f(kx)$، ترکیب دو تابع $f(x)$ و kx است باید توضیحات رسم آن نیز بعد از مبحث ترکیب تابع آورده می شد که از صفحهٔ ۱۸ به آن پرداخته شده است. در این صفحه با تابع سادهٔ $f(x)=x+۳$ با دامنهٔ $[-۴, ۰]$ آغاز کرده است و رسم نمودار توابع $f(۲x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ به تفصیل بررسی شده است. دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۴, ۰]$ است بنابراین ورودی‌های تابع f به‌عنوان اعضای دامنهٔ آن باید در محدودهٔ این بازه قرار گیرند یعنی برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $f(۲x)$، عبارت $۲x$ را در این محدوده قرار می‌دهیم و محدودهٔ x را به‌عنوان دامنهٔ $f(۲x)$ می‌یابیم.

$-۴ \leq ۲x \leq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۰$ دامنهٔ $f(۲x)$، بازهٔ $[-۲, ۰]$ است

به‌طور مشابه برای یافتن دامنهٔ $f(\frac{x}{۲})$ ، عبارت $\frac{x}{۲}$ را در بازهٔ $[-۴, ۰]$ قرار می‌دهیم که بازهٔ $[-۸, ۰]$ به‌عنوان دامنهٔ (—) به‌دست می‌آید. مقایسهٔ نمودارهای این سه تابع تا حدودی تفاوت ضریب در ورودی (x) را نشان می‌دهد.

در صفحهٔ ۱۹ حالت کلی تغییرات نمودار $f(x)$ برای تبدیل به نمودار $f(kx)$ در حالت‌های $k>0$ و $k<0$ بیان شده است. نمودارهای رسم شده به خوبی این تغییرات (انبساط و انقباض افقی) را نشان می‌دهند.

در توابع مثلثاتی $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به راحتی می‌توان انبساط و انقباض افقی را مشاهده کرد. در مثال این صفحه در یک دستگاه مختصات نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ و در دستگاه مختصات دیگر $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ رسم شده است. همان‌طوری که از نمودارها هم پیداست اگر $0<k<1$ باشد نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود مثلاً $\sin\frac{x}{2}$ نسبت به $\sin x$ با ضریب $\frac{1}{2}$ کشیده می‌شود و اصطلاحاً می‌گوییم نمودار به‌طور افقی منبسط شده است یا انبساط افقی یافته است و چنانچه $k>1$ باشد نمودار $f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می شود مثلاً $\sin 2x$ نسبت به $\sin x$ با ضریب $\frac{1}{2}$ فشرده شده است و اصطلاحاً می گوییم نمودار به‌طور افقی منقبض شده است یا انقباض افقی یافته است.

توابع $\sqrt{x}$ ، $-\sqrt{x}$ ، $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{-x}$ از توابع مهمی هستند که قرینه های یکدیگر نسبت به محورهای مختصات‌اند. مثلاً تابع $-\sqrt{x}$ قرینهٔ $\sqrt{x}$ نسبت به محور x هاست. تابع $\sqrt{-x}$ قرینهٔ $\sqrt{x}$ نسبت به محور y هاست و تابع $-\sqrt{-x}$ قرینهٔ $\sqrt{-x}$ نسبت به محور xها و قرینهٔ $-\sqrt{x}$ نسبت به محور yها است. دامنه و برد این توابع در زیر مشخص شده است :

$$y=\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad D=[0,+\infty) \ ; \ R=[0,+\infty)$$
$$y=-\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad D=[0,+\infty) \ ; \ R=(-\infty,0]$$
$$y=\sqrt{-x} \quad \rightarrow \quad D=(-\infty,0] \ ; \ R=[0,+\infty)$$
$$y=-\sqrt{-x} \quad \rightarrow \quad D=(-\infty,0] \ ; \ R=(-\infty,0]$$

تأثیر ضریب منفی در دامنه و برد در حالت‌های مختلف در کلاس به بحث گذاشته شود. در کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ تابع f با نمودار در دامنهٔ $[-4, 4]$ رسم شده است و دانش‌آموز باید با استفاده از آن نقاط تابع $f(2x)$ را کامل نماید. دامنهٔ تابع $f(2x)$ برابر $[-2, 2]$ و دامنهٔ تابع $f(-x)$ برابر $[-8, 8]$ است.

از مطالب گفته شده و مثال‌های بیان شده می توان نتیجه گرفت که دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ الزاماً با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ یکسان نیست ولی برد آنها یکی است.

حل برخی از تمرین‌های صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی

۱ توابع f و g به‌صورت زوج مرتبی داده شده‌اند :

$$f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$$
$$g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$$
$$\mathrm{fog}=?\qquad \mathrm{gof}=?$$

ابتدا تابع fog را به‌دست می‌آوریم :

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{fog}(۵)=f(g(۵))=f(۷)=۸\\ \mathrm{fog}(۳)=f(g(۳))=f(۵)=۳\\ \mathrm{fog}(۷)=f(g(۷))=f(۹)=۸\\ \mathrm{fog}(۹)=f(g(۹))=f(۱۱)=۴\end{array}\right. \longrightarrow \mathrm{fog}=\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\}$$

برای به‌دست آوردن تابع gof نیز داریم :

$$\left.\begin{array}{l}gof(۷)=g(f(۷))=g(۸) : \text{تعریف نشده}\\ gof(۵)=g(f(۵))=g(۳)=۵\\ gof(۹)=g(f(۹))=g(۸)\ \text{تعریف نشده}\\ gof(۱۱)=g(f(۱۱))=g(۴)\ \text{تعریف نشده}\end{array}\right. \longrightarrow gof=\{(۵,۵)\}$$

۲ در این سؤال توابع باضابطهٔ جبری نشان داده شده‌اند.

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x}\ ;\ g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵}\ :\ D_{fog}=?\quad (fog)(x)=?$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}\quad ,\quad D_f=(-\infty,\tfrac{۳}{۲}]\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\left\{\tfrac{۵}{۳}\right\}$$

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\tfrac{۵}{۳}\right\}\,\middle|\,\frac{۶}{۳x-۵}\in(-\infty,\tfrac{۳}{۲}]\right\}$$

$$\frac{۲}{۳x-۵}\le\frac{۱}{۲}\ \rightarrow\ \frac{۲}{۳x-۵}\le\frac{۱}{۲}\ \rightarrow\ \frac{۳x-۵}{۲}\ge ۲\ \rightarrow$$

$$۳x-۵\ge ۴\ \rightarrow\ ۳x\ge ۹\ \rightarrow\ x\ge ۳\ \rightarrow$$

$$D_{fog}=\left\{x\in R-\left\{\tfrac{۵}{۳}\right\}\,\middle|\ x\ge ۳\right\}=[۳,+\infty)$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{۳-۲\times g(x)}=\sqrt{۳-۲\times\frac{۶}{۳x-۵}}=\sqrt{۳-\frac{۱۲}{۳x-۵}}$$

پ) $f(x)=\sqrt{x+۲}\quad,\quad g(x)=\sqrt{x^۲+۱۶}\quad,\quad D_{gof}=?\quad (gof)(x)=?$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}\ ,\ D_f=[-۲,+\infty)\ ,\ D_g=(-\infty,-۴]\cup[۴,+\infty)$$

$$\to D_{gof}=\left\{x\in[-۲,+\infty)\,\middle|\,\sqrt{x+۲}\in(-\infty,-۴]\cup[۴,+\infty)\right\}$$

$$\sqrt{x+۲}\in(-\infty,-۴]\cup[۴,+\infty)\Rightarrow\sqrt{x+۲}\in[۴,+\infty)\to$$

$$\sqrt{x+۲}\geq ۴\to x+۲\geq ۱۶\to x\geq ۱۴$$

$$\to D_{gof}=\left\{x\in[-۲,+\infty)\,\middle|\,x\in[۱۴,+\infty)\right\}=[۱۴,+\infty)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{(f(x))^۲-۱۶}=\sqrt{(\sqrt{x+۲})^۲-۱۶}=\sqrt{x+۲-۱۶}=\sqrt{x-۱۴}$$

۳ $\quad f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴\quad,\quad f(x)=۳x-۴\Rightarrow g(x)=?$

از آنجایی که ضابطهٔ $f(x)$ برابر $۳x-۴$ است، پس ضابطهٔ $f(g(x))$ برابر $۳g(x)-۴$ است از طرفی ضابطهٔ $f(g(x))$ در صورت مسئله داده شده است، بنابراین این دو را برابر هم قرار داده و ضابطهٔ $g(x)$ را از این تساوی به‌دست می‌آوریم :

$$۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴\longrightarrow ۳g(x)=۳x^۲-۶x+۱۸\longrightarrow g(x)=x^۲-۲x+۶$$

۵ این سؤال باید با تشکیل تابع مرکب در هر دو قسمت حل شود. البته می‌توان برای واضح‌تر شدن صورت مسئله ابتدا با یک مثال عددی شروع کرد ولی بعد از آن باید توابع را تشکیل داد. با توجه به مطالبی که در صورت سؤال آمده تابعی که کارت تخفیف ۲۰ درصدی را نشان دهد با f و تابعی که ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی را نشان می‌دهد با تابع g نشان می‌دهیم، بنابراین داریم :

کارت تخفیف $\quad f(x)=۰/۸x\qquad$ (x قیمت لپ تاپ است)

تخفیف نقدی $\quad g(x)=x-۲۰۰/۰۰۰$

الف) اول کارت تخفیف ۲۰درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند. یعنی تابع مرکب $g(f(x))$ تشکیل می‌شود.

$$g(f(x))=f(x)-۲۰۰,۰۰۰=۰/۸x-۲۰۰,۰۰۰$$

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد. یعنی تابع مرکب $f(g(x))$ تشکیل می‌شود :

$$f(g(x))=۰/۸(g(x))=۰/۸\,(x-۲۰۰,۰۰۰)=۰/۸x-۱۶۰,۰۰۰$$

واضح است که در حالت الف، الناز باید پول کمتری پرداخت کند و این حالت به نفع اوست.

۷ این سؤال برخلاف سؤال‌های مرسوم که ضابطهٔ دو تابع داده می‌شود و ضابطهٔ تابع مرکب خواسته می‌شود، ضابطهٔ تابع مرکب را داده و از دانش‌آموزان می‌خواهد مشخص کنند کدام دو تابع باید ترکیب شوند تا حاصل، توابع داده شده باشند. همچنین آیا پاسخ به‌دست آمده منحصر به فرد است؟

مثلاً برای قسمت ب داریم : $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

و تابع l می‌تواند ترکیب دو تابع f و g به‌صورت زیر باشد :

$$f(x)=\sqrt{x} \text{ و } g(x)=x^۲+۵ \rightarrow f(g(x))=\sqrt{x^۲+۵}=l(x)$$

همچنین :

$$f(x)=\sqrt[۴]{x} \text{ و } g(x)=(x^۲+۵)^۳ \rightarrow f(g(x))=\sqrt[۴]{(x^۲+۵)^۳}=\sqrt{x^۲+۵}=l(x)$$

و تعداد پاسخ‌های موردنظر بی‌شمار است.

۸ این سؤال به زیبایی ارتباط بین نقاط دو تابع را که می‌خواهیم باهم ترکیب کنیم نشان می‌دهد و پاسخ‌ها تماماً با توجه به نمودار توابع f و g و نقاط مشخص شده روی آنهاست، مثلاً در قسمت (پ)، برای به‌دست آوردن مقدار $(fog)(۱)$ داریم :

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(-۵)=۳$$

اگر $x=۱$ در تابع g داریم $y=-۵$ و در تابع f اگر $x=-۵$ داریم $y=۳$ و همین‌طور در مورد بقیهٔ مقادیر به همین ترتیب عمل می‌کنیم.

۹ در این سؤال با توجه به ضابطه‌های داده شده، معادلات موردنظر را تشکیل می‌دهیم و آنها را حل می‌کنیم : مثلاً در مورد قسمت ب داریم :

$$f(x)=۳x^۲+x-۱ \quad , \quad g(x)=۱-۲x \quad , \quad (gof)(x)=-۵$$

ابتدا تابع (gof) را تشکیل می‌دهیم :

$$(gof)(x)=g(f(x))=۱-۲\,f(x)=۱-۲\,(۳x^۲+x-۱)=$$

$$۱-۶x^۲-۲x+۲=-۶x^۲-۲x+۳ \quad , \quad (gof)(x)=-۵$$

$$\longrightarrow -۶x^۲-۲x+۳=-۵ \longrightarrow -۶x^۲-۲x+۸=۰$$

و این معادله را حل می‌کنیم.

سؤال‌های ۱۰ و ۱۱ مشابه مسائل حل شده در متن درس است و با استفاده از تبدیل نمودار توابع و توجه به نقاط نمودارها باید حل شود.

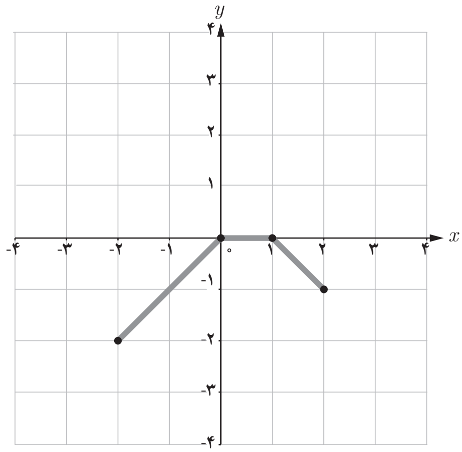
۱۲ ابتدا نقاط مشخص شدهٔ تابع t را در یک جدول می‌نویسیم :

x	$f(x)$
-۴	-۲
۰	۲
۲	۲
۴	۰

حال مثلاً برای رسم تابع قسمت الف، عرض‌ها را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده و ۱ واحد از آنها کم می‌کنیم و طول‌ها را نیز نصف می‌کنیم، بنابراین داریم :

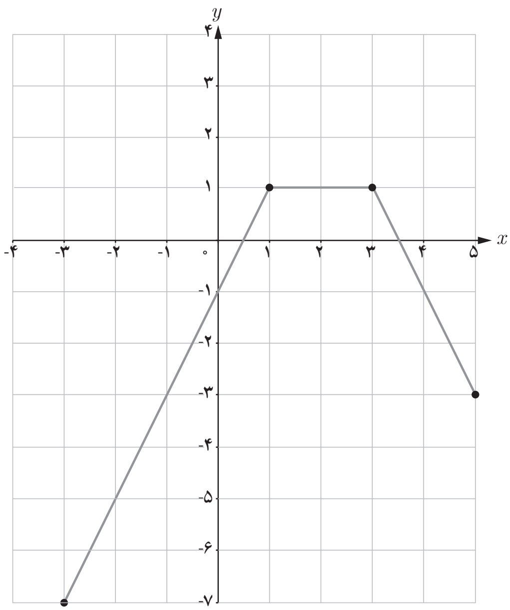
الف)

x	$\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$
-۲	-۲
۰	۰
۱	۰
۲	-۱



و برای رسم نمودار قسمت پ، عرض نقاط را دو برابر کرده و سه واحد از آنها کم می‌کنیم و به طول نقاط نیز یک واحد می‌افزاییم، در واقع نمودار f یک واحد به‌طرف راست نیز انتقال داده می‌شود.

x	$۲f(x-۱)-۳$
-۳	-۷
۱	۱
۳	۱
۵	-۳



درس سوم

تابع وارون

اهداف درس

- تسلط بر مفهوم تابع وارون
- درک رابطه بین دامنه و برد یک تابع و وارون آن
- تشخیص وارون بودن دو تابع نسبت به هم
- محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون توابع خطی، درجهٔ دوم، $\sqrt{ax+b}$ ، $x^۳$ و $\sqrt[۳]{x}$
- تحدید دامنهٔ توابع غیر یک به یک برای تبدیل به تابعی یک به یک (وارون‌پذیر)

درس سوم با عنوان تابع وارون با یادآوری مفهوم وارون تابع یک به یک f(زوج مرتبی) از ریاضی **۲** آغاز می‌شود. اگر تابع یک به یک f را داشته باشیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب آن تابع جدیدی به دست می‌آید که تابع وارون f است و آن را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

به این ترتیب اگر نقطهٔ (a , b) روی نمودار f قرار داشته باشد نقطهٔ (b , a) روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. همین مطلب قرینه بودن نمودارهای f و $f^{-۱}$ را نسبت به خط $y = x$ نتیجه می‌دهد.

در مثال صفحهٔ **۲۴** یک تابع زوج مرتبی داده شده است که وارون آن را به دست آورده است و سپس دو تابع مرکب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را تشکیل می‌دهد. در هر تابع داریم :

$(fof^{-۱})\,(x) = x$ و $(f^{-۱}\,of)\,(x) = x$

اما در $fof^{-۱}$:

$fof^{-۱} = \{(۴ , ۴) , (۳ , ۳) , (۵ , ۵)\}$

$fof^{-۱}$ تابع همانی با اعضای دامنهٔ $f^{-۱}$ است و در $f^{-۱}of$:

$f^{-۱}of = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۳ , ۳)\}$

$f^{-۱}of$ تابع همانی با اعضای دامنهٔ f است. بنابراین این دو تابع هر دو همانی هستند ولی با هم مساوی نیستند.

در صفحهٔ **۲۵** کتاب جزئیات این موضوع با سه نمودار ون نشان داده شده است و در حالت کلی f و g وارون یکدیگرند اگر دو شرط زیر با هم برقرار باشند :

$$\begin{cases}(fog)(x)=x \ ; \ x\in D_g \\ (gof)(x)=x \ ; \ x\in D_f\end{cases}$$

در صفحهٔ **۲۶** مثالی بیان شده است که در آن دو تابع با ضابطه معرفی شده‌اند و اثبات می‌کند که وارون یکدیگرند. اثبات با توجه به مطلبی است که گفته شد. مشابه این مثال در تمرین‌های پایان درس نیزآورده شده است.

تذکر : در مورد محاسبهٔ تابع وارون در کتاب ریاضی **۳** محدودیت‌هایی وجود دارد. معلمان محترم و طراحان آزمون‌ها تنها مجاز به استفاده از توابع خطی، درجهٔ دوم ، $x^۳$ ، $\sqrt{ax+b}$ ، و $\sqrt[۳]{x}$ در طرح سؤالات مربوط به تابع وارون هستند و این موضوع باید در ارزشیابی‌های مدارس، مؤسسات برگزارکنندهٔ آزمون و کنکور رعایت شود.

در توابع فوق‌الذکر که برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون، در صورت امکان x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس با تبدیل y و x به هم، ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

در کار در کلاس همین صفحه مجدداً تابع $x^۳$ یادآوری شده است. با توجه به آزمون خط افقی می‌توان گفت که این تابع یک به یک است و سپس قرینهٔ آن نسبت به خط $y=x$ رسم شود تا نمودار وارون آن نیز به‌دست آید، برای ضابطهٔ تابع وارون نیز داریم :

$$f(x)=x^۳ \rightarrow y=x^۳ \rightarrow x=\sqrt[۳]{x} \rightarrow y=\sqrt[۳]{x}$$
$$\rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

توجه : با توجه به حدود وثغور کتاب درسی طرح سؤال از توابع درجهٔ ۳ دیگر مجاز نیست.

در مثال صفحهٔ**۲۷**، روش محاسبهٔ تابع وارون به روش جبری و نموداری تثبیت می‌شود. توجه به رسم تابع و تابع وارون در یک دستگاه و ارتباط آن با نیم ساز ناحیهٔ اول و سوم از اهمیت بالایی برخوردار است. توجه شودکه جای دامنه و برد تابع و تابع وارون با هم عوض می‌شود.

مشابه این مثال، سؤال‌های کار در کلاس همین صفحه است که در کلاس توسط دانش‌آموزان حل می‌شود.

محدود کردن دامنه تابع

تمام توابع یک به یک نیستند، بنابراین وارون‌پذیر هم نیستند و نمی‌توان حرفی از تابع وارون آنها به میان آورد ولی می‌توان دامنه آنها را طوری محدود کرد که یک به یک شوند. با توجه به مطالب **صفحهٔ ۲۷** در این زمینه از دانش‌آموزان خواسته شود ابتدا ایده‌هایشان را در مورد محدود کردن دامنه بیان کنند و پاسخ‌هایشان را در کلاس با هم مقایسه کنید.

در مثال صفحهٔ ۲۸ با محدود کردن دامنه به بازهٔ (∞+ و ۱] تابع را یک به یک کرده است. از دانش‌آموزان خواسته شود بازه‌های دیگری برای همین تابع پیدا کنند که در آنها یک به یک باشد و تابع و وارونش را در بازه‌های موردنظر جدید رسم کنند. این کار ذهن دانش‌آموز را فعال ساخته و اعتماد به نفس او را در حل مسائل بالا می‌برد.

حل برخی از تمرین‌های درس سوم

۱

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}\rightarrow y=\frac{-۸x+۳}{۲}\rightarrow \frac{۲y-۳}{-۸}=x$

$\rightarrow y=\frac{۲x-۳}{-۸}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x-۳}{-۸}$

۲ برای اثبات اینکه دو تابع f و g وارون یکدیگرند، دو تساوی زیر را ثابت می‌کنیم و

$$\begin{cases}(fog)(x)=x\ ;\ x\in D_g\\ (gof)(x)=x\ ;\ x\in D_f\end{cases}$$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}\ ;\ g(x)=۸+x^{۲}\ ;\ x\leq ۰$

$\rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=-\sqrt{g(x)-۸}=-\sqrt{۸+x^{۲}-۸}=-\sqrt{x^{۲}}=-|x|$

$,x\leq ۰\rightarrow (fog)(x)=-(-x)x$

$,(gof)(x)=g(f(x))=۸+(f(x))^{۲}=۸+(-\sqrt{x-۸})^{۲}=۸+x-۸=x$

بنابراین f و g وارون یکدیگرند.

۳ در مورد این سؤال دامنه را به صورت‌های مختلفی می‌توان محدود کرد، مثلاً در مورد قسمت الف، بازه‌های $(-\infty, ۰)$ یا $(۰, +\infty)$ یا $[۱ , +\infty)$ و مانند آن پاسخ صحیح هستند.

۴ نمودار داده شده تابع f را نشان می‌دهد و نقاط آن به‌صورت زیراند.

x	-۳	-۱	۰	۱	۳
$f(x)$	-۴	-۲	۰	۲	۳

بنابراین جدول خواسته شده به‌صورت زیر تکمیل می‌شود :

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	-۳	-۱	۱	۳

۶ این تمرین مشابه مثال صفحهٔ ۲۸ است و می‌توان تابع را به‌صورت $f(x) = (x-۲)^۲ + ۱$ نوشت و بازه‌های مختلفی را برای محدود کردن آن درنظر گرفت، مانند $(۲,+\infty)$ یا $(۳,+\infty)$ یا $(-\infty, ۲)$ و مانند آن ...

۷ $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^۳$

الف) $(fog)^{-۱}(۵) = ?$

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم و سپس با استفاده از خواص تابع وارون، مقدار مجهول را می‌یابیم :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{۱}{۸}g(x) - ۳ = \frac{۱}{۸}x^۳ - ۳$$

می‌دانیم اگر $(a , b) \in fog$ آن‌گاه $(a , b) \in (fog)^{-۱}$ و به عکس.

پس اگر $(fog)^{-۱}(۵) = a$ آنگاه $(۵ , a) \in (fog)^{-۱}$ و بنابراین $(a , ۵) \in fog$ ، پس :

$$\frac{۱}{۸}a^۳ - ۳ = ۵ \to \frac{۱}{۸}a^۳ = ۸ \to a^۳ = ۶۴ \to a = ۴ \to (fog)^{-۱}(۵) = ۴$$

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶) = ?$

$$f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳ \to y = \frac{۱}{۸}x - ۳ \to x = ۸(y + ۳)$$

$$\to y = ۸(x + ۳) \to f^{-۱}(x) = ۸(x + ۳)$$

$$\to (f^{-۱}of^{-۱})(x) = f^{-۱}(f^{-۱}(x)) = ۸(f^{-۱}(x) + ۳) =$$

$$۸\,(۸\,(x+۳) + ۳) = ۶۴x + ۲۱۶$$

$$\to (f^{-۱}of^{-۱})(۶) = ۶۰۰$$

پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵) = \ ?$

$$(g^{-۱}of^{-۱})(x) = g^{-۱}(f^{-۱}(x)) \ =?$$

$$g(x) = x^{۳} \to g^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x} \ , \ f^{-۱}(x) = ۸(x+۳)$$

$$\to g^{-۱}(f^{-۱}(x)) = \sqrt[۳]{f^{-۱}(x)} = \sqrt[۳]{۸x+۲۴}$$

$$\to (g^{-۱}of^{-۱})(۵) = \sqrt[۳]{۸\times۵+۲۴} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$$

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y = -(x-۱)^{۳} + \frac{۱}{۲}$

ب) $y = (x+۲)^{۳} - \frac{۳}{۲}$

۲ نمودار توابع $y = -\sin x - ۱$ و $y = \cos x + ۱$ را در بازهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$ رسم کرده و بازه‌هایی را که در آنها صعودی یا نزولی است مشخص نمایید.

۳ نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

الف) $y = ۳^{x} - ۱$

ب) $y = (\frac{۱}{۳})^{x} - ۱$

پ) $y = -\log_{۳}^{x} + ۲$

ت) $y = x^{۲} - ۴x$

ث) $y = -|x+۱| - ۲$

ج) $y = \begin{cases} ۲x-۳ & x > ۲ \\ x^{۳} & -۱ \le x \le ۱ \\ -x+۱ & x \le -۳ \end{cases}$

۴ اگر $f(x) = \sqrt{x-۲}$ و $g(x) = ۲x-۳$، حاصل عبارات زیر در صورت امکان را به دست آورید.

الف) $(gof)(۵)$

ب) $(gof)(\frac{۳}{۲})$

پ) $(fof)(۶)$

ت) $(gog)(-۳)$

ث) $(fog)(-۳)$

ج) $(fog)(\frac{۳}{۴})$

۵ در هر قسمت ضابطه و دامنهٔ fog و gof را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $f(x) = -۵x + ۳\ ,\ g(x) = \sqrt{x}$

ب) $f(x) = \dfrac{۲x - ۳}{x + ۲}\ ,\ g(x) = \sqrt{x - ۳}$

۶ تابع $f(x) = \dfrac{۱}{-x^۲ + ۲x - ۳}$ را طوری بنویسید که حاصل ترکیب دو تابع دیگر باشد.

۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۲x - \sqrt{x - ۳} & x \geq ۵ \\ -x^۲ - ۳x & x < ۵ \end{cases}$ ، مقدار $f(f(۷)) + f(f(-۱))$ را به‌دست آورید.

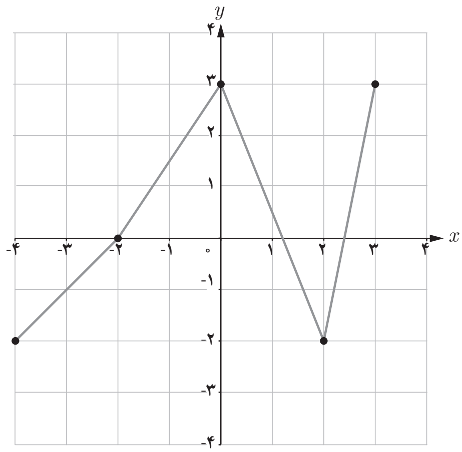
۸ نقطهٔ $A(۱\ ,\ -۴)$ روی نمودار تابع $y = ۳ - f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطهٔ نظیر A را روی نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲} f(x - ۲)$ بیابید.

۹ اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.

الف) $y = -f(x + ۱)$

ب) $y = f(۲x) - ۱$

پ) $y = f(x - ۲) + ۲$



۱۰ اگر $f(x) = \cos x$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۲\cos x - ۲$

ب) $y = \cos(-x) + ۱$

پ) $y = \cos(\frac{x}{۲}) - ۱$

ت) $y = -\cos ۲x - ۱$

۱۱ اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = x^۲ + bx$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$(fog)(x) = x^۲ + ۴x + ۱$

۱۲ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۹}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۱}$ باشد، حاصل $(fog)(x)-(gof)(x)$ را حساب کنید.

۱۳ اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}+۲$ ، دامنه و برد توابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز محاسبه کنید.

۱۴ ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع را مشخص نمایید.

الف) $f(x)=\frac{۲x}{۵}-۸$ ب) $g(x)=-۳+\sqrt{x+۳}$

پ) $h(x)=x^۲-۴x+۶\ (x\geq ۲)$ ت) $l(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{۲}$

۱۵

۱۶ برای تابع $f(x)=\frac{x-۳}{۲}$ ثابت کنید $(fof^{-۱})(x)=x$ و $(f^{-۱}of)(x)=x$ در هر مورد دامنهٔ تابع را مشخص کنید.

۱۷ توابع زیر یک به یک نیستند. به دو روش مختلف از آنها تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=x^۲-۴x+۱۱$

ب) $y=-|x-۱|+۳$

پ) $y=|x+۳|-۴$

۱۸ اگر $y=m_۱x+b_۱$ و $y=m_۲x+b_۲$ معادلهٔ دو خط باشند که نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید $m_۱m_۲=۱$.

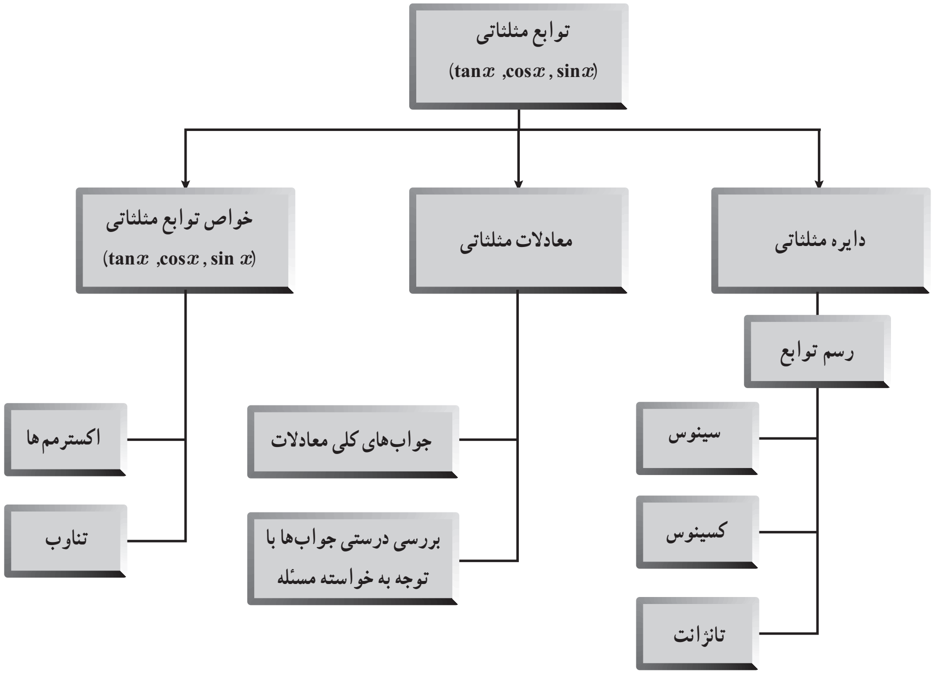
۱۹ اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۵,۱)\}$ و $g=۲|x|+۱$ و $f^{-۱}(g(a))=۲$ ، a را بیابید.

۲۰ در صورت یک به یک بودن تابع $f(x)=-(x-۲)^۲$ برای $x\leq ۲$، وارون آن را بیابید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

فصل ۲

مثلثات

نقشه مفهومی



توابع مثلثاتی
$(\tan x\ ,\cos x\ ,\sin x)$
خواص توابع مثلثاتی
$(\tan x\ ,\cos x\ ,\sin x)$
معادلات مثلثاتی
دایره مثلثاتی
رسم توابع
اکسترمم‌ها
تناوب
جواب‌های کلی معادلات
بررسی درستی جواب‌ها با توجه به خواسته مسئله
سینوس
کسینوس
تانژانت

درس اول

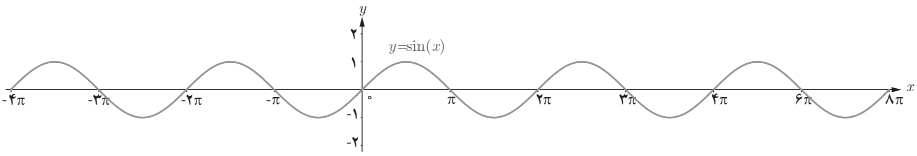
تناوب و تانژانت

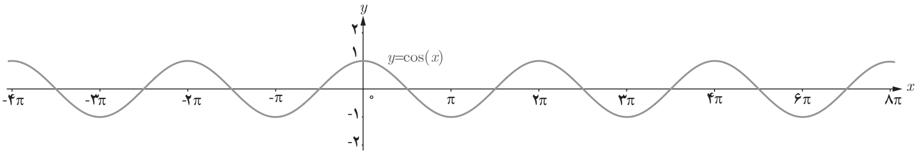
اهداف درس

- ❏ درک مفهوم تناوب و نقش آن در ساختار توابع متناوب مثلثاتی
- ❏ تشخیص دورهٔ تناوب در توابع با ضابطهٔ $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$
- ❏ تشخیص مقدار ماکزیمم و مینیمم در توابع با ضابطهٔ $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$
- ❏ تعیین ضابطه از روی نمودار توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$
- ❏ درک تأثیر پارامترهای a و b و c در توابع با ضابطهٔ $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این توابع.
- ❏ آشنایی با تابع تانژانت و تغییرات آن در دایرهٔ مثلثاتی.
- ❏ آشنایی با نمودار تابع تانژانت و ارتباط آن با دایرهٔ مثلثاتی.
- ❏ تشخیص مقدار و علامت تانژانت زاویهٔ دلخواه با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی.

روش تدریس

در ابتدای درس با توجه به شناخت نسبی که دانش‌آموزان از توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ دارند، مفهوم دورهٔ تناوب بیان شده است و با تأکید بر یکسان بودن مقادیر این دو تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها این مفهوم توضیح داده شده است. در کتاب ریاضی ۲ (حسابان ۱) روابط $\sin(x \pm ۲k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm ۲k\pi) = \cos x$ در فصل مثلثات آورده شده است و معلم می‌تواند با توضیح و یادآوری مفهوم این دو تساوی با استفاده از نمودارهای $\sin x$ و $\cos x$ که در صفحهٔ ۳۲ کتاب رسم شده است، به درک بهتر دانش‌آموزان به این مفهوم کمک نماید.





با توجه به اینکه نمودار این توابع دربازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π، ۸π ... و کلاً ۲kπ تکرار می‌شود، می‌توان گفت در تمام آنها تابع تکرار می‌شود اما در کتاب، دورهٔ تناوب را کوچک‌ترین آنها معرفی کرده است و به‌طور کلی :

تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت، مانند T موجود باشد به‌طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دورهٔ تناوب f می‌نامیم.

تذکر : مفهوم تناوب و دورهٔ تناوب برای توابع غیرمثلثاتی نیز به کار می‌رود ولی کتاب تنها به بررسی این مفهوم در توابع مثلثاتی که اشاره شد پرداخته است و از تدریس تناوب در توابع دیگر احتراز شود.

همچنین از بررسی تناوب توابع مثلثاتی پیچیده که حاصل‌ضرب یا حاصل‌جمع و ... دو یا چند تابع مثلثاتی هستند نیز اجتناب شود. دلیل این امر تأکید بر مفهوم اصلی تناوب و نیز احتراز از تکنیک‌های محاسباتی برای یافتن دورهٔ تناوب توابعی است که دانش‌آموز صرفاً با توجه به عملیات جبری، دورهٔ تناوب آنها را یافته و قادر به رسم نمودار آنها نیست و نمی‌تواند تناوب تابع را از روی نمودار آن بررسی کند.

از این‌رو به دبیران محترم توصیه می‌شود که با استفاده از ابزارهای نوین آموزشی مانند نرم‌افزار جئوجبرا (Geo Gebra[۱]) سعی در تعمیق مفهوم به‌جای آموزش رویه‌های جبری داشته باشند. بدیهی است آموزش رویه‌ها نیز در جای خود اهمیت داشته و بخش بزرگی از آموزش ریاضی را تشکیل می‌دهند. اما تأکید روی این رویه‌ها بدون درک درستی از مفهوم دورهٔ تناوب مدنظر کتاب نمی‌باشد.

فعالیت صفحهٔ ۳۲

۱ **هدف این فعالیت**، بررسی تأثیر ضریب a در تابع $f(x) = a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و

۱ــ این نرم‌افزار از سایت www.GeoGebra. org قابل دانلود است. در این سایت محتواهای مفهومی برای استفاده در کلاس درس قابل دسترسی است.

مینیمم این تابع است. در جدول صفحهٔ ۳۳ نمودار تابع مختلفی با ضابطهٔ $y = a\sin x$ و مقادیر مختلف a رسم شده است، که مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب توابع از روی نمودار آنها مشخص می‌شود. برای مثال در تابع $y = -۳\sin x$، مقدار ماکزیمم ۳ و مقدار مینیمم ۳- است و دورهٔ تناوب ۲π است و یا در تابع $y = -\frac{۱}{۳}\sin x$ مقدار ماکزیمم $\frac{۱}{۳}$ و مقدار مینیمم $-\frac{۱}{۳}$ و دورهٔ تناوب نیز ۲π است.

۲ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تابع $y = a\sin x$ و $y = a\cos x$ داریم :

$$\max = |a|\ , \min = -|a|\ , T = ۲\pi$$

یعنی ضریب a بر مقدار ماکزیمم و مینیمم مؤثر است ولی دورهٔ تناوب را تغییر نمی‌دهد.

۳ همچنین با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع بدیهی است که در صورت انتقال عمودی یک تابع، دورهٔ تناوب آن تغییر نمی‌کند ولی مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع تغییر می‌کنند و داریم :

$$\begin{cases} y = a\sin x + c \\ y = a\cos x + c \end{cases} \rightarrow Max = |a| + c\ ,\ Min = -|a| + c\ ,\ T = ۲\pi$$

فعالیت صفحهٔ ۳۴

۱ هدف این فعالیت بررسی تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر max و Min این تابع است. در جدول این فعالیت، نمودار توابع مختلفی با ضابطهٔ $y = \sin bx$ و مقادیر مختلف b رسم شده است که مقادیر max و min و دورهٔ تناوب توابع از روی نمودار آنها مشخص می‌شود. برای مثال در تابع $y = \sin(-۳x)$، مقدار max برابر ۱ و مقدار min برابر ۱- و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{۳}$ است و یا در تابع $y = \sin(\frac{x}{۲})$ مقدار max برابر ۱ و مقدار مینیمم برابر ۱- و دورهٔ تناوب ۴π است.

۲ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تابع $y = \sin bx$ و $y = \cos bx$ داریم :

$$\text{Max} = ۱ \text{ و } \text{Min} = -۱ \text{ و } T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

۳ همچنین با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع بدیهی است که در صورت انتقال عمودی یک تابع، دورهٔ تناوب آن تغییری نمی‌کند ولی مقادیر max و min تابع تغییر می‌کنند و داریم :

$$\begin{cases} y = \sin bx + c \\ y = \cos bx + c \end{cases} \rightarrow Max = ۱ + c\ ,\ Min = -۱ + c\ ,\ T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

نتیجه : با توجه به دو فعالیت قبل می‌توان گفت که در دو تابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع تأثیری ندارد ولی در مقدار max و min آن مؤثر است اما ضریب b در دورهٔ

تناوب تابع مؤثر بوده ولی در مقدار max و min آن تأثیری ندارد و انتقال عمودی نیز که با مقدار c مشخص می‌شود در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و فقط در مقدار max و min تابع اثرگذار است.

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

بنابراین اگر ضابطهٔ تابعی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ باشد می‌توانیم مقادیر ماکزیمم و مینیمم و همچنین دورهٔ تناوب تابع را به‌دست آوریم و به عکس اگر این مقادیر را داشته باشیم می‌توانیم ضابطهٔ توابع موردنظر را بنویسیم.

مثال اول صفحهٔ ۳۵

در این مثال چهار ضابطهٔ تابع داده شده و دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر کدام را خواسته است که با استفاده از مطالبی که گفته شد می‌توان مقادیر موردنظر را به‌دست آورد:

الف) $\left.\begin{matrix} y = ۳\sin(۲x) - ۲ \\ a = ۳, b = ۲, c = -۲ \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} \max = |a| + c = |۳| - ۲ = ۱ \\ \min = -|a| + c = -|۳| - ۲ = -۵ \end{matrix}$

$, T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi$

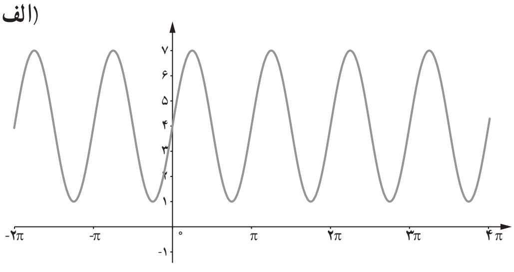
ب) $\left.\begin{matrix} y = \pi\sin(-x) + ۱ \\ a = \pi, b = -۱, c = ۱ \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} \max = |\pi| + ۱ = \pi + ۱ \\ \min = -|\pi| + ۱ = ۱ - \pi \end{matrix}$

$, T = \frac{۲\pi}{|-۱|} = ۲\pi$

مثال دوم صفحهٔ ۳۵

در این مثال چهار نمودار مثلثاتی آورده شده و با تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم، ضابطهٔ تابع را خواسته است.

الف)



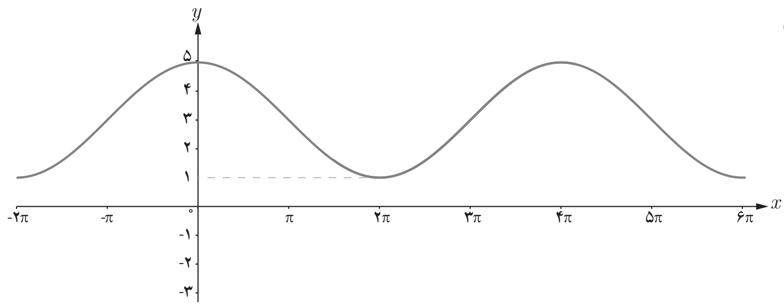
با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که ماکزیمم یا مینیمم تابع در $x=\circ$ واقع نشده است، بنابراین ضابطهٔ تابع موردنظر می‌تواند به‌صورت $y=a\sin bx+c$ باشد. مقدار max برابر ۷ و مقدار min برابر ۱ است. همچنین با دقت در نمودار مشخص است که طول بازه‌ای که تابع در آن یک بار تکرار می‌شود برابر π است، بنابراین داریم :

$$\begin{cases}|a|+c=۷\\-|a|+c=۱\end{cases}\rightarrow ۲c=۸\rightarrow c=۴\ ,\ |a|=۳$$

$$,\ \frac{۲\pi}{|b|}=\pi\rightarrow |b|=۲$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید همواره مقدار c، میانگین max و min تابع است. پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=۳\sin ۲x+۴$ یا $y=-۳\sin(-۲x)+۴$ است، یعنی a و b یا هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند که در کتاب هر دو مقدار a و b را مثبت فرض کرده و ضابطهٔ $y=۳\sin ۲x+۴$ را نوشته است.

پ)



با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که ماکزیمم تابع در $x=\circ$ واقع شده است. بنابراین ضابطهٔ تابع موردنظر می‌تواند به‌صورت $y=a\cos bx+c$ باشد. مقدار max برابر ۵ و مقدار min برابر ۱ است . از نمودار پیداست که دورهٔ تناوب برابر ۴π است، بنابراین داریم :

$$\begin{cases}|a|+c=۵\\-|a|+c=۱\end{cases}\rightarrow ۲c=۶\rightarrow c=۳\ ,\ |a|=۲$$

که a و b هر دو مثبت هستند.

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}$$

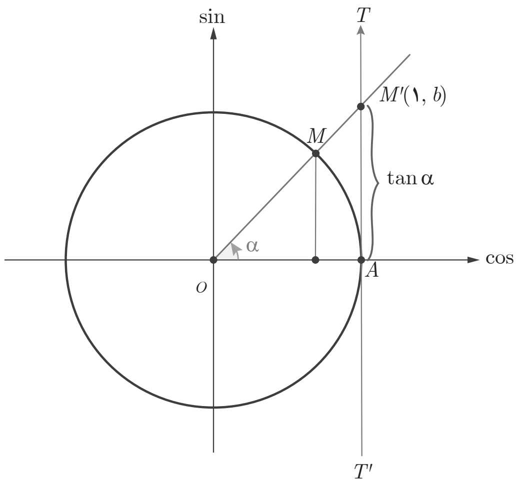
بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳$ است.

تانژانت

فعالیت اول صفحهٔ ۳۷

هدف این فعالیت معرفی محور تانژانت و تشخیص مقدار و علامت تانژانت برای زوایای مختلف در نواحی دایرهٔ مثلثاتی است.

در قسمت الف، باید این مطلب توضیح داده شود. که تانژانت هر زاویهٔ دلخواه مانند α، از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود و این خط را محور تانژانت می‌نامیم. توصیه می‌شود دبیران محترم علاوه بر شکل کتاب که تانژانت زاویه‌ای در ربع اول را مشخص کرده است، برای هر سه ناحیهٔ دیگر مثال‌های دلخواه زده و از دانش‌آموزان بخواهند تا تانژانت زاویه‌ها را مشخص نمایند. تشخیص علامت تانژانت زاویه که بستگی به ناحیهٔ زاویه دارد نیز یک هدف آموزشی مهم بوده که باید به دقت توضیح داده شود.

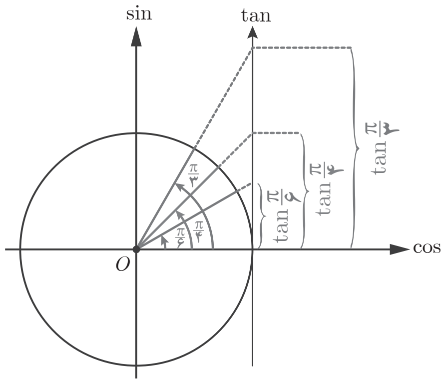


در قسمت پ توضیح تعریف نشده بودن $\tan\frac{\pi}{۲}$ باید با رسم زاویه‌هایی که در ربع اول به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند صورت بگیرد. همچنین توضیح در مورد $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ با رسم زاویه‌هایی در ربع سوم که به $\frac{۳\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند انجام می‌شود.

تغییرات تانژانت

فعالیت دوم صفحهٔ ۳۷

این فعالیت به منظور بررسی تغییرات تابع تانژانت طراحی شده است. در شکل، چند زاویه که دانش‌آموزان با آن آشنا هستند مشخص شده است و تانژانت این زوایا روی محور تانژانت با رنگ‌های مربوط تعیین شده است.



دانش‌آموز با دقت در مقادیر تانژانت زوایای موردنظر در می‌یابد که با بزرگ‌شدن زاویه‌ها در ربع اول، مقادیر تانژانت نیز افزایش می‌یابند و با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در این ربع و نزدیک‌شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقدار تانژانت بیشتر و بیشتر می‌شود تا اینکه در $\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است. نکتهٔ مهم در این فعالیت جلب توجه دانش‌آموزان به تغییرات تانژانت در ربع اول است.

کار در کلاس صفحهٔ ۳۸

این کار در کلاس تعمیم و جمع‌بندی فعالیت قبلی است که در آن تغییرات تانژانت در ربع‌های دوم تا چهارم نیز بررسی شده است و در قسمت الف روند تغییر مدنظر بوده است که روند تغییرات تانژانت در هر ربع افزایش است. در قسمت ب بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع خواسته است که به‌صورت زیر است :

ربع دوم : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \to \tan\alpha \in (-\infty, 0)$

ربع سوم : $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \to \tan\alpha \in (0, +\infty)$

ربع چهارم : $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \to \tan\alpha \in (-\infty, 0)$

در قسمت پ جدولی داده شده است که مقادیر تانژانت را برای زوایایی که در ریاضی ۱ و ریاضی ۲ دانش‌آموز با نسبت‌های مثلثاتی آنها آشنا شده، خواسته است که در همهٔ ربع جهت تغییرات صعودی و علامت $\nearrow$ است. هدف این بررسی‌ها با جزئیات فوق، فراهم آوردن مقدمات رسم نمودار تابع تانژانت است.

تابع تانژانت

ماهیت تابعی تانژانت در صفحهٔ ۳۹ به‌صورت رسمی بیان شده است و اینکه به‌ازای هر زاویهٔ دلخواه α در دایرهٔ مثلثاتی (به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$) مقداری حقیقی به‌عنوان tanα داریم این امر را به‌طور واضح بیان می‌کند. دامنه و برد تابع تانژانت نیز در همین قسمت معرفی شده است. دورهٔ تناوب تانژانت π است زیرا :

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

و مقداری کوچک‌تر از π وجود ندارد که این رابطه به ازای آن برقرارباشد.

کتاب در مورد دورهٔ تناوب تانژانت محدودیتی را قرار داده است که : «به‌دست آوردن دورهٔ تناوب تابع شامل تانژانت مدنظر نیست.» مثلاً به‌دست آوردن توابعی مانند $\tan ۲x$، $\tan^{۲} ۳x$، $\tan x + \tan ۴x$ و... مدنظر نیست. بنابراین رسم توابع شامل تانژانت مانند $\tan ۲x + ۱$، $\tan ۳x$ و ... مدنظر نبوده و استفاده از آنها در ارزشیابی‌ها و آزمون‌ها مجاز نیست.

حل تمرین‌های صفحه ۴۰ کتاب درسی

۱

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

$a = ۲ , b = ۷ , c = ۱$

$\max = |a| + c = |۲| + ۱ = ۳$

$\min = -|a| + c = -|۲| + ۱ = -۱$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|۷|} = \frac{۲\pi}{۷}$$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

$a = -۱ , b = \frac{\pi}{۲} , c = \sqrt{۳}$

$\max = |-۱| + \sqrt{۳} = ۱ + \sqrt{۳}$

$\min = -|-۱| + \sqrt{۳} = \sqrt{۳} - ۱$

$$T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|} = ۴$$

پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

$a = -\pi , \ b = \frac{۱}{۲} , c = -۲$

$\max = |-\pi| - ۲ = \pi - ۲$

$\min = -|-\pi| - ۲ = -\pi - ۲$

$$T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۲}\right|} = ۴\pi$$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

$a = -\frac{۳}{۴} , b = ۳ , c = ۰$

$\max = \left|-\frac{۳}{۴}\right| + ۰ = \frac{۳}{۴}$

$\min = -\left|-\frac{۳}{۴}\right| + ۰ = -\frac{۳}{۴}$

$$T = \frac{۲\pi}{|۳|} = \frac{۲\pi}{۳}$$

۲
در این سؤال باید با توجه به ضابطه‌ها و ویژگی‌های نمودارها، نمودار هر ضابطه را مشخص کنیم. ابتدا دورهٔ تناوب و max و min هر ضابطه را تعیین می‌نماییم.

الف) $y=\sin\pi x \to \max=۱ \ , \ \min=-۱ \ , \ T=۲$

ب) $y= \ -\cos-x \ \to \max=۳ \ , \ \min=۱ \ , \ T=۴\pi$

پ) $y=\sin۲x \to \max=۱ \ , \ \min=-۱ \ , \ T=\pi$

ت) $y=۱-\cos ۲x \to \max=۲ \ , \ \min=۰ \ , \ T=\pi$

نمودار ۱ : $\max=۲$ و $\min=۰$ و $T=\pi$ است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۱، $y=۱-\cos۲x$ (قسمت ت) است.
نمودار ۲ : $\max=۳$ و $\min=۱$ و $T=۴\pi$ است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۲، $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x$ (قسمت ب) است.
نمودار ۳ : $\max=۱$ و $\min=-۱$ و $T=\pi$ است. بنابراین ضابطهٔ نمودار ۳، $y=\sin۲x$ (قسمت پ) است.
نمودار ۴ : $\max=۱$ و $\min=-۱$ و $T=\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین ضابطهٔ نمودار ۴، $y=\sin\pi x$ (قسمت الف) است.

۳ در این سؤال دورهٔ تناوب و مقدار max و min داده شده است و ضابطهٔ تابعی مثلثاتی خواسته است. پاسخ‌های مختلفی برای این سؤال می‌توان نوشت :

الف) $c=۰ \ , \ |a|=۳ \ , \ |b|=۲ \to y=۳\sin۲x$

ب) $c=۶ \ , \ |a|=۳ \ , \ |b|=\frac{۲\pi}{۳} \to y=-۳\cos(\frac{۲\pi}{۳}x)$

پ) $c=-۴ \ , \ |a|=۳ \ , \ |b|=\frac{۱}{۲} \to y=۳\sin(-\frac{۱}{۲}x)-۴$

ت) $c=۰ \ , \ |a|=۱ \ , \ |b|=۴ \to y=-\cos(-۴x)$

از دانش‌آموزان بخواهید ضابطه‌های دیگری را نیز بنویسند.

۴ الف) ماکزیمم و مینیمم نمودار در $x=۰$ واقع نشده است، بنابراین ضابطه تابع موردنظر می‌تواند به‌صورت $y=a\sin bx+c$ باشد.

$c=۱ \ , \ |a|=۲ \ , \ |b|=\frac{۱}{۲} \to y=۲\sin(\frac{x}{۲})+۱$

ب) ضابطهٔ این تابع می‌تواند به‌صورت $y=a\cos bx+c$ باشد.

$c=-۱ \ , \ |a|=۳ \ , \ |b|=۲ \to y=-۳\cos۲x-۱$

۵ الف) نادرست زیرا : $\frac{۷\pi}{۶} < \frac{\pi}{۴}$ ولی $\tan\frac{۷\pi}{۶} > \tan\frac{\pi}{۴}$. تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست

ب) نادرست، زیرا تابع تانژانت در تمام بازه‌هایی که تعریف می‌شود اکیداً صعودی است.

پ) با توجه به ویژگی‌های تابع تانژانت درست است.

۶ در این سؤال، با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، مقایسهٔ مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را خواسته است.

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$
sin	۰	↗	$\frac{۱}{۲}$	↗	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	۱
tan	۰	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↗	۱	↗	$\sqrt{۳}$	↗	$+\infty$ ت.ن

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		$\frac{۱۱\pi}{۶}$		۲π
sin	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	$-\frac{۱}{۲}$	↗	۰
tan	ت.ن $-\infty$	↗	$\sqrt{۳}$	↗	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↗	۰

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ دورهٔ تناوب توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y = \frac{\pi}{۲}\sin ۲x$

ب) $y = \sin\frac{x}{\pi} + ۳$

پ) $y = \sqrt{۵} - \cos(\sqrt{۲}x)$

ت) $y = -\cos\frac{x}{\sqrt{۳}}$

۲ کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است.

الف) تابع تانژانت در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ نزولی است.

ب) تابع تانژانت در بازهٔ $(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ محورxها را قطع نمی‌کند.

پ) تابع تانژانت یک تابع متناوب است.

ت) تابع $y = \sin\frac{x}{\sqrt{۳}}$ متناوب نیست.

ث) دورهٔ تناوب تابع $y = \sqrt{۵}\cos\frac{x}{\sqrt{۵}}$ برابر $T = \sqrt{۵}$ است.

ج) دامنهٔ تابع تانژانت برابر $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) است.

درس دوم

معادلات مثلثاتی

درس دوم از فصل مثلثات به معادلات مثلثاتی می‌پردازد. هدف از این فصل آشنا کردن دانش‌آموزان با معادلات مثلثاتی و نحوه حل و تفسیر جواب‌های معادلات مثلثاتی برای برخی معادلات ساده است. گفتنی است که رعایت حدود وثغور این معادلات در آموزش برای اتمام محتوای کل کتاب در طول سال تحصیلی از یک سو و رعایت آنها برای ارزشیابی از سوی دیگر ضروری است.

اهداف درس

- ❑ آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان
- ❑ استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان برای یافتن مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای ناشناخته
- ❑ آشنایی با معادلات ساده مثلثاتی و ارتباط آنها با نمودار توابع مثلثاتی متناظر
- ❑ حل معادلات ساده مثلثاتی و یافتن جواب‌های کلی معادلات.
- ❑ بررسی درستی جواب با توجه به محدودیت‌های مطرح شده در مسائل کاربردی

روش تدریس

این درس به معادلات مثلثاتی ساده همراه با برخی کاربردهای مقدماتی آنها در مدلسازی می‌پردازد. از آنجا که در حل برخی از معادلات مثلثاتی به نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان نیاز می‌باشد، ابتدا این نسبت‌ها را آموزش می‌دهیم. اثبات این نسبت‌ها در صفحه ۴۲ آمده و در ابتدای صفحه ۴۲ جمع‌بندی شده‌اند. به عنوان مثالی از کاربرد اینگونه نسبت‌ها در یافتن مقدار نسبت‌ها برای زوایای ناشناخته‌ای مانند

15° چند مثال در صفحه ۴۳ آمده است. دقت شود که در اینجا هدف آموزش روابط$\sin(\alpha\pm\beta)$ و $(\alpha\pm\beta)$ نیست و نباید زمان رسمی آموزش را به آنها اختصاص داد و مورد ارزشیابی قرار گیرند.

در ادامه به بررسی معادلات مثلثاتی بر پایه دانش قبلی دانش‌آموزان پرداخته شده است. از جمله اینکه دانش‌آموزان با نمودار توابع مثلثاتی ساده آشنا هستند. از این‌رو با برجسته کردن ارتباط بین جواب معادلات مثلثاتی و صفرهای توابع مثلثاتی نظیر، رفته رفته حالت کلی (یا جواب کلی) معادلات ساده مثلثاتی را به کمک خود دانش‌آموزان به دست می‌آوریم. این کار ابتدا برای معادله $\sin x=0$ و $\sin x=1$ انجام شده و سپس در فعالیت صفحه ۴۴ برای معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ انجام شده است.

فعالیت صفحه ۴۴

در این فعالیت ابتدا با دانش قبلی دانش‌آموزان از روابط مثلثاتی و جدول مقادیر مثلثاتی سعی در یافتن جواب‌های معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ می‌شوند. احتمالاً دانش‌آموزان به این شیوه تعدادی از جواب‌ها را حدس می‌زنند اما نه همه آنها را. سپس از طریق رسم نمودار تابع $y=\sin x$ و قطع‌دادن آن با خط $y=\frac{1}{2}$ راه منسجم‌تری برای یافتن جواب‌های معادله می‌یابند. در گام بعدی سعی در دسته‌بندی جواب‌های یافته می‌شود. در این مرحله از دایره مثلثاتی برای دسته‌بندی جواب‌ها استفاده می‌شود. به این طریق گام به گام دانش‌آموزان را در یافتن جواب‌های کلی معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ راهنمایی می‌کنیم.

در ادامه آخرین گام برای حالت کلی معادله یعنی $\sin x=a$ که $-1\leq a\leq 1$ انجام داده شده است. توصیه می‌شود که قبل از ارائه حالت کلی معادله سینوسی، با چند مثال دیگر گام‌های فعالیت قبل تکرار شود و پس از آن به حالت کلی معادله $\sin x=a$ که $-1\leq a\leq 1$ پرداخته شود.

پس از چند مثال و کار در کلاس به معادلات کسینوسی می‌پردازیم.

فعالیت صفحه ۴۵

این فعالیت مشابه فعالیت قبل اما برای معادلات کسینوسی است. در اینجا گام اول که حدس و آزمایش به کمک جدول مقادیر کسینوس و روابط مثلثاتی آن است حذف شده است. چنانچه دبیران محترم انجام این گام را برای دانش‌آموزان خود لازم می‌دانند، می‌توانند آن را همانند فعالیت قبل اجرا کنند. در پایان با استفاده از دایره مثلثاتی و دسته‌بندی کردن جواب‌های به‌دست آمده از تقاطع نمودارها، جواب‌های کلی معادله کسینوسی $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ به‌دست می‌آیند.

پس از فعالیت صفحه ۴۵، حالت کلی معادلات کسینوسی به‌صورت $\cos x=a$ که $-۱\leq a\leq ۱$ از طریق دایره مثلثاتی بررسی و جواب‌های کلی آن داده شده است.

شایان ذکر است که در این درس فقط به معادلاتی پرداخته می‌شود که در نهایت زاویه مورد نیاز برای محاسبه جواب‌ها استفاده شده باشد مثلاً معادلاتی که نهایتاً به‌صورت $\sin x=۰/۳$ ختم می‌شوند موردنظر نیست و لذا نیازی به تعریف زوایای معکوس مثلثاتی و نیز مفهوم زاویه اصلی نمی‌باشد.

در ادامه سعی شده با جواب‌هایی از معادلات که می‌بایست در شرط خاصی صدق کنند پرداخته شود. دانش‌آموزان در مثال دوم صفحه ۴۷ با شرایطی واقعی و کاربردی از این نوع محدودیت‌ها که به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند آشنا می‌شوند. مثال دیگری از این محدودیت‌ها در تمرین ۴ صفحه ۴۸ آمده است. اغلب جواب‌هایی از معادله که در شرایط خواسته شده از مسئله صدق می‌کنند را «جواب‌های خالص» می‌گویند. در کتاب از این اصطلاح غیر ضروری پرهیز شده و به جای آن سعی شده دانش‌آموز از خلال خواسته‌های مسئله‌ها و اطلاعات داده شده درک کند که همه جواب‌های به‌دست آمده از معادله جواب مسئله نیستند.

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ فرض کنید $\sin\alpha=a$ و α زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارات زیر را برحسب a به‌دست آورید.

الف) $\sin ۲\alpha$ ب) $\cos ۲\alpha$

۲ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin ۵x=\sin(۲x+۱)$

ب) $\cos ۲x-\sin x-۲=-۲$

پ) $\sin ۲x-\cos x=۰$

فصل ۳

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

عکاس: سیدمهدی حسینی

جزیره قشم، روستای شیب‌دراز

نگاهی کلی به فصل

در این فصل در ادامهٔ بحث حد تابع، ضمن یادآوری و تأکید بر نکات قبلی، به دو مفهوم حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت پرداخته می‌شود. ابتدا، پیش نیازهای لازم از جمله یافتن باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای بر دو جمله‌ای درجه اول، انواع همسایگی‌ها و همچنین قضیه‌های مربوطه یادآوری و مورد بررسی قرار می‌گیرد. قابل ذکر است که برخی ابزارهای لازم برای درک مفهوم حد در چارچوب اهداف کتاب حاضر را دانش‌آموزان در پایهٔ قبل آموخته‌اند و در اینجا سایر پیش نیازها آمده است.

در مورد حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت، ورود به بحث با استفاده از جدول نمایش تابع و همچنین به کمک نمودار تابع است تا بازنمایی عددی و هندسی دانش‌آموزان در مورد این مفاهیم تقویت گردد. بعد از آن قضیه‌های مربوطه ارائه شده است تا آنها بتوانند با استفاده از ضابطهٔ جبری تابع نیز در مورد حد آن تابع اظهارنظر کنند و بازنمایی جبری خود را در این مورد تقویت نمایند.

طبق روال کلی کتاب، ابتدا دانش‌آموزان از طریق انجام یک فعالیت، با مفهوم مورد نظر آشنا می‌شوند. پس از آن، برای تثبیت آن مفهوم و همچنین تعمیق یادگیری، لازم است بخش کار درکلاس را با نظارت معلم خود انجام دهند. در پایان با انجام تمرین‌های آخر هر درس در منزل، تسلط لازم را بر مفاهیم مربوطه کسب خواهند کرد.

در بخش‌های مختلف این فصل، سعی شده است که علاوه بر سؤال‌های بسته پاسخ، از مسائل باز پاسخ نیز استفاده شود. استفاده از این گونه مسائل، در جریان تدریس و همچنین در سؤالات ارزشیابی مورد تأکید است.

نقشه مفهومی فصل سوم

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ حدود زیر را بیابید :

الف) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+۵x-۶}$

ب) $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲-۹}$

پ) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۸x^۳-۱}{۶x^۲-۵x+۱}$

ت) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۱}{x^۳-x^۲+x-۱}$

ث) $\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{x^۲-۴}$

ج) $\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$

چ) $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^۲-۶x+۵}$

ح) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲x+۱}-۱}{\sqrt{۳x+۴}-۲}$

۲ آیا تابع زیر در نقطه $x=-۱$ دارای حد است؟ چرا؟

$$f(x)=x^۵-\frac{\sqrt{(x+۱)^۲}}{x+۱}\qquad (x\neq -۱)$$

۳ به ازای چه مقدار برای a تابع زیر در $x=-۲$ دارای حد است؟

$$f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & x>-۲\\ -۲x^۲+۱ & x<-۲\end{cases}$$

۴ حدهای زیر را بیابید :

الف) $\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{x+۱}{x+۲}$

ب) $\lim_{x\to ۱^-}\frac{[x]-۱}{x^۲-۱}$

پ) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{۳x^۲+۱}}{۲x-۳}$

ت) $\lim_{x\to -\infty}\frac{۵x^۳+x+۱}{x^۳-x+۳}$

ث) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$

ج) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^۳-۳x^۲+۱}{x^۲+x+۱}$

چ) $\lim_{x\to ۲^+}\frac{-[x]-۱}{x^۲-۴}$

ح) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\frac{\tan x}{\cot x}$

۵ اگر $\frac{۴}{۵} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{mx^۳+x+۱}{۵x^n+۲x-۱}$ آنگاه مقدار m و n را بیابید.

۶ هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to۱} \frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x-۱)(x-۲)(۴-x)}{۲x^۳+۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(۳x^۲-۱)(x+۱)}{x^۳-۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۶x^۲-\sqrt{x-۳}}{۵x^۲-\sqrt{x+۱}}$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^۲+\sqrt{x^۴+۳x+۱}}{۵x^۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۳x^۲+۱}}{۲x-۳}$

ح) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^۳-۵x+۲}{۲x^۲+۳}$

۷ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

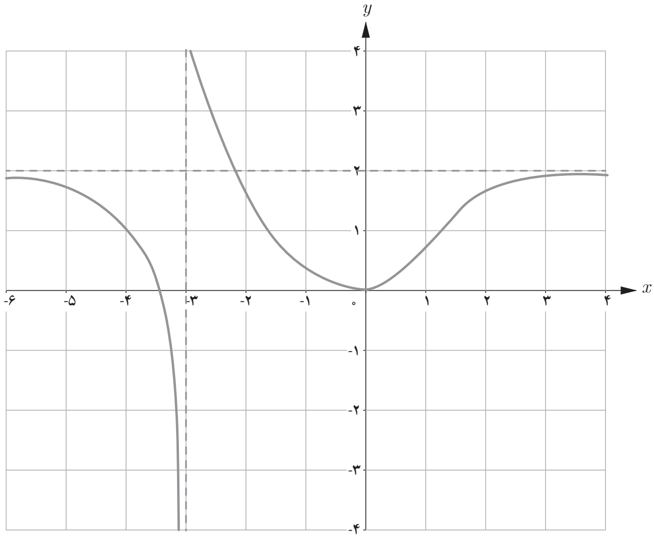
الف) $f(x)=\frac{۲}{x+۱} : \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) \; , \; \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) \; , \; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) $g(x)=\begin{cases} x^۲ & x>۰ \\ -۱ & x=۰ \\ \frac{۱}{x} & x<۰ \end{cases} : \lim\limits_{x\to۰^+} g(x) \; , \; \lim\limits_{x\to۰^-} g(x) \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \; , \; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

۸ با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$$\lim_{x\to(-۳)^+} f(x) \;,\; \lim_{x\to(-۳)^-} f(x)$$

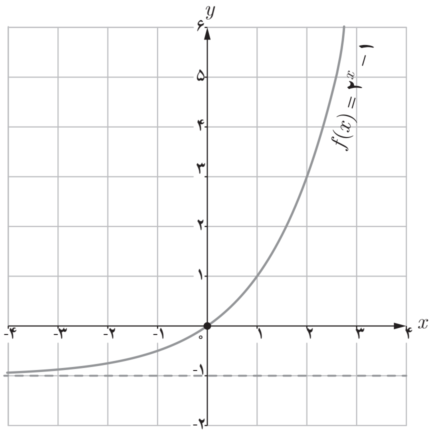
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;,\; \lim_{x\to-\infty} f(x)$$



(الف)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$



(ب)

درس اول

حد بی‌نهایت

اهداف درس

- ❑ یادآوری مختصر از مفهوم حد تابع و مفاهیم پیش‌نیاز
- ❑ یافتن حد تابع در یک نقطه از روی نمودار هندسی آن
- ❑ آشنایی با قضیه‌های حد بی‌نهایت و کاربردهای آن

روش تدریس

نظر به ضرورت آشنایی دانش‌آموزان با شرط بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها بر دو جمله‌ای درجه اول، ابتدا به این مفهوم پرداخته شده است. هدف از فعالیت صفحهٔ ۵۰، ایجاد آمادگی در دانش‌آموزان برای استفاده از قضیهٔ انتهای صفحه در ارتباط با باقیماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر دو جمله‌ای درجه اول است. هدف اصلی این قسمت، استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ فوق در تجزیه چند جمله‌ای‌ها به حاصل‌ضرب عامل‌های اول، به هنگام محاسبهٔ حد تابع‌های کسری است. کاردرکلاس صفحه ۵۱ نیز با هدف دست ورزی دانش‌آموزان پیرامون همین موضوع پیش‌بینی‌شده است.

می‌دانیم که دانش‌آموزان با نحوهٔ محاسبه حد تابع‌های گویا در کلاس یازدهم آشنا شده‌اند؛ اما حد تابع‌های کسری شامل عبارت‌های رادیکالی در آنجا مطرح نشده است. بنابراین مثال صفحه ۵۲ و کار درکلاس صفحهٔ ۵۳ به این موضوع اختصاص یافته است.

حل برخی از قسمت‌های کار درکلاس صفحهٔ ۵۳ :

پ) $$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x^3-13x^2+24x-9}$$

حل : در این مثال، مقدار صورت و مخرج کسر به ازای $x=\frac{1}{2}$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم

مخرج کسر بر $(۲x-۱)$ بخش‌پذیرند. برای تجزیهٔ مخرج، بهتر است آن را بر $(۲x-۱)$ تقسیم کنیم.

در این صورت حد مورد نظر را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{\cancel{(۲x-۱)}(۲x+۱)}{\cancel{(۲x-۱)}(x^۲-۶x+۹)} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۲x+۱}{(x-۳)^۲} = \frac{۲}{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۸}{۲۵}$$

ت) $$\lim_{x\to-۱} \frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}} \times \frac{x-\sqrt{۲x+۳}}{x-\sqrt{۲x+۳}} = \lim_{x\to-۱} \frac{(x^۲-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^۲-(۲x+۳)}$$

$$= \lim_{x\to-۱} \frac{(x-۱)\cancel{(x+۱)}(x-\sqrt{۲x+۳})}{\cancel{(x+۱)}(x-۳)} = \frac{-۲\times(-۲)}{-۴} = -۱$$

ج) $$\lim_{x\to-۱} \frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲+۳x+۲} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱} = \lim_{x\to-۱} \frac{\cancel{x+۱}}{\cancel{(x+۱)}(x+۲)(\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱)} = \frac{۱}{۱\times۳} = \frac{۱}{۳}$$

حد نامتناهی

قبل از ورود به بحث حدهای نامتناهی، تعاریف مربوط به همسایگی یک نقطه آمده است. در این قسمت از نمادگذاری‌های پیچیده اجتناب شده است و همچنین همسایگی متقارن مطرح نشده است؛ چون نیازی به آن وجود ندارد. فعالیت صفحه ۵۴ برای ورود به بحث حد بی‌نهایت است. در این فعالیت مفهوم حد بی‌نهایت ابتدا با استفاده از جدول مقادیر تابع و سپس به کمک نمودار تابع تشریح شده است. بعد از آن در صفحهٔ ۵۵، تعاریف مربوطه آورده شده است. به دلیل شباهت زیاد، از بین حدود یک طرفه‌ای که حاصل آنها بی‌نهایت می‌شود، فقط تعریف یک مورد تحت عنوان تعریف ۳ آمده است. با این حال نمودارهای مناسبی مربوط به هر چهار حالت حدهای نامتناهی یک طرفه در پائین صفحه ۵۵ پیش‌بینی شده است.

در پایان این درس و در صفحه ۵۶ قضیه‌ای آمده است که دانش‌آموزان بتوانند به کمک نمایش جبری یک تابع نیز در مورد حد تابع در یک نقطه زمانی که برابر $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود، اظهارنظر کنند. همچنان که در پاورقی این صفحه آمده است، حالت‌های متناظر با $\infty\times۰$ و $\infty-\infty$ جزو سرفصل‌های این کتاب نیستند و در انواع ارزشیابی‌ها نمی‌توان سؤالاتی از این نوع مطرح کرد.

برخی بدفهمی‌های رایج

۱ گاهی مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان در برخورد با حدهایی به شکل $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ آن را به صورت $\frac{1}{0}$ می‌نویسند و تصور می‌کنند که این نحوهٔ نگارش، درست و معتبر است و حاصل آن را نیز به‌صورت $\frac{1}{0}=\infty$ نمایش می‌دهند.

برای این دسته از دانش‌آموزان لازم است شکل درست استفاده از قضیهٔ صفحه ۵۶ توضیح داده شود که در $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ ، مخرج در واقع عددی مثبت و بسیار کوچک و نزدیک به صفر است. به عبارت دیگر چون صورت کسر عددی مثبت است و مخرج نیز با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، لذا حد این تابع $+\infty$ خواهد بود که در واقع یک حالت عدم وجود حد است.

۲ در محاسبهٔ حد توابع مثلثاتی، مفهوم چپ و راست ممکن است برای بعضی از دانش‌آموزان کاملاً روشن نباشد. به‌عنوان مثال در مورد $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin x$ ، آنها ممکن است برای x مقادیری بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{2}$ را در نظر بگیرند و چنین استدلال کنند که با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، سمت چپ $\frac{\pi}{2}$ متناظر است با مقادیر بزرگ‌تر از $\frac{\pi}{2}$. به همین دلیل لازم است این مطلب به‌درستی برای چنین دانش‌آموزانی تشریح گردد که عبارت $x\to\frac{\pi}{2}^-$ به مقادیر کمتر از $\frac{\pi}{2}$ اشاره دارد و منظور از چپ یا راست در این مسائل مربوط به زمانی است که اعداد را برروی محور اعداد حقیقی در نظر گرفته باشیم و نه بر روی دایره مثلثاتی.

حل تمرین‌های صفحه ۵۷ کتاب درسی

۱ الف) $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1=0$

ب)

$$f(x)=2x^3+x^2+1 = (x+1)(2x^2-x+1)$$

$$\begin{array}{r|l}
f(x)=2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \cline{2-2}
-(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \cline{1-1}
-x^2+1 & \\
-(-x^2-x) & \\ \cline{1-1}
x+1 & \\
-(x+1) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

۲

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} \dfrac{x(\cancel{۲x-۱})}{(\cancel{۲x-۱})(۲x+۱)} = \dfrac{\cancel{\frac{۱}{۲}}}{۲} = \dfrac{۱}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{x^{۳}-۴x^{۲}-۴x-۵}{x^{۲}-۲۵} = \lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{(\cancel{x-۵})(x^{۲}+x+۱)}{(\cancel{x-۵})(x+۵)} = \dfrac{۳۱}{۱۰}$

پ) $\lim\limits_{x\to -۴} \dfrac{(x-۱)(\cancel{x+۴})}{(x^{۲}+۱)(\cancel{x+۴})} = \dfrac{-۵}{۱۷}$

۳

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^{۲}-۲x+۱}{x(x-۱)(x+\sqrt{۲x-۱})} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(\cancel{x-۱})(x-۱)}{x(\cancel{x-۱})(x+\sqrt{۲x-۱})} = \dfrac{۰}{۲} = ۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{(x^{۲}-۹)(۲+\sqrt{x+۱})}{۴-x-۱} = \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{(\cancel{x-۳})(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{-(\cancel{x-۳})} = \dfrac{۲۴}{-۱} = -۲۴$

پ) $\lim\limits_{x\to -۸} \dfrac{۲(\cancel{x+۸})(\sqrt[۳]{x^{۲}}+۴-۲\sqrt[۳]{x})}{(\cancel{x+۸})} = ۲۴$

۴

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{۱}{x} = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{|x|} = -\infty$ پ) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} \dfrac{۱}{x-۱} = -\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to -۶} \dfrac{۹}{(x+۶)^{۲}} = +\infty$ ث) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{-۱}{(x-۳)^{۴}} = -\infty$ ج) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{۴x+۱}{(۲x+۱)^{۲}} = -\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} \dfrac{۱-۵x}{x^{۲}-۹} = -\infty$ ح) $\lim\limits_{x\to -۲^{-}} \dfrac{-۳x}{x^{۲}-۴} = +\infty$ خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^{+}}{۲}} \dfrac{۱}{\cos x} = -\infty$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^{-}}{۲}} \tan x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi^{-}}{۲}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = +\infty$ ذ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi^{+}}{۲}} \tan x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi^{+}}{۲}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\infty$

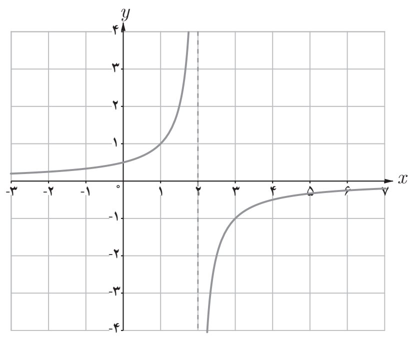
و) $\lim\limits_{x\to ۳^{-}} \dfrac{[x]-۳}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۳^{-}} \dfrac{-۱}{x-۳} = +\infty$

تذکر : در محاسبه تمام قسمت‌های تمرین قبل، از قضیه صفحه ۵۶ استفاده شده است. نکته کلیدی در این قضیه آن است که علامت صورت کسر عددی مثبت است یا منفی و همچنین مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند یا با مقادیر منفی.

۵ الف) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=+\infty$ به این معناست که اولاً f در یک همسایگی چپ از ۲ تعریف شده است؛ ثانیاً می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به قدر کافی به ۲ نزدیک اختیار شود.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-\infty$ به این معناست که اولاً f در یک همسایگی راست از ۲ تعریف شده است؛ ثانیاً می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به قدر کافی به ۲ نزدیک اختیار شود.

پ) این سؤال در واقع یک سؤال باز پاسخ محسوب می‌شود و توابع مختلفی را می‌توان ارائه کرد که هر دو شرط (الف) و (ب) را دارا باشند از جمله تابع با نمودار زیر :



درس دوم

حد در بی‌نهایت

اهداف درس

- بررسی حد تابع‌هایی مانند $y=f(x)$ از روی نمودار آن یا جدول مقادیر تابع، زمانی که $x\to +\infty$ یا $x\to -\infty$
- تشخیص حد تابع در بی‌نهایت از روی نمودار آن
- آشنایی با قضیه‌های حد در بی‌نهایت و کاربردهای آن

روش تدریس

درس قبل در مورد حدهای نامتناهی بود. دانش‌آموزان ملاحظه کردند که در مورد تابعی مانند $y=f(x)$ وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شد، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. آنها در این درس یاد می‌گیرند که وقتی x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، حد تابع را در صورت وجود به‌دست آورند.

فعالیت آغازین درس در صفحه ۵۸ به یک مثال گسسته پرداخته است. انتخاب این مثال به دلیل شهودی بودن آن و همچنین سادگی فهم آن برای دانش‌آموزان است و به هیچ وجه پرداختن به موضوعی مانند حد دنباله مد نظر نیست. پس از آن با یک مثال آشنا یعنی $y=\frac{1}{x}$ که نمودار آن را دانش‌آموزان در سال گذشته آموخته‌اند، وارد بحث حد در بی‌نهایت برای تابع شده‌ایم. در اینجا هم بحث با نمودار تابع و جدول مقادیر آن شروع شده است. تعاریف مورد نظر در صفحه بعد آمده‌اند. در صفحه ۵۹ بعد از تعریف مربوط به $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=L$ که به شکل کامل بیان شده، در مورد تعریف $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=L$ بعضی جاهای خالی در نظر گرفته شده که دانش‌آموزان با تکمیل آنها تعریف را کامل می‌کنند تا به تفکر و دقت بیشتری وا داشته شوند. پس از آن در صفحه بعد با ارائه دو قضیه، در واقع ابزار لازم در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌گیرد تا از روی ضابطهٔ جبری تابع بتوانند حد آن را در بی‌نهایت در صورت وجود محاسبه کنند.

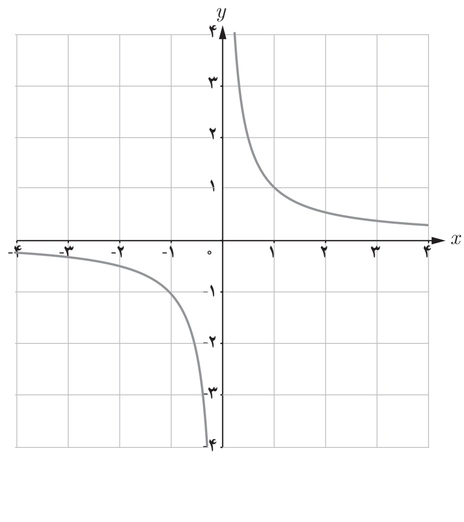
آخرین مبحث این درس از فصل سوم کتاب، عبارت است از حد نامتناهی در بی‌نهایت که از صفحه ۶۱ آغاز می‌شود. در اینجا نیز با یک مثال آشنا یعنی تابع $y=x^3$ که دانش‌آموزان در فصل اول با نمودار آن آشنا شده‌اند وارد بحث شده‌ایم. روند کار مشابه قبل است؛ یعنی شروع با جدول مقادیر تابع و نمودار آن، بیان تعاریف مربوطه و در نهایت ارائه قضیه‌هایی که دانش‌آموزان بتوانند از روی ضابطهٔ جبری تابع نیز در مورد حد آن در بی‌نهایت اظهارنظر کنند.

در مورد تدریس این درس نیز توصیه می‌شود که از ارائه یک سویه مطالب و قاعده‌گویی اجتناب شود و تا حد ممکن وفاداری به رویکردهای کتاب درسی حفظ شود. همچنان که قبلاً گفته شد، کتاب درسی در واقع می‌تواند بخشی از دفتر ریاضی دانش‌آموز هم باشد، به ویژه در بخش‌های کار درکلاس علاوه بر مثال‌های متنوعی که آمده است، جای کافی نیز برای حل دانش‌آموزان پیش‌بینی گردیده که با نظارت معلم خود، سؤال‌ها را در کتاب خود حل کنند. این مطلب علاوه بر فوایدی که در زمینه درک بهتر مفاهیم و روش‌ها توسط دانش‌آموزان دارد، موجب صرفه‌جویی در وقت هم خواهد شد.

در این فصل استفاده از نرم‌افزارهای ریاضیات پویا مانند جئوجبرا در جریان تدریس می‌تواند بازنمایی‌های گرافیکی، عددی و جبری در مورد حد تابع را در دانش‌آموزان تقویت کند و باعث شود که آنها دید جامع‌تری در این زمینه کسب نمایند.

حل تمرین‌های صفحه ۶۳

۱



الف) $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

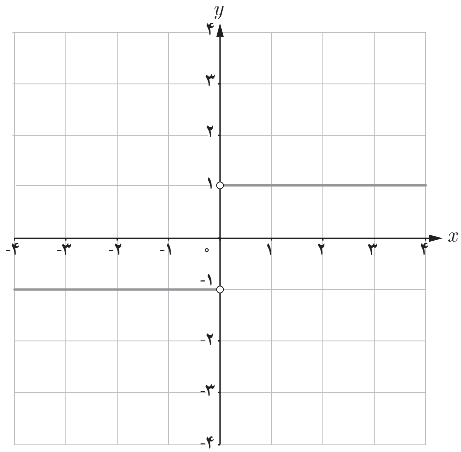
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty\end{cases}$$

پس $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ موجود نیست.

ب) $g(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-۱$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=۱$



۲

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۲ \;,\; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=۲$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-۲ \qquad \lim\limits_{x\to-۱^+} h(x)=+\infty$

۳

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۲$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=-\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۱$

۴

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} (۹+\frac{۷}{x^۳})=۹$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)=-\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱}{۲x-۳}=۰$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}=\frac{۳}{-۵}$

ث) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x-۱}{۳x+۱}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$

چ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۲x^{۵}}{x^{۲}} = \lim\limits_{x\to -\infty} ۲x^{۳} = -\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{۲}}{-x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (-x) = -\infty$

خ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-۶x^{۳}+۷x+۹}{۲x^{۳}-۴x^{۲}+x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-۶x^{۳}}{۲x^{۳}} = -۳$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲x+۱}{۴} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲x}{۴} = \lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{۱}{۲}x) = +\infty$

۵

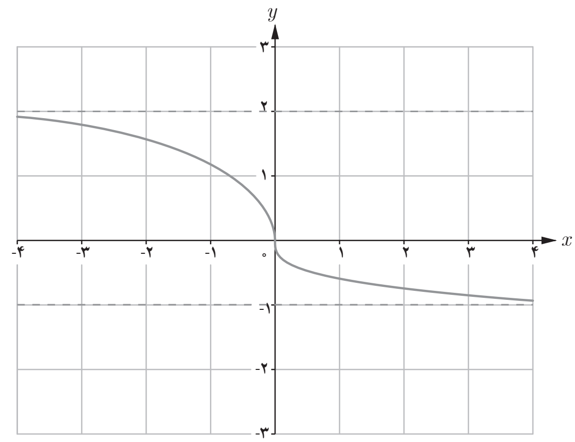
الف) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -۱$

اولاً تابع f در بازه‌ای مثل $(a , +\infty)$ تعریف شده است و ثانیاً $f(x)$ می‌تواند به هر اندازهٔ دلخواه به عدد ۱– نزدیک شود به شرط آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ۲$

اولاً تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده است و ثانیاً $f(x)$ می‌تواند به هر مقدار دلخواه به عدد ۲ نزدیک شود به شرط آنکه x به قدر کافی کوچک اختیار شود.

ب) بی شمار تابع با این شرایط می‌توان رسم کرد؛ برای نمونه نمودار زیر :



فصل ۴

مشتق

ماهواره طلوع

ماهواره امید

ماهواره رصد

ماهواره‌بر سیمرغ ــ پایگاه فضایی امام‌خمینی(قُدِّسَ سِرُّهُ)

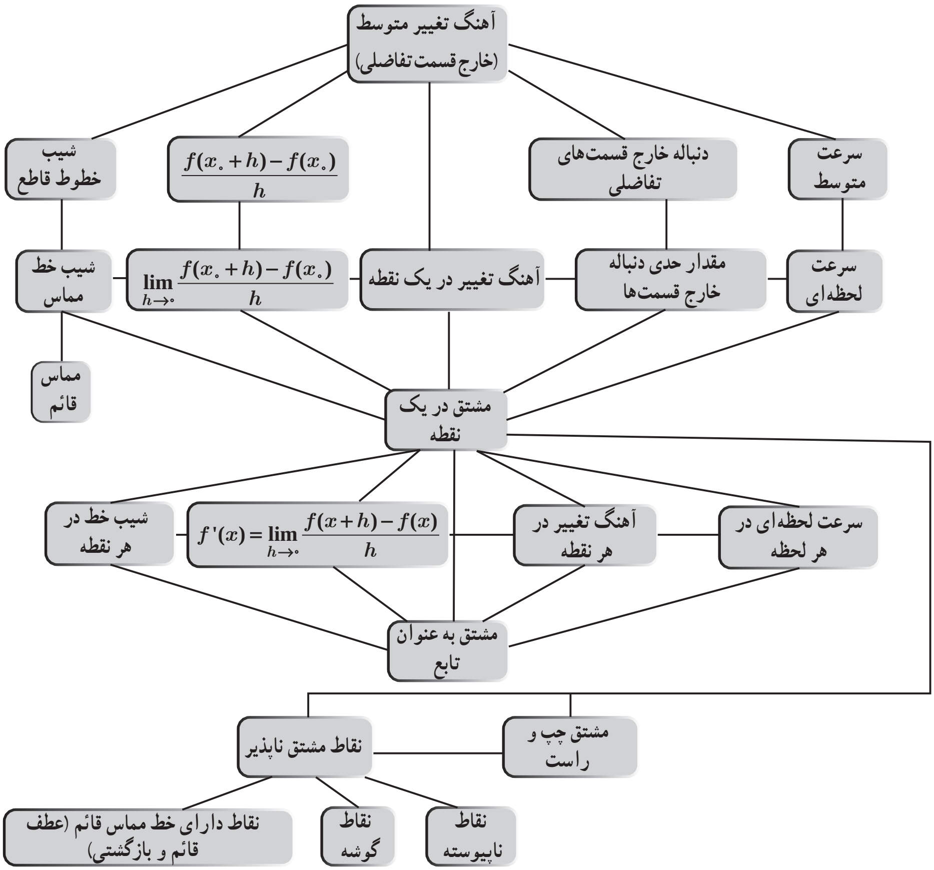
اهداف کلی فصل

- ❑ آشنایی با مفهوم مشتق در یک نقطه
- ❑ درک رابطه بین شیب خط مماس و مشتق
- ❑ بررسی نقاط مشتق ناپذیر
- ❑ درک مشتق به عنوان یک تابع
- ❑ درک آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر و رابطه آن با مشتق

نگاه کلی به فصل

مفهوم مشتق شامل سه درس است که درس اول شامل مفهوم شهودی خط مماس، مشتق در یک نقطه و معرفی بازنمایی‌های مختلف مشتق می‌باشد و درس دوم به بیان مشتق‌پذیری و معرفی مشتق به عنوان تابع می‌پردازد و در درس سوم آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و کاربردهای آن اشاره می‌شود. اتصال بین این مفاهیم نیز حائز اهمیت است. برای ارائه هر مفهومی در کتاب علاوه بر برنامه درسی، به پشتوانه نظری و پژوهشی نیاز است. در این قسمت ابتدا نقشه مفهومی فصل (مشتق) و سپس مختصری راجع به چارچوب‌های نظری مورد استفاده در این بخش ارائه شده است.

نقشه مفهومی فصل چهارم



دانستنی‌هایی برای معلم[1]

حساب دیفرانسیل یکی از بزرگ‌ترین دستاوردهای انسان است (NCTM، ۲۰۰۰؛ هاگس ــ هالت و دیگران، ۲۰۱۷) که نقش مهمی در تمدن بشری ایفا کرده است. یکی از مباحث حساب دیفرانسیل که

۱ــ مطالب این قسمت برگرفته از مقاله‌های شماره ۱ تا ۳ مراجع است.

بسیار حائز اهمیت می‌باشد، مشتق[۱] است. این مفهوم در کتاب‌های جدید ریاضی در پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ارائه می‌گردد. تحقیقات نشان می‌دهند که مفهوم مشتق یکی از مفاهیم مشکل برای دانش‌آموزان و دانشجویان می‌باشد و علت این امر، پیچیدگی تعریف و بازنمایی‌های آن است (تامپسون، ۱۹۹۴؛ زندیه، ۲۰۰۰). مطالعات زیادی در مورد بررسی تفکر دانش‌آموزان در ارتباط با مفاهیم حساب دیفرانسیل، شامل مشتق انجام شده است (به‌طور مثال، اوهرتمن و دیگران، ۲۰۰۸؛ بری و نیمن، ۲۰۰۳؛ سلدن. جی، سلدن. ای، هاک، و میسن، ۲۰۰۰). مشتق، ابتدا به کار برده شده، سپس کشف و توسعه یافته و در نهایت تعریف شده است (گرابینر، ۱۹۸۳). سیر تاریخی استفاده از مشتق تا تعریف آن بیش از ۲۰۰ سال طول کشیده است. فرما[۲] در ابتدا از آن استفاده می‌کرد، نیوتن[۳] و لایب نیتز[۴] آن را کشف نمودند، تیلور، اولر و مک لورن آن را توسعه داده، لاگرانژ آن را نام‌گذاری و تعیین نمود و در پایان کوشی[۵] و وایراشتراس[۶] آن را تعریف کردند (گرابینر، ۱۹۸۳). از طرفی مشتق یکی از مفاهیم حساب دیفرانسیل است که در علوم مختلف مهندسی، فیزیک، شیمی، علوم انسانی و اقتصاد و غیره کاربرد و اهمیت دارد (رودرا و گودهرت، ۲۰۱۰).

از جمله اهداف این فصل آن است که مفاهیم ریاضی جدید به کمک مفاهیم قبلی در کتاب‌های درسی ساخته شوند. در این راستا، چگونگی ارائه مبحث مشتق درکتاب‌های درسی حائز اهمیت است؛ زیرا یکی از شاخصه‌های اصلی تدریس معلمان کتاب‌های درسی هستند، بنابراین نحوهٔ بیان مفهوم‌سازی مشتق در کتاب‌ها مهم است. همچنین سعی شده است که از شهود نهایت بهره را ببریم. از مفاهیم پایه در این بررسی مفهوم فرایند ــ شیء[۷] است، که در ادامه، از منظر اسفارد[۸] (۲۰۰۸) به آن می‌پردازیم.

فرایند و شیء از دیدگاه اسفارد (۲۰۰۸)

نظریه فرایند و شیء توسط افراد مختلفی به‌صورت‌های گوناگون تعریف شده است. یکی از این نظریه‌ها، نظریه کاربردی **شیء انگاری**[۹] اسفارد(۲۰۰۸) می‌باشد. بر اساس این نظریه یک دوگانگی فرایند ــ شیء ذاتی در بیشتر مفاهیم ریاضی وجود دارد. اساس نظریه این است که در ابتدا مفهوم عملیاتی (فرایند محور) ایجاد می‌شود و پس از آن از طریق شیء انگاری فرایندها، اشیای ریاضی(مفاهیم ساختاری) ایجاد می‌گردند. فرایندهای پویا، عملیاتی هستند که روی اشیای ثابت و ایستای گذشته عمل می‌کنند. هر فرایندی

۱ــ Derivative
۲ــ Fermat
۳ــ Newton
۴ــ Leibniz
۵ــ Cauchy
۶ــ Weierstrass
۷ــ Process_object
۸ــ Sfard
۹ــ Reification

که روی یک شیء، عمل می‌کند؛ خود از عمل، توسط فرایند دیگر به‌وجود آمده است. این فرایند زنجیر مانند، زوج‌های فرایند ــ شیء نامیده می‌شوند. اسفارد از سه مرحله فرایند برای رشد مفهوم صحبت می‌کند : (شکل۱).

مرحله درونی‌کردن[۱] : فرایند یا عملیاتی که یک شخص روی یک شیء ذهنی آشنا و در دسترس انجام می‌دهد و قادر به تکرار آن باشد، گوییم آن را درونی کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص بین فرایندهای مرتبط گام بردارد).

مرحله فشرده‌سازی یا جمع‌بندی[۲] : اگر یادگیرنده قادر باشد فرایند را در نظر بگیرد بدون آنکه در واقعیت اتفاق افتاده باشد گوییم آن را فشرده‌سازی و خلاصه کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص فرایند را به عنوان کل در نظر بگیرد و بتواند به عنوان یک زیرفرایند در فرایند دیگر به کار برد).

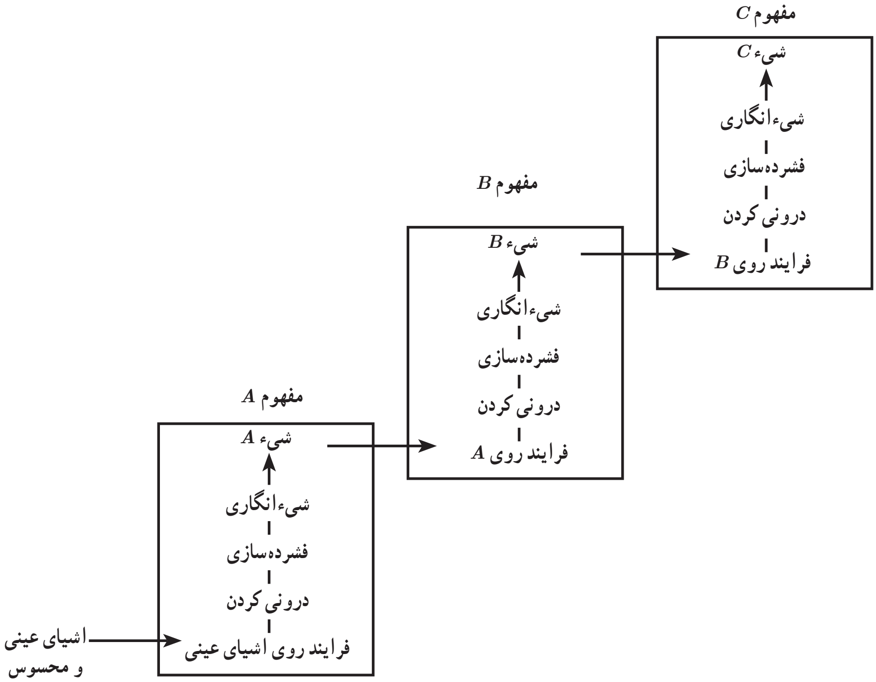
مرحله شیء انگاری : زمانی که یادگیرنده از اشیای آشنا به یک نگاه کلی و جدید برسد به طوری که بتواند با آن دست‌ورزی کند، به مرحله شیء انگاری رسیده است. در این حالت فرایند، تبدیل به یک شیء ساختاری ایستا می‌شود و خود پایه‌ای برای فرایند پیشرفته‌تر بعدی می‌گردد (زمانی اتفاق می‌افتد که فرایندها به‌طور ساختاری به عنوان یک شیء در نظر گرفته شوند).

شکل۱، مراحل ساخت یک مفهوم از دیدگاه اسفارد شامل درونی کردن، فشرده سازی و شیء انگاری را نشان می‌دهد و ساختار زنجیر مانند فرایند ــ شیء را در هر مرحله نمایان ساخته است. به عنوان مثال، می‌توان روند توسعه ساخت مفهوم تابع را نام برد. در ابتدا شخص با تناظر کردن دو شیء، آشنا می‌شود. به عنوان نمونه هر شخص یک کد ملی دارد یا در هر لحظه دماسنج یک دما را نشان می‌دهد. سپس این تناظر را به عنوان زوج مرتب (شیء) در نظر می‌گیرد، (شخص، کد ملی)؛ کار با زوج‌های مرتب به عنوان اشیا و ادامه مراحل درونی کردن و فشرده‌سازی با برقراری رابطه بین آنها دنبال می‌شود، سپس مفهوم رابطه درک می‌شود. فرایند نگاشتن عضوی از دامنه به درون عضوی از برد با این شرط که یک عضو از دامنه به دو عضو از برد نگاشته نشود را تابع به عنوان فرایند نامیم. اعمال روی تابع و دست ورزی با آن به شیء تبدیل می‌شود. مجموعه توابع را می‌توان به عنوان یک خانواده توابع در نظر گرفت که منجر به جبر توابع می‌شوند. به عنوان مثالی دیگر، خارج قسمت تفاضلی را به عنوان اندازهٔ آهنگ متوسط متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل درنظر می‌گیریم. محاسبهٔ نسبت تفاضلات، به عنوان فرایند A می‌باشد. با انجام چندین محاسبه برای مقادیر مختلف و جمع‌بندی آن، به عنوان یک شیء (شیء A همان نسبت تفاضلات به عنوان عدد است) خلاصه می‌شود. این شیء در فرایند دوم یعنی فرایند حدگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرایند حدگیری در این مرحله، شامل تجزیه و تحلیل یک دنباله از آهنگ‌های متوسط تغییرات وقتی که تفاضل مخرج به

۱ــ Interiorization

۲ــ Condensation

سمت صفر میل کند، می‌باشد. نماد لایب نیتسی آن نیز به صورت $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ است. فرایند حدگیری به عنوان آهنگ آنی تغییرات، خلاصه شده و با $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$ نشان می‌دهیم (شیء B). فرایند خلاصه شده آهنگ آنی تغییرات در هر مقدار ورودی به عنوان یک شیء در ساخت تابع مشتق مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع فرایند در این مرحله، تغییرات هم‌زمان مقادیر ورودی و خروجی یا مقادیر آهنگ آنی تغییر خواهد بود و با نماد $\dfrac{dy}{dx}(x)$ نشان می‌دهیم (شیء C).



شکل ۱ــ مدل عمومی ساخت مفهوم اسفارد (۱۹۹۱)

زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰) چارچوبی برای درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه نموده است که در قسمت بعد به آن می‌پردازیم.

چارچوب زندیه برای درک مفهوم مشتق

زندیه (۱۹۹۷) نشان داد که درک اساسی که منجر به مفهوم مشتق می‌شود در طی بازنمایی‌های مختلف و تکالیف متنوع در زمینه‌های حساب دیفرانسیل محقق می‌شود. زندیه (۲۰۰۰) چارچوبی برای تجزیه و

تحلیل درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه داده است. دو مؤلفه اصلی چارچوب، یکی بازنمایی‌های چندگانه[۱] (زمینه‌ها[۲]) و دیگری لایه‌هایی از زوج‌های فرایند ــ شیء[۳] می‌باشد که در ادامه هرکدام به اختصار توضیح داده می‌شوند. بازنمایی‌های چندگانه مفهوم مشتق عبارت‌اند از :

الف) نموداری[۴] : به عنوان شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه؛

ب) کلامی[۵] : به عنوان آهنگ تغییر لحظه‌ای؛

ج) فیزیکی[۶] : به عنوان سرعت (شتاب و در حالت کلی حرکت)؛

د) نمادین[۷] : به عنوان حد خارج قسمت تفاضلی.

لایه‌های مشتق که هر کدام می‌توانند در نقش فرایند و شیء باشند به صورت زیر است :

ــ نسبت :
- فرایند، فرایند تقسیم صورت کسر به مخرج کسر.
- شیء، یک جفت عدد صحیح و یا خروجی فرایند تقسیم.

ــ حد :
- فرایند، فرایند نزدیک شدن به یک مقدار.
- شیء، مقدار حد.

ــ تابع :
- فرایند، تناظر بین دو مجموعه ناتهی.
- شیء، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب.

جدول ۱، چارچوب درک دانش‌آموزان از مفهوم مشتق را که زندیه (۲۰۰۰) ارائه داد، به همراه بازنمایی‌ها و لایه‌های آن نشان می‌دهد.

۱ــ Multiple representations

۲ــ Contexts

۳ــ Layers of process–object pairs

۴ــ Graphically

۵ــ Verbally

۶ــ Physically

۷ــ Symbolically

جدول ۱ــ چارچوب درک مفهوم مشتق زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰)

لایه‌ها / زمینه‌ها	نموداری	کلامی	فیزیکی	نمادین	غیره
(فرایند ـ شیء)	شیب	آهنگ	سرعت	خارج قسمت تفاضلی	
نسبت					
حد					
تابع					

چارچوب نظری اسفارد

از چارچوب نظری مورد استفاده در ارائه مفهوم مشتق در این کتاب، چارچوب اسفارد، همان رویکرد گفتمان شناختی[1] در متن‌های کتاب حساب دیفرانسیل است. رویکرد گفتمانی بر این پایه استوار است که تفکر نوع معینی از گفتمان با خود یا دیگران است. گفتمان شناختی از دو کلمه گفتمان[2] و شناخت[3] تشکیل شده‌اند که هر دو با هم یک پدیده را توصیف می‌کنند (اسفارد، ۲۰۰۸). نظریه گفتمان شناختی یک نظریه منسجم و دقیق برای تفکر دربارهٔ تفکر، مبتنی بر تجزیه و تحلیل گفتمان کلاسیک است (یاکل،۲۰۰۹). نظریه گفتمان شناختی کاربرد زیادی در تجزیه و تحلیل توصیفی و کمی محتوای کتاب‌ها دارد. این نظریه شامل ساختارهایی مانند کنایه[4]، تفکر و گفتمان است و گفتمان شناختی به عنوان نتیجه‌ای از ارتباط بین فردی میان فرایند گفتمان و شناخت است. گفتمان شناختی دارای پنج خاصیت استدلال[5]، انتزاع یا تجریدسازی[6]، عینی‌سازی[7]، ذهنی‌سازی[8] و خودآگاهی[9] می‌باشد. از طرفی ریاضی دارای سیستمی شامل اشیای گفت‌وگو به همراه خود گفت‌وگو است که وقتی اشیای جدید یکی پس از دیگری اضافه شوند از درون بی وقفه رشد می‌کند و گسترش می‌یابند (اسفارد، ۲۰۰۸) و به این ترتیب یک مفهوم، ساخت و گسترش می‌یابد.

۱ــ Commognitive approach
۲ــ Communication
۳ــ Cognition
۴ــ Metaphor
۵ــ reasoning
۶ــ abstracting
۷ــ objectifying
۸ــ subjectifying
۹ــ consciousness

رویکرد گفتمان شناختی مبانی اساسی را از بین چهار مشخصه گفتمان شرح می‌دهد :

استفاده از کلمات ــ واسطه‌های تصویری ــ روال‌ها یا روتین‌ها ــ روایت‌های تأییدی

۱ **استفاده از کلمات**[۱] : استفاده از کلمات، کلید مهمی در تدریس و یادگیری حساب دیفرانسیل می‌باشد. گفتمان ریاضی در حساب، گفتمانی است که در آن از جملات تکنیکی در متن‌ها استفاده می‌کنیم. برای نمونه روش استفاده آموزشگران از کلمات برای توضیح معنی حد و مشتق مهم است زیرا دانش‌آموزان نیاز به فرصت برای بیان خود و حس یکپارچه‌ای از مفاهیم دارند.

۲ **واسطه‌های تصویری**[۲] : واسطه‌های تصویری اشاره به ابزارهای غیرکلامی گفتمان دارند. در مباحث حساب دیفرانسیل، واسطه‌های تصویری اغلب با نمودارها، اشکال، جدول‌ها، علائم نمادین مشخص می‌گردند.

۳ **روال‌ها یا روتین‌ها**[۳] : روال‌ها همان الگوهای تکراری هستند که در سخنرانی‌های کلامی و واسطه‌های تصویری و روایت‌های تأییدی یافت می‌شوند.

۴ **روایت‌های تأییدی**[۴] : روایت‌های تأییدی یا تصدیقی اظهاراتی هستند که به عنوان صحبت‌های درست در نظر گرفته می‌شوند. در گفتمان ریاضی، روایت‌های تأییدی، جملاتی از مفاهیم ریاضی مانند تعاریف، قضایا یا توجیه‌ها می‌باشد (جدول ۲ و ۳ را مشاهده کنید). این رویکرد تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنابخشی[۵] می‌نامد. یک شخص، یک کلمه یا نماد ریاضی را با اشیای ملموس و قابل دسترس درک می‌کند. برای نمونه یک شخص، کلمه تابع را با نمودار یا جدول درک می‌کند (اسفارد، ۲۰۰۸، ص۱۵۴).

جدول ۲ــ اجزای گفتمان ریاضی در رویکرد گفتمان شناختی (اسفارد، ۲۰۰۸)

اجزا	توصیف‌ها
استفاده از کلمات (Word use)	استفاده از کلمات برای معنی کردن اشیای ریاضی
واسطه‌های تصویری (Visual Mediators)	روشهای غیر کلامی گفتمان
روال‌ها یا روتین‌ها (Routines)	الگوهای تکراری خوش تعریف
روایت‌های تأییدی یا تصدیقی (Endorsed Narratives)	اظهاراتی که سخنرانان به عنوان عبارات درست تأیید می‌کنند.

۱ــ Word_use

۲ــ Visual mediators

۳ــ Routines

۴ــ Endorsed narratives

۵ــ Realizations

علاوه بر مشخصه‌های چارچوب گفتمان شناختی، این چارچوب شامل اشیای مختلفی از گفتمان ریاضی مانند: نشانگرها یا دلالت‌گرها [۱]،درخت‌های معنابخشی[۲]، مفاهیم[۳]، اشیای اولیه[۴] و اشیای استدلالی[۵] است.

گفتمان ریاضی

گفتمان ریاضی دارای اجزایی است که عبارت‌اند از:

اشیای اولیه: هر موجود درک پذیر و قابل دسترسی که مستقل از گفتمان‌های انسانی وجود دارد و شامل چیزهایی است که ما می‌توانیم ببینیم و لمس کنیم (اشیای مادی و تصاویر).

اشیای استدلالی: در فرایند نام‌گذاری صحیح به‌وجود می‌آیند: دادن اسم یا عنصر نمادین مشابه به یک شیء خاص. در این فرایند یک زوج (اسم یا ضمیر، شیء اولیه معین) ایجاد می‌شود. اولین عنصر از زوج نشانگر است که در برقراری ارتباط با شیء دیگر زوج استفاده می‌شود به عنوان نشانگر معنابخشی شمرده می‌شود (اسفارد،۲۰۰۸).

درخت معنابخشی: مجموعهٔ سلسله مراتبی سازماندهی شده از تمامی مفاهیم نشانگرهای داده شده همراه با معنابخشی این مفاهیم که به خوبی نشانگرهای قبلی خود را معنابخشی کنند و مفاهیمی برای نشانگرهای بعدی باشند. درخت‌های معنابخشی و در نتیجه اشیای ریاضی دارای ساختار شخصی هستند و اطلاعات ارزشمندی در مورد گفتمان شخص می‌دهند. در این بررسی فرایندی که مشتق یک تابع به‌صورت شیء در نظر گرفته می‌شود را فرایند مشتق و شیئی که فرایند مشتق روی آن اعمال می‌شود شیء اولیه و نتیجه فرایند مشتق را شیء نهایی می‌نامیم.

رویکرد گفتمان شناختی تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنابخشی می‌نامد. معنابخشی به جای درک و فهم استفاده می‌شود و زمانی به کار می‌بریم که یک مفهوم مشکل ریاضی را با استفاده از کلمات و تصاویر به مفاهیم ساده‌تر و قابل درک به کمک اشیای ریاضی تبدیل کنیم.

۱ـ signifiers

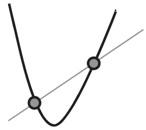
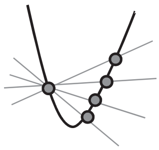
۲ـ realization trees

۳ـ realisations

۴ـ primary objects

۵ـ discursive objects

جدول ۳ــ کلمات و واسطه‌های تصویری به عنوان معنابخشی‌های مشتق

واسطه‌ها	اشیای اولیه	فرایند حد	اشیای نهایی
نمادین	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
عددی	$\frac{42-35}{3-1}$	دنباله‌ای از چند عدد	عدد
نموداری	(خط قاطع) 	(خطوط قاطع) 	(خط مماس) 

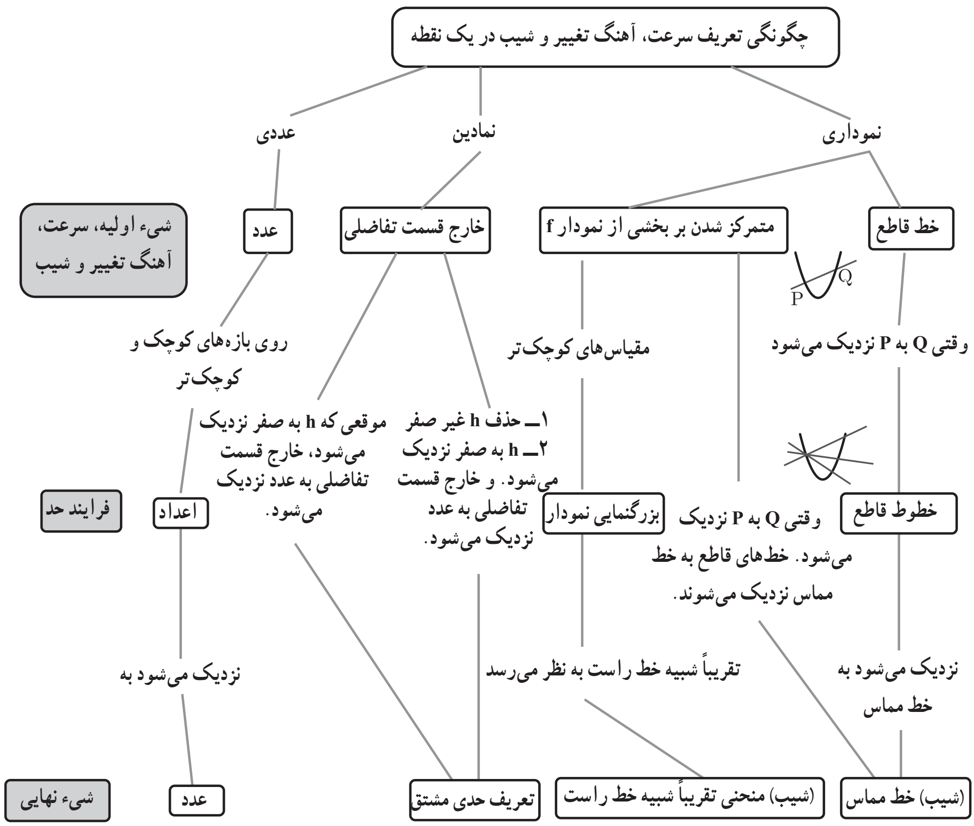
نماد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ به صورت فرایند و شیء هر دو بازنمایی می‌شود، این دوگانگی اغلب منجر به مشکل شدن درک نماد به عنوان شیء برای دانش‌آموزان می‌شود (زندیه، ۲۰۰۰).

درخت معنابخشی مشتق در یک نقطه : کتاب ریاضی ۳، شامل ۱۵۰ صفحه است که ۷۳ صفحهٔ آن (معادل ٪۴۹ کتاب) به مشتق و کاربرد آن اختصاص یافته است. در این کتاب ۵۵ آیتم در مورد مشتق در یک نقطه، ۲۷ آیتم نموداری و ۱۷ آیتم نمادین و ۱۱ آیتم عددی می‌باشند که از آنها، ۳۴ آیتم به فرایند حد می‌پردازند، ۱۹ آیتم (نموداری) و ۱۵ آیتم (نمادین).

جدول ۴ــ موضوعات و تعداد صفحات و درصد اختصاص یافته به مشتق در کتاب

موضوع	تعداد صفحه	درصد از مبحث مشتق
شیب و خط مماس	۱۲	٪۱۶
مشتق‌پذیری و پیوستگی	۶	٪۸
تابع مشتق	۵	٪۷
مشتق تابع مثلثاتی و تابع مرکب ــ مشتق‌پذیری روی یک بازه	۷	٪۹
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر	۹	٪۱۲
کاربرد مشتق	۳۴	٪۴۶

درخت معنابخشی مشتق در یک نقطه کتاب در ادامه نمایش داده شده است.



برخی از بدفهمی‌های رایج در مورد مشتق

یکی از عوامل مؤثر در طراحی این فصل، مطالعات انجام شده در مورد آموزش مفهوم مشتق بوده است. در این مطالعات برخی بدفهمی‌های رایج در مورد مفهوم مشتق مشاهده گردیده است که برخی از آنها به شرح زیر است. اطلاعات بیشتر در مراجع آمده است.

۱ عدم توجه به فرایند حدی: دانش‌آموزان صرفاً به نوشتن خارج قسمت تفاضلی بسنده می‌کنند و توجهی به مفهوم حدگیری ندارند. به عنوان نمونه ممکن است بنویسند: $f'(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

۲ درک نادرست از تعریف نمادین : برخی دانش‌آموزان تعریف مشتق در یک نقطه را به این صورت معرفی می‌کنند : $f'(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. این شخص علاوه بر اینکه مفهوم حدی را نادیده گرفته است، تفاوتی بین مشتق در یک نقطه و مشتق به عنوان تابع نیز قائل نیست.

۳ درک ناقص یا اشتباه از مشتق : برخی دانش‌آموزان مشتق را به نوعی کم کردن توان معرفی می‌کنند یعنی $f(x)=x^{۳} \to f'(x)=۳x^{۲}$.

۴ مشتق‌گیری از عبارات در توابع چند ضابطه‌ای بدون فراهم بودن شرایط.

۵ در توابعی که شامل چند متغیر هستند و برخی متغیرها ثابت فرض می‌شوند، به نادرستی مشتق گرفته می‌شود.

۶ در محاسبه تعبیر مشتق در یک نقطه در زندگی واقعی برداشت‌های متناقضی دارند.

۷ در مقایسه شیب‌های با مقادیر منفی اشتباهات چشمگیری دیده می‌شود.

۸ درک درستی از تقریب در محاسبات مربوط به شیب ندارند.

درس اول

آشنایی با مفهوم مشتق

اهداف درس

هدف کلی : درک مفهوم مشتق

اهداف جزئی

- ❑ یادآوری مفهوم شیب خط
- ❑ آشنایی با مفهوم خط مماس به صورت شهودی
- ❑ محاسبه شیب خط مماس با جدول مقادیر خارج قسمت تفاضلی و نمودار
- ❑ آشنایی با پیدا کردن معادله خط مماس
- ❑ محاسبه مشتق به روشی دیگر

پیش نیازها

- ❑ آشنایی با روش‌های حدگیری
- ❑ آشنایی با محاسبه شیب

روش تدریس

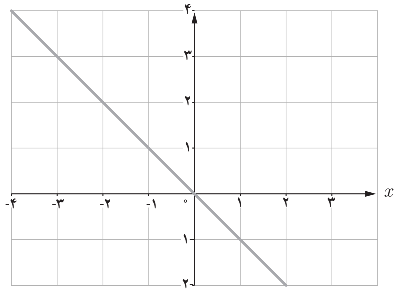
با تکیه بر مفهومی آشنا به نام شیب یک خط، تدریس آغاز می‌شود. مقایسه شیب‌های مختلف، به ویژه تغییرات شیب‌ها وقتی که مثبت یا منفی هستند و مقادیر آنها مفید و آموزنده است. سپس شیب خط مماس بر منحنی به طور شهودی ارائه می‌گردد و در ادامه به صورت دقیق‌تر و در یک فرایند حدی، شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه تعریف می‌گردد و مفهوم مشتق تابع در یک نقطه از آن استخراج می‌گردد.

فعالیت صفحهٔ ۶۶

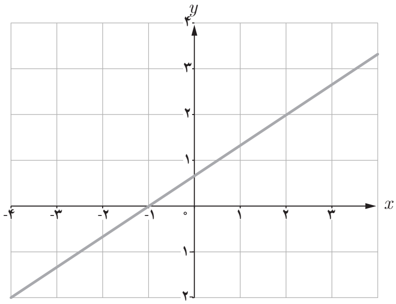
هدف این فعالیت، یادآوری مفهوم شیب خط، محاسبه و مقایسه شیب خطوط با یکدیگر است. به دانش‌آموزان اجازه دهید تا فعالیت را انجام دهند و در انتها مفاهیم را دوره نمایید.

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

$m=-۱$

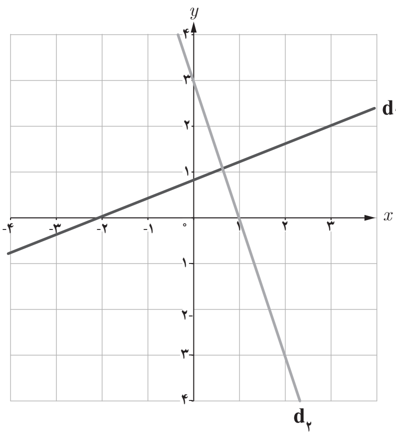


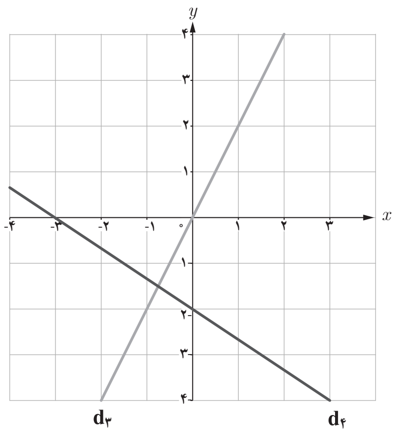
$m=\frac{۲}{۳}$



۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط به خط‌های $d_۱$ ، $d_۲$ ، $d_۳$ و $d_۴$ را روی شکل مشخص کنید.

خط	$d_۱$	$d_۲$	$d_۳$	$d_۴$
شیب	$\frac{۲}{۵}$	-۳	۲	$-\frac{۲}{۳}$





توصیه آموزشی

در صورت لزوم شیب‌های دیگر مطرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید که آنها را به دست آورند. به ویژه مقایسه شیب‌های منفی مختلف ضروری و آموزنده است.

تصاویر صفحه ۶۷ صرفاً برای آشنایی اولیه با خط مماس می‌باشد. مثال‌هایی برای اینکه چه خطوطی را به عنوان مماس می‌شناسیم و چه خطوطی را خط مماس در نظر نمی‌گیریم. همچنین خط مماس لزوماً نبایستی نمودار را در یک نقطه قطع کند و یا هرخطی که در یک نقطه نمودار را قطع کند، لزوماً خط مماس نیست.

فعالیت صفحهٔ ۶۸

هدف از این فعالیت، گذر از درک شهودی خط مماس و انجام محاسبات عددی و رسیدن به دقت می‌باشد. همان‌طور که در مبانی نظری نیز بیان شد، مشتق بازنمایی‌های مختلفی دارد و یکی از آنها عددی و نموداری است. در این فعالیت از دانش‌آموزان می‌خواهیم حدس بزنند، محاسبات انجام دهند، فرایند حدی را مشاهده کنند و در نهایت استدلال نمایند. چالش دیگری که در اینجا مطرح است بحث ورود متغیر می‌باشد که با انجام محاسبات و توجه به تغییرات متغیر طول‌ها، تأثیرات آن بر تغییرات عرض‌ها را متوجه شوند.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	بازه [a,b]
$\dfrac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\dfrac{-(۲/۴)^{۲}+۱۰(۲/۴)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۴-۲}=\dfrac{۲/۲۴}{۰/۴}=۵/۶$	[۲,۲/۴]
$\dfrac{f(۲/۳)-f(۲)}{۲/۳-۲}=\dfrac{-(۲/۳)^{۲}+۱۰(۲/۳)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۳-۲}=\dfrac{۱/۷۱}{۰/۳}=۵/۷$	[۲,۲/۳]
$\dfrac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\dfrac{-(۲/۲)^{۲}+۱۰(۲/۲)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۲-۲}=\dfrac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$	[۲,۲/۲]
$\dfrac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\dfrac{-(۲/۱)^{۲}+۱۰(۲/۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۱-۲}=\dfrac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$	[۲,۲/۱]
$\dfrac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\dfrac{-(۲/۰۱)^{۲}+۱۰(۲/۰۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۰۱-۲}=\dfrac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$	[۲,۲/۰۱]

$[۲,۲/۰۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{-(۲/۰۰۱)^{۲}+۱۰(۲/۰۰۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۰۰۱-۲}$ $=\frac{۰/۰۰۵۹۹۹}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$
$\vdots$	$\vdots$
$[۲,۲+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{(۲+h)-۲}=\frac{-(۲+h)^{۲}+۱۰(۲+h)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{h}$ $=\frac{-h^{۲}+۶h}{h}=-h+۶$

توصیه آموزشی : اجازه دهید دانش‌آموزان محاسبات را انجام دهند و در نتیجه‌گیری به آنها کمک کنید تا خط مماس را به خوبی درک کنند. در صورت لزوم می‌توانند بازه‌های دیگری را نیز انتخاب کنند و محاسبات را انجام دهند. معلمان عزیز می‌توانند در این فعالیت این دو سؤال را از دانش‌آموزان بپرسند و یا به بحث بگذارند.

الف) به نظر شما مقادیر خارج قسمت تفاضلی به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

ب) آیا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم خارج قسمت تفاضلی را به آن عدد (۶) نزدیک کنیم؟ اگر پاسخ مثبت است، به چه شرطی؟

کار در کلاس صفحهٔ ۷۲

حل : نقطه تماس $A(-۲\,,\,۷)$ می‌باشد و برای پیدا کردن شیب خط مماس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم :

$$m=f'(-۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(-۲+h)^{۲}+۳-(-۲)^{۲}-۳}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h^{۲}-۴h}{h}=\lim_{h\to ۰}(h-۴)=-۴$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y-۷=-۴(x+۲) \;\rightarrow\; y=-۴x-۱$ است.

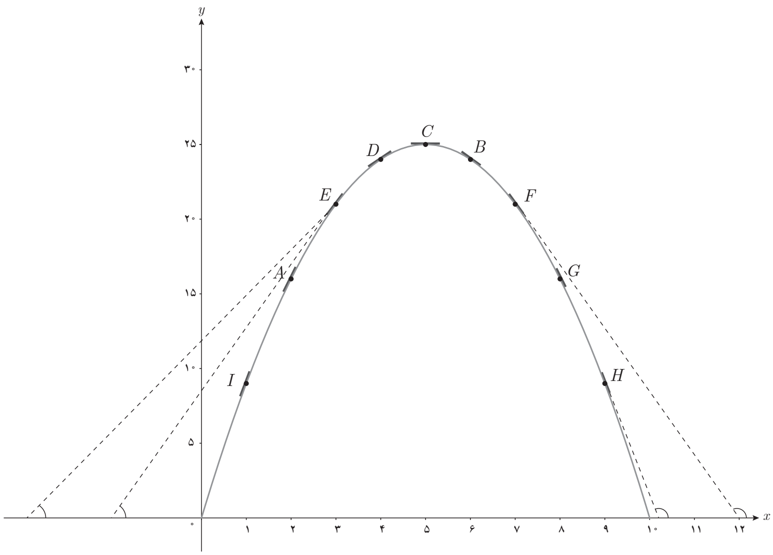
کار در کلاس صفحهٔ ۷۴

الف) برای تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$، $f'(۸)$ و $f'(۵)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشخص تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی دارای مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.



ث) با محاسبه $f'(۳)$ و $f'(۴)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

حل

الف)

$$f'(۵) = \lim_{x\to ۵} \frac{f(x)-f(۵)}{x-۵} = \lim_{x\to ۵} \frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۵}{x-۵} = \lim_{x\to ۵} \frac{-(x-۵)^{۲}}{x-۵}$$
$$= \lim_{x\to ۵} -(x-۵) = ۰$$

$$f'(۸) = \lim_{x\to ۸} \frac{f(x)-f(۸)}{x-۸} = \lim_{x\to ۸} \frac{-x^{۲}+۱۰x-۱۶}{x-۸} = \lim_{x\to ۸} \frac{-(x-۸)(x-۲)}{x-۸}$$
$$= \lim_{x\to ۸} -(x-۲) = -۶$$

ب) نقاط (D , B) یا (E , F) یا (A , G) یا (I , H)

پ) در نقاط (I , A , E , D) مشتق مثبت و در نقاط (B , F , G , H) مشتق منفی است.

ت) با توجه به شکل و مقایسه زاویه‌ها، مشتق در نقطه ۳ بزرگ‌تر از مشتق در نقطه۴ است.
ث)

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۱}{x-۳}=\lim_{x\to ۸}\frac{-(x-۳)(x-۷)}{x-۳}$$
$$=\lim_{x\to ۳}-(x-۷)=۴$$

$$f'(۴)=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۴}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{-(x-۴)(x-۶)}{x-۴}$$
$$=\lim_{x\to ۴}-(x-۶)=۲$$

واضح است که $f'(۳)>f'(۴)$.

توصیه آموزشی

توجه به این نکته در این فعالیت ضروری است که برای زاویه‌های منفرجه که شیب منفی به دست می‌آید، ممکن است در مقایسه شیب‌ها ایجاد بدفهمی شود. همکاران محترم با انجام یک مثال این قسمت را برجسته کنید. به عنوان نمونه شیب در نقطه ۷ بزرگ‌تر از شیب در نقطه ۹ می‌باشد.

نقطه	شیب
۱	۸
۲	۶
۳	۴
۴	۲
۵	۰
۶	−۲
۷	−۴
۸	−۶
۹	−۸

رسم جدول فوق برای دانش‌آموزان آموزنده است.

جمع‌بندی کلی : مثلاً بررسی رفتار کلی از $x=۰$ تا $x=۵$ شیب‌ها با مقادیر مثبت کاهش می‌یابد تا به صفر برسد و از $x=۵$ تا $x=۱۰$ شیب‌ها با مقادیر منفی کاهش می‌یابند.

حل برخی تمرین‌های صفحه ۷۵ کتاب درسی

۱ با جایگذاری ۲ $x=$ عرض نقطه تماس برابر ۹ به دست می‌آید و داریم :

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^{۲}-۲x+۱-۹}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^{۲}-۲x-۸}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(۳x+۴)(x-۲)}{x-۲}=۱۰$$

$$y-۹=۱۰(x-۲)\rightarrow y=۱۰x-۱۱$$

۳ $m_۵<m_۳<m_۲<m_۴<m_۶<m_۱$

۶
$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}-۲+۳}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}+۱}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^{۲}-x+۱)}{x+۱}=۳$$

۷ الف) نادرست است زیرا در نقاط C , D , F منفی می‌باشد.

ب) نادرست است زیرا زاویه‌ای که خط مماس در نقطه A با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد از زاویه‌ای که خط مماس در نقطه B با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد بیشتر است یعنی $m_A > m_B$.

پ) درست است.

ت) درست است.

ث) نادرست است زیرا $m_C < m_D < m_F$.

ج) درست است.

۸

روش اول : مختصات نقطه $A(۴,۲۵)$ و $B(۴+۱,۲۵+f'(۴)) = B(۵,۲۶/۵)$ و

$C(۴-۱,۲۵-f'(۴)) = C(۳,۲۳/۵)$

روش دوم : مختصات نقطه $A(۴,۲۵)$ و

$$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})$$

$$y-۲۵=۱/۵(x-۴)$$

$$y=۱/۵\,x+۱۹$$

$$y_B=۲۶/۵\ ,\ y_C=۲۳/۵$$

درس دوم

مشتق‌پذیری و پیوستگی

اهداف درس

هدف کلی : بررسی مشتق‌پذیری و معرفی مفهوم مشتق به عنوان تابع

اهداف جزئی

- ❑ شناسایی نقاط مشتق‌ناپذیر
- ❑ محاسبه مشتق چپ و راست
- ❑ بررسی رابطه بین مشتق‌پذیری و پیوستگی
- ❑ معرفی مماس قائم
- ❑ آشنایی و درک تابع مشتق
- ❑ محاسبه تابع مشتق برخی توابع
- ❑ مشتق تابع مرکب
- ❑ مشتق‌پذیری روی یک بازه
- ❑ معرفی مشتق مرتبه دوم

پیش نیازها

- ❑ آشنایی با مشتق در یک نقطه
- ❑ آشنایی با خط مماس
- ❑ آشنایی با حدهای نامتناهی

روش تدریس

در این درس در شروع با توجه به مفهوم شیب خط مماس بر منحنی به بررسی عدم وجود خط مماس

در نقاطی که تابع ناپیوسته است، پرداخته می‌شود و ارتباط بین پیوستگی و مشتق‌پذیری بررسی می‌شود. با استفاده از نیم مماس‌های راست و چپ مفهوم مشتق راست و چپ ارائه می‌شود سپس مشتق به عنوان یک تابع ارائه می‌شود و در نهایت دستورهایی برای محاسبه مشتق برخی توابع داده می‌شود.

فعالیت صفحهٔ ۷۷

هدف از این فعالیت آن است که مشخص کنیم تا چه حد ناپیوستگی روی مشتق‌پذیری مؤثر است. در این فعالیت تابع ناپیوستگی رفع شدنی دارد (حد وجود دارد).

با توجه به تعریف مشتق، به دلیل اینکه مخرج کسر صفر است و صورت کسر یک عدد، پس حد وجود ندارد.

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۱}{x-۲} = \infty$$

به کمک نمودار هم به دلیل اینکه شیب خطوط قاطع رسم شده به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند، مشتق وجود ندارد (زاویه خطوط قاطع نسبت به جهت مثبت محور طول‌ها به ۹۰ درجه نزدیک می‌شوند).

کار در کلاس صفحهٔ ۷۸

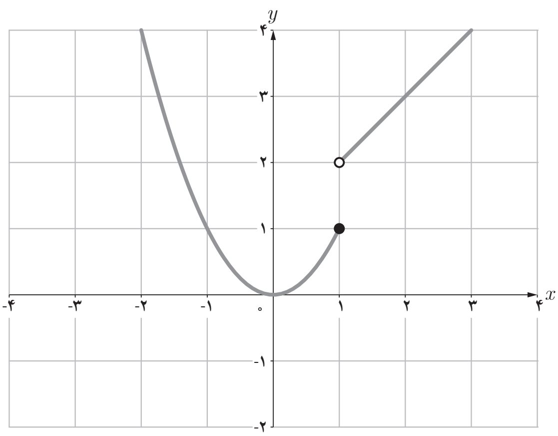
هدف از این کاردرکلاس، معرفی نوع دیگر ناپیوستگی (که رفع نشدنی است) و تأثیر آن بر مشتق‌پذیری می‌باشد. تابع در این نقطه پیوستگی چپ دارد.

کار در کلاس

تابع g (شکل روبه‌رو) را به‌صورت

$$g(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \leq ۱ \\ x+۱ & x > ۱ \end{cases}$$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟



حل : مشتق چپ و راست در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم :

$$g'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x+۱-۱}{x-۱}=+\infty$$

$$g'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{g(x)-g(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}(x+۱)=۲$$

با توجه به اینکه مشتق چپ و راست برابر نیست پس تابع مشتق پذیر نمی‌باشد. امّا تابع در نقطه ۲ مشتق چپ دارد.

کار در کلاس صفحهٔ ۷۹

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-۱$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-۱$ را بنویسید.

حل :

$$f'_+(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{-(x^{۲}-۱)}{x+۱}=۲$$

$$f'_-(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x^{۲}-۱)}{x+۱}=-۲$$

نیم مماس راست: $y-۰=۲(x+۱)\to y=۲x+۲$

نیم مماس چپ: $y-۰=-۲(x+۱)\to y=-۲x-۲$

کار در کلاس صفحهٔ ۸۲

شکل الف، تابع در $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.

شکل ب، تابع در $x_۲$ و $x_۳$ مشتق‌پذیر نیست زیرا در این نقاط تابع ناپیوسته است.

شکل پ، تابع در $x_۱$ و $x_۳$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.

شکل ت، تابع در $x_۳$ مشتق‌پذیر نیست زیرا تابع ناپیوسته است.

شکل ث، تابع در $x_۳$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.

شکل ج، تابع در $x_۲$ مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.

فعالیت صفحهٔ ۸۲

هدف از این فعالیت عبور از مشتق در یک نقطه، به مشتق به عنوان تابع، به کمک چند مثال و تعمیم می‌باشد. همان‌طور که در بخش‌های نظری نیز بیان گردید مناسب است دانش‌آموزان را با چند مثال ساده وارد بحث مشتق به عنوان تابع نماییم.

$$f'(-۳) = \lim_{x\to(-۳)} \frac{f(x)-f(-۳)}{x+۳} = \lim_{x\to(-۳)} \frac{x^۲-۹}{x+۳} = -۶$$

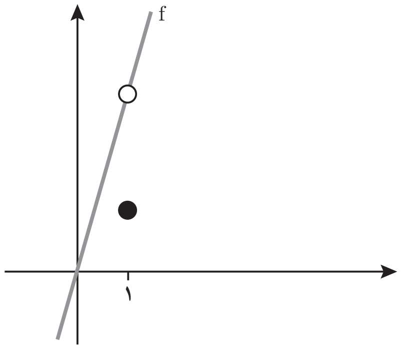
$$f'(-۱) = \lim_{x\to(-۱)} \frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x\to(-۱)} \frac{x^۲-۱}{x+۱} = -۲$$

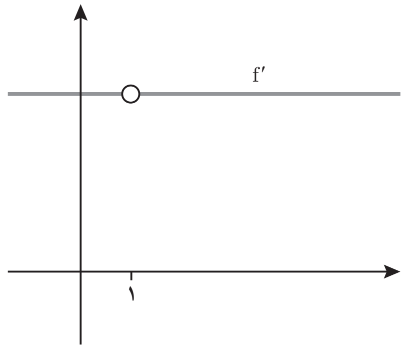
$$f'(\frac{۱}{۲}) = \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})} \frac{f(x)-f(\frac{۱}{۲})}{x-\frac{۱}{۲}} = \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})} \frac{x^۲-\frac{۱}{۴}}{x-\frac{۱}{۲}} = ۱$$

در تمام نقاط مشتق وجود دارد.

کار در کلاس صفحهٔ ۸۴

دامنه تابع تمام اعداد حقیقی است ولی دامنه تابع مشتق آن تمام اعداد حقیقی به غیر از ۱ می‌باشد.





$$f'(x) = \lim_{h\to۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to۰} \frac{۵(x+h)-۵x}{h} = \lim_{h\to۰} \frac{۵h}{h} = ۵ \quad x \neq ۱$$

تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست زیرا پیوسته نمی‌باشد.

توصیه آموزشی

بررسی رابطه بین نمودار تابع و مشتق آن بسیار حائز اهمیت است. با تأمل در این قسمت به دانش‌آموزان کمک شود تا بهتر آن را درک کنند. از آوردن مثال‌های پیچیده برای دانش‌آموزان خودداری شود. توجه شود که تاکنون قاعده‌ای برای محاسبه مشتق مطرح نگردیده است و دانش‌آموز بایستی از طریق تعریف محاسبات را انجام دهد.

کار در کلاس صفحهٔ ۸۷

۱ الف) $x \neq ۴$ $\quad f'(x) = -\frac{۱}{(x-۴)^۲}$

ب) $g'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^۲+۵) + (۶x)\sqrt{x}$

پ) $h'(x) = \frac{۱(۲x^۲+x-۱)-(۴x+۱)(x)}{(۲x^۲+x-۱)^۲}$

۲ $(fg)'(۲) = f'(۲)g(۲) + g'(۲)f(۲) = ۵(۸) + (-۶)۳ = ۲۲$

$$(\frac{f}{g})'(۲) = \frac{f'(۲)g(۲) - g'(۲)f(۲)}{g^۲(۲)} = \frac{۵(۸) - (-۶)۳}{۸^۲} = \frac{۵۸}{۶۴} = \frac{۲۹}{۳۲}$$

کار در کلاس صفحهٔ ۸۸

الف) $f'(x) = ۳(۲x)(x^۲+۱)^۲(۵x-۱) + ۵(x^۲+۱)^۳$

ب) $g'(x) = ۸(\frac{-۳(x^۲+۵) - ۲x(-۳-۱)}{(x^۲+۵)^۲})(\frac{-۳x-۱}{x^۲+۵})^۷$

کار در کلاس صفحهٔ ۸۹

تابع f در بازهٔ $[-۱,۱]$ مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف $۲x$ است. تابع در بازه $(۲,۵)$ مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف -۱ می‌باشد. ولی تابع در بازه $[-۲,۰]$ مشتق‌پذیر نیست زیرا در $x=-۱$ دارای مشتق چپ ۲ و مشتق راست -۲ است (با استفاده از تعریف).

$$x < -۱ : f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{۲(x+h) + ۴ - ۲x - ۴}{h} = ۲$$

$$-۱ < x < ۲ : f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{(x+h)^۲ - ۱ - x^۲ + ۱}{h} = ۲x$$

$$۲ < x < ۵ : f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{-(x+h) + ۵ + x - ۵}{h} = -۱$$

تابع در $x = -۱$ پیوسته نیست و مشتق ندارد و در $x = ۲$ پیوسته است و مشتق چپ و راست برابری ندارد (دو نیم مماس داریم).

توصیه آموزشی

مفهوم مشتق‌پذیری روی یک بازه را هم از روی نمودار و هم با استفاده از تعریف مشتق برای دانش‌آموزان مشخص نمایید. توجه شود که در توابع چند ضابطه‌ای امکان بروز بدفهمی هنگام مشتق‌گیری وجود دارد. مثلاً $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۱ \\ ۲x + ۱ & x < ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ پیوسته نیست و مشتق ندارد در حالی که اگر از هر یک از ضابطه‌ها به تنهایی مشتق گرفته شود به نتیجه اشتباه منجر می‌شود و مشتق تابع ظاهراً ۲ می‌شود. در حقیقت در این مثال شرایط مشتق‌گیری از هر دو ضابطه وجود ندارد.

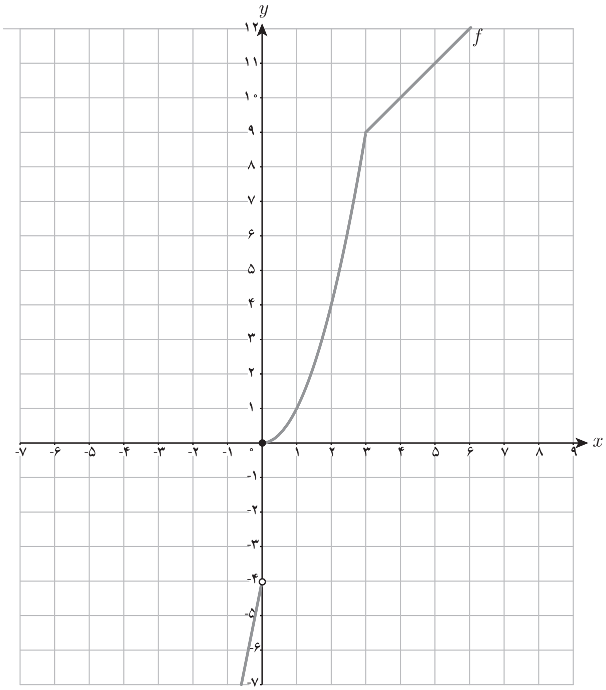
حل برخی از تمرین‌های صفحه ۹۰ کتاب درسی

۱ یکی از پاسخ‌ها می‌تواند $g(x) = \begin{cases} x + ۱ & x \leq ۲ \\ -۲x + ۷ & x > ۲ \end{cases}$ و $f(x) = |x - ۲|$ باشند.

۲ الف) با استفاده از تعریف مشتق، $f'_-(۰) = -۱$ ، $f'_+(۰) = ۰$ ب) $f'_-(۱) = ۰$ ، $f'_+(۱) = -۱$

پ) با استفاده از تعریف، $f'_-(۴) = \frac{۱}{۴}$ ، $f'_+(۴) = \frac{۱}{۲}$.

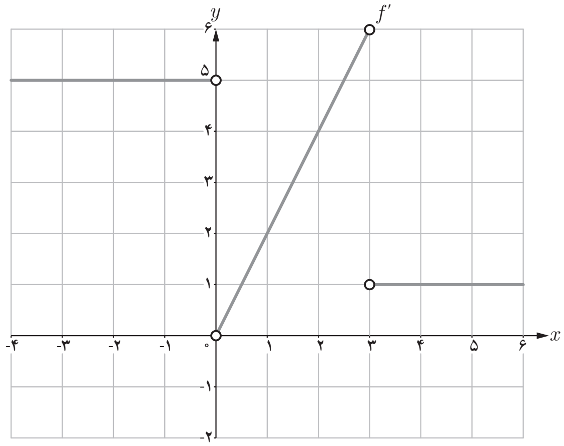
۳ الف)



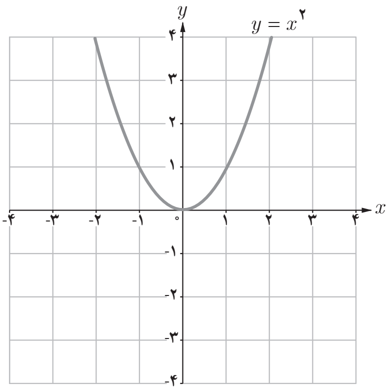
ب) با استفاده از تعریف مشتق، $f'_-(\circ) = ۵$, $f'_+(\circ) = \circ$ و $f'_-(۳) = ۶$, $f'_+(۳) = ۱$

پ) $$f'(x) = \begin{cases} ۵ & x < \circ \\ ۲x & \circ < x < ۳ \\ ۱ & x \geq ۳ \end{cases}$$

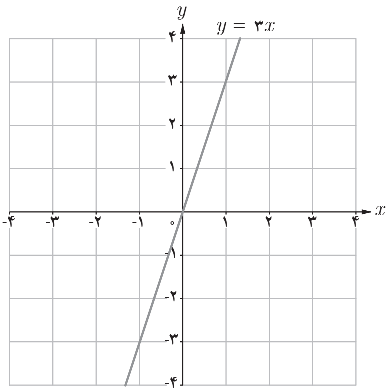
ت)



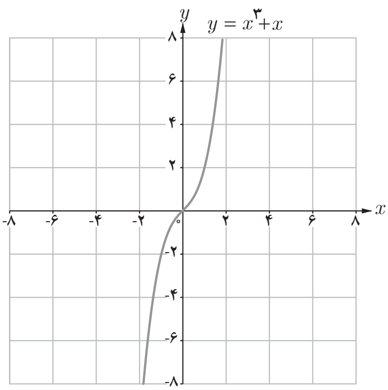
۴ الف) $f'(\circ) = \circ$



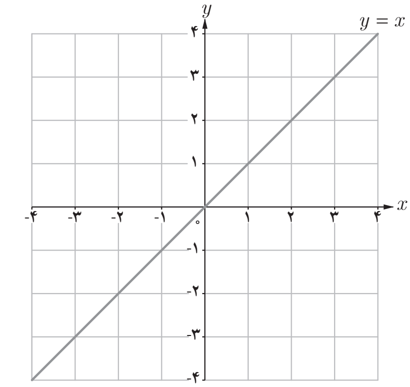
ب) $f'(۲) = ۳$



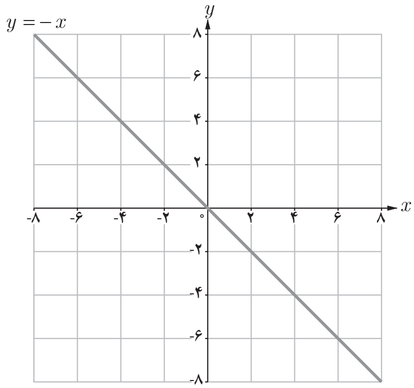
پ) $f'(x) = ۳x^{۲}+۱$



ت) $f'(x) = ۱$



ث) $f'(x) = -۱$

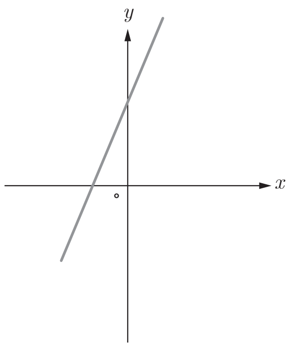


تذکر : توجه شود که این تمرین بازپاسخ است و مقایسه بین پاسخ‌ها چه درست یا نادرست آموزنده است.

۵ الف) با استفاده از شیب خط مماس $f'(-۱) < f'(۰) < f'(۲) < f'(۳)$

ب) $f'(x) = ۲x + ۲ : f'(-۱) = ۰ \ , \ f'(۰) = ۲ \ , \ f'(۲) = ۶ \ , \ f'(۳) = ۸$

پ)



۶ تابع در $x=۱$ پیوسته نیست پس مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ($f'_+(۱)=۲$, $f'_-(۱)=+\infty$)

۷ این مسئله بازپاسخ است، یکی از جواب‌ها می‌تواند $h(x)=x+۲$, $g(x)=x+۱$, $f(x)=x$ باشد.

۸ تابع در نقاط ۲ و ۲- مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

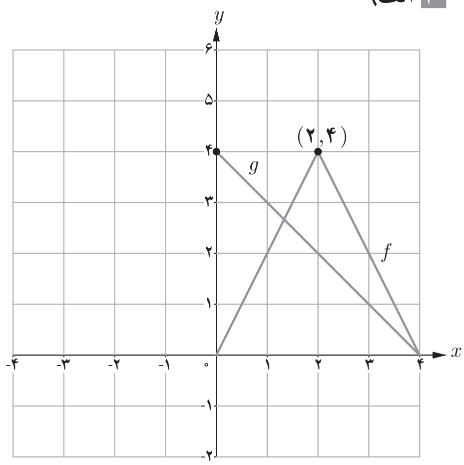
$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}=۴$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}=-۴$$

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=-۴$$

$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=۴$$

۱۰ الف)



$$h'(x)=f'(x)\,g(x)+g'(x)\,f(x)$$

$$h'(۱)=۲(۳)+(-۱)\,۲=۴$$

$h'(۲)=$ وجود ندارد

$$h'(۳)=(-۲)۱+(-۱)۲=-۴$$

ب)

$$k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱)=\frac{۲(۳)-(-۱)(۲)}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

$k'(۲)=$ وجود ندارد

$$k'(۳)=\frac{(-۲)۱-(-۱)۲}{۱}=۰$$

۱۱

$$(f+g)'(۱)=f'(۱)+g'(۱)=۳+۵=۸$$

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۳)+۲(۵)=۱۹$$

۱۲ تابع f در $x=۰$ پیوسته است و $f'_{+}(۰)=۱$, $f'_{-}(۰)=۰$.

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x^{۲}-۰}{x-۰}=۰$$

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x-۰}{x-۰}=۱$$

۱۳ الف)

$$f'(x)=۶x(۲x-۵)^{۳}+۳(۲)(۲x-۵)^{۲}(۳x^{۲}-۴)$$

ب)

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}$$

پ)

$$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۱)+۳x^{۲}(\sqrt{۳x+۲})$$

ت)

$$f'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{x}$$

درس سوم

آهنگ تغییر

اهداف درس

هدف کلی : بررسی آهنگ تغییر و رابطه آن با مشتق

اهداف جزئی

- ❑ تعبیر هندسی و فیزیکی آهنگ تغییر
- ❑ محاسبه آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و تفاوت آنها
- ❑ کاربردهای آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر
- ❑ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای
- ❑ اتصال بین آهنگ لحظه‌ای تغییر و مشتق

پیش‌نیازها

- ❑ آشنایی با خارج قسمت تفاضلی
- ❑ آشنایی با مشتق
- ❑ آشنایی با مفاهیم اولیه سرعت

روش تدریس

در این درس آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای و کاربردهای آن معرفی شده است. مثال‌های متنوع برای دانش‌آموزان ارائه شده است. **توجه شود که آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.**

با توجه به آنکه دانش‌آموزان در درس فیزیک۳ پایه دوازدهم با مفهوم سرعت لحظه‌ای به طور شهودی آشنا می‌شوند، فرصتی مناسب فراهم می‌شود تا به مفهوم سرعت لحظه‌ای از منظر ریاضی با دقت بیشتری پرداخته شود. بهتر است این یادآوری و ارتباط با درس فیزیک به دانش‌آموزان یادآوری شود.

کار در کلاس صفحهٔ ۹۵

$F < B < E < D < A < C$

کار در کلاس صفحهٔ ۹۶

الف) $\frac{f(۲۵)-f(۰)}{۲۵}=\frac{۷\sqrt{۲۵}+۵۰-۵۰}{۲۵}=\frac{۳۵}{۲۵}=\frac{۷}{۵}=۱/۴cm/M$

ب) $f'(x)=\frac{۷}{۲\sqrt{x}}\ ;\ f'(۲۵)=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷\ ,\ f'(۴۹)=\frac{۷}{۱۴}=۰/۵\rightarrow f'(۴۹)<f'(۲۵)$

پ) $\frac{f(۳۶)-f(۱۶)}{۳۶\quad ۱۶}=\frac{۹۵-۸۰}{۲۰}=\frac{۱۵}{۲۰}=۰/۷۵\ cm/M$

کار در کلاس صفحهٔ ۹۹

الف) $h'(t)=-۱۰t+۴۰$

$h'(۰)=۴۰\ m/s\ ,\ h'(۸)=-۴۰\ m/s$

ب) $\frac{h(۸)-h(۵)}{۸-۵}=\frac{((-۵)(۸)^{۲}+۴۰(۸))-((-۵)(۵)^{۲}+۴۰(۵))}{۳}=\frac{-۷۵}{۳}=-۲۵m/s$

پ) $h'(t)=-۱۰t+۴۰=۳۵\rightarrow t=۰/۵s$

$h'(t)=-۱۰t+۴۰=-۳۵\rightarrow t=۷/۵s$

حل تمرین‌های صفحه ۹۹ کتاب درسی

۱

الف) $\frac{T(۱۲)-T(۸)}{۱۲-۸}=\frac{۱۹-۱۱}{۴}=۲C/h$

ب) $\frac{T(۱۸)-T(۱۲)}{۱۸-۱۲}=\frac{۹-۱۹}{۶}=-۱/۶۷C/h$

پ) از صبح ساعت ۸ تا ۱۲ درجه حرارت با سرعت متوسط ۲ سانتی‌گراد بر ساعت در حال افزایش است و از ساعت ۱۲ تا ۱۸ درجه حرارت با سرعت متوسط ۱/۶۷- سانتی‌گراد بر ساعت در حال کاهش می‌باشد.

۲ الف) شیب خط l سرعت آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در پایان هفته ششم (سرعت لحظه‌ای در $t=۶$) و شیب خط d سرعت متوسط آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در بین هفته‌های چهارم تا ششم (آهنگ تغییر متوسط در بین لحظات ۴ تا ۶ هفته) را نشان می‌دهد.

ب) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های $t=۱$ تا $t=۳$ در حال افزایش است.

پ) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های $t=۴$ تا $t=۶$ در حال کاهش می‌باشد.

۳ الف)

$$\frac{N(۱)-N(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۰۰-۰}{۱}=۳۰۰$$

$$\frac{N(۲)-N(۱)}{۲-۱}=\frac{۴۸۰-۳۰۰}{۱}=۱۸۰ \qquad \frac{N(۴)-N(۳)}{۴-۳}=\frac{۷۰۰-۶۰۰}{۱}=۱۰۰$$

ب) با توجه به شیب خطوط قاطع که در حال کم شدن است بنابراین آهنگ تغییر درحال کاهش می‌باشد. هزینه‌های تبلیغات تا یک اندازه مشخص در فروش کالا اثرگذار است. افزایش بیش از حد هزینه تأثیر بسزایی در میزان فروش ندارد.

۴

$$f'(t)=۲t-۱\rightarrow ۲t-۱=\frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}$$

$$\rightarrow ۲t-۱=\frac{۳۰-۱۰}{۵}=۴\rightarrow t=۲/۵s$$

۵ گزینه ج صحیح است. چند پاسخ و استدلال دانش‌آموزان در زیر ارائه شده است.

روش اول : گزینه ج درست است زیرا سرعت تقریبی برابر است با جابه‌جایی به روی زمان

$$v\simeq\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۷/۴-۱۶/۳}{۰/۱}=\frac{۱/۱}{۰/۱}=۱۱$$

روش دوم : گزینه ج صحیح است زیرا سرعت باید بین سرعت متوسط در بازهٔ [۰/۳، ۰/۴] و [۰/۴، ۰/۵] باشد.

$$\frac{۱/۱}{۰/۱}<v<\frac{۱/۲}{۰/۱}\Rightarrow ۱۱<v<۱۲$$

t ثانیه(s)	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش سوم : گزینه ج درست است زیرا با محاسبه سرعت‌های متوسط به جواب مسئله می‌رسیم.

۱۰/۵ ، ۱۱ ، $\boxed{۱۱/۵}$ ، ۱۲، ۱۲/۵، ۱۳

t — ثانیه (s)	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
f(t) — متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

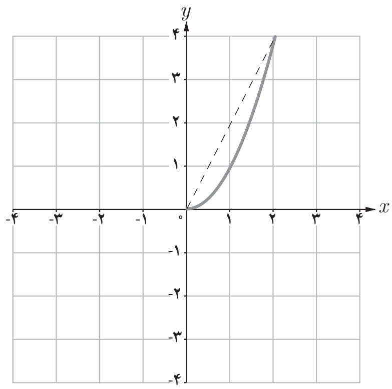
روش چهارم : گزینه ج صحیح است زیرا

$$v_۱ = \frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱} = \frac{۱۷/۴ - ۱۵/۱}{۰/۵ - ۰/۴} = ۱۱/۵$$

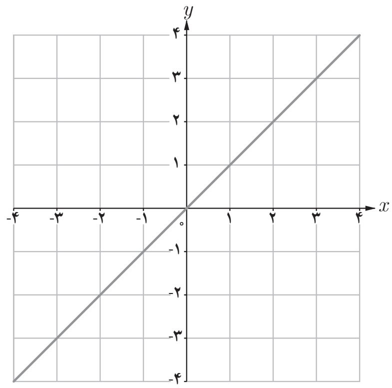
$$v_۲ = \frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲} = \frac{۱۸/۴ - ۱۳/۸}{۰/۶ - ۰/۲} = ۱۱/۵$$

t — ثانیه (s)	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
f(t) — متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

تذکر : برای تقریب مشتق در یک نقطه مثلاً ۵ می‌توان از آهنگ متوسط تغییر بازه [۵، ۰] یا [۱۰، ۵] یا [۱۰، ۰] استفاده کرد.



۶ الف) نادرست است. مثال نقض : $f(x)=x^{۲}$ در $x=۰$ شیبی کمتر از آهنگ تغییر متوسط در بازه [۰،۱] دارد.



ب) نادرست است. مثال نقض : $f(x)=x$ تابعی صعودی است ولی آهنگ تغییرات متوسط آن ثابت می‌باشد.

پ) نادرست است. مثال نقض : $f(x)=x^{۲}$ در $x=۰$ دارای این ویژگی است که $f(۰)=۰$ و $f'(۰)=۰$.

۷

الف) $m(۴)-m(۳)=۱۳۰-(۵۴+\sqrt{۳})=۷۶-\sqrt{۳}$

ب) $m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^{۲}\ :\ m'(۳)=۵۴+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$

۸

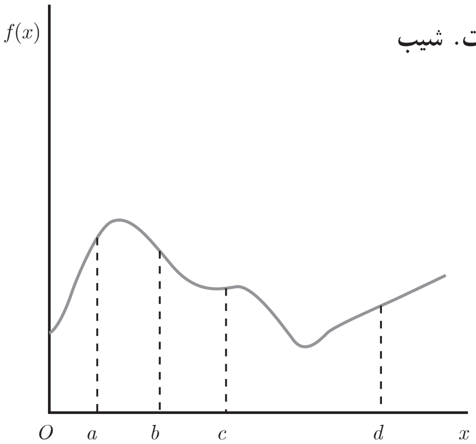
الف) $\frac{V(۱)-V(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۹/۲-۴۰}{۱}=-۰/۸\,lit/s$

ب) $\frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰}\simeq V'(t)\rightarrow\frac{۰-۴۰}{۱۰۰}=۸۰(-\frac{۱}{۱۰۰})(۱-\frac{t}{۱۰۰})$

$\rightarrow(۱-\frac{t}{۱۰۰})=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{t}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\rightarrow t=۵۰s$

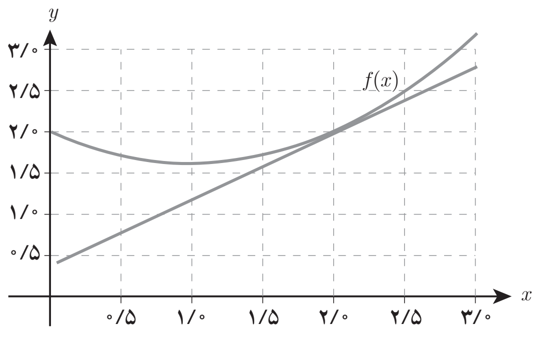
نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ فرض کنید نمودار تابع f به صورت زیر است. شیب نمودار در نقاط d ،c ،b و a را با هم مقایسه کنید.



۲ الف) $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ به ازای $h=-۰/۵$ تقریب بزنید. آیا این مقدار بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از $f'(۲)$ است؟ توضیح دهید.

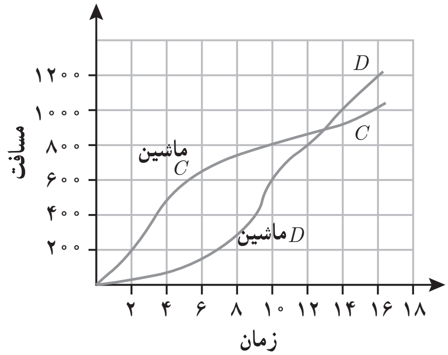
ب) مقادیری از h را بیابید که $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۰$.



۳ دو ماشین مسابقه‌ای D و C در یک پیست مسیری به‌طور مستقیم در ۱۶ ثانیه مطابق شکل صفحه بعد طی می‌کنند.

الف) سرعت متوسط هر دو ماشین را در ۱۶ ثانیه اول بنویسید.

ب) بازه‌ای با شروع $t=۴$ برای ماشین D بیابید به طوری که سرعت متوسط ماشین D تقریباً مشابه سرعت متوسط ماشین C در بازه $t=۲$ تا $t=۱۰$ باشد.



پ) با استفاده از خطوط قاطع و شیب‌ها نشان دهید ماشین D در بازه $t=۴$ تا $t=۱۰$ دارای سرعت متوسط بالاتری نسبت به ماشین C است.

۴ فرض کنید $f(۰)=۰$، درستی یا نادرستی تعیین کنید.

الف) اگر برای هر x ، $f(x)\leq x$، آنگاه $f'(x)\leq ۱$.

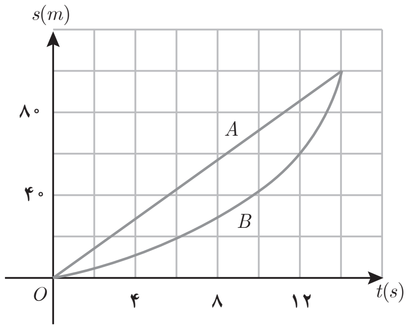
ب) اگر برای هر x ، $f'(x)\leq ۱$ ، آنگاه $f(x)\leq x$.

۵ نمودار زیر تابع موقعیت دو دوندهٔ B و A در یک مسابقه دو ۱۰۰ متر را نشان می‌دهد.

الف) چگونگی حرکت دونده‌ها را مقایسه و تشریح کنید.

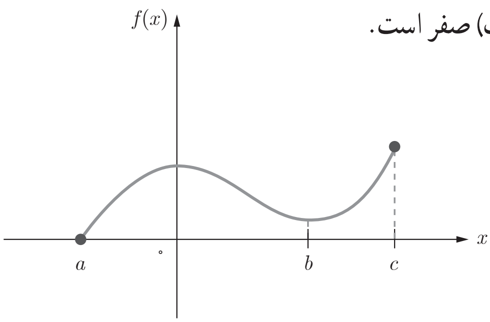
ب) در چه زمانی تقریباً فاصله بین دو دونده بیشترین است؟

پ) در چه زمانی تقریباً سرعت هر دو دونده یکسان است؟

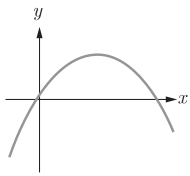


۶ برای تابع رسم شده در شکل زیر بازه یا نقاطی روی محور طول‌ها بیابید که آهنگ تغییر $f(x)$ نسبت به x :

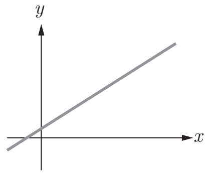
الف) مثبت ب) منفی پ) صفر است.



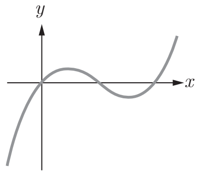
۷ توابع D، C، B و A را به مشتقات آنها III، II و I نظیر کنید.



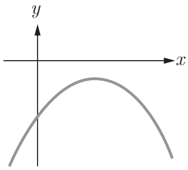
(A)



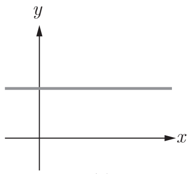
(B)



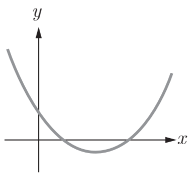
(C)



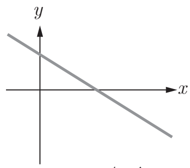
(D)



(I)



(II)



(III)

۸ بشکه‌ای حاوی یک مایع است که در پایین آن سوراخی وجود دارد و مایع درحال خروج از آن می‌باشد. حجم مایع درون بشکه درحال کاهش است و از رابطه $V(t)=10(2-\frac{1}{60}t)^2$ پیروی می‌کند. سرعت خروج مایع در $t=40$ را محاسبه کنید.

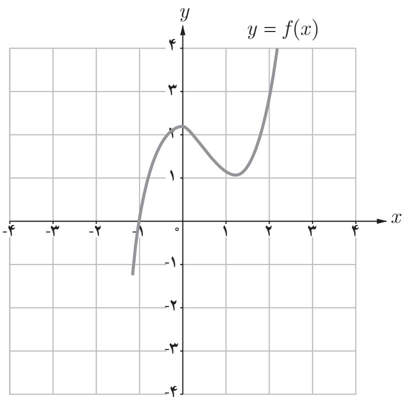
۹ از روی شکل خارج قسمت تفاضلی $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ را تفسیر کنید.

الف) $f(1)$ به چه معنی است؟

ب) $f(1+h)$ به چه معنی است؟ مثلاً برای $h=0/2$؟

پ) $1+h$ به چه معنی است؟

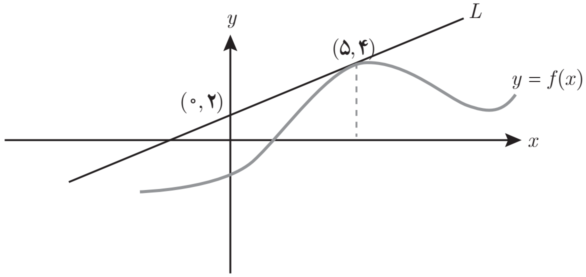
ت) $1+h$ ، $f(1)$ و $f(1+h)$ را روی نمودار مشخص کنید.

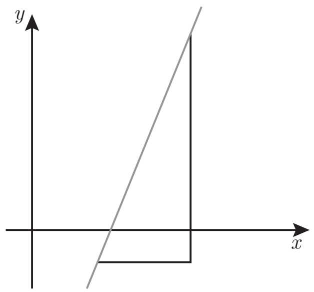


ث) از روی شکل حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ را تفسیر کنید.

ج) مقدار حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ را برآورد کنید.

۱۰ فرض کنید خط L مماس بر نمودار تابع f در نقطه (۵,۴) است. $f(5)$ و $f'(5)$ را به دست آورید.





۱۱ فرض کنید P و Q دو نقطه دلخواه روی نمودار باشند و تغییرات طول‌های آنها ۸ و تغییرات عرض‌های آنها y باشد. اگر بین x و y رابطهٔ $y=mx+b$ برقرار باشد، مقدار m را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

۱۲ مشتق بگیرید.

۱) $y = x^۴ - ۳x + ۵$

۲) $y = (x+۱)(۴x - x^۲) + x$

۳) $y = (x^۲ - ۳x)^۳ (x+۲)$

۴) $y = (۸x^۳ - x + ۵)^۲$

۵) $y = \frac{۲x - ۵}{x^۲}$

۶) $y = \frac{۴x^۳ - ۲x^۲ + ۱}{x + ۳}$

۱۳ آیا تابع‌های زیر در نقطهٔ مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف) $f(x) = x^۳$ در $x = ۰$

ب) $f(x) = |x|$ در $x = ۱$

۱۴ در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازهٔ [۲/۲۵ ،۲/۵۶] از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱۵ معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود به‌صورت $s(t)=-۵t^۲+۲۰t$ است. سرعت لحظه‌ای این گلوله در زمان برخورد با زمین چند متر بر ثانیه است؟

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $h+۲$ تغییر می‌کند برابر $\frac{۸}{۹}$ است. h کدام است؟

۱۷ حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه ، برحسب لیتر برابر است با :

$$V(t)=۲۵۰\ (۱۶-t)^۲$$

آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است و آن را توصیف کنید.

۱۸ در تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۱ & x\geq ۱\\ x^۲+۱ & x<۱\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h^۲)-f(۱)}{h^۲}$ چقدر است؟

۱۹ مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x=۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱)=۰$ ، $f'(۱)=-۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۲۰ مقدار مشتق عبارت $y=\frac{x}{۱+x^۲}$ به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ چقدر است؟

۲۱ مقادیر a و b را به‌قسمی تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}(x+۱)^۳ & x\leq ۰\\ ax+a+b & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد.

۲۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax-a & x<۱\\ x^۲-x & x\geq ۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟

۲۳ فرض کنید تابع f در $x=۱$ مشتق پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)}{h}=۳$ ، مقدار $f(۱)$ و $f'(۱)$ را به‌دست آورید.

فصل ۵

کاربرد مشتق

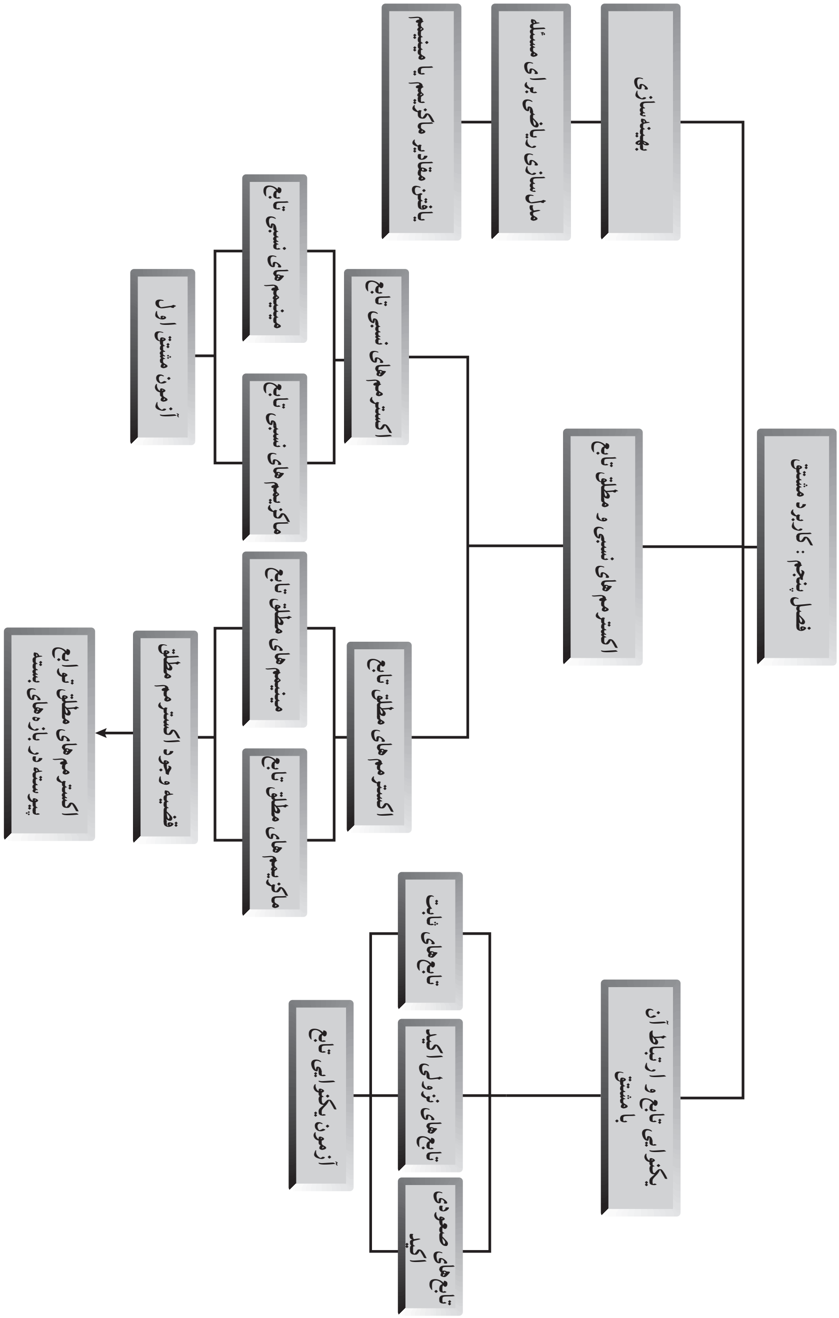
نگاه کلی به فصل

در فصل قبل دانش‌آموزان با یکی از مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال یعنی مشتق تابع آشنا شده‌اند؛ بنابراین بهتر است که کاربردهای آن را نیز ملاحظه کنند. در این فصل بعضی از کاربردهای مشتق تابع ارائه شده است.

کاربردهایی که در این فصل مطرح شده شامل بررسی یکنوایی تابع، یافتن نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع و همچنین حل مسائل بهینه‌سازی است. برای شروع مطلب ابتدا دانش‌آموز ضمن انجام فعالیت با مفهوم و اهمیت موضوع آشنا شده و در ادامه با استفاده از قضایا و آزمون‌های مطرح شده در کتاب، روش‌های مورد نظر را فرا می‌گیرد. سپس مثال‌های معلم برای کمک به ساخت دانش در ذهن فراگیران ارائه می‌شود و در ادامه دانش‌آموزان با انجام کار در کلاس مفاهیم را بهتر می‌آموزند. در پایان انجام تمرین‌ها در منزل به تثبیت یادگیری آنها کمک می‌کند.

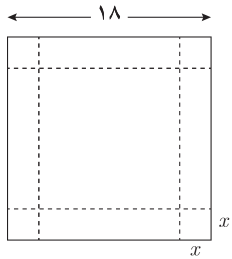
بهینه‌سازی، کاربردی‌ترین بخش مشتق تابع است و به همین دلیل در این فصل، یک درس مستقل به آن اختصاص یافته است. در این درس است که دانش‌آموزان می‌توانند برای مسائل مختلفی از دنیای واقعی، مدل‌های ریاضی ارائه کنند و به کمک روش‌هایی که در فصل ۴ و درس اول از فصل حاضر فرا گرفته‌اند، آنها را حل کنند. بهینه‌سازی درس دوم این فصل است. درس اول نیز به پیش‌نیازها، مفاهیم و روش‌هایی پرداخته است که در درس دوم مورد نیاز خواهند بود.

نقشه مفهومی فصل پنجم

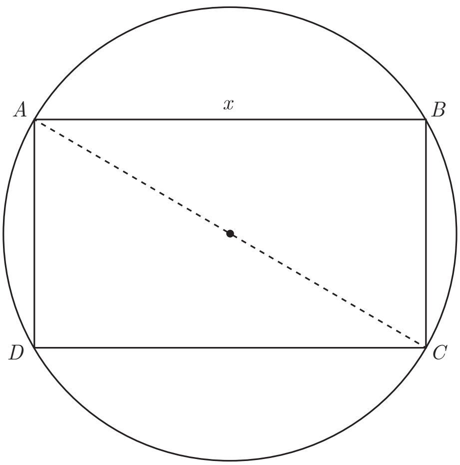


نمونه‌سؤال‌های ارزشیابی

۱ دو عدد پیدا کنید که مجموعشان ۶ و مجموع مربعات آنها کمترین مقدار ممکن باشد.



۲ از یک قطعه مقوای مربع شکل به ضلع ۱۸ سانتی‌متر می‌خواهیم یک قوطی در باز بسازیم. برای این منظور از چهار گوشه این مقوا چهار مربع بریده اطراف آن را تا می‌کنیم. مربع‌های اطراف را به ضلع چند سانتی‌متر انتخاب کنیم تا حجم قوطی حاصل بیشترین مقدار ممکن باشد؟



۳ در دایره‌ای به شعاع ۵ مستطیلی به مساحت ماکزیمم محاط کرده‌اند، اضلاع مستطیل را بیابید.

۴ ثابت کنید اگر حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی و مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم خواهد بود که دو عدد با هم برابر باشند.

۵ ثابت کنید اگر حاصل جمع دو عدد حقیقی و مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم خواهد بود که آن دو عدد با هم برابر باشند.

۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ را در بازه [۲ و ۲−] در نظر بگیرید و اکسترمم‌های مطلق آن را در این بازه بیابید.

۷ تابع $y = ax^2 + bx - 3$ داده شده‌است. ضریب‌های a و b را چنان بیابید که (۴− و ۱−) یک نقطه اکسترمم نسبی آن باشد.

۸ اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = ۲x^۳ - ۳mx^۲$ برابر ۸ باشد، مقدار m را بیابید.

۹ نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ در بازه $[-\frac{۳}{۲}$ و $۳]$ را بیابید.

۱۰ توپی به فضا پرتاب می‌شود. مسیر حرکت توپ به‌گونه‌ای است که در ثانیهٔ tام در ارتفاع $h(t) = ۳۰t - ۵t^۲$ متری قرار دارد.

الف) در ثانیهٔ چندم پس از پرتاب، توپ در بالاترین نقطه ممکن قرار دارد؟

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج توپ چقدر است؟

۱۱ تابع $f(x) = \frac{x}{۱ + x^۲}$ روی بازه‌ای مثل [a,b] صعودی اکید است بیشترین مقدار $b - a$ را محاسبه کنید.

۱۲ مشخص کنید تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$ در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

۱۳ مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که در نیم‌دایره‌ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره قرار دارد.

درس اول

اکسترمم‌های تابع

اهداف درس

❑ برقراری ارتباط بین علامت مشتق تابع و یکنوایی آن تابع در یک بازه
❑ آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم اکسترمم نسبی و مطلق تابع و همچنین توانایی آنان در محاسبه مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق برخی توابع
❑ توانا ساختن دانش‌آموزان جهت بررسی رفتار برخی توابع با استفاده از تعیین علامت مشتق آنها

روش تدریس

موضوعات نسبتاً متنوع و در عین حال مرتبطی در این درس مطرح شده‌اند که عبارتند از :
❑ یکنوایی تابع و ارتباط آن با علامت مشتق آن تابع
❑ اکسترمم‌های نسبی تابع
❑ نقاط بحرانی تابع
❑ اکسترمم‌های مطلق تابع

این موضوعات را می‌توان با ترتیب‌های مختلفی به دانش‌آموزان تدریس کرد. امّا ترتیب ارائه شده در این کتاب با بررسی فراوان انتخاب شده است. ابتدا دانش‌آموز با یکنوایی تابع و ارتباط آن با علامت مشتق تابع در یک بازه آشنا می‌شود. به کمک یکنوایی تابع می‌توان مفهوم نقطه‌های اکسترمم نسبی را بیان کرد. در مسیر معرفی اکسترمم‌های نسبی، مفهوم نقطهٔ بحرانی ضرورت پیدا می‌کند و الی آخر. توصیه می‌شود که تدریس مفاهیم با همین ترتیبی که در کتاب آمده است انجام گیرد.

یکنوایی تابع و ارتباط آن با علامت مشتق : دانش‌آموزان در فصل اول با مفهوم یکنوایی تابع و

در فصل چهارم با مشتق تابع آشنا شده‌اند. در اینجا ابتدا به ارتباط بین این دو موضوع پرداخته می‌شود. فعالیت آغازین درس در صفحه ۱۰۲ و ۱۰۳ تلاش دارد تا با یک نگرش استقرایی، دانش‌آموز را به ارتباط بین علامت مشتق تابع در یک بازه و صعودی یا نزولی بودن تابع در آن بازه سوق دهد. کار در کلاس پایین صفحهٔ ۱۰۳ نیز به این موضوع پرداخته است. در نهایت، آزمون یکنوایی تابع که انتظار می‌رود پس از انجام فعالیت و کار در کلاس مربوطه، دانش‌آموز خود به آن پی برده باشد، در صفحه ۱۰۴ ارائه گردیده است.

اکسترمم‌های نسبی تابع و نقاط بحرانی تابع : ابتدا اکسترمم‌های نسبی تابع به شکل غیر رسمی در انتهای صفحه ۱۰۴ معرفی شده است و پس از آن در صفحه ۱۰۵ تعاریف رسمی مربوطه ذکر شده‌اند. به‌صورت تعمدی، بحث نقطهٔ بحرانی پس از اکسترمم‌های نسبی تابع آمده است تا ضرورت تعریف چنین مفهومی برای دانش‌آموز احساس شود. در ادامه، قضیه فرما آمده است که به ارتباط بین نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع و نقاط بحرانی آن مربوط است. در نهایت با مقدمه‌چینی مناسب، آزمون مشتق اول ارائه شده است که در درس بعدی نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

اکسترمم‌های مطلق تابع : مفهوم اکسترمم‌های مطلق تابع در صفحه ۱۰۹ با یک مثال دنیای واقعی شروع شده است و سپس تعاریف رسمی آنها آمده‌اند. کار در کلاس صفحه ۱۱۰ کتاب یک جمع‌بندی و مرور نسبتاً جامع از بیشتر مفاهیم مطرح شده در این درس با تأکید بر بازنمایی هندسی می‌باشد.

آخرین مطلب این درس، به روش یافتن اکسترمم‌های مطلق توابع پیوسته در بازه‌های بسته پرداخته است که قضیه مربوطه و روش مورد نظر در صفحه (۱۱۱) ذکر شده است.

چند نکته در مورد تدریس درس اول از فصل پنجم کتاب

۱ در سراسر این درس، دو مورد جدول تغییرات تابع آمده است که اولاً در انواع ارزشیابی‌های مختلف نباید تأکید زیادی بر این گونه جدول‌ها باشد؛ به عبارت دیگر در کتاب، جدول تغییرات مربوط به یک تابع آمده است و سپس رفتار آن تابع به کمک این جدول توضیح داده شده است. به استثنای دو تمرین پایان درس، هیچ‌گاه از دانش‌آموز خواسته نشده است که برای تابع خاصی، جدول تغییرات را رسم نمایند. ثانیاً جدول‌های رفتار تابع که در متن درس آمده‌اند، مربوط به تابع‌های چند جمله‌ای درجه دوم و سوم هستند و به تابع‌های دیگر پرداخته نشده است. با توجه به اینکه خطوط مجانب تابع جزء سرفصل‌های کتاب ریاضی ۳ تجربی نیستند، در تدریس کلاسی و ارزشیابی‌ها به این نکته باید توجه ویژه نمود.

۲ در مفاهیمی که در این درس برای اولین بار دانش‌آموزان با آنها مواجه می‌شوند، تأکید بر بازنمایی هندسی است و در بیشتر موارد شروع بحث با رویکرد هندسی است و سپس به بازنمایی جبری پرداخته می‌شود که لازم است در تدریس این مفاهیم به این نکته هم توجه شود.

۳ همانند جاهای دیگر کتاب، سعی شده است از سؤالات باز پاسخ در قسمت‌های مختلف استفاده

شود. استفاده از اینگونه سؤال‌ها در جریان تدریس و همچنین در انواع ارزشیابی‌ها توصیه می‌شود.

پاسخ کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۰

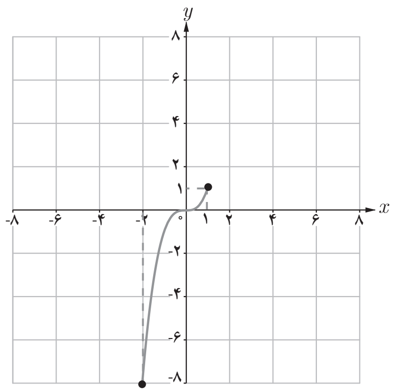
۱

طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
min مطلق	×	×	×	×	×	×	✓	×	×
max نسبی	×	×	✓	×	✓	×	×	×	×
min نسبی	×	✓	×	✓	✓	×	✓	×	×
نقطه بحرانی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓

۲

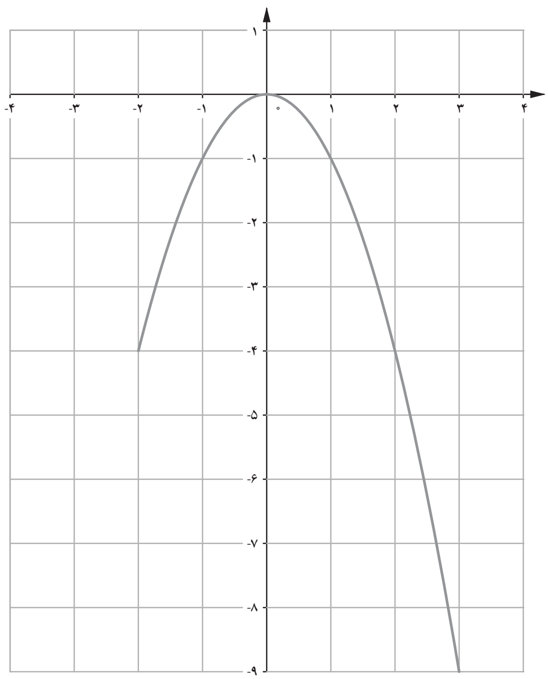
الف) $t(x) = x^{۳}\ , x \in [-۲,۱]$

الف) اکسترمم نسبی ندارد. در نقطه به طول ۱ ماکزیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۱ است. در نقطه به طول ۲− مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۸− است.



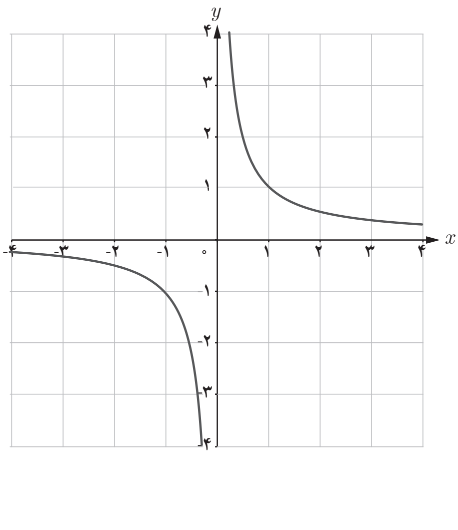
ب) $g(x) = -x^{۲} , x \in [-۲,۳]$

ماکزیمم نسبی و مطلق در مبدأ مختصات دارد که مقدار آنها صفر است. مینیمم مطلق در نقطه به طول ۳ و با مقدار ۹−



پ) $u(x) = \frac{۱}{x}$

اکسترمم مطلق و نسبی ندارد.



حل تمرین‌های صفحه ۱۱۲ کتاب درسی

۱

$f(x) = x^3 - 12x + 4 \qquad f'(x) = 3x^2 - 12 < 0 \Rightarrow x^2 < 4$

$\Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow x \in (-2\,,\,2)$ مشتق در این بازه منفی است.

بنابراین، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً نزولی است، عبارت است از $[-2,2]$.

۲

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\ ,\ g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

تابع g در بازهٔ $(-\infty\,,\,0]$ صعودی اکید و در بازهٔ $[0\,,\,+\infty)$ نزولی اکید است.

۳

الف) $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

$D_f = [-2,2]$

بنابراین، نقاط به طول‌های ۲− و ۲ و ۰، نقاط بحرانی f هستند.

ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

بنابراین نقاط بحرانی تابع عبارت‌اند از $(0\,,\,-4)$ و $(-2\,,\,0)$

پ) $h(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

چون $0 \in D_h$ و $0 \notin D_{h'}$ بنابراین نقطهٔ $(0\,,\,0)$ یک نقطهٔ بحرانی برای تابع h است.

۴

الف) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -3 \end{cases}$ (نقاط بحرانی تابع)

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۱۷	$\searrow$	-۱۵	$\nearrow$	$+\infty$
			max نسبی		min نسبی		

ب) $g(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹ \Rightarrow g'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰$

$\Rightarrow -x^۲ + x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$ (نقاط بحرانی)

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۱۶	$\nearrow$	۱۱	$\searrow$	$-\infty$
			min نسبی		max نسبی		

پ) $h(x) = -x^۳ - ۳x + ۲ \Rightarrow y'(x) = -۳x^۲ - ۳ < ۰ \Rightarrow$

تابع h همواره نزولی اکید است و بنابراین فاقد ماکزیمم و مینیمم نسبی است.

۵

الف) $f(x) = -۲x^۳ + ۹x^۲ - ۱۳ \Rightarrow f'(x) = -۶x^۲ + ۱۸x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰, -۱, ۲ \\ x = ۳ \notin [-۱, ۲] \end{cases}$

طول نقاط بحرانی تابع عبارت‌اند از صفر، ۱- و ۲.

x	-۱	۰	۲
$f(x)$	-۲	-۱۳	۷

با توجه به جدول، مقدار ماکزیمم مطلق تابع f در بازه [۲ و ۱-] برابر ۷ و مقدار مینیمم مطلق آن در این بازه برابر ۱۳- است.

ب) $g(x) = x^۳ + ۲x - ۵ \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۲ \neq ۰ \Rightarrow x = -۲, ۱$ طول نقاط بحرانی

x	-۲	۱
$g(x)$	-۱۷	-۲

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع g در بازهٔ [۱ , ۲−] به ترتیب برابر ۲− و ۱۷− می‌باشد.

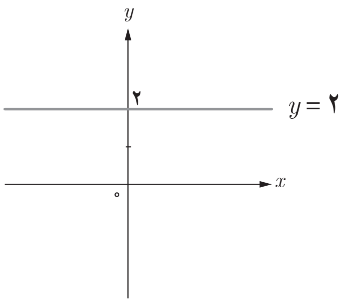
۶

$$f(x) = x^{۳} + bx^{۲} + d$$

$$(۲,۱) \in f \Rightarrow f(۲) = ۱ \Rightarrow ۸ + ۴b + d = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$$

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۲bx \xRightarrow{f'(۲) = ۰} ۱۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۳ \Rightarrow d = ۵$$

۷ بی‌شمار تابع با ویژگی خواسته شده می‌توان معرفی کرد؛ مثل تابع ثابت، تابع جزء صحیح، تابع علامت و ...



$f'(x) = ۰$

درس دوم

بهینه‌سازی

اهداف درس

- آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم بهینه‌سازی به عنوان یکی از کاربردهای مهم مشتق تابع
- تسلط دانش‌آموزان به مدل‌سازی ریاضی از پدیده‌ها و مسائل دنیای واقعی و حل آنها به کمک مشتق تابع

روش تدریس

بهینه‌سازی یکی از کاربردی‌ترین حوزه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال است. دانش‌آموزان بهینه‌سازی به کمک تابع درجه ۲ را در پایهٔ یازدهم فرا گرفته‌اند و به همین دلیل مثال آغازین درس نیز تابعی از درجه ۲ انتخاب شده است. حتی در شروع کار، مستقیماً تابع درجه ۲ را در حالت کلی در نظر نگرفته‌ایم بلکه فعالیت آغازین درس در صفحه ۱۱۳ یک مثال گسسته است که درک و تجربهٔ آن برای دانش‌آموز راحت است و پس از آن مثال‌های پیوسته عرضه شده است.

با توجه به اینکه دانش‌آموزان رشته تجربی، مشتق توابع مثلثاتی و معکوس مثلثاتی را در فصل قبل نیاموخته‌اند، بنابراین برای مثال‌های قابل ارائه در این درس دچار محدودیت بودیم. با این حال مثال‌های متنوعی از هندسه، فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد و معماری در این درس گنجانده شده است که تابع‌های مورد استفاده در آنها چند جمله‌ای، گویا یا رادیکالی هستند و دانش‌آموزان با مشتق آنها آشنا هستند.

با نگاه به برنامه‌درسی تلفیقی، به مفهوم حرکت با سرعت ثابت توجه ویژه‌ای شده است به طوری که در این زمینه هم مثال حل شده در درس وجود دارد، هم در بخش کار در کلاس به آن پرداخته شده است و هم در تمرین‌های پایان درس. توصیه می‌شود که در تدریس این درس و همچنین در ارزشیابی‌ها نیز فقط سؤال‌های محض و ریاضی مطرح نگردد بلکه از حوزه‌های مختلف مانند فیزیک، زیست‌شناسی،

باستان‌شناسی، اقتصاد و معماری نیز مسائل واقعی طرح گردد.

با توجه به اینکه مخاطب این کتاب دانش‌آموزان رشته تجربی هستند، این درس شامل پنج مثال حل شده است تا آنها ارتباط مناسبی با موضوع برقرار کنند. همچنین در کار در کلاس انتهای درس که سه مسئله از حوزه‌های اقتصاد، فیزیک و معماری طرح شده است، قسمت مدل‌سازی ریاضی این مسائل در کتاب آورده شده است و دانش‌آموز تنها لازم است با مشتق‌گیری از تابع مربوطه بتواند مقدار بهینهٔ کمیت خواسته شده را به‌دست آورد. در واقع، فقط در تمرین‌های پایان درس لازم است تمام کار حل مسئله از جمله بخش مدل‌سازی ریاضی آن را خود دانش‌آموزان انجام دهند.

تذکر : اگر در حل یک مسئله بهینه‌سازی، جواب آخر به شکل یک عدد رادیکالی به‌دست آید، توصیه می‌شود که حتماً مقدار تقریبی آن به صورت اعشاری برای دانش‌آموز محاسبه شود تا او حس مناسبی نسبت به بزرگی عدد داشته باشد.

حل کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۸

۱

$$S(r)=\pi r^{۲}+\frac{۲۰۰۰}{r} \qquad r>۰$$

$$S'(r)=۲\pi r-\frac{۲۰۰۰}{r^{۲}}=۰\Rightarrow \pi r^{۳}=۱۰۰۰\Rightarrow r=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}} \quad , \quad S(r)=۳۰۰\sqrt[۳]{\pi}$$

r	۰		$\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	۰	$+$	
S	$+\infty$	$\searrow$	$۳۰۰\sqrt[۳]{\pi}$	$\nearrow$	۰

پس اگر شعاع قاعده و همچنین ارتفاع استوانه هر دو برابر $r=h=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\simeq ۶/۸۳$ سانتی‌متر در نظر گرفته شوند، کمترین مقدار فلز مصرف خواهد شد.

۲

$$C(v)=\frac{۸۰۰۰۰۰}{v}+۳۲۰v\Rightarrow C'(v)=-\frac{۸۰۰۰۰۰}{v^{۲}}+۳۲۰=۰$$

$$\Rightarrow v^{۲}=\frac{۱۰۰۰۰}{۴}\Rightarrow v=\frac{۱۰۰}{۲}=۵۰ \qquad C(۵۰)=۳۲۰۰۰$$

v	۰		۵۰		$+\infty$
C'		−	۰	+	
C	$+\infty$	↘	۳۲۰۰۰	↗	$+\infty$

بنابراین، اگر قطار با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، هزینهٔ آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن خواهد بود.

۳
$$x-y=۱۰ \Rightarrow y=x-۱۰$$
$$P=xy=x(x-۱۰)=x^{۲}-۱۰x \quad p'(x)=۲x-۱۰=۰ \qquad x=۵\ ,\ y=-۵$$

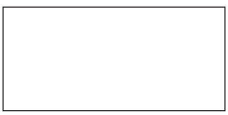
۴
$$S(r)=-(\frac{\pi+۴}{۲})r^{۲}+\frac{۹}{۲}r \qquad S'(r)=-(\pi+۴)r+\frac{۹}{۲}=۰$$
$$\Rightarrow r=\frac{۹}{۲(\pi+۴)} \qquad S(r)=\frac{۸۱}{۸(\pi+۴)}$$

r	۰		$\frac{۹}{۲(\pi+۴)}$		$\frac{۹}{۲(\pi+۲)}$
$S'(r)$		+	۰	−	
$S(r)$	۰	↗	$\frac{۸۱}{۸(\pi+۴)}$	↘	$\frac{۸۱\pi}{۸(\pi+۲)^{۲}}$

پس اگر r برابر $\frac{۹}{۲(\pi+۴)} \simeq ۳۲/۱۴$ سانتی‌متر در نظر گرفته شود، این پنجره بیشترین نوردهی را خواهد داشت.

حل تمرین‌های صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

x



۱ الف)

$y=\frac{۱۰۰۰۰}{x}$ (واحد بر حسب میلیون تومان است)

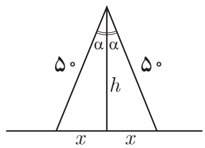
$$C_{(x)}=۲x\times۲+۲\times\frac{۱۰۰۰۰}{x}\times۸ \Rightarrow C_{(x)}=۴x+\frac{۱۶۰۰۰۰}{x}$$

ب) $C'_{(x)} = ۴ - \frac{۱۶۰۰۰۰}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴۰۰۰۰ \Rightarrow x = ۲۰۰ \Rightarrow y = \frac{۱۰۰۰۰}{۲۰۰} = ۵۰$

x	۰		۲۰۰	
$C'(x)$		$-$	۰	$+$
$C(x)$		$\searrow$	۱۶۰۰	$\nearrow$

بنابراین اگر طول دیوارهای شمالی و جنوبی ۲۰۰ و عرض آن برابر ۵۰ متر باشد، هزینه دیوارکشی، حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

۲ الف)



$h = \sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}$

$S_{(x)} = x\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲} \Rightarrow S'_{(x)} = \sqrt{۲۵۰۰ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}}$

$s'(x) = ۰ \Rightarrow ۲۵۰۰ - x^۲ = x^۲$

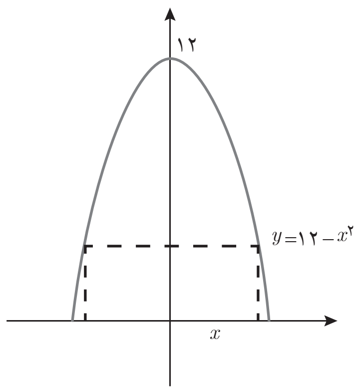
$x^۲ = \frac{۲۵۰۰}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵۰}{\sqrt{۲}} \Rightarrow S(\frac{۵۰}{\sqrt{۲}}) = ۱۲۵۰$

ب) از کلاس دهم می‌دانیم $S = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times \sin\alpha$ ، مقدار S زمانی ماکزیمم می‌شود که مقدار $\sin\alpha$ برابر ۱ باشد پس $S_{\max} = \frac{۱}{۲} \times ۵۰^۲ = ۱۲۵۰$

۳ الف)

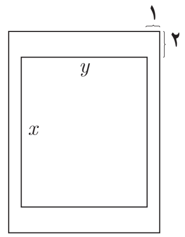
$S = ۲x(۱۲ - x^۲) = ۲۴x - ۲x^۳$

$S' = ۲۴ - ۶x^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases}$



x	۰		۲		$۲\sqrt{۳}$
S'		$+$	۰	$-$	
S	۰	$\nearrow$	۳۲ max	$\searrow$	۰

پس طول مستطیل باید $۲x = ۴$ و عرض آن برابر $y = ۱۲ - ۲^۲ = ۸$ باشد.



۴

$xy = ۳۲$

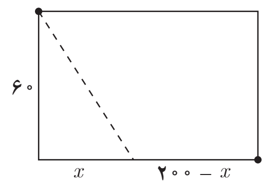
$$S = (y+۲)(x+۴) = (\frac{۳۲}{x}+۲)(x+۴) = ۴۰+\frac{۱۲۸}{x}+۲x$$

$$S'_{(x)} = -\frac{۱۲۸}{x^۲}+۲=۰ \Rightarrow x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۸ \quad \text{و} \quad y = ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۴ = ۱۲ \\ y+۲ = ۶ \end{cases}$$ ابعاد صفحه :

پس اگر طول صفحه برابر $x + ۴ = ۱۲$ سانتی‌متر و عرض آن $y + ۲ = ۶$ سانتی‌متر($S = ۷۲$) در نظر گرفته شود، مقدار کاغذ مصرفی مینیمم می‌شود.

۵



$$t(x) = \frac{۲۰۰-x}{۳}+\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}{۲}$$

$$t'(x) = -\frac{۱}{۳}+\frac{x}{۲\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳x = ۲\sqrt{۳۶۰۰+x^۲} \Rightarrow x = ۲۴\sqrt{۵} \simeq ۵۳/۶۷(\text{m})$$

x	۰		$۲۴\sqrt{۵}$		۲۰۰
t'(x)		−	۰	+	
t(x)	$۹۶\frac{۲}{۳}$	↘	$\frac{۲۰۰}{۳}+۱۰\sqrt{۵}$	↗	$\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۳۶۰۰} \simeq ۱۰۴/۴$

پس اگر x تقریباً ۵۳/۶۷ متر در نظر گرفته شود، آروین در کمترین زمان ممکن به ایستگاه خواهد رسید.

فصل ۶

هندسه

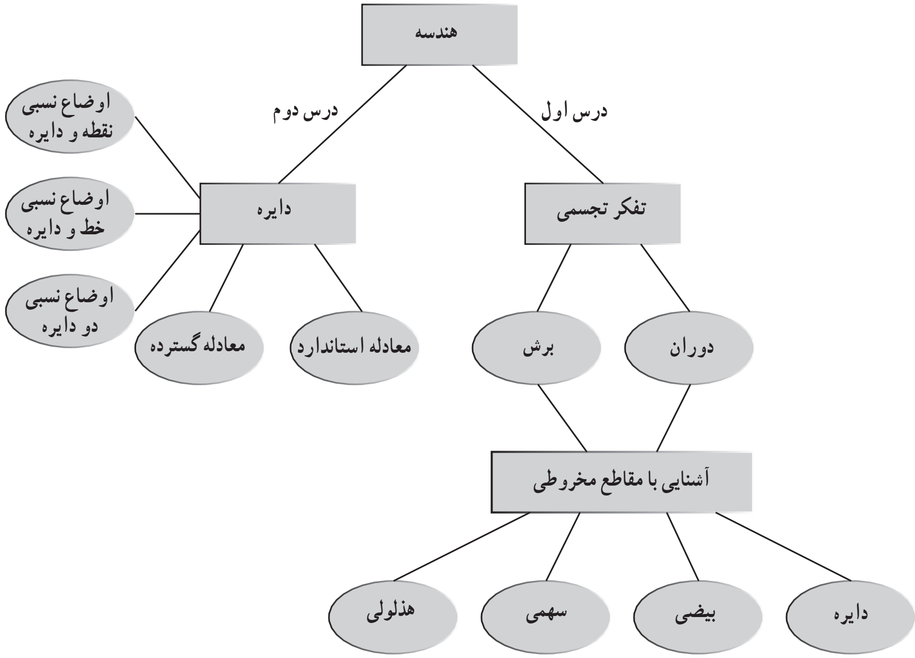
نگاه کلی به فصل

این فصل از ۲ درس با عناوین «تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی» و «دایره» تشکیل شده است. هندسه و تفکر هندسی به عنوان بخش مهمی از ریاضیات و به مثابهٔ یکی از مفاهیم اصلی در برنامه درسی ریاضی از پایه اول تا پایه دوازدهم تحصیلی در دو رشتهٔ ریاضی و تجربی مورد توجه بوده و به‌طور مستمر دنبال شده است.

در این کتاب نیز مانند کتاب‌های سال گذشته در قالب یک فصل به هندسه پرداخته شده است. در درس اول مفهوم تفکر تجسمی مورد توجه قرار گرفته است و سعی بر آن است که با فراهم آوردن موقعیت‌های مختلف، ضرورت تقویت تفکر تجسمی و موارد کاربرد آن در زندگی روزمره برای دانش‌آموزان روشن شود. تفکر تجسمی دارای مؤلفه‌های متفاوتی است که در درس به‌طور صریح و ضمنی به آنها اشاره شده است. اما از آنجا که دوران و برش مبنای مناسبی برای ورود به بحث مقاطع مخروطی فراهم می‌آورد، لذا بیشتر از سایر مؤلفه‌ها بدان توجه شده است.

دقت شود از آنجا که سعی شده است حداکثر هماهنگی بین دو کتاب ریاضی دوازدهم تجربی و کتاب هندسه دوازدهم ریاضی برقرار باشد، لذا در این کتاب نیز از بین مقاطع مخروطی دایره، بیضی، سهمی و هذلولی، تنها دایره در درس دوم به شکل مفصل تشریح و معادله آن بررسی شده است. بنابراین اشاره به معادله بیضی، سهمی و هذلولی جزو اهداف این کتاب نیست. به عبارت دقیق‌تر در درس بیضی، تنها به تعریف و آشنایی با بیضی بسنده شده است. انواع مختلف سهمی تنها در قسمت خواندنی معرفی شده است و لذا در ارزشیابی‌ها لحاظ نخواهد شد و هذلولی در مختصرترین شکل ممکن معرفی شده است. بنابراین نقشه مفهومی این فصل در حالت کلی بدین شکل قابل ترسیم است.

نقشه مفهومی فصل ۶



تصویر عنوانی

تصویر صفحهٔ عنوانی این فصل به معرفی شهر گور که اعراب آن را جور تلفظ می‌کنند، اختصاص دارد. این شهر اولین شهر دایره‌ای در ایران و یکی از نخستین شهرهای دایره‌ای در جهان است که در سه کیلومتری فیروزآباد فارس قرار دارد. قدمت این شهر به دورهٔ هخامنشیان می‌رسد. طرح و الگوی این شهر، دایره‌ای به قطر دو کیلومتر است که اکنون متروک مانده و مناره‌ای با ارتفاع حدود ۵ متر از آن باقی است. به گزارش مورخان، گور، شهری بزرگ با حصاری محکم بوده است؛ به‌طوری‌که اسکندر مقدونی هرچه کرد نتوانست آن را بگشاید. پس دستور داد که مسیر رودخانه‌ای را به سمت شهر بگردانند و آن را در آب غرق کنند.

درس اول

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

اهداف درس

- ❑ آشنایی کلی با مفهوم تفکر تجسمی و درک ضرورت و اهمیت آن در زندگی روزمره
- ❑ توانایی تجسم شکل حاصل از دوران اشکال هندسی حول یک محور
- ❑ آشنایی با مفهوم سطح مقطع
- ❑ توانایی تجسم سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه با یک جسم هندسی
- ❑ توانایی تجسم سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه در حالت‌های مختلف با یک سطح مخروطی
- ❑ آشنایی با تعریف بیضی و مفاهیم فاصله کانونی، قطر بزرگ، قطر کوچک، بیضی قائم و افقی و خروج از مرکز
- ❑ آشنایی با ویژگی بیضی و روابط بین قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصله کانونی

بدین ترتیب مواردی از قبیل موارد زیر جزء اهداف این کتاب نمی‌باشد.

ــ تعریف دقیق سهمی و هذلولی

ــ معرفی بیضی، معادلهٔ هذلولی و حالت‌های مختلف معادلهٔ سهمی

ــ تعیین سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با اجسام هندسی پیچیده

ــ معرفی حالت‌های خاص (تباهیده) در برخورد یک صفحه با سطح مخروطی

روش تدریس

هدف این درس، آشنایی کلی با مفهوم تفکر تجسمی است. لذا تلاش شده است در شروع درس موقعیت‌هایی به دانش‌آموز پیشنهاد شود تا فرصتی برای فکر کردن و تجسم تصاویر در ذهن داشته باشد. بدین ترتیب رسیدن به پاسخ دقیق و روشن برای دو موقعیت آغازین فصل مدنظر نمی‌باشد. می‌توانید

مانند نمونهٔ زیر فرصت‌های دیگری را به دانش‌آموز پیشنهاد کنید که در آن برای لحظاتی، تصاویر مختلف در ذهن او پردازش شوند.

چهرهٔ پدربزرگ یا مادربزرگ خود را در ذهن تصور کنید. چه ویژگی‌هایی دارد؟ اگر بیست سال جوان‌تر بود به چه شکل بود؟

۱ همان‌طور که پیش از این اشاره شد تفکر تجسمی مفهوم وسیعی دارد که در این درس قصد نداریم به همه ابعاد آن دست پیدا کنیم. لذا تنها به دو مؤلفهٔ برش و دوران به عنوان مفاهیم زیربنایی برای ورود به بحث مقاطع مخروطی خواهیم پرداخت.

۲ دقت داشته باشید که در بحث دوران ممکن است جسم هندسی حاصل توپر یا توخالی باشد. به همین نسبت، سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با جسم هندسی می‌تواند نقاط درونی یک شکل هندسی را شامل باشد یا نباشد. برای مثال در کار در کلاس صفحه ۱۲۴ سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعده مکعب مستطیل توخالی با قاعده مربع، **یک مربع** است ولی سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه موازی با قاعدهٔ یک استوانه توپر یک **دایره و تمام نقاط داخلی آن** دایره است.

۳ در این درس استفاده از نرم‌افزارهای هندسی نظیر جئوجبرا می‌تواند نقش مناسبی در یادگیری بهتر و مؤثرتر دانش‌آموزان داشته باشد. درصورتی که امکان استفاده از نرم‌افزار در کلاس درس مهیا نباشد، می‌توان به کمک خود دانش‌آموزان و ساخت دست‌سازه‌های هندسی به تفهیم بهتر مطلب کمک کرد.

لینک زیر می‌تواند در نمایش مناسب مقاطع مخروطی استفاده شود.

http: //www.geogebra.org/m/dfvnwrkp

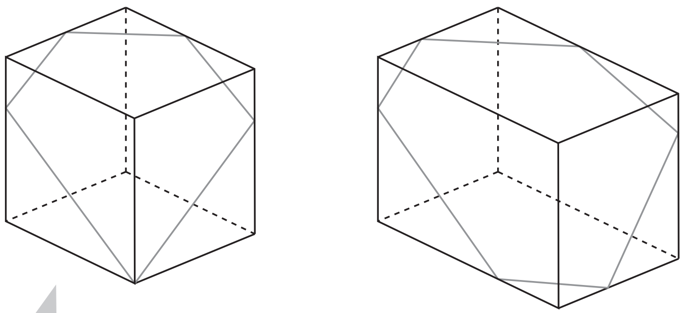
۴ در درس بیضی دقت شود که معرفی معادلهٔ بیضی جزء اهداف کتاب نیست. ضمناً توجه داشته باشید که دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم تجربی با مفهوم «مکان هندسی» آشنا نیستند. بنابراین سعی شده است مفهوم

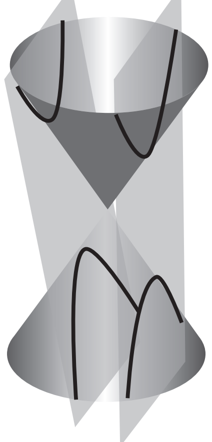
بیضی و همین‌طور مفهوم دایره در درس بعد، بدون اشاره به مفهوم مکان هندسی بیان شود. لذا کافی است دانش‌آموزان به‌طور شهودی به این فهم دست پیدا کنند که مجموع فاصله هر نقطه روی بیضی از دو نقطه ثابت موسوم به کانون‌های بیضی برابر با مقداری ثابت است (l) و از طرف دیگر اگر نقطه‌ای دارای این ویژگی باشد به اجبار روی بیضی واقع خواهد شد. چرا که اگر نقطه داخل بیضی باشد مجموع فاصله‌های آن از نقاط کانونی کمتر از مقدار ثابت l و اگر نقطه بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از دو نقطه کانونی بیشتر از مقدار ثابت l است.

۵ در فعالیت صفحه ۱۲۹ دقت داشته باشید که مرکز دایره، فاصله کانونی را نصف می‌کند ولی این مطلب که مرکز دایره قطر بزرگ و قطر کوچک را هم نصف می‌کند، نیاز به اثبات دارد که در این فعالیت بدان پرداخته می‌شود.

۶ مطالبی که در خواندنی آمده‌اند در ارزشیابی‌ها لحاظ نخواهند شد و طرح سؤال از آن مجاز نیست.

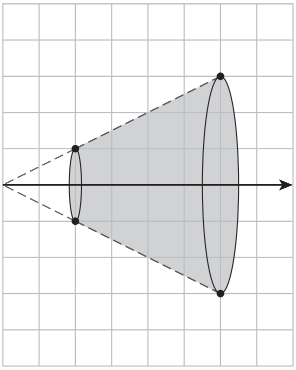
۷ در برخورد یک صفحه با مکعب مستطیل حالت‌هایی که مطابق شکل زیر، جواب، پنج ضلعی یا شش‌ضلعی است جزء اهداف این کتاب نیست. هدف از طرح مبحث برش، تنها زمینه‌سازی برای ورود به بحث مقاطع مخروطی است.





۸ دقت داشته باشید برای تشکیل هذلولی، لازم نیست که صفحه الزاماً موازای با محور سطح مخروطی آن را قطع کند. بلکه فقط کافی است طوری با سطح مخروطی برخورد کند که آن را هم در نیمهٔ بالایی و هم در نیمهٔ پایینی قطع کند.

حل تمرین‌های صفحه ۱۳۲ کتاب درسی



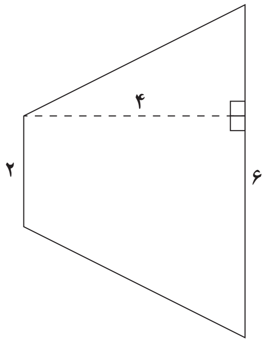
۱ پاره‌خط داده شده را حول محور دوران می‌دهیم. شکل حاصل بدین شکل خواهد بود :

الف) با ادامه دادن پاره‌خط داده شده مشخص می‌شود که شکل حاصل بخشی از یک مخروط است (مخروط ناقص) لذا حجم مخروط ناقص عبارت است از :

حجم مخروط رنگ نشده − حجم مخروط کامل = حجم قسمت رنگی (مخروط ناقص)

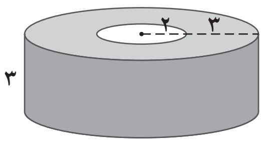
$$= \frac{۱}{۳}\pi(۳)^{۲} \times ۶ - \frac{۱}{۳}\pi(۱)^{۲} \times ۲$$

$$= ۱۸\pi - \frac{۲}{۳}\pi = \frac{۵۲}{۳}\pi$$



ب) صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، جسم را به دو نیمه مساوی تقسیم می‌کند و سطح مقطع به شکل ذوزنقه خواهد بود.

$$\text{مساحت ذوزنقه} : \frac{(۲+۶)\times ۴}{۲} = ۱۶\text{cm}^{۲}$$



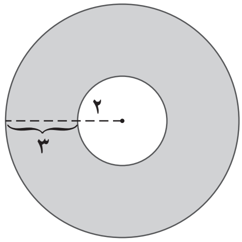
۲ الف) مربع را حول محور دوران می‌دهیم. شکل حاصل بدین شکل است.

حجم استوانه کوچک‌تر − حجم استوانه بزرگ‌تر = حجم شکل حاصل

$$= \pi(۵)^{۲} \times ۳ - \pi(۲)^{۲} \times ۳$$

$$= ۷۵\pi - ۱۲\pi = ۶۳\pi$$

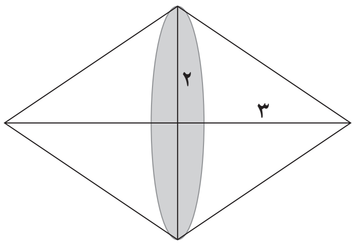
ب) سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ای موازی با قاعده استوانه یک دایره است. لذا در این شکل سطح مقطع به این شکل است :



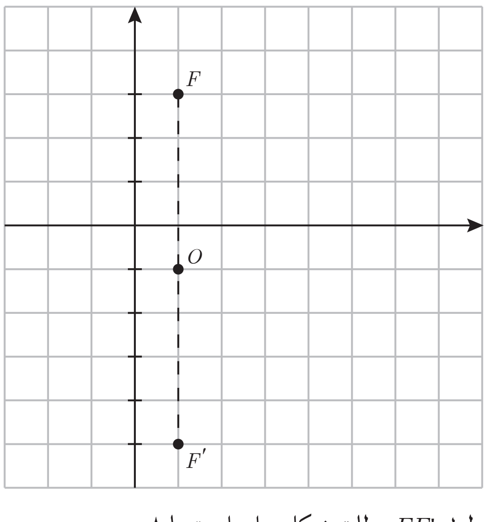
۳ شکل حاصل دو مخروط هم‌اندازه خواهد بود که از قاعده به هم متصل هستند. بنابراین حجم آن برابر است با :

$$\text{حجم شکل} = ۲ \times (\text{حجم یک مخروط})$$

$$= ۲\times\frac{۱}{۳}\pi(۲)^{۲}\times ۳ = ۸\pi$$



۴ نقاط کانونی را روی دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم. مطابق شکل و با توجه به مختصات داده شده، این بیضی، یک بیضی قائم است.



الف) فاصله کانونی یعنی طول FF' مطابق شکل برابر است با ۸.

مرکز بیضی وسط فاصله کانونی است و لذا مختصات آن برابر با (۱− و ۱). معادلهٔ قطر بزرگ بیضی

$x=۱$، و معادله قطر کوچک $y=-۱$ است.

ب) می‌دانیم

$$b^۲=a^۲-c^۲$$
$$=۶^۲-۴^۲$$
$$=۳۶-۱۶=۲۰ \Rightarrow b=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

بنابراین اندازهٔ قطر کوچک برابر است با $۴\sqrt{۵}$ و اندازهٔ خروج از مرکز با فرمول $e=\frac{c}{a}$ برابر است با $\frac{۴}{۶}$ و لذا $e=\frac{۲}{۳}$

۵ الف) $b=۳ \Leftarrow$ طول قطر کوچک $=۶$؛

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow c=\frac{۴}{۵}a$$

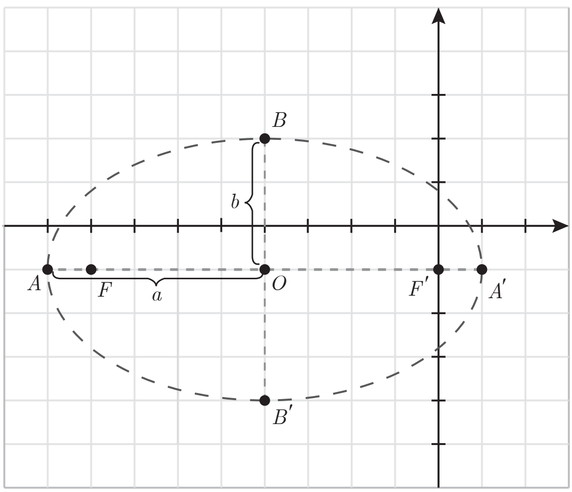
از طرفی می‌دانیم $a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=۳^۲+(\frac{۴}{۵}a)^۲ \Rightarrow a^۲=۹+\frac{۱۶}{۲۵}a^۲$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۲۵}a^۲=۹ \Rightarrow a^۲=۲۵ \Rightarrow a=۵\,,\; c=\frac{۴}{۵}\times ۵=۴$$

$\Rightarrow$ فاصله کانونی $=۲c=۸$ و قطر کانونی $=۲a=۱۰$

ب) مطابق شکل رسم شده :

$A(-۹,-۱)\,,A'(۱,-۱)\,;\,B(-۴,۲)\,,B'(-۴,-۴)\,;\,F(-۸,-۱)\,,F'(۰,-۱)$



درس دوم

دایره

اهداف درس

❑ آشنایی با معادلهٔ استاندارد و معادلهٔ گسترده دایره

❑ توانایی تشخیص مرکز دایره و محاسبهٔ اندازهٔ شعاع دایره در هر یک از معادله‌های استاندارد و گستردهٔ دایره

❑ آشنایی شهودی با اوضاع نسبی نقطه و دایره و سپس توانایی ارائهٔ استدلال تحلیلی برای تشخیص حالت‌های مختلف

❑ آشنایی شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره و سپس توانایی ارائهٔ استدلال تحلیلی برای تشخیص حالت‌های مختلف

❑ آشنایی شهودی با اوضاع نسبی دو دایره و سپس توانایی ارائهٔ استدلال تحلیلی برای تشخیص حالت‌های مختلف

بدین ترتیب موارد زیر جزء اهداف این کتاب نمی‌باشد.

❑ حل نامعادله‌های مربوط به دایره و تعیین مجموعه جواب آنها

❑ طرح سؤالاتی که در آن $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ مربوط به یک دایره نمی‌باشد و $a^۲ + b^۲ \leq ۴c$ است.

❑ طرح سؤالاتی که در آن دانش‌آموز لازم است به حل دستگاه ۳ معادله و ۳ مجهولی بپردازد.

روش تدریس

۱ در این درس هم استفاده از نرم‌افزارهای هندسی نظیر جئوجبرا می‌تواند به فهم بهتر مطلب کمک

شایانی داشته باشد. استفاده از لینک زیر برای آشنایی بیشتر با دایره و معادلهٔ آن توصیه می‌شود :

http: //www.geogebra.org/m/geh7bga6

۲ باز هم دقت شود که دانش‌آموزان در این پایه با مفهوم مکان هندسی آشنا نیستند. لذا سعی شده است مفهوم دایره و ویژگی نقاط روی دایره بدون استفاده از مفهوم مکان هندسی آموزش داده شود.

۳ در بررسی اوضاع نسبی «نقطه و دایره»، «خط و دایره» و «دو دایره» حتماً آموزش را ابتدا به شیوهٔ شهودی آغاز کنید و سعی کنید فضایی ایجاد کنید که در آن خود دانش‌آموزان روش تحلیلی را حدس بزنند و برای آن اقدام کنند.

۴ در کتاب درسی قدیم سؤالاتی مطرح می‌شد که در معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، معادلهٔ داده شده معادلهٔ یک دایره نبود. به عبارتی $a^۲ + b^۲ \leq ۴c$ بود و معادلهٔ داده شده مربوط به یک نقطه بود یا دایره‌ای را مشخص نمی‌کرد. دقت شود که به رسم عادت سؤالات این‌چنینی در ارزشیابی‌ها استفاده نشود.

۵ در بررسی اوضاع نسبی دو دایره می‌توان با قطع دادن دو دایره در دستگاه مختصات وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کرد و علاوه بر آن مختصات نقاط تقاطع دو دایره را در صورت وجود مشخص کرد. این مفهوم جزء اهداف این کتاب نیست ولی استفاده از آن برای دانش‌آموزان با توانایی بالای ریاضی به تشخیص معلم واگذار می‌شود.

۶ دقت داشته باشید که دانش‌آموزان در این پایه، با حل دستگاه ۳ معادله و ۳ مجهولی آشنایی ندارند. بنابراین از طرح سؤالاتی که نیاز به این توانایی دارند، اجتناب کنید. برای دانش‌آموزان با توانایی بالای ریاضی طرح چنین سؤالاتی به تشخیص معلم واگذار می‌شود.

حل تمرین‌های صفحه ۱۴۲ کتاب درسی

۱ الف) داریم : $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow a=-۶ \,, b=۲ \,, c=۱$

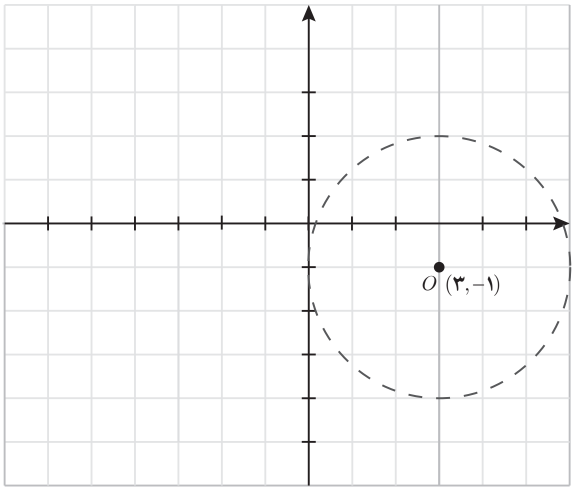
$\Rightarrow$ مرکز دایره: $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (۳, -۱)\,, r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲ + ۲^۲ - ۴(۱)} = ۳$

محل تقاطع با محور x: $y = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = (-۶)^۲ - ۴(۱)(۱) = ۳۲$

$$\Rightarrow x = \frac{+۶ \mp \sqrt{۳۲}}{۲} = \frac{۶ \mp ۴\sqrt{۲}}{۲} \begin{cases} ۵/۸ \rightarrow (۵/۸, ۰) \\ ۰/۱۷ \rightarrow (۰/۱۷, ۰) \end{cases}$$

محل برخورد با محور y: $x = ۰ \rightarrow y^۲ + ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow (y+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow y = -۱ \rightarrow (۰, -۱)$

محل تقاطع با محور y



ب) $x^{۲} + (y+۳)^{۲} = ۴$

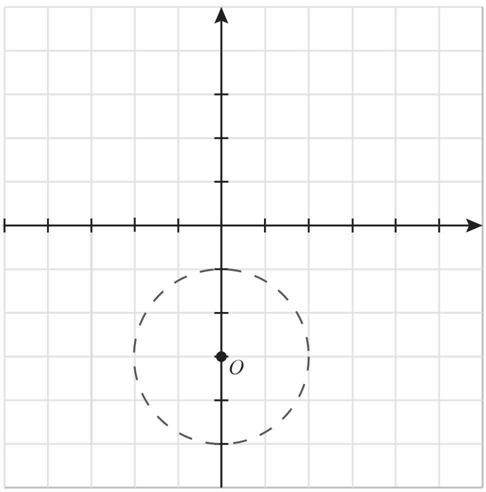
$\Rightarrow$ مرکز دایره: $(۰,-۳)$, شعاع دایره: $r=۲$

محل برخورد با محور x: $y=۰ \Rightarrow x^{۲}+۹=۴ \Rightarrow x^{۲}=-۵ \Rightarrow$ با محور x نقطه برخورد ندارد

محل برخورد با محور y: $x=۰ \Rightarrow (y+۳)^{۲}=۴ \Rightarrow y+۳=\mp ۲ \rightarrow y=-۱,\ y=-۵$

بنابراین نقاط برخورد با محور y عبارت‌اند از $(۰,-۱)$ و $(۰,-۵)$

شکل دایره را به کمک مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره رسم می‌کنیم. مطابق شکل، دایره با محور طول نقطهٔ برخورد ندارد و نقاط برخورد با محور y با آنچه محاسبه شد مطابق است.



۲ الف) اندازه شعاع دایره برابر است با : $\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}$ پس $r=\sqrt{۵}$ ⇐ معادلهٔ دایره :

$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۵$

ب) اندازهٔ شعاع برابر است با $\sqrt{(۲+۳)^۲+(۳+۹)^۲}$ پس $r=۱۳$ ⇐ معادلهٔ دایره :

$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶۹$

پ) مرکز دایره وسط پاره‌خطی است که $(۰,۳)$ را به $(-۴,-۱)$ وصل می‌کند. پس $O(-۲,۱)$ و اندازهٔ شعاع نصف طول این پاره‌خط است ⇐ $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+(-۱-۳)^۲}$ به عبارتی $r=۲\sqrt{۲}$ پس معادلهٔ دایره : $(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۸$

دقت داشته باشید که نوشتن معادلهٔ گستردهٔ دایره به جای معادلهٔ استاندارد نیز صحیح است.

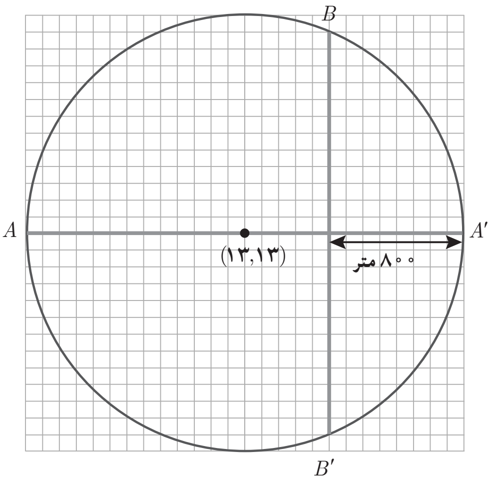
۳ مختصات مرکز دایره برابر است با $(۱,-۲)$ و شعاع دایره برابر است با : $\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(۴)^۲-۴(۱)}=۲$

ـ فاصله نقطهٔ $(۱,۰)$ از مرکز دایره برابر است با $\sqrt{(۱-۱)^۲+(۰+۲)^۲}=۲$ از آنجا که این مقدار برابر شعاع است نقطه $(۱,۰)$ روی دایره است.

ـ فاصله نقطهٔ $(۰,-۱)$ از مرکز دایره برابر است با $\sqrt{(۰-۱)^۲+(-۱+۲)^۲}=\sqrt{۲}$ این مقدار از اندازهٔ شعاع کمتر است پس نقطه $(۰,-۱)$ درون دایره است.

ـ فاصله نقطهٔ $(-۱,-۲)$ از مرکز دایره برابر است با $\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۲+۲)^۲}=۲$ پس این نقطه هم روی دایره است.

ـ فاصله نقطهٔ $(۰,۰)$ از مرکز دایره برابر است با $\sqrt{(۰-۱)^۲+(۰+۲)^۲}=\sqrt{۵}$ این مقدار از شعاع دایره بزرگ‌تر است. پس این نقطه بیرون دایره است.



۴ شعاع دایرهٔ ۱۳۰۰ و بنابراین ۱۳ واحد است. پس

الف) معادلهٔ دایره عبارت است از :

$(x-۱۳)^۲+(y-۱۳)^۲=۱۶۹$

ب) اگر مختصات نقاط برخورد مسیرها را با دایره A، A'، B و B' بنامیم مطابق شکل داریم : $A'(۲۶,۱۳)$ و $A(۰,۱۳)$

معادله خط گذرنده از نقاط B و B' برابر است با $x=۱۸$. با جایگزین کردن این مقدار در معادلهٔ دایره داریم :

$$(۱۸-۱۳)^۲+(y-۱۳)^۲=۱۶۹ \Rightarrow (y-۱۳)^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \Rightarrow y-۱۳=\mp ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} y=۲۵ \\ y=۱ \end{cases}$$

پس مختصات B و B' به ترتیب عبارت‌اند از : (۱۸,۲۵) و (۱۸,۱)

پ) در نقطه (۱۸,۱۳)

ت) شعاع دایره برابر ۱۳ و فاصلهٔ مرکز دایره از محل تقاطع دو مسیر ۵ واحد است. از رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ فاصلهٔ نقطه B از محل تقاطع ۱۲ واحد است و طول مسیر BB' بدین ترتیب ۲۴۰۰ متر است.

۵ مختصات مرکز دایره عبارت است از (۱-,۱-) و شعاع آن از رابطه $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ برابر است با $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۴(-۸)}=\sqrt{۱۰}$ $\Leftarrow$ فرم استاندارد این دایره به این شکل است :

$(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۱۰$

۶ کافی است مختصات مرکز دایره را مشخص کرده و سپس فاصلهٔ مرکز دایره را از خط داده شده محاسبه کنیم و اندازهٔ آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم.

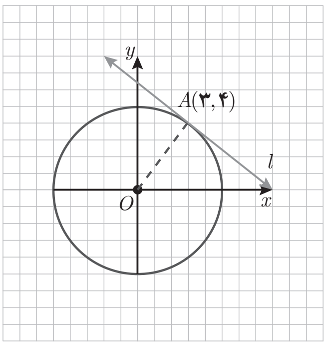
الف) مختصات مرکز دایره (۲,۲) است و فاصله این نقطه از خط $۶x+۴y=۰$ برابر است با :

$$d=\frac{|۶(۲)+۴(۲)+۰|}{\sqrt{۶^۲+۴^۲}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۵۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}$$

از طرفی اندازهٔ شعاع برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+(-۴)^۲-۴(۷)}=۱$ پس داریم $d>r$ و بنابراین خط داده شده بیرون دایره است و با آن نقطه تقاطعی ندارد.

ب) مختصات دایره مرکز داده شده (۰,۰) و شعاع آن $\sqrt{۲}$ است. فاصله نقطه (۰,۰) از خط $-x-y-۲=۰$ برابر است با $d=\frac{|۰+۰-۲|}{\sqrt{(-۱)^۲+(-۱)^۲}}=\sqrt{۲}$ از آنجا که $d=r$ پس خط داده شده بر دایره مماس است.

۷ برای داشتن معادلهٔ خط مماس مختصات یک نقطه از آن و شیب آن لازم است. از آنجا که شعاع در محل تماس بر خط مماس عمود است داریم :



$$OA \text{ شیب خط } =\frac{۴}{۳} \Rightarrow l \text{ شیب خط } =-\frac{۳}{۴}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس عبارت است از :

$$y-۴=-\frac{۳}{۴}(x-۳) \Rightarrow ۴y+۳x=۲۵$$

۸ برای نوشتن معادلهٔ دایره، اندازهٔ شعاع لازم است که برابر است با اندازهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره :

$$d=\frac{|۳(۰)-۴(۳)-۳|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳ \Rightarrow r=۳ \Rightarrow$$ معادلهٔ دایره: $(x-۰)^۲+(y-۳)^۲=۳^۲$

$$\Rightarrow x^۲+(y-۳)^۲=۹$$

۹

الف) مرکز دایره : $O(+۱,-۲)$, شعاع دایره : $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۴^۲-۴(۴)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴}=۱$

مرکز دایره : $O'(-۱,۲)$, شعاع دایره : $r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۲)^۲+(-۴)^۲-۴(-۹)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۶}=\sqrt{۱۴}$

از طرفی $OO'=\sqrt{(۱-(-۱))^۲+(-۲-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰} \Rightarrow r-r'<OO'<r+r'$

و دو دایره متقاطع هستند.

ب) مرکز دایره : $O(۲,-۳)$, شعاع دایره : $r=\sqrt{۷}$

مرکز دایره : $O'(۰,۵)$, شعاع دایره : $r'=\sqrt{۵}$

از طرفی $OO'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۳-۵)^۲}=\sqrt{۶۸} \Rightarrow OO'>r+r'$ بنابراین دو دایره بیرون از هم هستند.

۱۰ در دایرهٔ داده شده مرکز دایره $O(۲,۳)$ و اندازهٔ شعاع دایره برابر است با :

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+(-۶)^۲-۴(-۳)}=۴$$

از طرفی اندازهٔ خط‌المرکزین قابل محاسبه است و برابر است با :

$$OO'=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳+۱)^۲}=۵$$

می‌خواهیم دو دایره مماس درون باشند، پس باید $d=|r-r'| \Rightarrow ۵=|۴-r'| \Rightarrow \begin{cases} r'=-۱ & \text{غ‌ق‌ق} \\ r'=۹ \end{cases}$

بنابراین معادلهٔ دایره برابر است با :

$$(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۸۱$$

نمونه سؤالات بیشتر (سؤالات ستاره‌دار فقط مخصوص دانش آموزان علاقمند)

۱ روی دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + ۴ = ۰$ دو نقطهٔ A و B را به طول ۲ درنظر می‌گیریم.
الف) مختصات نقطهٔ C را روی این دایره چنان بیابید که مثلث ABC دررأس C متساوی‌الساقین شود. چند مثلث با این ویژگی داریم؟
ب) چند نقطه مثل D روی این دایره می‌توان یافت، به‌طوری که مثلث ABD دررأس D قائمه شود؟

۲ معادلهٔ وتری که از نقطهٔ A (۲,۱) درون دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است چیست؟

۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط (۱,۰) و (۶,۰) بگذرد و بر خط $y=۱$ مماس باشد. *

۴ نقاط (۵ , ۲−) و (۱− , ۲−) دوسر قطر بزرگ یک بیضی هستند.
الف) مختصات مرکز این بیضی چیست؟
ب) اگر قطر کوچک این بیضی ۴ واحد باشد کدام نقاط دو سر قطر کوچک هستند؟
پ) اندازهٔ فاصلهٔ کانونی و مختصات نقاط کانونی را محاسبه کنید.
ت) خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۵ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که با دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + ۱۲ = ۰$ هم‌مرکز باشد و شعاع آن، دو برابر شعاع این دایره باشد.

۶ اگر نقاط (۱,۰)، (۲−,۳) و (۱−,۲) سه نقطه از یک شهر باشد، دکل مخابراتی را در کدام نقطه باید نصب کرد که سرویس‌دهی یکسانی به هر سه نقطه انجام شود؟ *

۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه‌های B(۳،۳) و A(۱،۱) بگذرد و مرکز آن روی خط $x = ۳y$ واقع باشد.

۸ چند دایره می‌توان به مرکز M(۲,۱) رسم کرد به‌طوری که بر محورهای مختصات مماس باشد؟ معادلهٔ این دایره‌ها را بنویسید.

۹ معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط (۱,۳) و (۱,۵) دوسر قطری از آن باشند.

۱۰ دایره‌ای به مرکز (۲, ۱−) بر خط ۰ = ۱ − ۳x − ۴y مماس است. شعاع این دایره چقدر است؟

۱۱ اگر خط l در نقطهٔ (۱,۳−) بر دایره‌ای به مرکز (۲,۰) مماس باشد :

الف) معادلهٔ خط مماس را پیدا کنید.

ب) معادلهٔ دایره را بنویسید.

۱۲ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a را حول ضلع آن دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟

فصل ۷

احتمال

عکاس: عبدالرضا سلیمانی

رحیم‌آباد ـ استان گیلان

نگاه کلی به فصل

این فصل در ادامه مباحث احتمال که از مقطع ابتدایی در کتاب‌های ریاضی شروع شد و در مقطع اول متوسطه ادامه یافت و سپس در رشتهٔ تجربی به عنوان فصلی از کتاب ریاضی در پایه‌های دهم و یازدهم حضور داشت به عنوان آخرین فصل کتاب ریاضی پایهٔ دوازدهم آمده است. از آنجا که در سلسله کتاب‌های جدید مباحث احتمال به مقاطع و پایه‌های مختلف تحصیلی گسترش یافت در این کتاب تنها آخرین مفهومِ مورد نظر، یعنی قانون احتمال کل و مثال‌ها و مسائلی در ارتباط با آن ارائه شده است.

تصویر عنوانی

احتمال، یکی از موضوعات کاربردی در ریاضیات است. از آنجا که تصمیم‌گیری در مسائل غیر قطعی همواره یکی از چالش‌های بشر بوده است لذا علم احتمال به مرور زمان اهمیت خود را در ذهن انسان بیشتر کرده است. گرچه تاریخ احتمال بیشتر با مسائلی چون به‌دست آوردن احتمال برد در یک بازی شانسی عجین بوده است اما امروزه کاربرد احتمال در مسائلی چون پیش‌بینی وضع هوا نقشی انکارناپذیر در زندگی بشر بازی می‌کنند.

دانستنی‌هایی برای معلم

جالب است بدانید محققان در مورد اینکه بچه‌ها از چه سنّی می‌توانند مفاهیم احتمال را یاد بگیرند، اختلاف نظر دارند. پیاژه و اینهلدر بر این باور بودند که فهم نظام‌مند احتمال زودتر از سن‌های ۹ تا ۱۲ سال شروع نمی‌شود. در این دوره بچه‌ها مسائل را به‌طور شهودی و نه براساس استدلال رسمی حل می‌کنند.
یوس و همکارانش نشان دادند که کودکان ۴ ساله نیز درکی از احتمال دارند. هودنیک کادز و اسکربک در پژوهشی، تکالیفی در ارتباط با تمایز قائل شدن بین پیشامدهای ممکن، غیرممکن و حتمی به بچه‌های ۴ تا

۸ ساله دادند. آنها مشاهده کردند که بچه‌های ۵ـ۴ ساله اغلب در مسائل با کلمهٔ «حتمی» مشکل دارند، در حالی که نیمی از کودکان پیش‌دبستانی به این مسائل پاسخ صحیح داده بودند، همچنین آنها دریافتند بچه‌های سن ۴ تا ۸ سال قادر به پیش‌بینی رویدادهایی با احتمال برابر نیستند.

معرفی منابع برای معلمان

ــ بهبودیان، جواد (۱۳۷۷). آمار و احتمال مقدماتی. (چاپ سیزدهم). مشهد : انتشارات آستان قدس رضوی.
ــ پاشا، عین‌اللّٰه (۱۳۶۳). تاریخچهٔ مختصر احتمال. فصلنامهٔ رشد آموزش ریاضی، ۳، ۲۹ـ۲۶.
ــ جهانی‌پور، روح اللّٰه (۱۳۷۹). احتمال. تهران : انتشارات فاطمی.

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ یک اتوبوس در حال انتقال تعدادی ورزشکار از رشته‌های والیبال و بسکتبال است. ۴۵ درصد ورزشکارانی که در اتوبوس هستند، بسکتبالیست و ۵۵ درصد آنها والیبالیست هستند. از طرفی ۲۰ درصد بسکتبالیست و ۱۵ درصد والیبالیست‌هایی که در اتوبوس هستند قدی بالای ۲ متر دارند. اگر از میان ورزشکاران این اتوبوس فردی به تصادف انتخاب شود، با چه احتمالی فرد انتخابی قدی بالای ۲ متر خواهد داشت؟

۲ جمعیت شهرنشین یک شهرستان دو برابر جمعیت روستانشین آن است. ۷۰ درصد شهرنشینان و ۵۰ درصد روستائیان این شهرستان دارای تحصیلات دانشگاهی هستند. اگر فردی به تصادف از این شهرستان انتخاب شود :

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی جزء شهرنشینان و با چه احتمالی جزء روستانشینان است؟

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی تحصیلات دانشگاهی دارد؟

۳ سه درصد از افراد بالای ۴۰ سال از یک جامعه و یک درصد از سایر افراد آن جامعه به نوعی بیماری خاص مبتلا هستند. اگر ۳۰ درصد افراد این جامعه بالای ۴۰ سال داشته باشند، چند درصد افراد این جامعه به بیماری مذکور مبتلا هستند؟

۴ در یک مدرسهٔ دورهٔ دوم متوسطه نصف دانش‌آموزان پایهٔ دهم، یک سوم آنها پایهٔ یازدهم و یک ششم آنها پایهٔ دوازدهم هستند. اگر رشتهٔ ورزشی ۳۰ درصد از دانش‌آموزان پایهٔ دهم، ۲۵ درصد از دانش‌آموزان

پایهٔ یازدهم و ۲۰ درصد از دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم، فوتبال باشد و یک نفر به تصادف از دانش‌آموزان این مدرسه انتخاب شود، با چه احتمالی رشتهٔ ورزشی فرد مورد نظر فوتبال است؟

۵ دو جعبه داریم که در اولی ۴ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ مشکی و در دومی ۶ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ مشکی قرار دارد. اگر تمام مهره‌های هر دو جعبه را در یک جعبهٔ سوم بریزیم و یک مهره به تصادف از جعبهٔ سوم خارج کنیم:

الف) با چه احتمالی مهرهٔ خارج شده قبلاً در جعبهٔ اول بوده و با چه احتمالی قبلاً در جعبهٔ دوم بوده است؟

ب) با توجه به قسمت (الف) و قانون احتمال کل با چه احتمالی مهرهٔ مورد نظر سفید است؟

اهداف درس

- ❑ درک قانون احتمال کل
- ❑ درک شرایط استفاده از قانون احتمال کل
- ❑ استفاده از قانون احتمال کل در حل برخی مسائل احتمال

روش تدریس

با توجه به اینکه بنای قانون احتمال کل بر مفاهیمی مانند احتمال شرطی استوار است، لذا مرور آنچه به عنوان یادآوری در ابتدای درس آمده است بسیار مفید خواهد بود. قبل از بیان قانون احتمال کل مطمئن شوید که دانش‌آموز مفهوم افراز را درک کرده است و از آنها بخواهید مثال‌هایی از افراز در زمینه‌های گوناگون بیان نمایند. در این درس علامت $\sum$ مطرح شده است. مطمئن شوید که دانش‌آموزان آن را صرفاً به عنوان یک نماد کاربردی و نه یک موجود پیچیدهٔ ریاضی درک کرده‌اند. در ادامهٔ درس قانون احتمال کل به کمک مفاهیمی که دانش‌آموز با آنها آشنایی دارد بیان شده است و سپس فرمول آن و مثال‌هایی از کاربرد آن آورده شده است. می‌توانید چند مثال دیگر به صورتی که فقط صورت سؤال را به صورت شفاهی توضیح دهید و دانش‌آموزان نیز به‌طور شفاهی ارتباط آن سؤال با قانون احتمال کل و نحوهٔ حل آن را با قانون احتمال کل توضیح دهند. در پایان می‌توانید برای تسلط بیشتر دانش‌آموزان از آنها بخواهید سؤال‌هایی طرح نمایند که قابل حل با قانون احتمال کل باشند.

منابع

ــ امیری، حمیدرضا، سیدصالحی، محمدرضا. شرقی، هوشنگ و مین‌باشیان، هادی. هندسه (۳)، پایهٔ دوازدهم دورهٔ متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتب درسی عمومی و متوسطهٔ نظری، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

ــ بیژن‌زاده، محمد. رحیمی، زهرا. سیدصالحی، محمدرضا. شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۶) هندسه (۲) پایهٔ یازدهم دوره متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتب درسی عمومی و متوسطهٔ نظری، تهران، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

ــ حاجی‌بابایی، جواد. رستمی، محمدهاشم. ظهوری زنگنه، بیژن. غلام آزاد، سهیلا. گویا، زهرا. نیوشا، جعفر. اصلاح‌پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. رحمانی، عزیزه. رضوی، اسداله. میرمحمد رضایی، مرتضی. (۱۳۷۵)، هندسه (۲) سال سوم آموزش متوسطه، رشتهٔ ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

ــ رحیمی، زهرا. سیدصالحی، محمدرضا. شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۵)، هندسه (۱)، پایهٔ دهم دورهٔ متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتب درسی عمومی و متوسطهٔ نظری، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

ــ رستمی، محمدهاشم. (۱۳۷۹)، مکان هندسی، مکان‌های هندسی وابسته به نقطه‌های ثابت (یک نقطه، دو نقطه، ... n نقطه) تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه.

ــ ریحانی، ابراهیم. رحیمی، زهرا. کلاهدوز، فهیمه. نوروزی، سپیده. یافتیان، نرگس. شریف پور، شقایق. عابدی، ربابه. کتابدار، زهره. سیدصالحی، محمدرضا. امیری، حمیدرضا. ایزدی، مهدی. زمانی، ایرج. بهرامی سامانی، احسان. پرنگ، حسن. مین‌باشیان، هادی و نیرو. محمد (۱۳۹۵) تحلیل خط مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط حوزهٔ یادگیری ریاضی، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

\- Hemmerling, E.M., & Hemmerling, E.M. (1964). Fundamentals of college geometry. Wiley.

\- Serra, M. (1997). Discovering geometry. An Inductive Aproach

معلمان محترم و صاحب نظران گرامی می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران- صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴- گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی عمومی و متوسطه نظری