بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی (۲)

رشتهٔ علوم تجربی

کتاب معلم
(راهنمای تدریس)

پایهٔ یازدهم
دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: کتاب معلم ریاضی (۲) پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۱۳۶۴

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
رضا حیدری‌قزلجه، سهیلا خداکریم، ابراهیم ریحانی، مهین سنقری، محمدرضا سیّدصالحی، علی فرشتیان،........ محمدعلی فریبرزی‌عراقی، علی قصاب، نجمه قندالی، آناهیتا کمیجانی و مجید یوسفی (اعضای گروه تألیف) ـ سیّداکبر میرجعفری (ویراستار)

مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی: لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ مریم نصرتی (صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ بهناز بهبود، شاداب ارشادی، سید کیوان حسینی، فریبا سیر، فاطمه رئیسیان‌فیروزآباد (امور آماده‌سازی)

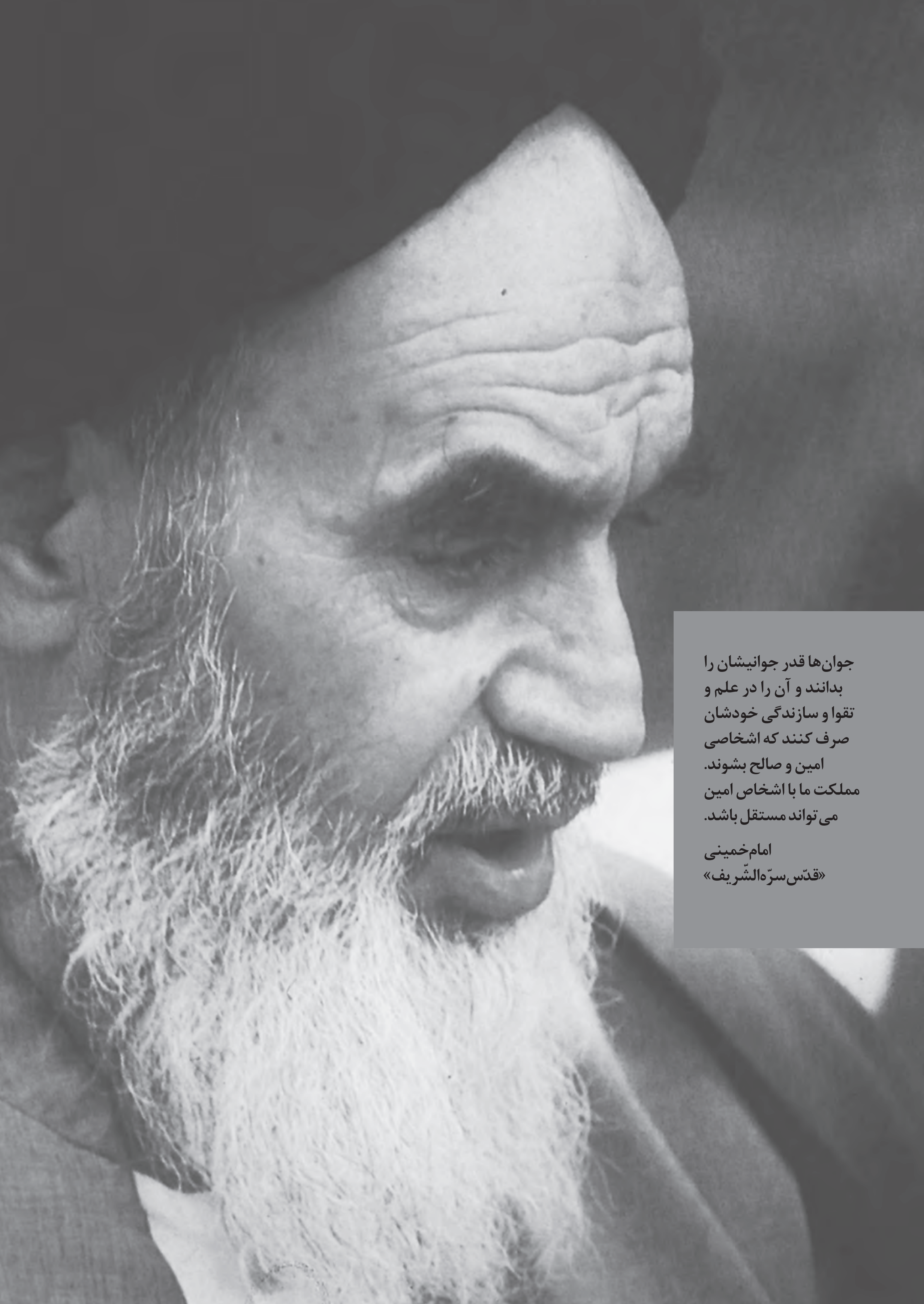
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۶

شابک ۱ـ۳۰۲۲ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3022-1



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدّس‌سرّه‌الشّریف»

فهرست

سخنی با همکاران

ساختار کتاب درسی ریاضی ۲ بر اساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین طراحی شده است. فعالیت‌ها و موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم ریاضی فراهم می‌کنند و مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان هستند. معلم در این میان نقش مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها بر عهده دارد. با توجه با اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها توسط معلم وجود دارد. راهنمای حاضر بر اساس آن تنظیم شده است که کتاب درسی محور اصلی در فرایند آموزش باشد. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌گو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

برای تصویر عنوانی هر فصل اطلاعاتی مناسب و مرتبط با آن در کتاب راهنما آمده است. اهداف هر فصل و اهداف هر درس در کتاب حاضر توضیح داده شده است. همچنین در روش تدریس ارائه شده برای هر درس، نحوه اجرای هر فعالیت و چالش‌های پیش رو، پیشنهادهایی برای غنی‌سازی هر فعالیت، بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان در آن فعالیت و نیز توصیه‌هایی برای ارزشیابی نیز ارائه شده است. علاوه بر این در مورد پاسخ بیشتر فعالیت‌ها و تمرینات، راهنمایی به عمل آمده است. در کنار این بحث‌هایی نیز به عنوان دانستنی‌هایی برای معلم و همچنین نمونه سؤال‌هایی برای ارزشیابی ارائه شده است.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس باشند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد دربارهٔ یک مفهوم، حدود و ثغوری در کتاب مشخص شده است. رعایت این حد و مرزها، در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی الزامی است. روند کتاب نشان می‌دهد که حتی ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای آن در زندگی واقعی، که به وضوح

در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است امید است که این موضوع مد نظر معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفادهٔ افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درسی را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان

فصل ۱

هندسه تحلیلی و جبر

رویکرد کلی کتاب

اصلی‌ترین دستور کار مؤلفان کتاب حاضر، محور قرار دادن فعالیت دانش‌آموز و مشارکت دادن او در ساخت دانش بوده است. در این راستا در تمام بخش‌های کتاب، فضای کافی برای انجام تکالیف و نوشتن مطلب توسط دانش‌آموز پیش‌بینی شده است. علاوه برآن، استانداردهای فرایندی زیر در تدوین کتاب مدّنظر بوده‌اند :

۱ــ طرح و حل مسئله : توجه داریم که هر تکلیف ریاضی لزوماً یک مسئله نیست؛ چرا که اگر دانش‌آموز نمونهٔ آن تکلیف یا مشابه آن را قبلاً انجام داده باشد، برایش حکم تمرین را خواهد داشت. به عبارت دیگر، یک تکلیف ریاضی زمانی برای دانش‌آموز یک مسئله محسوب می‌شود که در ابتدای کار برای آن راه‌حل آماده‌ای در ذهن نداشته باشد و برایش چالش‌انگیز باشد. با این نگاه، یک تکلیف ریاضی به‌طور نسبی ممکن است برای یک شخص حکم **تمرین** و برای دیگری حکم **مسئله** را داشته باشد. در فصل‌های مختلف کتاب، علاوه بر تمرین، تعدادی مسئله هم درنظر گرفته شده است، تا مهارت حل مسئله دانش‌آموزان ارتقا یابد.

طرح مسئله یک توانایی از مرتبه بالاتر است که علاوه بر معلمان، انتظار داریم دانش‌آموزان نیز تا حدودی واجد این توانایی باشند. به همین دلیل گاهی از آنها خواسته شده است تا مسئله‌ای را برای شرایط داده شده طرح نمایند.

۲ــ ارتباط و اتصال موضوعی : به‌طور طبیعی، مطالب کتاب حاضر در یک ارتباط منطقی با کتاب ریاضی پایهٔ قبل قرار دارد. علاوه بر آن سعی شده است تا مطالبی از سایر دروس دانش‌آموزان مثل فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، جغرافیا و پدیده‌های دنیای واقعی نیز در کتاب آورده شود به‌طوری‌که این مطالب صرفاً جنبهٔ تزیینی و خواندنی نداشته باشد، بلکه مفاهیم ریاضی در بستر چنین موضوعاتی طرح شده و آموزش داده شود. برخی از مصداق‌های این مطلب، هنگام توضیح درس‌های کتاب ذکر خواهند شد.

۳ــ بازنمایی‌های چندگانه : هنگام حل یک مسئله یا پرداختن به یک مفهوم ریاضی، ممکن است آن را از منظرهای مختلف مورد توجه قرار دهیم : دیدگاه هندسی، دیدگاه جبری یا دیدگاه عددی. در آموزش یک مفهوم جدید، تلاش شده است بازنمایی‌های مختلف آن مورد توجه واقع شود تا دانش‌آموز بتواند با حرکت بین بازنمایی‌های مختلف، طرحواره ذهنی مناسبی از آن مفهوم در ذهن خود شکل دهد. به عنوان مثال در فصل اول دانش‌آموز با داشتن ضابطهٔ جبری یک سهمی باید به سؤالاتی در مورد نمودار هندسی آن پاسخ دهد و برعکس با داشتن نمودار هندسی باید قادر باشد تا در مورد علامت ضرایب در ضابطهٔ جبری آن اظهارنظر کند.

۴ــ گفتمان ریاضی : هرچقدر بتوانیم دانش‌آموزان را به صحبت کردن وادار کنیم به‌طوری که قادر باشند از نظر خودشان در مقابل دوستان خود به‌طور منطقی دفاع کنند یا نظرات دیگران را به چالش بکشند،

در این صورت توانسته‌ایم آنها را به ریاضی‌وار فکر کردن نزدیک کنیم. در بخش‌های مختلف کتاب از دانش‌آموزان خواسته شده است تا جواب خود را با دوستان خود مقایسه کنند و در مورد تفاوت‌ها و شباهت‌های جواب‌ها بحث کنند.

۵ــ اثبات و استدلال : در واقع اثبات و استدلال یکی از جنبه‌های مهم آموزش ریاضی و یکی از اهداف ارزشمند آن است. با توجه به این موضوع، تلاش شده است تا در سراسر کتاب هیچ رابطه یا فرمولی بدون استدلال به دانش‌آموز ارائه نشود. اگر اثبات کردن آن مطلب با توجه به دانسته‌های دانش‌آموز امکان‌پذیر بوده، در برخی موارد این کار را انجام داده‌ایم. در موارد دیگر که اثبات طولانی بوده یا پیش‌نیازهای لازم فراهم نبوده از این کار اجتناب شده است. اما حتی در این‌گونه موارد، سعی شده است با عرضه کردن چند نمونه، دانش‌آموز با یک رویکرد استقرایی به رابطهٔ مورد نظر دست یابد؛ یا اینکه مراحل اثبات کلی را در قالب یک مثال ملموس پیاده کرده‌ایم. درهرحال دانش‌آموز یک توجیه برای رابطهٔ مورد نظر دریافت می‌نماید.

علاوه بر پنج استدلال فرایندی فوق، برخی ملاحظات دیگر هم در تألیف کتاب مورد نظر بوده‌اند که به شرح زیر هستند.

ــ مسائل بازپاسخ : علاوه بر راه‌حل‌های چندگانه که در مورد مسائل بسته پاسخ مدنظر مؤلفان بوده است، پرداختن به مسائلی که بیش از یک پاسخ درست داشته باشند هم مورد توجه بوده است. این‌گونه مسائل در کتاب‌های ریاضی پایه‌های قبل و حتی دورهٔ ابتدایی هم مورد تأکید بوده‌اند. اگر از دانش‌آموزان بخواهیم به جای حل یک معادلهٔ داده شده، معادله‌ای رادیکالی بنویسند که یکی از جواب‌های آن به عنوان مثال۲ باشد در این صورت یک مسئله بازپاسخ طرح کرده‌ایم که ممکن است به تعداد دانش‌آموزان یک کلاس پاسخ صحیح برای آن ارائه شود.

ــ توجه به بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان : ممکن است دانش‌آموز به‌خاطر یک قانون نادرستی که در ذهن دارد، یک رابطه را بیش از اندازه تعمیم دهد و به نتیجه نادرستی برسد. به عنوان مثال برای دو عدد نامنفی، او رابطهٔ $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ را که در مورد ضرب درست است، ممکن است به عمل جمع هم گسترش دهد و به رابطهٔ نادرستِ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ دست یابد. چنین اشتباهی را یک بدفهمی ریاضی می‌نامیم؛ چرا که این اشتباه ناشی از بی‌دقتی یا خستگی دانش‌آموز نیست بلکه به خاطر قانون نادرستی است که او در ذهن دارد. تمرین و تکرار نمی‌تواند راه‌حل مناسبی برای از بین بردن چنین بدفهمی‌هایی باشد، بلکه لازم است ابتدا منشأ بدفهمی شناسایی شود و دانش‌آموز در مواجه با شکل درست رابطهٔ مورد نظر، ابتدا قانون نادرست مربوطه که در ذهن خود دارد را اصلاح، حذف یا جایگزین نماید. در تألیف بخش‌های مختلف کتاب با نگاه به متون پژوهشی، بدفهمی‌های رایج در موضوع مورد بحث مدّ نظر بوده است تا با

برجسته کردن آنها و در تقابل قرارداد نشان با شکل درست رابطهٔ موردنظر، دانش‌آموزان به تفکر و تأمل واداشته شوند.

ــ **حرکت از حالت‌های خاص به سمت حالت کلی** : با هدف تقویت شهود فراگیران، سعی شده است در هر موضوع، ابتدا حالت‌های خاص مربوط به آن مطلب گفته شود و سپس به حالت کلی پرداخته شود. به عنوان مثال در بحث یافتن فاصلهٔ دو نقطه به کمک مختصات آنها، ابتدا دو نقطه را هم‌طول یا هم‌عرض در نظر گرفته‌ایم و سپس فاصلهٔ دو نقطهٔ دلخواه بحث شده است. همچنین هم در حالت‌های خاص و هم در حالت‌های کلی، ابتدا یک مثال عددی مطرح شده و سپس به شکل جبری موضوع پرداخته شده است.

ــ **تعیین حدود و ثغور مطالب** : در موضوعاتِ مختلف مورد بحث، حدو مرز مطالب با صراحت بیان شده است. به عنوان مثال اگر اثبات یک رابطهٔ خاص جزو اهداف کتاب نبوده، این مطلب به صراحت در پاورقی آمده است. به عنوان مثالی دیگر، در بحث معادلات رادیکالی در پانویس قید شده که فقط معادلاتی مورد نظر است که شامل رادیکال‌های با فرجه ۲ باشند و در مثال‌ها و تمرین‌های ارائه شده هم هیچ‌گونه معادله با رادیکال‌های فرجه ۳ یا بالاتر نیامده است.

ــ **توصیه به استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی در جریان تدریس** : سرفصل‌های کتاب حاضر به‌گونه‌ای است که در تمام هفت فصل آن می‌توان نرم‌افزارهای ریاضی مثل جئو جبرا[۱] را در تدریس مطالب کتاب به خدمت گرفت و دانش‌آموزان را به استفاده از آن تشویق کرد.

ــ **تأکید بر فعال بودن دانش‌آموز** : همچنان که در ابتدای بحث ذکر شد، رویکرد اصلی کتاب، محور قرار دادن فعالیت دانش‌آموز و مشارکت دادن او در ساخت دانش است. به همین جهت در تمام بخش‌های کتاب، فضای کافی برای انجام تکالیف و نوشتن مطالب توسط دانش‌آموزان پیش‌بینی شده است. در این راستا اجرای توصیه‌های زیر پیشنهاد می‌شود :

توصیه ۱. در تمام بخش‌ها، ابتدا فرصت کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد تا خود آنها فعالیت مورد نظر را زیر نظر معلم انجام دهند و در انتها جمع‌بندی توسط معلم انجام گیرد. باید شرایطی فراهم شود تا دانش‌آموز کارِ ساخت دانش را در ذهن خود انجام دهد. این وظیفه را ما به عنوان معلم نمی‌توانیم برای دانش‌آموز انجام دهیم، بلکه می‌توانیم شرایط کار را برای او فراهم کنیم.

توصیه ۲. همان‌گونه که در بحث مربوط به استاندارد اثبات و استدلال بیان شد، توصیه می‌شود از ارائهٔ مستقیم فرمول‌ها و رابطه‌ها پرهیز شود. پیشنهاد می‌شود با یک نگاه استقرایی، مثال‌هایی عرضه گردد تا دانش‌آموزان با پی‌گیری آنها به رابطهٔ مورد نظر دست یابند. همچنین در یک بحث، لزومی ندارد که برای هر حالت خاص، فرمول جداگانه‌ای ارائه شود. به عنوان مثال در بخش فاصلهٔ دو نقطه، لزومی ندارد که

۱ــ GeoGebra

فاصله یک نقطه تا مبدأ را به عنوان یک فرمول جداگانه ارائه کنیم. اگر بعد از چندین بار استفاده از فرمول اصلی، خود دانش‌آموز به این نتیجه رسید که حالت خاص آن را هم جداگانه به خاطر بسپارد، اشکالی ندارد. اما نباید عرضه این‌گونه فرمول‌های حالت خاص به یک رویه تبدیل شود. زیرا هرچقدر تعداد روابط و فرمول‌هایی که دانش‌آموز در ذهن دارد کمتر باشد و در مقابل در به‌کار بردن آنها توانمندی بیشتری از خود نشان دهند، مسئله حل‌کن قابل‌تری خواهد بود.

نگاه کلی به فصل

دانش‌آموزان از پایه‌های قبل نسبت به دستگاه محورهای مختصات دکارتی شناخت دارند. آنها در کلاس نهم با روابط خطی و معادلهٔ خط آشنا شده‌اند. همچنین در کلاس دهم، ارتباط بین شیب خط و تانژانت زاویهٔ بین خط با قسمت مثبت محور xها آمده است. درس اول فصل حاضر به یادآوری و تکمیل مطالبی از هندسه تحلیلی دوبعدی و معادلهٔ خط می‌پردازد.

درس دوم مطالبی در رابطه با معادلهٔ درجه دوم و تابع درجه ۲ را شامل می‌شود. این مطالب هم در ادامهٔ موضوعاتی است که دانش‌آموزان در پایهٔ قبل دربارهٔ معادلهٔ درجه دوم و سهمی فرا گرفته‌اند. مسائلی در زمینهٔ بهینه‌سازی به کمک توابع درجه ۲ در این درس ارائه شده است.

درس سوم به مطالعهٔ معادلات گویا و معادلات رادیکالی و کاربردهایی از آنها اختصاص دارد. لازم به ذکر است که در ادامهٔ کتاب و در فصل سوم، تابع‌های گویا و تابع‌های رادیکالی هم مورد بررسی اجمالی قرار گرفته‌اند.

نقشه مفهومی فصل

تصویر عنوانی

تصویر عنوانی این فصل در ارتباط با توابع درجه دوم است. بهتر است دانش‌آموزان را تشویق کنیم تا با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابند که در آنها شکل سهمی وجود داشته باشد؛ از برخی بناها، سازه‌ها و پل‌ها تا مسیر پرتابه‌های مختلف، فواره و موارد دیگر. از آنجا که آنان از پایهٔ قبل با سهمی آشنا

هستند، لذا در شروع فصل نیز می‌توان دربارهٔ تصویر عنوانی فصل با آنها بحث کرد و از آنان خواست که مواردی از این‌گونه پدیده‌ها را ذکر کنند.

اهداف کلی فصل اول:

- ❑ یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط
- ❑ آموزش رابطه‌های مقدماتی در هندسه تحلیلی دو بعدی مانند فاصلهٔ دو نقطه و فاصلهٔ نقطه از خط
- ❑ یادآوری و تکمیل معادلهٔ درجه ۲
- ❑ تجزیه و تحلیل رفتار تابع درجه ۲
- ❑ حل مسائل بهینه‌سازی مرتبط با تابع درجه ۲
- ❑ آموزش حل معادلات گویا و معادلات گنگ
- ❑ ایجاد توانایی حل مسائل کلامی مرتبط با معادلات گویا و معادلات گنگ

درس اول

هندسهٔ تحلیلی

پیش‌نیازها

❑ توانایی رسم نمودار یک خط با داشتن معادلهٔ آن
❑ شناخت معادلهٔ خطوط موازی با محورهای مختصات
❑ آشنایی با معادلهٔ خطوط نیمسازهای نواحی مختلف صفحهٔ مختصات
❑ آشنایی با مفهوم عرض از مبدأ یک خط
❑ آشنایی با شرط موازی بودن دو خط
❑ توانایی محاسبهٔ شیب یک خط با داشتن مختصات دو نقطه از آن
❑ توانایی به‌دست آوردن معادلهٔ یک خط با داشتن مختصات دو نقطه از آن

اهداف درس اول

❑ یادآوری معادلهٔ خط در حالت کلی و حالت‌های خاص
❑ یادآوری شرط موازی بودن دو خط و آموزش شرط عمود بودن دو خط
❑ توانایی محاسبهٔ فاصلهٔ دو نقطه با داشتن مختصات آنها
❑ توانایی یافتن مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط
❑ توانایی به‌کارگیری فرمول فاصلهٔ نقطه از خط

روش تدریس

یادآوری

در شروع درس و در قالب کار در کلاس صفحهٔ ۲، مرور نسبتاً جامعی بر مطالب سال‌های قبل در

ارتباط با معادلهٔ خط شده است. انتظار می‌رود دانش‌آموزان عزیز با انجام قسمت‌های مختلف این بخش، پیش‌نیازهای لازم برای ادامهٔ بحث را دوره کنند؛ به همین جهت لازم است فرصت کافی در اختیار آنها قرار داده شود. همچنین در صورت لزوم می‌توان مثال‌های بیشتری نیز در این زمینه در کلاس مطرح کرد.

شرط عمود بودن دو خط، موضوعی است که در فعالیت صفحهٔ ۳ به آن پرداخته شده است. اثبات این شرط در کلاس توصیه نمی‌شود؛ بلکه پیشنهاد می‌شود با ارائه چند مثال مناسب، موقعیتی فراهم گردد که دانش‌آموزان بتوانند خودشان به‌طور استقرایی آن را نتیجه بگیرند. تکالیفی دربارهٔ خطوط موازی و خطوط عمود بر هم در کار در کلاس بعد (صفحهٔ ۴) آمده است.

فاصلهٔ دو نقطه

در این قسمت، رویکرد کتاب عبارت است از حرکت از حالت‌های خاصی به سمت حالت کلی. هم در حالت خاص و هم در حالت کلی، ابتدا مثال عددی ارائه شده و سپس حالت کلی در شکل جبری آمده است. در واقع، ابتدا بحث فاصله در مورد دو نقطهٔ مشخص و هم عرض مطرح شده و سپس شکل جبری همین حالت خاص ارائه شده است. پس از آن برای حالت کلی هم این ترتیب مراعات شده است و شرایطی فراهم گردیده تا دانش‌آموزان رابطهٔ کلی را خود به‌دست آورند. پس از آن، در کار در کلاس صفحهٔ ۶، مسائلی در این مورد از هندسه و دنیای واقعی آمده است.

تذکر : ارائه فرمول جداگانه برای فاصلهٔ یک نقطه از مبدأ مختصات، توصیه نمی‌شود.

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

رویکرد این بخش هم مثل بخش قبل است. یعنی ابتدا حالت خاص در شکل عددی و جبری آمده و سپس حالت کلی نیز با همین ترتیب ارائه شده که همگی مبتنی بر فعالیت دانش‌آموزان است. کار در کلاس صفحهٔ ۷ کمک می کند که آنها در به‌کارگیری رابطهٔ به‌دست آمده، تبحر لازم را کسب کنند.

تذکر ۱ : در مثال‌های هندسی ارائه شده، تعمداً فقط میانهٔ مثلث مطرح شده و طول یا معادلهٔ آن با داشتن مختصات سه ضلع مثلث خواسته شده است. به عبارت دیگر به موضوعاتی مثل عمود منصف یک ضلع یا ارتفاع وارد بر یک ضلع پرداخته نشده است.

تذکر ۲ : در این قسمت هم ارائه فرمول جداگانه برای قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطهٔ دیگر توصیه نمی‌شود و پیشنهاد می‌شود که از رابطهٔ نقطه وسط برای حل مسائل مربوطه استفاده شود.

فاصلهٔ نقطه از خط

آخرین مطلب این درس، یافتن فاصلهٔ نقطه از خط است. با وجود آنکه پیش‌نیازهای لازم برای اثبات

رابطهٔ مورد نظر وجود دارد، امّا ارائه اثبات این رابطه در کلاس توصیه نمی شود. به جای آن پیشنهاد می‌شود مراحل اثبات این رابطه در مورد یک مثالِ عددی، مانند مثال حل شدهٔ صفحهٔ ۸ پیاده گردد. این کار دو مزیت خواهد داشت. اولاً دانش‌آموز مراحل اثبات را به‌طور ملموس در مورد یک نقطهٔ معلوم و یک خط مشخص شده، ملاحظه می کند که توجیه مناسبی برای درستی فرمول مورد نظر است، ثانیاً بسیاری از مطالبی که تا کنون در این درس فراگرفته، برایش در ضمن این مثال مرور می‌شود.

تذکر : زمانی که از دانش‌آموز خواسته می‌شود که فاصلهٔ نقطه‌ای را از یک خط افقی یا عمودی محاسبه کند، با وجود آنکه می تواند از فرمول گفته شده استفاده کند، امّا توصیه می‌شود که تأکید بر راهبرد رسم شکل باشد (مانند قسمت‌های (ب) و (پ) از سؤال ۱ کار در کلاس صفحه ۹).

مختصات جغرافیایی و دستگاه مختصات دکارتی، مثالی از برنامه درسی تلفیقی

در زندگی مدرن امروزی، استفاده از مختصات جغرافیایی شکل عمومی‌تری به خود گرفته است؛ به عنوان مثال، برنامه‌های کاربردی که برای استفاده از تاکسی‌های اینترنتی طراحی شده‌اند، مبتنی بر موقعیت جغرافیایی مسافر وتاکسی هستند. همچنین یک جایگزین مناسب برای آدرس دادن آن است که شخص با یک برنامه کاربردی تلفن همراه، موقعیت خود را که از دو عدد تشکیل شده به فرد دیگری که او هم برنامه کاربردی مناسب را در اختیار دارد بفرستد تا راحت او را بیابد.

دانش‌آموزان با طول و عرض جغرافیایی از پایه‌های قبل آشنا هستند. همچنین از کلاس ششم ابتدایی با دستگاه محوری‌های مختصات آشنا شده‌اند و در پایه‌های بعدی هم از آن استفاده کرده‌اند. تمرین ۹ صفحه ۱۰ با یک نگاه تلفیقی به برنامه درسی و با توجه به استاندارد ارتباط و اتصال موضوعی در این درس آمده است. یکی از اهداف آموزش دستگاه مختصات دکارتی می‌تواند این مطلب باشد که دانش‌آموزان ذهنیت مناسبی به طول و عرض جغرافیایی پیدا کنند.

در صفحهٔ ۱۰ کتاب، نقشه مسطحی از جهان به همراه یک محور منطبق بر خط استوا به عنوان محور طول‌ها و خطی منطبق بر نصف‌النهار مبدأ به عنوان محور عرض‌ها آمده است. دانش‌آموز باید به کمک مختصات جغرافیایی دو شهر تبریز و چابهار که در تمرین آمده، قادر باشد موقعیت این دو شهر نسبت به هم را بر روی نقشه تجسم نماید. باید به دانش‌آموزان توضیح داد که همان‌طور که دو محور xها و yها صفحه را به چهار ناحیه افراز می‌کنند، خط استوا و نصف‌النهار مبدأ نیز سطح زمین را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند. در جغرافی، این نواحی با اصطلاحاتی مثل شمالی شرقی، شمالی غربی، جنوبی شرقی و بالاخره

جنوبی غربی توصیف می‌شوند. به عنوان مثال می گویند طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. در ریاضی برای اجتناب از به‌کار بردن اصطلاحاتی مثل شمالی یا شرقی، از علامت مثبت و منفی استفاده می‌شود.

هدف از این تمرین، محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی دو شهر داده شده، با استفاده از مختصات جغرافیایی آنهاست. البته می‌دانیم که فاصله بین دو نصف‌النهار متوالی و همچنین مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی در همه جهان یکسان نیست. در این تمرین با توجه به موقعیت کشورمان، این دو عدد تقریباً ۱۱۰ کیلومتر در نظر گرفته شده‌اند. طبیعی است که این‌گونه محاسبه، همراه با خطا خواهد بود؛ چرا که در دنیای واقعی، این دو نقطه بر روی کره هستند و نه بر روی صفحه‌ای مسطح. در اینجا هدف آن نیست که وارد بحث‌هایی مثل فاصلهٔ ژئودزیک شد، بلکه همان‌طور که ذکر شد، تعمداً یک نقشهٔ مسطح از جهان داده شده تا دانش‌آموز ذهنیت مناسبی از طول و عرض جغرافیایی پیدا کند و ارتباط آن را با دستگاه مختصات که سال‌ها در کتاب‌های ریاضی خود دیده است، درک نماید.

درس دوم

معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجه ۲

پیش‌نیازها

- توانایی حل معادلات درجه دوم
- توانایی رسم نمودار سهمی با داشتن ضابطهٔ جبری آن
- تشخیص اینکه یک سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم از روی ضابطهٔ جبری آن
- یافتن طول و عرض رأس سهمی داده شده
- توانایی محاسبه مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه ۲

اهداف درس دوم

- استفاده از روش تغییر متغیر برای حل معادلات دو مجذوری.
- یافتن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲ بدون حل معادله.
- تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با s و p معلوم برای حل مسائل کاربردی مرتبط.
- محاسبهٔ ماکزیمم یا مینیمم سهمی و استفاده از آن در حل مسائل بهینه‌سازی.
- تشخیص تعداد صفرهای تابع درجه ۲ و علامت آنها بدون محاسبهٔ مقدار دقیق آنها.
- به‌دست آوردن ضابطهٔ سهمی به کمک برخی اطلاعات از نمودار آن.

روش تدریس

این درس، در واقع از دو قسمت مرتبط به هم تشکیل شده است. قسمت اول، مطالبی در مورد معادلهٔ درجهٔ دوم را شامل می‌شود و قسمت دوم نکاتی در مورد تابع درجه ۲ را آموزش می‌دهد. قسمت اول، با حل یک معادلهٔ دو مجذوری به روش تغییر متغیر آغاز می‌شود. هدف این مثال و کار در کلاس بعد از آن در

صفحهٔ ۱۱، آن است که اولاً روش حل معادلهٔ درجه دوم یادآوری شود و ثانیاً دانش‌آموزان با روش تغییر متغیر برای حل معادله آشنا شوند. البته در کتاب حاضر، کاربرد روش تغییر متغیر تنها به حل معادلات دو مجذوری محدود شده است.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲ :

هدف از فعالیت صفحهٔ ۱۲ آن است که دانش‌آموزان بتواند مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲ را به کمک ضرایب معادله به‌دست آورند. در اینجا هم شیوهٔ کار، حرکت از مثال ملموس به سمت حالت کلی است؛ به این معنا که دانش‌آموزان ابتدا درستی روابط مورد نظر را برای معادلهٔ خاص بررسی می‌کنند و سپس آن روابط را در حالت کلی اثبات می‌کنند. توصیه می‌شودکه این روند در جریان تدریس هم مدنظر باشد و زمان کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد تا خودشان در ساخت دانش سهیم شوند.

تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با استفاده از s و p

در ادامه، دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که چگونه با داشتن مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های یک معادلهٔ درجه ۲، آن معادله را تشکیل دهند. در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳ تکالیفی در این زمینه برای آنها در نظر گرفته شده است که باید در کلاس و با نظارت معلم خود آنها را انجام دهند.

کاربرد توابع درجه ۲ در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی

قسمت دوم این درس که دربارهٔ تابع درجه ۲ است، با یادآوری روش محاسبهٔ مقدار ماکزیمم یا مینیمم سهمی از پایهٔ قبل آغاز می‌شود. در صفحهٔ ۱۴ یک مثال حل شده از دنیای واقعی در زمینهٔ بهینه‌سازی آورده شده است که در کار در کلاس صفحهٔ بعد و همچنین در تمرینات آخر درس هم نمونه‌هایی از این‌گونه مسائل بهینه‌سازی به چشم می‌خورد. این موضوع نشان‌دهندهٔ آن است که این‌گونه مسائل مدل‌سازی، جزو تأکیدات برنامه درسی و کتاب هستند که باید در ضمن تدریس کتاب، به این مطلب توجه شود.

توجه به بازنمایی‌های چندگانه در سهمی

در ادامه، با یک مثال از دنیای واقعی، صفرهای تابع درجه ۲ از دیدگاه جبری و هندسی معرفی شده است. همچنین پس از آن صفرهای یک تابع در حالت کلی تعریف شده است. در اینجا هدف آن است که دانش‌آموز قدرت حرکت کردن بین دو بازنمایی هندسی و جبری را در مورد تابع درجه ۲ به‌دست آورد. به همین دلیل در صفحات ۱۶ و ۱۷ گاهی نمودار یک سهمی داده شده و ضابطهٔ آن یا اطلاعاتی در مورد صفرهای آن خواسته شده است؛ یا برعکس، ضابطهٔ یک سهمی داده شده و اطلاعاتی دربارهٔ نمودار آن خواسته شده است. انتظار می‌رود که این مطلب به درک تابع در حالت کلی هم کمک کند.

تذکر ۱ : در کتاب‌های درسی قبل، مسائلی کلیشه‌ای به این شکل وجود داشت که : «اگر α و β ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲ باشند، حاصل عبارت‌های $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ، $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$، ... را پیدا کنید».
دراین کتاب به‌طور آگاهانه از طرح این‌گونه مسائل خودداری شده است و ارائه آنها در کلاس درس توصیه نمی‌شود.

تذکر۲ : دانش‌آموزان در سال دهم با توابع درجه ۲ و نحوهٔ رسم آنها آشنا شده‌اند ولی در آنجا مسائل بهینه‌سازی نداشتند. همچنان که ذکر شد، در اینجا مسائل بهینه‌سازی به صورت مثال حل شده، در قسمت کار در کلاس و همچنین در تمرین‌ها آمده است که نشان‌دهندهٔ تأکید برنامه درسی بر این موضوع است و این مطلب در تدریس این قسمت از درس دوم باید مد نظر قرار گیرد.

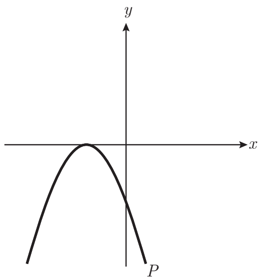
تذکر ۳ : در مثالِ حل شدهٔ صفحهٔ ۱۴، از این مطلب که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است، استفاده شده است که برای اثبات درستی آن، بهتر است به فصل مثلثات ریاضی دهم ارجاع داده شود؛ چرا که در آنجا رابطهٔ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ برای مساحت مثلث را فرا گرفته‌اند.

تذکر ۴ : در حل مسائل بهینه‌سازی، اگر جواب آخر رادیکالی شد، بهتر است مقدار تقریبی آن محاسبه شود تا دانش‌آموزان حس مناسبی نسبت به بزرگی آن عدد داشته باشند.

تذکر۵ : می‌دانیم «اگر مجموع چند عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آنها زمانی ماکزیمم است که همگی با هم برابر باشند». ارائه مطالبی از این دست، تحت عنوان «نکته» یا هر عنوان دیگر در بخش بهینه‌سازی، توصیه نمی‌شود.

تذکر ۶ : در مورد تابع، از اصطلاح صفرهای تابع استفاده شده است و اصطلاح ریشه را تنها برای معادله به‌کار برده‌ایم.

تذکر ۷ : دانش‌آموزان با مفهوم عرض از مبدأ از کلاس نهم آشنا هستند و در درس اول هم این مفهوم برای آنها یادآوری شده است. در پایان صفحهٔ ۱۵، آمده است که دو تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$، عدد c نقشی مشابه عرض از مبدأ در توابع خطی دارد و نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار سهمی با محور yهاست. در صفحات بعد،این مطلب به آنها کمک می‌کند که از روی نمودار سهمی به راحتی بتوانند علامت c را تشخیص دهند.



تذکر ۸ : در مورد تعداد صفرهای تابعی مانند p که بر محور xها مماس است و در صفحه ۱۷ کتاب آمده، ذکر یک مطلب ضروری به نظر می‌رسد. در کتاب حاضر اصطلاح «ریشه مضاعف» برای یک معادله به‌کار برده نشده ولی دانش‌آموزان از کلاس دهم با آن آشنا هستند. در

مورد تعدا صفرهای تابع بالا، دانش‌آموز می‌تواند بگوید «معادلهٔ $p(x)=0$ ریشه مضاعف دارد» یا اینکه «معادلهٔ $p(x)=0$ دو ریشه یکسان دارد».

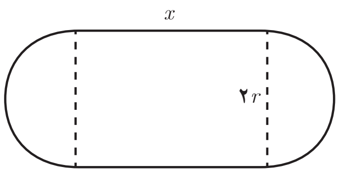
تذکر ۹ : در تمرین ۶ صفحه ۱۸ نمودار چند سهمی داده شده و ضابطهٔ جبری آنها خواسته شده است. این کار به روش‌های مختلف قابل انجام است. امّا هدف کتاب مانند مثال حل شدهٔ بالا صفحهٔ ۱۶، استفاده از صفرهای تابع است.

تمرین ۵ صفحه ۱۸، استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که :

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

حل :



$$1500=2x+2\pi r \rightarrow 750=x+\pi r \rightarrow x=750-\pi r$$

الف)

$$S_{\text{مستطیل}}=x(2r)$$

$$S=(750-\pi r)\times 2r$$

$$=-2\pi r^2+1500r$$

$$r_{max}=\frac{375}{\pi}$$

$$2r=\frac{750}{\pi}\simeq 239(m) \quad \text{عرض مستطیل}$$

$$x=750-\pi\left(\frac{375}{\pi}\right)=375(m) \quad \text{طول مستطیل}$$

ب)

$$S_{\text{استادیوم}}=2rx+\pi r^2=2r(750-\pi r)+\pi r^2$$

$$S=-\pi r^2+1500r$$

$$r_{max}=\frac{750}{\pi}$$

$$x=750-\pi\left(\frac{750}{\pi}\right)=0 \quad \text{عرض مستطیل}$$

$$2r=\frac{1500}{\pi}\simeq 477(m)$$

پس برای ماکزیمم شدن مساحت استادیوم، باید شکل آن دایره‌ای به قطر $\frac{1500}{\pi}$ (تقریباً ۴۷۷) متر باشد.

یک بدفهمی رایج

برخی از دانش‌آموزان توجه ندارند که مقدار ماکزیمم یا مینیمم یک سهمی برابر عرض نقطهٔ مربوط به رأس آن است. لازم است این مطلب همان‌طور که در تذکر صفحه **۱۴** کتاب آمده، مورد تأکید قرار گیرد.

درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

پیش‌نیازها

❑ آشنایی با عبارت‌های گویا
❑ توانایی انجام چهار عمل اصلی با عبارت‌های گویا
❑ توانایی محاسبه کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک‌م‌م) چندجمله‌ای‌ها
❑ آشنایی با عبارت‌های رادیکالی
❑ توانایی محاسبه با عبارت‌های رادیکالی
❑ مسلط بودن به اتحادهای جبری، به‌ویژه اتحاد مربع دو جمله‌ای

اهداف درس سوم

❑ توانایی حل معادلات گویا
❑ توانایی حل معادلات رادیکالی
❑ مهارت حل مسائل کلامی مرتبط با معادلات گویا و معادلات گنگ

روش تدریس

معادلات گویا

قسمت اول این درس دربارهٔ معادلات گویاست. درس با تعریف نسبت طلایی آغاز می‌شود. با وجود آنکه فرایند محاسبهٔ نسبت طلایی به‌طور کامل و با تمام جزئیات در کتاب آمده است، امّا بهتر است با دادن فرصت کافی به دانش‌آموزان، بخشی از کار را بر عهدهٔ آنها قرار داد.

استفاده از پژوهش‌های دانش‌آموزی، در جریان تدریس

در حاشیهٔ صفحهٔ **۱۹** به برخی از جلوه‌های نسبت طلایی در بدن انسان، در بعضی از گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری اشاره شده است، بهتر است از جلسهٔ قبل، از گروهی از دانش‌آموزان داوطلب تقاضا کرد تا تحقیقی دربارهٔ عدد طلایی و کاربردهای آن انجام دهند و گزارش آن را در کلاس برای هم‌کلاسی‌های خود ارائه دهند.

در صفحهٔ **۲۰** یک فعالیت دو قسمتی آمده است. یکی از اهداف قسمت اول این فعالیت، یادآوری نحوهٔ یافتن ک.م.م چندجمله‌ای‌هاست که در جریان حل یک معادلهٔ گویا به آن پرداخته شده است. قسمت دوم این فعالیت، یک مسئله دنیای واقعی است که دانش‌آموزان راهنمایی شده‌اند تا آن را با یک معادلهٔ گویا مدل‌سازی و حل کنند. نمونهٔ دیگری از این گونه مسائل در کار در کلاس صفحهٔ بعد آمده است. ارائه مسائلی از این نوع در کلاس درس قویاً توصیه می‌شود.

تذکر ۱ : احتمال زیادی وجود دارد که دانش‌آموزان پیش‌نیازهای مربوط به معادلات گویا را فراموش کرده باشند. زیرا اکثر این پیش‌نیازها را در کلاس نهم خوانده‌اند و در کلاس دهم روی آنها تأکید چندانی نشده است. به عنوان مثال، ممکن است بسیاری از آنها قادر باشند ک.م.م دو عدد را محاسبه کنند ولی در مورد ک.م.م چندجمله‌ای‌ها مشکلات آنها بیشتر خواهد بود. به همین دلیل همچنان که ذکر شد، در قسمت اول فعالیت صفحهٔ ۲۰، این مفاهیم تا حدودی یادآوری شده‌اند، امّا ممکن است کافی نباشد و شما مجبور باشید مثال‌های بیشتری را در کلاس خود مطرح نمایید.

تذکر ۲ : همچنان که بیان شد، مسائل مدل‌سازی مانند مثال «مترو» در صفحهٔ ۲۰ و مثال «ماشین‌های چمن‌زنی» در صفحهٔ ۲۱ جزو تأکیدات برنامه درسی و کتاب هستند که در تمرین‌های پایانی درس نیز از این‌گونه مسائل آمده است. بنابراین لازم است در تدریس این قسمت از کتاب، تأکید ویژه‌ای بر این نوع مسائل باشد.

تذکر ۳ : کادر پایین صفحهٔ ۱۹ در مورد روش حل معادلات گویا، فقط یکی از روش‌های حل این‌گونه معادلات را بیان کرده امّا تأکید کتاب بر استفاده از راه‌حل‌های چندگانه است. بنابراین همان‌طور که در مثال‌های حل شده این قسمت دیده می‌شود، دانش‌آموزان مجازند تا از روش‌های دیگری مثل مساوی قرار دادن حاصل‌ضرب طرفین با حاصل‌ضرب وسطین هم استفاده کنند.

معادلات رادیکالی

شروع این قسمت از درس با یکی از موضوعاتی است که دانش‌آموزان در ابتدای فصل حاضر آن را فرا گرفته‌اند؛ مسئله‌ای مرتبط با فاصلهٔ دو نقطه مطرح شده است که حل آن به یک معادلهٔ رادیکالی منجر می‌شود. در جریان حل این معادله در صفحهٔ **۲۲** کتاب، روش حل معادلات رادیکالی توضیح داده می‌شود.

البته باز هم در کادر صفحهٔ ۲۲ تنها به یکی از روش‌های حل این‌گونه معادلات اشاره شده است، امّا در اینجا هم تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه خواهد بود.

حدود و ثغور مطالب : همان‌طور که در پاورقی صفحهٔ ۲۲ ذکر شده، معادلات رادیکالی مورد مطالعه دراین کتاب، به معادلات رادیکالی با فرجه ۲ محدود شده است. با وجود آنکه مثال‌های نسبتاً متنوعی در جریان درس و در تمرین‌ها وجود دارد، امّا همگی آنها در چارچوب حد و مرز تعیین شده می‌باشند.

تذکر : هم در بخش معادلات گویا و هم معادلات رادیکالی، هر جا حل معادله‌ای را از دانش‌آموز خواسته‌ایم، بلافاصله پرسیده‌ایم که آیا همهٔ جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول‌اند؟ به عبارت دیگر تأکید زیادی بر امتحان کردن جواب‌های به‌دست آمده وجود دارد. البته در بخش معادلات رادیکالی، بحث مختصری در مورد دامنهٔ متغییر وجود دارد تا اگر جواب به‌دست آمده در دامنهٔ متغیر نبود، آن را به عنوان جواب نپذیریم. با این وجود می‌دانیم که ممکن است جواب در دامنهٔ متغیر باشد ولی باز هم آن را نپذیریم. به هر حال اگر امتحان کردن جواب به‌دست آمده کار دشواری باشد، می‌توان قبل از اقدام به حل معادله، دامنهٔ متغیر مربوط به آن را محاسبه کرد که در این صورت باید مراقب جواب‌های اضافی احتمالی بود.

توصیهٔ آموزشی

پیشنهاد می‌شود در جریان تدریس این فصل، تا حد امکان از سؤال‌های بازپاسخ هم استفاده شود؛ مانند تمرین آخر صفحهٔ ۲۴. چرا که این‌گونه مسائل ظرفیت آن را دارند که بحث‌های کلاسی را افزایش دهند. پیامد این مطلب آن است که از دلِ این گفتمان ریاضی، می‌توان به جریان فکری دانش‌آموزان و بدفهمی‌های احتمالی آنان پی برد.

بدفهمی‌های رایج

یکی از بدفهمی‌های رایج بین دانش‌آموزان آن است که هنگام توان‌رسانی دو جمله‌ای‌ها، فقط مجموع مربعات جملات آنها را در نظر می‌گیرند؛ یعنی به غلط عبارت $(a+b)^۲$ را با $a^۲+b^۲$ معادل در نظر می‌گیرند. این بدفهمی ممکن است در حل برخی معادلات رادیکالی نیز خود را نشان دهد و دانش‌آموز را به جواب نادرست سوق دهد؛ معادلاتی مانند $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$ که در تمرینات صفحهٔ ۲۳ آمده است.

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ یک روستا دارای دو دبستان است که مختصات آنها در نقشهٔ اداره آموزش و پرورش، به صورت E (۱۰و۳) و (۲و۷) F است. هدف آن است که هر دانش‌آموز در نزدیک‌ترین مدرسه نسبت به خانه خود ثبت‌نام کند. معادله خطی را بنویسید که این روستا را با این هدف به دو قسمت تقسیم کند.

۲ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید :

الف) خط گذرا از نقاط $P(a,b)$ و $Q(b,a)$ همواره برخط $y=x$ عمود است.

ب) نقطه وسط پاره‌خط PQ همیشه روی $y=x$ واقع است.

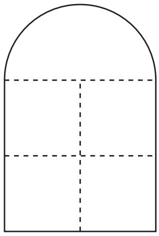
۳ نقاط (۰,۰) و (۴,۰) دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. مسئله چند جواب دارد.

۴ فاصله نقطهٔ $P(۷,-۴)$ را از خط به معادله $۲x+y=۵$ به دست آورید.

۵ تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ ریشه ندارد و حاصل $a+b+c$ عددی منفی است. ثابت کنید $c<۰$.

۶ رابطه $T=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ زمان نوسان (یک حرکت رفت و برگشت) پاندولی به طول l متر را بر حسب ثانیه نشان می‌دهد. اگر هر نوسان یک پاندول ۱/۵ ثانیه زمان ببرد، مطلوب است محاسبه طول آونگ ($g=۹/۸\frac{m}{s^۲}$)

۷ یک معادله گویا بنویسید که جمله «جواب هیچ معادلهٔ گویا نمی‌تواند صفر باشد» را نقض کند.



۸ در بسیاری از بناهای سنتی کشورمان پنجره‌هایی به شکل مقابل وجود دارد که از یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای به قطر پهنای مستطیل در بالای آن تشکیل شده است. اگر محیط مستطیل ۴/۵ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری انتخاب کنید که پنجره بیشترین میزان نوردهی را داشته باشد.

۹ در مثلثی با رئوس $A(۱,-۱)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۱,۴)$ موارد زیر را به‌دست آورید :

الف) مختصات وسط BC ب) معادله میانه AM پ) محیط مثلث ABC

۱۰ نقاط (۰,۱)، (۱,-۲) و (۶,۳) سه رأس یک مستطیل هستند مساحت مستطیل را به‌دست آورید.

۱۱ خط l از مبدأ مختصات گذشته و بر خطی که از دو نقطه $A(۱,۲)$ و $B(-۳,۰)$ می‌گذرد عمود است.

الف) معادله خط l را به‌دست آورید. ب) خط l خط $x=۲$ را با کدام عرض قطع می‌کند.

۱۲ دو نقطه $A(m-۲,۲)$ و $B(m,۲m)$ را در نظر بگیرید. اگر P وسط پاره‌خط AB به فاصله $\sqrt{۲۰}$ از مبدأ مختصات باشد، آنگاه مقدار m را به‌دست آورید. مسئله چند جواب دارد؟

۱۳ اگر فاصله مبدأ مختصات از خط $a^۲x+(a^۲+۱)y=۵$ برابر ۱ باشد، فاصله مبدأ از خط $a^۲x+(a^۲+۱)y=۷$ چقدر است؟

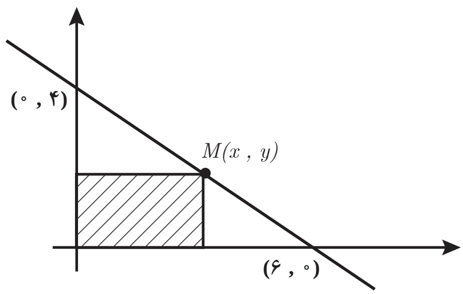
۱۴ اگر خط به معادله $y-۲x+۸=۰$ محورهای مختصات را در دو نقطه A و B قطع کند، فاصله نقطه $C(۶,-۱)$ از وسط AB چقدر است؟

۱۵ اگر فاصله نقطه $A(۲m-۱,۵)$ از خط $x=-۲$ برابر ۷ باشد، مختصات A را به‌دست آورید. این مسئله چند جواب دارد؟

۱۶ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۸}{۳}$ باشد.

۱۷ اگر مجموع ریشه‌های معادله $x^۲-(a+۲)x+۲a=۰$ مساوی ۶ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید.

۱۸ با توجه به نمودار زیر، بیشترین مساحت ممکن مستطیل هاشور خورده را تعیین کنید.



۱۹ معادلات زیر را حل کرده و قابل قبول بودن جواب‌ها را بررسی کنید.

الف) $\frac{x+۱}{x-۱}=۱-\frac{۲}{x+۴}$

ب) $\frac{x-۲}{x-۱}+\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{۱}{۲}$

پ) $\sqrt{۲x+۱}=۱-x$

ت) $\sqrt{x+۵}+\sqrt{x}=۵$

۲۰ بیشترین مقدار مساحت زمینی مستطیل شکل که آن را می‌توان با نرده‌ای به طول **۴۸ متر** محصور کرد، چقدر است؟

۲۱ دو دستگاه کلرزن با هم در ۱۲ دقیقه کار کلرزنی به یک منبع آب را تمام می‌کنند. اگر دستگاه‌ها جداگانه کار کنند، دستگاه قدیمی‌تر ۱۰ دقیقه دیرتر از دستگاه جدید کار کلرزنی را انجام می‌دهد.

مشخص کنید هر کدام از این دستگاه‌ها به تنهایی این کار را در چند دقیقه می‌توانند انجام دهد.

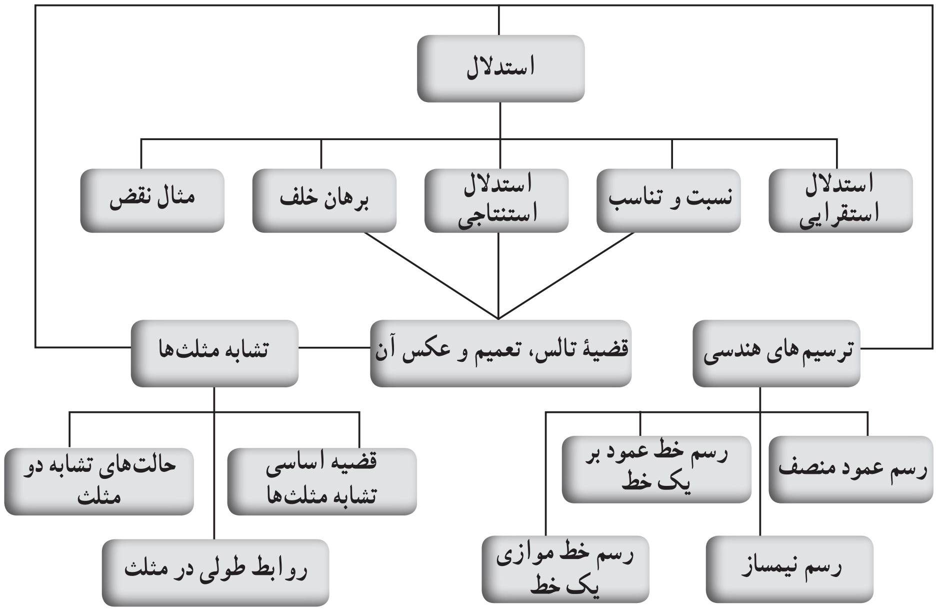
۲۲ دو نقطهٔ $A(۲m+۱,۳)$ و $B(۲-m,-۱)$ را در نظر بگیرید. m را طوری بیابید که خط گذرنده از نقاط A و B بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد.

۲۳ نشان دهید نقاط $A(-۱,-۲)$، $B(-۲,۱)$ و مبدأ بر مختصات، رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.

فصل ۲

هندسه

نقشه مفهومی فصل



تصویر عنوانی

سی‌وسه‌پل اصفهان یا پل اللّٰه وردی خان شاهکاری بی‌نظیر از آثار دوره شاه عباس صفوی است که در انتهای جنوبی خیابان چهارباغ واقع شده است این پل به هزینه و نظارت سردار معروف شاه عباس، اللّٰه‌وردی‌خان بنا شده است از این رو به نام بانی و سازنده آن نیز خوانده می‌شود. سی‌وسه‌پل اصفهان نزدیک به ۳۰۰ متر درازا و ۱۴ متر پهنا دارد و طولانی‌ترین پل زاینده رود است که در سال ۱۰۰۵ هجری ساخته شده است. پل اللّٰه وردی خان (سی‌وسه پل اصفهان) برای اتصال خیابان چهارباغ کهنه عباسی به خیابان چهارباغ بالا و باغ هزار جریب و عباس‌آباد ساخته شده بود. این پل در جشن آبریزگان و آب پاشان محل اجتماع شاه و بزرگان و شعرا و رجال و سایر مردم بوده است. در دوره صفویه، مراسم جشن آبریزان یا آبپاشان ارامنه در کنار این پل صورت می‌گرفت. در این جشن که در ۱۳ تیر ماه هر سال برگزار می‌شد مردم با پاشیدن آب و گلاب روی یکدیگر در این مراسم شرکت می‌کرده‌اند :

سی‌وسه پل اصفهان یک از شاهکارهای معماری وپل‌سازی ایران و جهان در عصر خویش محسوب می‌شود.

این پل اصفهان را به نام‌های : پل شاه عباسی، پل اللّه وردی خان، پل جلفا، پل چهل چشمه، پل سی و سه چشمه و پل زاینده رود خوانده‌اند و وجه تسمیه هر یک چنین است : پل شاه عباسی از آن جهت گویند که شاه عباس اول دستور بنای آن را داده است و چون به مباشرت و اهتمام اللّه وردی خان ساخته شده به پل اللّه وردی خان معروف گردیده و از لحاظ اینکه معبر مردم به جلفا بوده آن را پل جلفا هم گفته‌اند و چون در ابتدا چهل چشمه داشته پل چهل چشمه و چون هفت دهانه این پل گرفته شده و اکنون ۳۳ دهانه دارد اینک سی‌وسه چشمه می‌نامند و سرانجام چون بر روی زاینده رود این پل قرار دارد و بزرگ‌ترین پل زاینده رود است آن را «پل زاینده رود» نیز می‌نامند.

سی‌وسه پل دارای یک پیاده‌رو برای گردش در بالا و یک پیاده رو در پایین است. پیاده‌رو پایین گذرگاه مسقفی است که میان پایه‌های مرکزی پل و به فاصله کمی از بستر رودخانه ایجاد شده است.

از تمام دهانه‌های زیر پل به واسطه درهایی که به هر چشمه گذاشته‌اند می‌توان عبور نمود از پلکانی که در قطر پایه پل ساخته شده از روی پل به زیر چشمه‌ها و طاق‌ها پایین می‌روند و همین‌طور پله‌هایی در دو طرف دارد که به بالای مهتابی روی راهروها صعود می‌نمایند و در دو طرف نرده و محافظی کشیده‌اند که از پرت شدن جلوگیری می‌کنند.

این اثر تاریخی اصفهان در تاریخ ۱۵ دی ۱۳۱۰ با شمارهٔ ثبت ۱۱۰ به‌عنوان یکی از آثار ملی ایران به ثبت رسید.

توصیه‌های آموزشی

به همکاران محترمی که قصد دارند این کتاب را تدریس نمایند پیشنهاد می‌شود حتماً با کتب ریاضی پایه‌های قبل آشنایی پیدا کنند. از آنجا که دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی در پایهٔ دهم هندسه نداشته‌اند، مطالعهٔ مفاهیم هندسی ارائه شده در پایه‌های قبل، به‌خصوص متوسطهٔ اول و آشنایی با رویکرد آموزش هندسه در آن پایه‌ها بسیار مفید خواهد بود.

دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با مفاهیمی مانند نیمساز، عمود منصف توازی و تعامد آشنا هستند اما ترسیمات مرتبط با این مفاهیم را فرا نگرفته‌اند. در این فصل رسم خطوط موازی و عمود و نیمساز یک زاویه و عمودمنصف یک پاره‌خط مطرح شده و برخی خواص آنها بررسی می‌شود. در ادامهٔ مطالب این فصل مفاهیمی از استدلال، قضیهٔ تالس و نیز تشابه مثلث‌ها مطرح می‌شود. در برخی موارد قضیه‌ها و کاربرد آن بدون وارد شدن به اثبات ریاضی خودِ قضیه‌ها مدنظر است. لذا در این موارد اثبات قضیه‌ها آورده نشده است. لازم به ذکر است که دانش‌آموزان از پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شده‌اند و در این کتاب مطالب بیشتری دربارهٔ تشابه مثلث‌ها فرا خواهند گرفت.

درس اول

ترسیم‌های هندسی

اهداف درس

❑ توانایی رسم مثلث، با مشخص بودن اندازهٔ سه ضلع آن

❑ توانایی رسم عمود منصف یک پاره‌خط

❑ درک خاصیت مشترک همهٔ نقاط واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط (یکسان بودن فاصله‌شان از دو سر پاره‌خط)

❑ توانایی رسم نیمساز یک زاویه

❑ درک خاصیت مشترک همهٔ نقاط واقع بر نیمساز یک زاویه (یکسان بودن فاصله‌شان از دو ضلع زاویه)

❑ توانایی رسم خط موازی با یک خط داده شده، از نقطه‌ای خارج آن خط

❑ توانایی رسم خط عمود بر یک خط داده شده، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن خط

❑ توانایی رسم خط عمود بر یک خط داده شده، از نقطه‌ای واقع بر آن خط

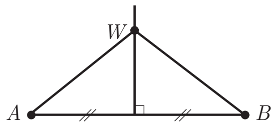
پیش‌نیازها

❑ تعاریف خط، نیم‌خط، پاره‌خط، دایره، زاویه، نیمساز، عمودمنصف، دو خط موازی، دو خط عمود بر هم را بدانند و مثلث و اجزای آن را بشناسند.

❑ هم‌نهشتی مثلث‌ها و حالت‌های آن و قضیه خطوط موازی را بداند.

شرح برخی از فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها

برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن



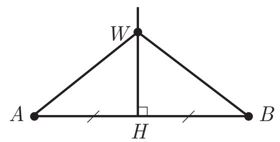
۱ در شکل مقابل پاره‌خط AB و عمود منصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دو سرِ AB به یک فاصله است.

نشان می‌دهیم دو مثلث AWH و BWH هم‌نهشت هستند

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ WH = WH \ (\text{ضلع مشترک}) \\ AH = BH \ (\text{فرض مسئله } WH \text{ عمودمنصف است}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\Delta}{W}H \cong B\overset{\Delta}{W}H \Rightarrow AW = BW$$

> **نتیجهٔ ۱** : هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

سؤال ۲ : این قسمت عکس خاصیت عمودمنصف را بیان خواهد کرد و نتیجه ۲ آن را در قالب یک ویژگی ارائه می‌دهد.



۲ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(**راهنمایی** : از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.)

نشان می‌دهیم دو مثلث AWH و BWH هم‌نهشت هستند.

$$\begin{cases} AH = BH \ (H \text{ وسط } AB \text{ است}) \\ AW = BW \ (\text{فرض مسئله}) \\ WH = WH \ (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\overset{\Delta}{W}H \cong B\overset{\Delta}{W}H \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

$$\text{و} \xrightarrow{\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

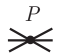
بنابراین WH عمودمنصف AB است لذا W روی عمودمنصف AB قرار گرفته است.

نتیجهٔ ۲ : هر نقطه که از دوسر یک پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد روی عمودمنصف پاره‌خط است.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد ازدو سر پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت صفحه ۲۷ با رسیدن به این نتیجه که برای مشخص کردن یک خط داشتن ۲ نقطه از آن لازم و کافی است، به رسم عمودمنصف یک پاره‌خط می‌پردازد.

فعالیت صفحه ۲۷



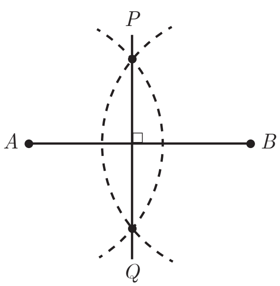
۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟ بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد.

۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند؟ تنها یک خط می‌توان رسم کرد.

۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟ ۲ نقطه

در ادامه در پایین صفحه ۲۷ روش رسم عمودمنصف پاره‌خط AB بیان می‌شود.

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده



می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.

۱ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

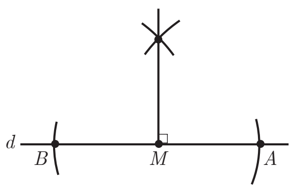
بله ــ زیرا از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله هستند.

۳ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟ بله ــ زیرا طبق فعالیت قبل هر خط با داشتن دو نقطه از آن کاملاً مشخص می‌شود.

۴ حال عمودمنصف AB را رسم کنید. با رسم خطی که از دو نقطه P و Q عبور می‌کند عمودمنصف AB رسم می‌شود.

در صفحه ۲۸ روش رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن و از نقطه‌ای غیرواقع بر آن توضیح داده شده است. بهتر است دانش‌آموزان به‌صورت انفرادی یا گروه‌های ۴ــ۳ نفری مراحل را انجام دهند و در نهایت شما نظر کامل و دقیق را بیان کنید.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن



خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

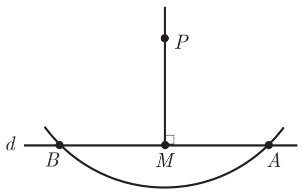
۱ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید که $AM=MB$ باشد. دهانه پرگار را به میزان دلخواه باز می‌کنیم و کمان می‌زنیم. محل برخورد کمان با خط d را A و B می‌نامیم در این صورت $NA = MB$

۲ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. روش رسم توضیح داده شده است.

۳ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود است و از نقطهٔ M می‌گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطهٔ P مانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.



۱ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند. دهانه پرگار را کمی بیشتر از فاصله نقطه P تا خط d باز می‌کنیم و کمان می‌زنیم محل برخورد کمان با خط d را A و B می‌نامیم در این صورت $PA = PB$.

۲ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. روش رسم توضیح داده شده است.

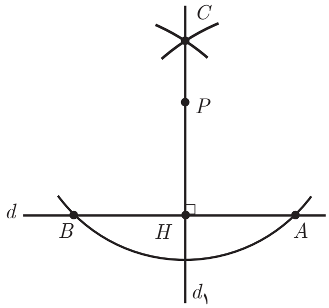
۳ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟ بله. زیرا نقطه P از دو نقطه A و B به یک فاصله است لذا روی عمودمنصف AB قرار دارد.

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d عمود است و از نقطهٔ P عبور می‌کند.

در ادامه صفحه ۲۸ رسم خط موازی با یک خط بیان شده است. و روش آن استفاده از دو خط عمود متوالی است. با توجه به وقت‌گیر بودن این رسم، زمان مناسب برای اجرای آن در کلاس را درنظر داشته باشید.

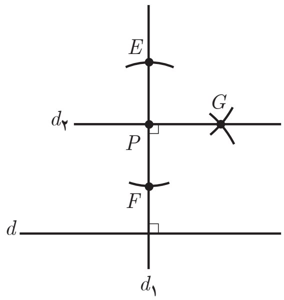
رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.



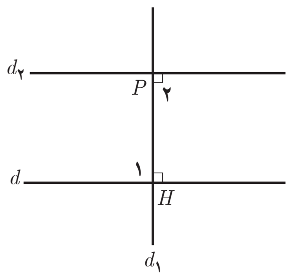
۱ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

از نقطه P عمود برخط d رسم می‌کنیم و آن را d_1 می‌نامیم روش رسم توضیح داده شده است.



۲ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

خطی رسم می‌کنیم که از نقطه P عبور کند و بر d_1 عمود باشد این خط را d_2 می‌نامیم.

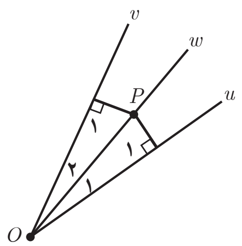


۳ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید).

با استفاده از قضیه عکس خطوط موازی چون $\hat{P}_2 = \hat{H}_1$ لذا دو خط d و d_2 با هم موازی هستند.

در پایین صفحه ۲۸ دانش‌آموز به درک «خاصیت نیمساز» می‌رسد و ادامه این قسمت در صفحه ۲۹ «عکس خاصیت نیمساز» را آموزش می‌دهد. نتیجه سومی که در صفحه ۲۹ قرار دارد، ترکیب خاصیت و عکس خاصیت نیمساز در صورت یک قضیه دو شرطی است. بکوشید این نتیجه با جمله‌بندی صحیح خود دانش‌آموزان تکمیل شود.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن



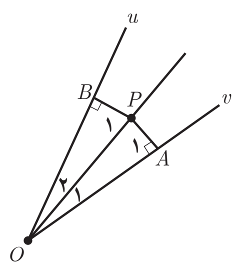
۱ در شکل مقابل نیم‌خط Ow نیمساز زاویهٔ vOu است. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)

ابتدا نشان می‌دهیم دو مثلث AOP و BOP هم‌نهشت هستند.

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ \\ OP = OP \ (\text{مشترک}) \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \ \left(\begin{matrix} OW \text{ نیمساز} \\ vOu \text{ است} \end{matrix}\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر یک زاویه حاده}} \overset{\Delta}{AOP} \cong \overset{\Delta}{BOP} \Rightarrow AP = BP$$

لذا فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه vOu یکسان است.

نتیجه۱ : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



۲ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. نشان دهید که نقطهٔ P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

(**راهنمایی** : پاره‌خط OP را و دو عمود از نقطهٔ P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ uOvاست.)

ابتدا نشان می‌دهیم دو مثلث AOP و BOP هم‌نهشت هستند.

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ \\ OP = OP \ (\text{مشترک}) \\ AP = BP \ (\text{فرض مسئله}) \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{BOP} \cong \overset{\Delta}{AOP} \Rightarrow P\hat{O}v = P\hat{O}u$$

لذا OP نیمساز زاویه uOv است.

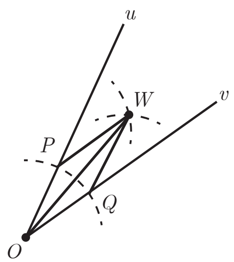
نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

قسمت شماره **۳** صفحه **۲۹** روش رسم نیمساز را توضیح می‌دهد. می‌توانید پس از انجام مرحله به مرحله این فعالیت از یک یا چند دانش‌آموز بخواهید تا روش رسم نیمساز را برای کل کلاس توضیح دهند.

رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویهٔ uOv را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.



ـ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟ با یکدیگر برابرند.

ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟ با هم برابرند.

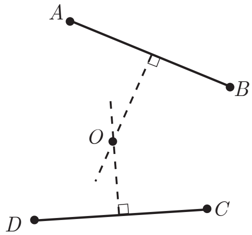
پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با یکدیگر هم‌نهشت هستند زیرا :

$$\begin{cases} OP = OQ \ (\text{الف}) \\ PW = QW \ (\text{ب}) \\ OW = OW \ (\text{مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{Q}W \cong O\overset{\Delta}{P}W$$

ـ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ برابرند. چون مثلث POW و OQW هم‌نهشت هستند. لذا $P\hat{O}W = Q\hat{O}W$

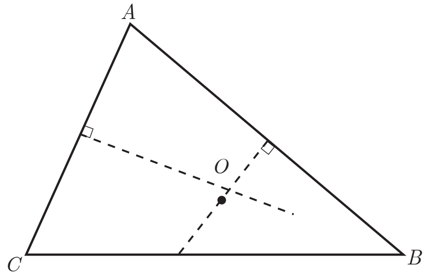
ـ پاره‌خط OW نیمساز زاویهٔ uOv است.

حل تمرین‌های درس اول

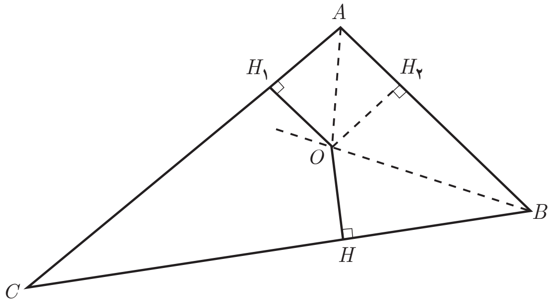


۱ الف) با توجه به صورت سؤال نقطهٔ موردنظر باید هم بر عمودمنصف AB و هم بر عمودمنصف CD واقع باشد، پس محل برخورد این دو عمودمنصف است.

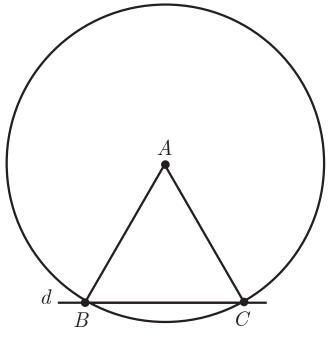
ب) طبق (الف) داریم $OD = OC$ و $OA = OB$، حال اگر نقطهٔ O روی عمودمنصف BC نیز باشد، در این‌صورت داریم $OB = OC$ بنابراین دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA رسم شود از هر ۴ نقطهٔ A و B و C و D خواهد گذشت.



۲ از آنجا که نقطهٔ O روی عمودمنصف AB است داریم $OA = OB$ و از آنجا که نقطهٔ O روی عمودمنصف CD است داریم $OA = OC$ بنابراین $OB = OA = OC$، لذا دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA رسم شود از هر سه رأس مثلث می‌گذرد یعنی دایرهٔ محیطی برای مثلث ABC است.

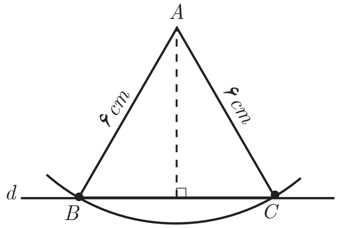


۳ چون O روی نیمساز زاویهٔ A است، پس $OH_1 = OH_2$ و چون O روی نیمساز زاویهٔ B است، پس $OH_2 = OH$ بنابراین $OH_1 = OH_2 = OH$ و لذا دایره‌ای که به مرکز O و شعاع OH رسم می‌شود از هر سه نقطهٔ H و H_1 و H_2 می‌گذرد و لذا هر سه ضلع مثلث بر این دایره مماس‌اند.

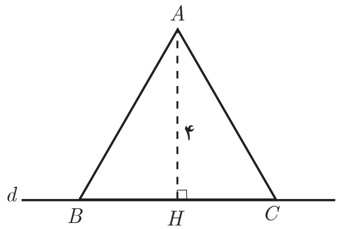


۴ الف) کافی است دایره‌ای به مرکز A و به شعاع بیش از ۴ سانتی‌متر رسم کنیم و نقاط برخورد این دایره با خط d را B و C بنامیم. در این صورت $\overset{\Delta}{ABC}$ ، جواب مسئله است.

ب) مانند قسمت الف مسئله را حل می‌کنیم ولی این‌بار دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم.



پ) اگر چنین مثلثی رسم شده باشد، داریم :



$$S=\frac{AH\times BC}{۲}\Rightarrow ۸=\frac{۴\times BC}{۲}\Rightarrow BC=۴$$

لذا $HC=۲$ و بنابراین $AC=\sqrt{۴^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۵}$. بنابراین کافی است کمانی به مرکز A و شعاع $۲\sqrt{۵}$ بزنیم.

درس دوم

استدلال و قضیه تالس

اهداف کلی فصل دوم:

- ❑ درک برخی خواص تناسب
- ❑ درک قضیهٔ تالس، عکس و تعمیم آن و توانایی کاربرد آن در حل مسائل
- ❑ درک استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، برهان خلف، مثال نقض، عکس قضیه و قضیه‌های دو شرطی

دانش‌آموزان با نسبت و تناسب در سال‌های قبل آشنا شده‌اند. با یادآوری خواصی که می‌توانند در اثبات قسمت‌های مختلف کار در کلاس از آنها استفاده کنند سعی کنید به آنها در انجام اثبات کمک نمایید و سپس با هدایت آنها به انجام کار در کلاس سعی کنید تسلط آنها را در درک و انجام خواص مختلف در تناسب‌ها بالا ببرید. توجه داشته باشید که دانستن این ویژگی‌ها در سایر اثبات‌های ریاضی کاربرد دارد لذا داشتن فهم درست از این مفاهیم توسط دانش‌آموزان مهم است اما با این حال وارد شدن به حیطه‌های غیرمفید و طرح سؤال‌های تستی ناکارا از اهداف این درس نیست.

شرح برخی از فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها

کار در کلاس صفحه ۳۱ و ۳۲

۱ با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ (طرفین وسطین)

طرفین تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در عدد غیرصفر bd ضرب می‌کنیم

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd \Rightarrow ad=bc$$

(تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب) ب) $ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

طرفین تساوی $ad = bc$ را بر عدد غیرصفر bd تقسیم می‌کنیم

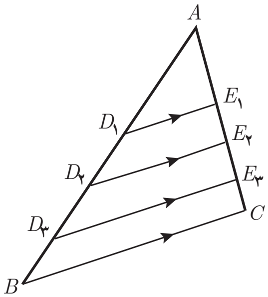
$$ad \div bd = bc \div bd \Rightarrow ad\times\frac{۱}{bd}=bc\times\frac{۱}{bd}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

(معکوس کردن تناسب) پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

در ادامهٔ مفاهیم این درس سعی شده آنچه در مورد استدلال، دانش‌آموز باید فرا گیرد در دل مفاهیم هندسی‌ای که باید یاد بگیرد آورده شود، زیرا طبق برنامه‌ریزی انجام شده این مفاهیم از استدلال باید در فصل هندسه آورده می‌شدند و اختصاص دادن فصلی جداگانه به آنها باعث بالا رفتن حجم کتاب می‌شد. بنابر آنچه گفته شد معلم محترم باید دقت نماید که یادگیری هم در مفاهیمی از استدلال که بیان شده‌اند و هم در مفاهیم هندسی بیان شده صورت گیرد. ممکن است برای درک مفاهیم استدلال که در این درس آورده شده‌اند به تشخیص معلم و با توجه به وضعیت کلاس نیاز به مطرح کردن مثال‌هایی بیشتر باشد. البته دانش‌آموزان با استدلال‌های استنتاجی و استقرایی بدون مطرح شدن نام آنها آشنا شده‌اند. همچنین با مثال نقض نیز از پایهٔ نهم آشنایی دارند.

پیش از ورود به تدریس، درباره اهمیت استدلال در زندگی و قضاوت عادلانه با دانش‌آموزان سخن بگویید و ریاضیات و هندسه را به عنوان علمی بنا شده بر پایه استدلال و منطق، به آنها معرفی کنید.

صفحه ۳۳ با چند پرسش آغاز شده است که دانش‌آموزان را به یک حدس کلی در مورد خط موازی در مثلث و نسبت‌های به وجود آمده هدایت می‌کند اما برای این حدس اثباتی آورده نمی‌شود.

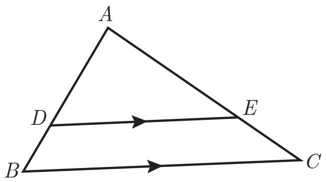


ـ اندازهٔ پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید.

$$\frac{AD_۱}{D_۱B} \longleftrightarrow \frac{AE_۱}{E_۱C}$$

$$\frac{AD_۲}{D_۲B} \qquad \frac{AE_۳}{E_۳C}$$

$$\frac{AD_۳}{D_۳B} \qquad \frac{AE_۲}{E_۲C}$$



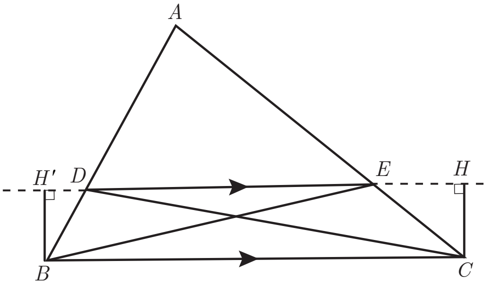
ـ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟ خیر ــ زیرا با دیدن چند مثال، مسئله ثابت نمی‌شود.

پس از این قسمت تعریف استدلال استقرایی و استنتاجی آورده می‌شود. معلم می‌تواند با درنظر گرفتن شرایط کلاس مثال‌های دیگری از استدلال‌ها مطرح کند.

فعالیت صفحه ۳۴

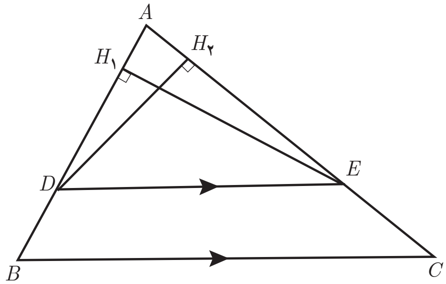


فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟ از B و C بر امتداد DE عمود رسم می‌کنیم. چهارضلعی $BCHH'$ مستطیل است. بنابراین دو ضلع BH' و CH برابر هستند.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{DEC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEB}}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times \cancel{CH}\times \cancel{DE}}{\cancel{\frac{1}{2}}\times \cancel{BH'}\times \cancel{DE}}=1\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DEC}}=S_{\overset{\Delta}{DEB}}$$



۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

۳
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{1}{2}EH_1\times AD}{\frac{1}{2}EH_1\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

۴
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{1}{2}DH_2\times AE}{\frac{1}{2}DH_2\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

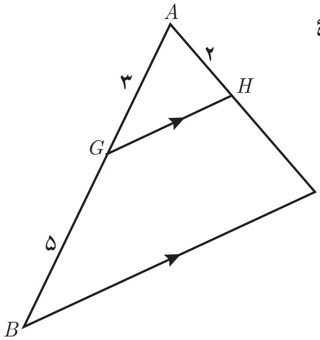
۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. چرا؟ طبق قسمت۱ داریم

$$S_{\overset{\Delta}{DEB}}=S_{\overset{\Delta}{DEC}}$$

بنابراین
$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}\xrightarrow{4,3}\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

پس از اینکه قضیه تالس بیان شد از دانش‌آموزان خواسته شود کار در کلاس صفحه ۳۴ را حل کنند. معلم می‌تواند در این قسمت مثال‌های بیشتری را برای استفاده از قضیه تالس مطرح کند.

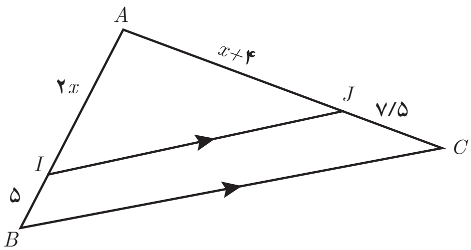
کار در کلاس صفحه ۳۴



۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.

$$GH \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AG}{GB} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{HC} \Rightarrow HC = \frac{۱۰}{۳}$$

$$AC = AH + HC = ۲ + \frac{۱۰}{۳} = \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow AC = \frac{۱۶}{۳}$$



۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$$IJ \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC} \Rightarrow$$

$$\frac{۲x}{۵} = \frac{x+۴}{۷/۵} \Rightarrow ۱۵x = ۵x + ۲۰ \Rightarrow x = ۲$$

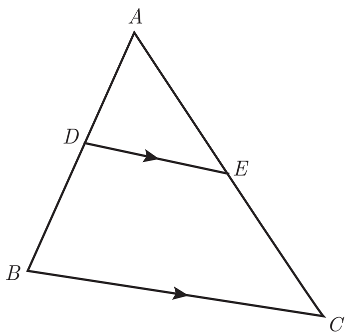
در ادامه در فعالیت صفحه ۳۵ تعمیم و نتایج قضیه تالس خواسته شده است که بهتر است معلم کمک کند دانش‌آموزان گام به گام به سؤالات پاسخ دهند. پس از انجام کار در کلاس می‌توانید مسائل بیشتری از قضیه تالس و تعمیم و نتایج آن در کلاس مطرح نمایید.

فعالیت صفحه ۳۵

۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

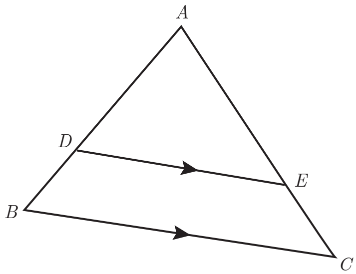


ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AD}{DB+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

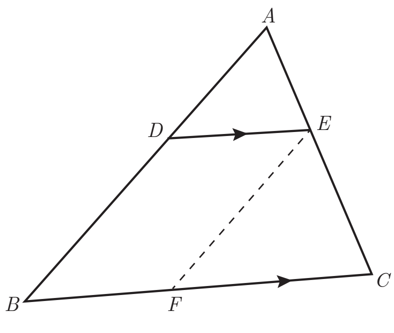
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AB-AD}{AB}=\frac{AC-AE}{AC}\Rightarrow\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$



۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسبِ قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\begin{cases}\frac{DB}{DA}=\frac{EC}{EA} \quad \frac{BD}{BA}=\frac{CE}{CA} \quad \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}\\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\end{cases}$$

۳



الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$

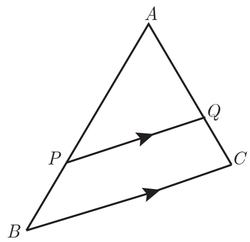
ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ متوازی‌الاضلاع. زیرا اضلاع آن دو به دو موازی هستند.

پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF=DE$

ث) با توجه به قسمت‌های (پ) و (ت) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

کار در کلاس صفحه ۳۶

در شکل پاره‌خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$ نادرست

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ درست

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$ نادرست

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ نادرست

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$ درست

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$ درست

صفحه ۳۶ با تعریف «عکس یک قضیه» و ارائه چند مثال، درس را ادامه می‌دهد.

صرف وقت در این موضوع برای رسیدن به تسلط، حائز اهمیت است. لازم است دانش‌آموزان بتوانند فرض و حکم مسئله را یافته و با جابه جایی آنها، عکس قضیه را به وجود آورند.

استدلال غیرمستقیم یا برهان خلف، نوعی از استدلال است که با فرض نادرست بودن حکم آغاز می‌شود و به تناقض با یکی از فرض‌های مسئله یا حقایق دانسته شده ریاضی می‌رسد. مسائلی که در این درس مطرح شده‌اند، هر دو نوع تناقض را پوشش می‌دهد. در مثال صفحه ۳۷ و مثال‌های صفحه ۳۸ با فرض مسئله به تناقض می‌رسیم و در تمرین ۸ صفحه ۴۱ با تناقض با حقایق دانسته به تناقض می‌رسیم.

در ادامه عکس قضیه تالس نیز با برهان خلف اثبات می‌شود.

در پایین صفحه ۳۸ قضیه تالس و عکس آن به‌صورت یک قضیه دو شرطی بیان شده است. قضیه‌های دوشرطی با نماد « $\Leftrightarrow$ » نوشته شده و اصطلاح‌های «اگر و تنها اگر» یا «اگر و فقط اگر» برای بیان کلامی آن استفاده می‌شود. در کار در کلاس صفحه ۳۹ عکس قضیه فیثاغورس بیان و اثبات می‌شود و در انتها قضیه فیثاغورس و عکس آن به صورت قضیه دو شرطی نوشته می‌شود.

مثال نقض، مثالی است که یک حکم کلی را باطل می‌کند، گاهی اوقات مثال نقض نشان می‌دهد حدسی که از طریق استدلال استقرایی به آن رسیده‌ایم نادرست است و دارای نمونه‌ای است که در آن حدس کلی صدق نمی‌کند.

حتماً دانش‌آموزان را به این نکته توجه دهید که اگر برای یک حدس یا حکم کلی نتوانستیم مثال نقض بیاوریم، دلیل بر درستی آن حدس نیست. ممکن است تلاش بیشتر، ما را به مثال نقض برساند. ضمن آنکه برای اثبات حکم کلی نیازمند به استدلال استنتاجی هستیم.

حل تمرین‌های درس دوم

۱ $S=\frac{AH\times BC}{۲}$ ، $S=\frac{AB\times AC}{۲}\Rightarrow AH\times BC=AB\times AC\Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AH}$

۲ الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}\Rightarrow \frac{a}{۱۰+a-a}=\frac{b}{۸+b-b}\Rightarrow \frac{a}{۱۰}=\frac{b}{۸}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۵}{۴}$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}\Rightarrow \frac{(۳a+۱۰)-(۱۰+۲a)}{۱۰+۲a}=\frac{(۳b+۷)-(۷+۲b)}{۷+۲b}$

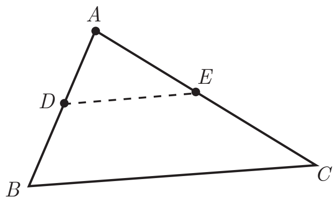
$\Rightarrow \frac{a}{۱۰+۲a}=\frac{b}{۷+۲b}\xrightarrow{\times ۲}\frac{۲a}{۱۰+۲a}=\frac{۲b}{۷+۲b}$

$\Rightarrow \frac{۲a}{۱۰+۲a-۲a}=\frac{۲b}{۷+۲b-۲b}\Rightarrow \frac{۲a}{۱۰}=\frac{۲b}{۷}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$

۳ داریم $AB=۲AD$ و $AC=۲AE$ پس $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۲}$
و بنابر قضیهٔ تالس و تعمیم آن داریم :

$\frac{۱}{۲}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ و $DE\parallel BC$

و بنابراین $DE=\frac{BC}{۲}$

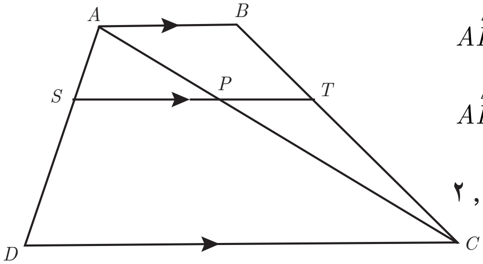


۴ $PQ\parallel BC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow \frac{AP}{۶}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AP=۴$

$PQ\parallel BC\xrightarrow{\text{نتایج تالس}}\frac{PQ}{BC}=\frac{AQ}{AC}\Rightarrow \frac{PQ}{۹}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow PQ=۳/۶$

۵ $\frac{AS}{AB}=\frac{AT}{AC}=\frac{ST}{BC}\Rightarrow \frac{۸}{۱۲}=\frac{۶}{۴x+۱}=\frac{۳y+۳}{۳y+۹}$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴x+۱=\frac{۶\times ۱۲}{۸}=۹\Rightarrow x=۲\\ ۲۴y+۷۲=۳۶y+۳۶\Rightarrow ۳۶=۱۲y\Rightarrow y=۳\end{cases}$$



۶ $\overset{\Delta}{ADC}:\ SP \parallel DC \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{AP}{PC}$ ۱

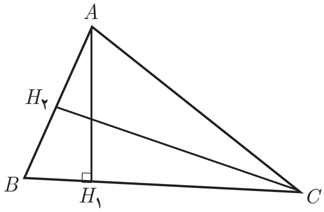
$\overset{\Delta}{ABC}:\ PT \parallel AB \Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{BT}{TC}$ ۲

۲ , ۱ $\Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

۷ الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع آن مثلث نیز برابر خواهند بود.

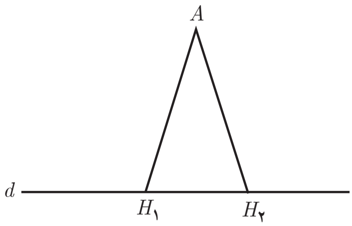
ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل با هم برابر باشند آنگاه اضلاع مقابل موازی‌اند.

پ) اگر زوایای مقابل در یک چهارضلعی مکمل باشند آنگاه رأس‌های آن چهارضلعی روی یک دایره قرار می‌گیرند.



ت) $AH_{۱} < AH_{۲} \Rightarrow BC > AB$

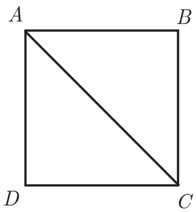
عکس آن : $BC > AB \Rightarrow AH_{۱} < AH_{۲}$



۸ فرض کنیم برخلاف، بتوان از نقطه‌ای مانند A دو ارتفاع $AH_{۱}$ و $AH_{۲}$ را بر خط d رسم کرد.

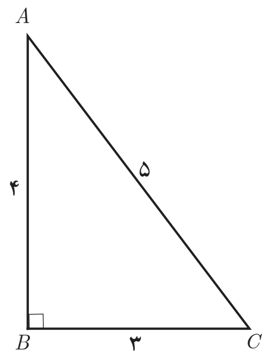
بنابراین مجموع دو زاویه از مثلث $AH_{۱}H_{۲}$ برابر ۱۸۰° است و لذا مجموع سه زاویه از ۱۸۰° بیشتر است که غیرممکن است لذا فرض امکان رسم دو ارتفاع از نقطهٔ A غلط است.

۹ الف) ۱۳۱ یک عدد اول و بزرگ‌تر از ۱۲۷ است.

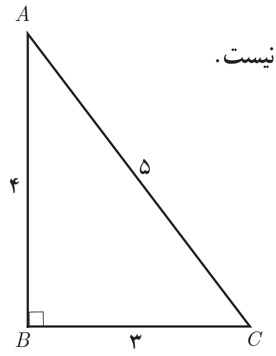


ب) در شکل مقابل مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ از مساحت $ABCD$ کمتر است.

پ) AB ارتفاع است و از BC بزرگ‌تر است.



ت) در مثلث ABC میانهٔ وارد بر AC بر عمودمنصف ضلع AC منطبق نیست.



درس سوم

تشابه مثلث‌ها

اهداف

۱ درک قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها و توانایی کاربرد آن در حل مسائل

۲ حالت‌های تشابه دو مثلث رابشناسد و از آنها در حل مسائل کمک بگیرد.

۳ روابط طولی مطرح شده را فرا گیرد و آنها را در حل مسائل به‌کار گیرد.

پیش‌نیازها

❑ مفهوم تشابه را بداند و با تعریف آن آشنا باشد.

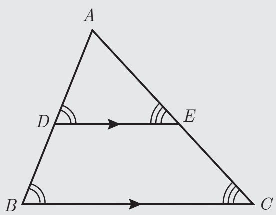
روش تدریس

دانش‌آموزان در پایهٔ نهم مفهوم تشابه را فراگرفته‌اند. با یادآوری مختصری از تعریف تشابه دو چندضلعی می‌توان آن‌را برای مثلث مطرح نمود. همان‌طور که در کتاب درسی ملاحظه می‌نمایید اثبات قضایای تشابه دو مثلث مطرح نشده است لذا این اثبات‌ها جزء اهداف این درس نمی‌باشند و در اینجا تنها کاربرد این قضیه‌ها در حل مسائل مطرح است.

در ابتدای درس قضیه اساسی تشابه به همراه اثبات آن آورده شده است

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات :

۱ داریم $\hat{E}=\hat{C}$ و $\hat{D}=\hat{B}$ (چرا؟) دو خط DE و BC موازی هستند و خط AC مورب است لذا $\hat{E}=\hat{C}$

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابرند. به همین صورت $\hat{D}=\hat{B}$

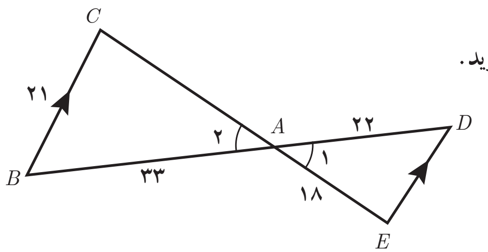
۲ با توجه به قضیهٔ تالس داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

۳ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم : $A\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C$

پس از اینکه قضایای تشابه دو مثلث برای دانش‌آموزان بیان شد از دانش‌آموزان خواسته شود تا به حل کار در کلاس صفحه ۴۳ و ۴۴ بپردازند.

کار در کلاس صفحه ۴۳

۱ درشکل مقابل $BC \| DE$.
اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید.



$$\begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ BC \parallel ED \ , \ \underset{\text{مورب}}{CE} \Rightarrow \hat{C}=\hat{E} \end{cases} \xrightarrow{\text{دو زاویه برابر}} A\overset{\Delta}{B}C \sim A\hat{E}D$$

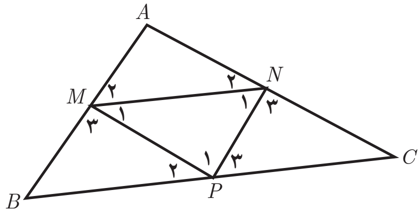
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۲۲}{۳۳}=\frac{۱۸}{AC} \Rightarrow AC=۲۷$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{۲۲}{۳۳}=\frac{ED}{۲۱} \Rightarrow ED=۱۴$$

۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل :

الف) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$ چرا؟



$$\begin{cases} \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC} = ۱ \xRightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC \\ \dfrac{BM}{MA} = \dfrac{BP}{PC} = ۱ \xRightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MP \parallel AC \\ \dfrac{CP}{CB} = \dfrac{CN}{NA} = ۱ \xRightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PN \parallel AB \end{cases}$$

ب) بنابراین $\hat{C} = \hat{P}_{۲} = \hat{M}_{۱}$ و $\hat{B} = \hat{P}_{۳} = \hat{N}_{۱}$ (چرا؟)

$$\left.\begin{cases} MN \parallel BC \ , \ \text{مورب} \ \ NP \Rightarrow \hat{N}_{۱} = \hat{P}_{۳} \\ NP \parallel AB \ , \ \text{مورب} \ \ BC \Rightarrow \hat{B} = \hat{P}_{۳} \end{cases}\right\} \Rightarrow \hat{N}_{۱} = \hat{P}_{۳} = \hat{B}$$

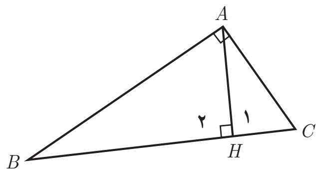
به همین صورت $\hat{M}_{۱} = \hat{P}_{۲} = \hat{C}$

از (ب) دربارهٔ مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ متشابه هستند.

فعالیت صفحه ۴۴

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید :



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC}$$

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{C} \ (\text{مشترک}) \\ \hat{A} = \hat{H}_{۱} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC}$$

۲ نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید :

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB}$$

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B} \ (\text{مشترک}) \\ \hat{A} = \hat{H}_{۲} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABH}$$

۳ از (۱) و(۲) دربارهٔ مثلث های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
با استفاده از سؤال ۳ کار در کلاس صفحه ۴۴ دو مثلث ACH و ABH متشابه هستند.

۴ $$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BC}=\frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^{۲}=HC\times BC$$

۵ $$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}=\frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^{۲}=HB\times BC$$

۶ $$\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{HB}=\frac{AC}{AB}=\frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^{۲}=HC\times HB$$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$AC^{۲}= HC\times BC$

$AB^{۲}= HB\times BC$

$$AB^{۲}+AC^{۲}=HC\times BC+HB\times BC=BC(\underbrace{HC+HB}_{BC})=BC^{۲}$$
$$\Rightarrow AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$$

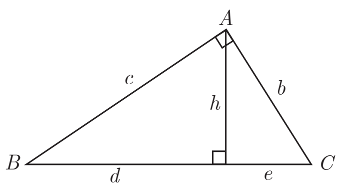
۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

$AB\times AC=AH\times BC$

$$\left.\begin{aligned} S_{\overset{\Delta}{ABC}} &= \frac{AB\times AC}{۲} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} &= \frac{AH\times BC}{۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AB\times AC}{۲}=\frac{AH\times BC}{۲} \Rightarrow AB\times AC=AH\times BC$$

در کار در کلاس صفحه ۴۵ از برخی از نتایج فعالیت ۴۴ برای به‌دست آوردن مقادیر مجهول استفاده می‌کنیم.

کار در کلاس صفحه ۴۵



درمثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.

۱ $h=۵$ $d=۷$ $e=?$

$$h^{۲}=d\times e \Rightarrow ۵^{۲}=۷\times e \Rightarrow e=\frac{۲۵}{۷}$$

۲ $d=۵$ $e=۳$ $b=?$ $c=?$

$$b^۲=e(e+d)\Rightarrow b^۲=۳\times۸\Rightarrow b=\sqrt{۲۴}\Rightarrow b=۲\sqrt{۶}$$

$$c^۲=d(e+d)\Rightarrow c^۲=۵\times۸\Rightarrow c=\sqrt{۴۰}\Rightarrow c=۲\sqrt{۱۰}$$

۳ $c=۸$ $b=۶$ $h=?$

$$c^۲+b^۲=(d+e)^۲\Rightarrow ۸^۲+۶^۲=(d+e)^۲\Rightarrow d+e=۱۰$$

$$b\times c=(d+e)\times h\Rightarrow ۶\times۸=۱۰\times h\Rightarrow h=۴/۸$$

حل تمرین‌های درس سوم

۱ الف) $\frac{a}{۲a}=\frac{b}{۲b}=\frac{c}{۲c}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$ دو مثلث متشابه‌اند (ض ض ض)

$$\Rightarrow x=۱۸۰-۶۰-۲۰=۱۰۰$$

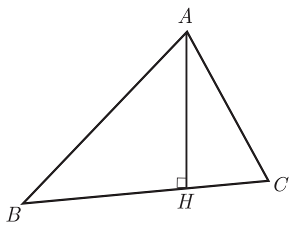
ب) $\frac{۳}{۶}=\frac{۲}{۴}\ ,\ \hat{c_۱}=\hat{c_۲}\Rightarrow$ دو مثلث متشابه‌اند (ض ز ض)

$$\Rightarrow\frac{۳}{۶}=\frac{۲}{۴}=\frac{۲/۵}{x}\Rightarrow x=۵$$

پ) دو مثلث به حالت دو زاویه متشابه‌اند $\Rightarrow\frac{۴}{۱۲}=\frac{\frac{۲۰}{۳}}{y}=\frac{x}{۱۶}$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۶}{۳}\qquad ,\qquad y=۲۰$$

۲ الف) مثلث‌های به‌وجود آمده متشابه هستند.



$$CH=BC-BH=۱۰-۹=۱$$

$$AH^۲=BH\times CH\Rightarrow AH^۲=۹\times۱\Rightarrow AH=۳$$

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow AB^۲=۹\times۱۰\Rightarrow AB=\sqrt{۹۰}=۳\sqrt{۱۰}$$

$$AC^۲=CH\times BC\Rightarrow AC^۲=۱\times۱۰\Rightarrow AC=\sqrt{۱۰}$$

اگر ابتدا AB و AC را به‌دست آوریم می‌توان با استفاده از رابطه $AB\times AC=AH\times BC$ اندازه AH را محاسبه کرد.

$$۳\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}=AH\times۱۰\Rightarrow AH=۳$$

ب)
$$AC^{۲} = CH \times BC \Rightarrow ۵^{۲} = ۲ \times BC \Rightarrow BC = \frac{۲۵}{۲}$$

$$BH = BC - CH \Rightarrow BH = \frac{۲۵}{۲} - ۲ = \frac{۲۱}{۲}$$

$$AH^{۲} = BH \times CH \Rightarrow AH^{۲} = ۲ \times \frac{۲۱}{۲} \Rightarrow AH = \sqrt{۲۱}$$

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow AB^{۲} = \frac{۲۱}{۲} \times \frac{۲۵}{۲} = \frac{۵۲۵}{۴} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{۵۲۵}}{۲}$$

پ) ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث ABC، اندازه BC را به‌دست می‌آوریم.

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۸^{۲} + ۶^{۲} \Rightarrow BC = ۱۰$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۰ = ۶ \times ۸ \Rightarrow AH = ۴/۸$$

ت) ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث ABH اندازه BH را محاسبه می‌کنیم.

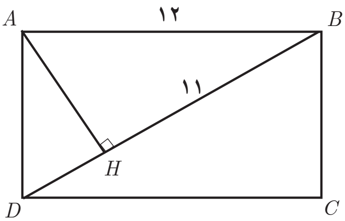
$$BH^{۲} = AB^{۲} - AH^{۲} \Rightarrow BH^{۲} = ۱۲^{۲} - ۶^{۲} \Rightarrow BH = \sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$$

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۱۲^{۲} = ۶\sqrt{۳} \times BC \Rightarrow BC = \frac{۱۴۴}{۶\sqrt{۳}} = ۸\sqrt{۳}$$
$$CH = BC - BH \Rightarrow CH = ۸\sqrt{۳} - ۶\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$
$$AC^{۲} = CH \times BC \Rightarrow AC^{۲} = ۲\sqrt{۳} \times ۸\sqrt{۳} \Rightarrow AC^{۲} = ۴۸ \Rightarrow AC = ۴\sqrt{۳}$$

سایر تمرین‌ها نیز به طریق مشابه با روابط طولی مطرح شده در درس حل می‌شوند.

۳

$$AH = \sqrt{۱۲^{۲} - ۱۱^{۲}} = \sqrt{۱۴۴ - ۱۲۱} = \sqrt{۲۳}$$



$$AH \;\; = DH \times HB \Rightarrow ۲۳ = DH \times ۱۱ \Rightarrow DH = \frac{۲۳}{۱۱}$$

$$\Rightarrow BD = ۱۱ + \frac{۲۳}{۱۱}$$

$$AD = \sqrt{BD^{۲} - AB^{۲}} = \sqrt{(۱۱ + \frac{۲۳}{۱۱})^{۲} - ۱۲^{۲}}$$

سؤالات ارزشیابی فصل هندسه

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) نقطه برخورد سه نیمساز مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است.

ب) نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر در دو مثلث برابر است.

۲ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

هر گاه خطی روی دو ضلع مثلث، پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث .... است.

۳ گزینه درست را انتخاب کنید.

الف) کدام‌یک از نقاط زیر از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است؟

۱ـ نقطه برخورد سه میانه		۲ـ نقطه برخورد سه ارتفاع

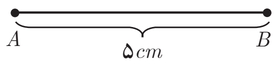
۳ـ نقطه برخورد سه عمودمنصف		۴ـ نقطه برخورد سه نیمساز

۴ در هندسه چه زمانی از مثال نقض استفاده می‌کنیم؟

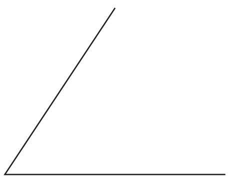
۵ الف) نقاطی را مشخص کنید که از نقطه O به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند.

ب) نقاطی را مشخص کنید که از نقطه O به فاصله کمتر از ۳ سانتی‌متر هستند.

۶ نقاطی را مشخص کنید که از نقاط A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند.

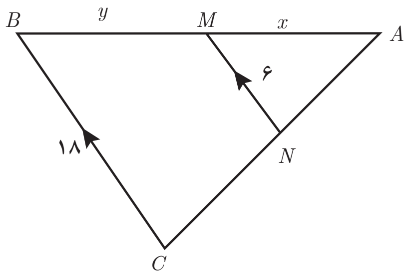


۷ نیمساز زاویه زیر را به کمک خط‌کش و پرگار رسم کنید و مراحل رسم را توضیح دهید.

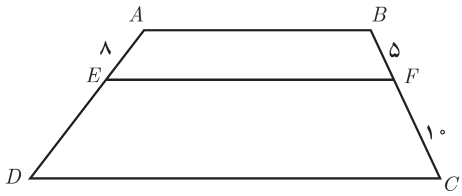


۸ یک مثلث دلخواه رسم کنید. آیا می‌توان دایره‌ای رسم کرد که این دایره از سه رأس مثلث بگذرد؟ مرکز این دایره کجاست؟

۹ در شکل مقابل $MN \| BC$ و $AB = ۶۰$. مقدار x و y را به‌دست آورید.



۱۰ در ذوزنقه مقابل $AB \| CD \| EF$. اندازه DE را به‌دست آورید.



۱۱ برای هر یک از حکم‌های کلی زیر، یک مثال نقض بیاورید.

الف) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^{n} - ۱$ اول خواهد بود.

ب) محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث، داخل مثلث است.

پ) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۳۷ وجود ندارد.

ت) مساحت هر مربع از مساحت هر مثلث بیشتر است.

۱۲ عبارت‌های زیر را به‌صورت دو شرطی بنویسید.

الف) اگر $x>۵$ آنگاه $۲x>۱۰$

ب) اگر $|x| = ۲$ باشد آنگاه $x = \pm ۲$

پ) اگر $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$

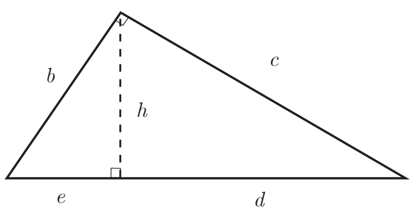
۱۳ قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.

۱۴ در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، در هر حالت مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $e = ۲$ و $d = ۸$ و $h = ?$ و $b = ?$ و $c = ?$

ب) $e = ۳$ و $h = ۴$ و $d = ?$ و $c = ?$

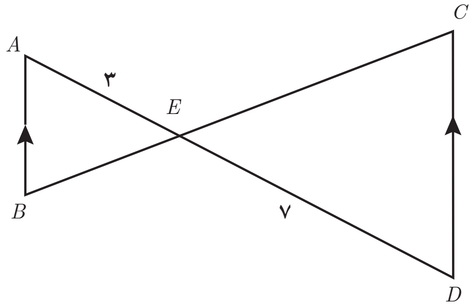
پ) $b = ۵$ و $c = ۱۲$ و $h = ?$ و $e = ?$



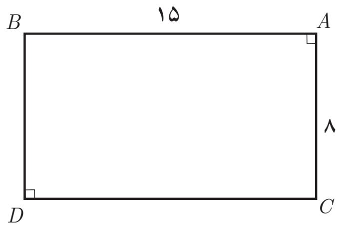
۱۵ اگر نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه $\frac{۴}{۷}$ باشد، نسبت مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.

۱۶ اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۱۲۱}{۴۹}$ باشد، نسبت محیط‌های آنها را به‌دست آورید.

۱۷ نسبت محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث مقابل را به‌دست آورید.



۱۸ در شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۵ و عرض ۸ رسم شده است. از نقطه A بر قطر BC عمود رسم می‌کنیم و پای این عمود را H می‌نامیم. طول AH، BH و CH را به‌دست آورید.



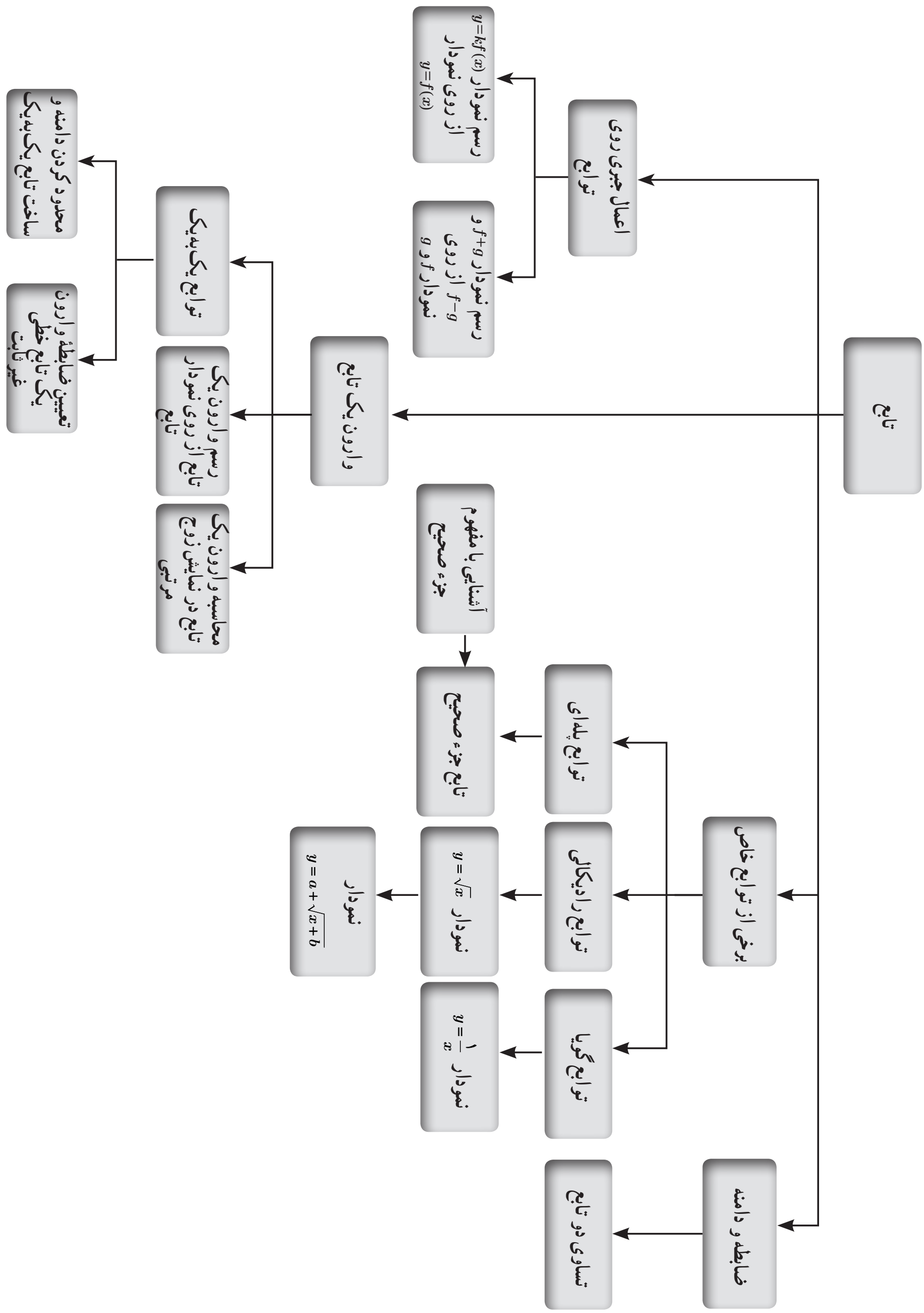
فصل ۳

تابع

اهداف کلی فصل

- ❑ معرفی توابع گویا و رسم نمودار تابع گویا با ضابطهٔ $y = \frac{1}{x}$
- ❑ آشنایی با توابع رادیکالی و رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x}$
- ❑ آشنایی با توابع پله‌ای و معرفی تابع جزء صحیح
- ❑ آشنایی با وارون یک تابع
- ❑ معرفی تابع یک‌به‌یک
- ❑ تعیین ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت
- ❑ اعمال جبری روی توابع

نقشه مفهومی


تابع
اعمال جبری روی توابع
رسم نمودار $y=kf(x)$ از روی نمودار $y=f(x)$
رسم نمودار $f+g$ و $f-g$ از روی نمودار f و g
وارون یک تابع
توابع یک‌به‌یک
محدود کردن دامنه و ساخت تابع یک‌به‌یک
تعیین ضابطهٔ وارون یک تابع خطی غیر ثابت
رسم وارون یک تابع از روی نمودار تابع
محاسبه وارون یک تابع در نمایش زوج مرتبی
آشنایی با مفهوم جزء صحیح
تابع جزء صحیح
توابع پله‌ای
برخی از توابع خاص
توابع رادیکالی
نمودار $y=\sqrt{x}$
نمودار $y=a+\sqrt{x+b}$
توابع گویا
نمودار $y=\frac{1}{x}$
ضابطه و دامنه
تساوی دو تابع

تصویر عنوانی

سونامی (آب‌لرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در پی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشان و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد! یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و نزدیک ۲۰۰هزار نفر را به کام مرگ کشانید.

تصویر عنوانی فصل، نمایی از بندر سیراف، یکی از بنادر تاریخی ایران در پهنهٔ خلیج فارس است.

این بندر، صدها سال پیش، محلّ شکوفایی و تجارت ایران با همهٔ نقاط متمدن متصل به دنیای آن روز بوده است. اشاره به این بندر به مسئله‌ای در تابع رادیکالی در فصل بازمی‌گردد. تابع سونامی که در درس اول به آن اشاره شده است یک نوع تابع رادیکالی است و علّت ارتباط این بندر با تابع سونامی، وجود یک مسئلهٔ پژوهشی جذاب است : آیا یک سونامی بندر باستانی سیراف را ویران کرده است یا خیر؟ این تصویر که توسط یکی از افراد بومی گرفته شده است، به خوبی خط باریک حوزهٔ شهری سیراف امروز را نشان می‌دهد. همچنین نشان می‌دهد که سیراف تا چه حد می‌تواند بر اثر سونامی آسیب‌پذیر باشد.

درس اول

آشنایی با برخی از انواع توابع

اهداف درس

۱ آشنایی با توابع گویا و تعیین دامنهٔ آن
۲ رسم تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$
۳ درک تساوی دو تابع از روی نمودار و همچنین از روی ضابطه و دامنه
۴ آشنایی با توابع رادیکالی
۵ رسم تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$
۶ رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$
۷ آشنایی با توابع پله‌ای
۸ آشنایی با عملگر جزء صحیح
۹ شناخت و رسم تابع جزء صحیح

پیش‌نیازها

۱ تشخیص جملهٔ عمومی یک الگو
۲ شناخت مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن
۳ ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف تابع و تبدیل آنها به یکدیگر
۴ شناخت مفهوم دامنه و برد یک تابع از روی نمودار
۵ حل نامعادلات درجه اول
۶ شناخت توابع چندجمله‌ای
۷ شناخت عملگر رادیکال

روش تدریس

در کتاب ریاضی دهم، دانش‌آموزان با کاربرد ضابطه به‌عنوان قانون یک تابع آشنا شده‌اند. ضروری است که برای شروع درس تابع، مروری بر تعریف ضابطه و دامنهٔ یک تابع صورت گیرد. یک تابع با ضابطه و دامنهٔ آن مشخص می‌شود. با این همه اگر دامنهٔ تابع ذکر نشود، بزرگ‌ترین دامنهٔ ممکن را برای آن تابع در نظر می‌گیریم. همچنین به این موضوع اشاره شود که اصطلاح تابع مثلاً $f(x)=۲x$ به‌کار برده نشود و از اصطلاح تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x$ ، به‌عنوان جایگزین استفاده شود.

فعالیت صفحه ۴۸

در بحث توابع گویا به داستانی در این فعالیت اشاره می‌شود که دربارهٔ سهم مشارکت تعدادی داوطلب است.

در این فعالیت اهداف فرهنگی (مشارکت ــ کارآفرینی ــ مدیریت بحران ــ خشکسالی) و اهداف ریاضی (رسم تابع $n \in \mathbb{N} \quad f(n)=\frac{۱}{n}$) مورد نظر بوده است. پس از این داستان و اجرای روند این فعالیت، انتظار می‌رود دانش‌آموزان، درکی از رفتار تابع با ضابطهٔ $n \in \mathbb{N} \quad f(n)=\frac{۱}{n}$ ، پیدا کنند.

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{۱}{۱}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{۱}{۲}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

در اینجا، مروری بر نمایش جدولی تابع (که در سال دهم به آن اشاره شد) دارد. همچنین با کامل کردن جدول مربوط به این قسمت و الگویابی (فصل اول، سال دهم) انتظار می‌رود دانش‌آموزان بتوانند به قسمت‌های دیگر این فعالیت پاسخ مناسب بدهند.

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۱۰}$

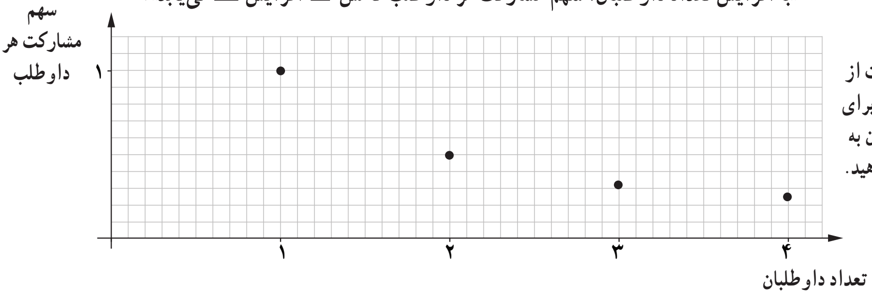
ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟ $\frac{۱}{n}$

پ) رابطهٔ بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطهٔ این تابع چیست؟
$f(x)=\frac{1}{x}$

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینهٔ مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

انتظار می‌رود، دانش‌آموزان با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $(n \in \mathbb{N})$ $f(n)=\frac{1}{n}$ ، به سؤال ۲ پاسخ بدهند. هدف از طرح این سؤال، مقدمه‌ای برای درک رفتار تابع $x \in \mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ می‌باشد.
شاخص کردن نقطه با طول $x=1$ روی نمودار توصیه می‌شود، زیرا در مرحلهٔ بعد باید به نقاط کمتر از ۱ اشاره کنیم.

«با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☑ افزایش ☐ می‌یابد».



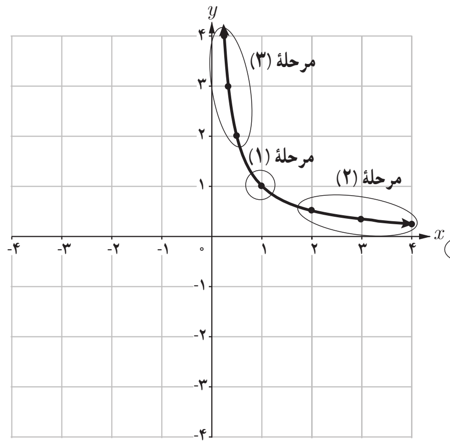
سهم مشارکت از روی نمودار برای دانش‌آموزان به خوبی نشان دهید.

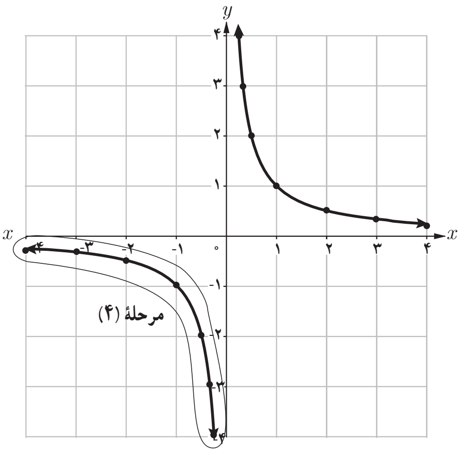
با توجه به عدم درک رفتار حدی و پیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ برای دانش‌آموزان، آموزش رفتار نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ ، از مهم‌ترین اهداف این فعالیت می‌باشد؛ زیرا برای آشنایی با نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ ، انتخاب گزینه، به درک آسان این مطلب کمک می‌کند.

فعالیت صفحه ۴۹

در نمودارهای زیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ با دو دامنهٔ متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f=(0\,,+\infty)$ ب) $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$





نمودارها را طبق مراحل پیشنهادی در کلاس مورد بحث قرار دهید. برای درک عمیق این مطلب که تابع مذکور در نقطه‌ای به طول $x=0$ تعریف نشده است، از نمودار کمک بگیرید و به این نکته توجه داشته باشید که دانش‌آموزان برای اولین بار است که با یک تابع غیرچندضابطه‌ای مواجه می‌شوند، بنابراین زمان کافی برای درک نمودار در کلاس در نظر بگیرید.

در ادامهٔ مطالب، تعریف تابع گویا، ارائه شده است. این تعریف برگرفته از متون کلاسیک ریاضی رایج می‌باشد و یکی از متداول‌ترین تعریف‌های تابع گویاست.

با توجه به تعریف ارائه شده، تابع با ضابطهٔ مثلاً $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنه‌های مختلف به‌عنوان نمونه‌ای از توابع گویا معرفی شده است. خواندنی ارائه شده در صفحهٔ ۴۹، یک مثال کاربردی از توابع گویاست.

پیش‌تر دیده‌اید، در نظام آموزشی ریاضی ایران، به توابعی با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابع هموگرافیک می‌گفتند. این توابع و مسائل مربوط به آن، در تعداد محدودی از کتاب‌های آموزشی ریاضی قرار دارد. بنابراین دانش‌آموزان نیازی به دانستن و درک کردن رفتارهای مجانبی و... این نوع توابع در پایهٔ یازدهم تجربی ندارند.

در ادامه، یک مسئلهٔ کاربردی از توابع گویا در قالب کار در کلاس آورده شده است :

کار در کلاس صفحه ۵۰

این مسئله شبیه مسئلهٔ امتیازهای آرمان در فصل ۱ کتاب یازدهم است و هدف از طرح این سؤال، تشخیص گویا بودن این تابع است.

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همهٔ پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همهٔ پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطهٔ تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x)=\frac{۷+x}{۱۰+x}\ \begin{matrix}\leftarrow \text{امتیاز فعلی}\\ \leftarrow \text{کل امتیازها}\end{matrix} \qquad f(x)=\frac{x}{۰/۷+x} \qquad f(x)=x+۰/۷$$

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟ بله

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپیِ دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$$f(x)=\frac{۸۰}{۱۰۰} \rightarrow \frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۷+x}{۱۰+x} \rightarrow ۱۰۰=۲۰x \rightarrow x=۵$$

مهم‌ترین بخش آشنایی با توابع گویا، تعیین دامنهٔ توابع گویاست. با این همه در کتاب درسی تعیین دامنهٔ توابعی چون $\frac{۳x^۲+۷x+۳}{x^۳+۲x+۱}$ و $\frac{x-۲}{(x-۴)(x-۵)(x^۲-۳)}$ مدنظر نیست و مخرج کسر عبارت‌های گویا، ترجیحاً درجه یک و نهایتاً درجه ۲ در نظر گرفته می‌شود تا تعیین دامنه کاری ساده گردد.

در معرفی دامنهٔ توابع گویا به این مطلب اشاره شده است که چه نقاطی حتماً در دامنهٔ یک تابع گویا نیست، اینکه چه نقاطی در دامنهٔ توابع گویا هست، اختیاری است. به مثال زیر توجه کنید :

$$f(x)=\frac{۵}{x-۲} \qquad D:\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$f(x)=\frac{۵}{x-۲} \qquad D:\mathbb{R}-\{۲,۳\}$$

کار در کلاس صفحه ۵۰

دامنهٔ هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$$f(x)=\frac{x}{x+۵} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{-۵\} \qquad g(x)=\frac{۳}{x-۴} \qquad D_g=\mathbb{R}-\{۴\}$$

در این قسمت، به تساوی دو تابع پرداخته شده است. دانش‌آموزان به اشتباه دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=۲$ و $g(x)=\frac{۲x}{x}$ را یکی می‌پندارند. این مبحث کوچک در کتاب درسی، بسیار عمیق و مهم است و باید برای تفهیم آن به دانش‌آموزان وقت مناسبی اختصاص داد.

در صفحهٔ ۵۰ کتاب درسی پیش رو، دو تعریف از تساوی دو تابع ارائه شده است. تعریف اول داخل کادر آبی‌رنگ و دیگری پایین همین کادر می‌باشد.

کار در کلاس صفحه ۵۱

۱ آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند؟ چرا؟ با هم برابر نیستند، چون $D_f \neq D_g$

۲ نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟ مسئله ۲ جواب دارد: (پ) و (ت)

در مورد گزینه‌های سؤال ۲ حتماً سر کلاس بحث شود. چراکه قسمت (ب) و (ث) به هدف تمایز دامنه و برد و تشخیص آنها داده شده است.

در واقع دانش‌آموزان با تلفیق هر دو تعریف، توانایی پاسخ به این سؤال را باید داشته باشند.

الف) $D_g=\mathbb{R}$ $\qquad g(x)=۲x$

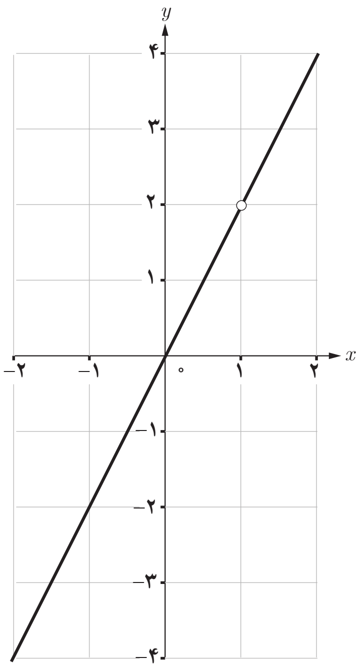
ب) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\qquad g(x)=۲x$

پ) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\qquad g(x)=۲x \longleftarrow$ گزینهٔ درست

ت) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\qquad g(x)=\frac{۲x^۲-۲x}{x-۱} \longleftarrow$ گزینهٔ درست

ث) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\qquad g(x)=\frac{۲x^۲-۴x}{x-۲}$

همهٔ ضابطه‌ها درست می‌باشند. دقت در دامنه و تطبیق آن با نمودار رسم شده در این قسمت کمک بسیار زیادی به فهم مطالب گفته شده خواهد کرد.



آشنایی با توابع رادیکالی با یک تابع رادیکالی کاربردی که تابع سونامی نام دارد آغاز می‌شود.

در ابتدای کار، هدف رسم کردن این تابع نیست. بلکه به بهانهٔ آشنایی با این تابع کاربردی، دانش‌آموزان با تابع رادیکالی آشنا می‌شوند و در ادامه نیز می‌توانند نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنند.

در اینجا، رادیکال‌ها با فرجهٔ سوم و بالاتر و همچنین رادیکال‌های مرکب مدنظر نیستند.

همچنین متذکر می‌شویم که علّت مطالعه توابع رادیکالی مانند $S=۳۵۶\sqrt{d}$ به دلیل نقش کاربردی آنهاست و تعریف دقیقی ارائه نخواهد شد.

کار در کلاس صفحه ۵۲

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی برحسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطهٔ $S=۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. ($\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$, $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$)

d	۱	۲	۳	۴
$S=۳۵۶\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	۶۰۵/۲	۷۱۲

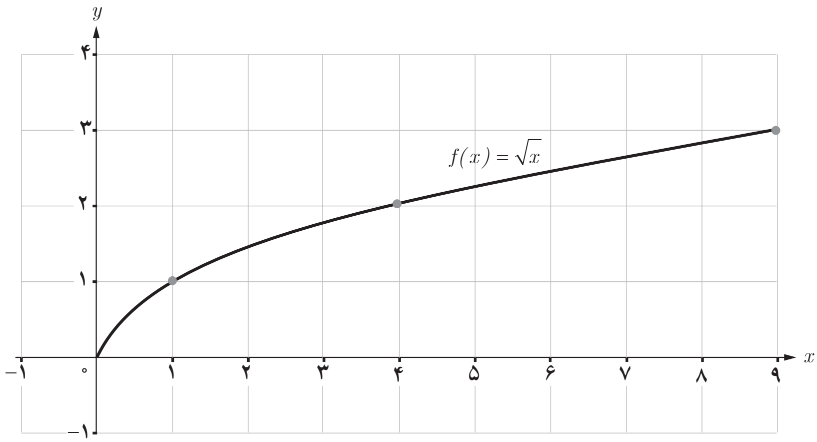
ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها یک ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع است .

پ) کدام‌یک از اعداد ۵− و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟ ۵

در حل این کار در کلاس، یادآوری از محاسبهٔ رادیکالی با فرجه ۲ و همچنین نمایش جدولی تابع، نیاز است و لذا از طریق استقرای تجربی و استدلال ریاضی باید پاسخ مناسب به سؤالات را بدهد و به این نتیجهٔ مهم که «دامنهٔ توابع رادیکالی، $\mathbb{R}$ نیست» برسد.

در ادامه روی نمودار داده شده بحث کنید.



برای راحتی در محاسبات، نقاطی به طول $x=۴$ و $x=۱$ و $x=۰$ داده شود و این سؤال را مطرح کنید که آیا این نمودار آشنا نیست؟ با تغییر چرخاندن صفحهٔ کتاب و دیدن دوبارهٔ این شکل، این مطلب به ذهن دانش‌آموز می‌رسد که: «این نمودار قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$ است».

در فعالیت صفحهٔ ۵۳، هدف از طرح این سؤال، انتقال تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ است. بنابراین دانش‌آموزان با توجه به آنچه که در فصل ۵ ریاضی دهم یاد گرفته‌اند، باید بعد از یادآوری دبیر، به راحتی بتوانند نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ را به کمک انتقال رسم کنند.

در قسمت پایانی درس اول، دانش‌آموزان با توابع پله‌ای آشنا می‌شوند. تعریف دقیق یک تابع پله‌ای از بدنهٔ اصلی درس حذف شده است. به‌طور دقیق به تابعی که دامنه‌اش به‌صورت تعدادی بازهٔ مجزا که هر بازه به یک عدد نظیر می‌شود، توابع پله‌ای می‌گویند.

(تا کمتر از) و (بیشتر از) توجه داشته باشند.

فعالیت صفحه ۵۴

هزینهٔ پارکینگ خودرو

در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود:

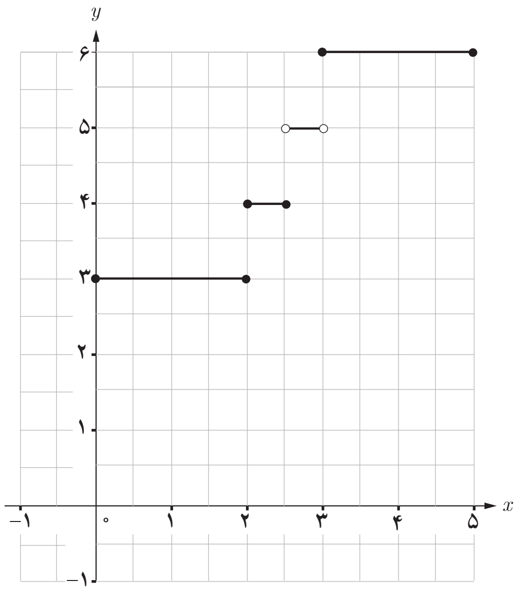
الف) ضابطهٔ تابع هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟

زمان		هزینه (هزار تومان)
از هنگام ورود	تا کمتر از ۲ ساعت	۳
از ۲ ساعت	تا ۲/۵ ساعت	۴
از بیشتر از ۲/۵ ساعت	تا کمتر از ۳ ساعت	۵
از ۳ ساعت	تا ۵ ساعت	۶

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰ \le x < ۲ \\ ۴ & ۲ \le x \le ۲/۵ \\ ۵ & ۲/۵ < x < ۳ \\ ۶ & ۳ \le x \le ۵ \end{cases}$$

در این فعالیت، ابتدا جدول مربوط به زمان و هزینهٔ پارکینگ و سپس ضابطهٔ این جدول و در پایان به رسم آن پرداخته شود و به دانش‌آموزان متذکر شویم که در جدول داده شده به کلمات (از) و (تا) و (تا کمتر از) و (بیشتر از) توجه داشته باشند.

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



در ادامهٔ درس، دانش‌آموزان عملگر جزء صحیح $[x]$ را خواهند شناخت و سپس با تابعی با ضابطه $f(x)=[x]$ آشنا می‌شوند. برای تدریس مفهومی جزء صحیح وقت و دقت لازم را در نظر بگیرید.

در این قسمت نیاز نیست دربارهٔ مطالعه توابع حاصل از ترکیب $[x]$ و یک تابع دیگر همچون $[x^۲]$ بپردازید.

توصیه‌های آموزشی

حدود و ثغور مطالب

۱ در رسم توابع گویا، رسم تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ مد نظر است.

۲ در بررسی دامنهٔ توابع گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$، $Q(x)$ چندجمله‌ای حداکثر از درجه ۲ مورد نظر است و از ارائه دادن مباحث پیچیده‌تر صرف‌نظر شود.

۳ رسم توابع رادیکالی با ضابطهٔ $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ مد نظر است.

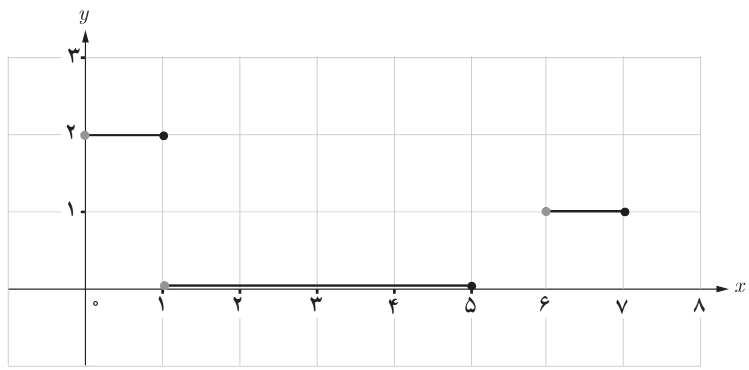
۴ رسم توابع جزء صحیح به‌صورت $f(x)=a+[x]$ مد نظر است.

حل برخی از تمرین‌های درس اول فصل سوم (تابع صفحهٔ ۵۶)

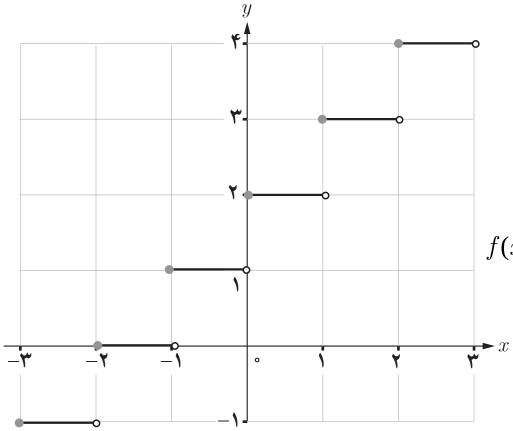
۶ــ حل :

[−۲۳۰۹/۵۴]=−۲۳۱۰   [−۱۰۳/۰۰۳]=−۱۰۴   [۳۰۰/۴۰۰۲]=۳۰۰

۷ــ حل : در رسم نمودارهای پله‌ای، دانش‌آموزان باید به ثابت بودن ضابطه‌ها و همچنین باز یا بسته بودن بازه‌ها در قسمت دامنه، توجه کنند.



۸ــ حل : برای رسم توابع پله‌ای، با توجه به بازهٔ مربوط به دامنهٔ داده شده، تفکیک مناسبی از بازه تأکید شود.



$$f(x)=[x]+۲=\begin{cases} -۱ & -۳\le x<-۲ \\ ۰ & -۲\le x<-۱ \\ ۱ & -۱\le x<۰ \\ ۲ & ۰\le x<۱ \\ ۳ & ۱\le x<۲ \\ ۴ & ۲\le x<۳ \end{cases}$$

و اگر انتهای بازهٔ داده شده در قسمت دامنه، بازهٔ بسته بود، به مقدار تابع در نقطهٔ انتهایی بازه توجه شود.

درس دوم

وارون یک تابع و تابع یک به یک

اهداف درس:

۱ محاسبهٔ وارون یک تابع در نمایش زوج مرتب
۲ رسم وارون یک تابع از روی نمودار
۳ آشنایی با تعریف و مفهوم تابع یک‌به‌یک
۴ به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت
۵ محدود کردن دامنهٔ یک تابع غیر یک‌به‌یک و تبدیل آن به تابع یک‌به‌یک

پیش‌نیازها

۱ شناخت مؤلفه‌های اول و دوم در زوج مرتب
۲ شناخت نیمساز ربع اول و سوم ($y=x$)
۳ درک مفهوم دامنه و برد از روی نمودار

روش تدریس

کار در کلاس صفحه ۵۷

در ابتدای این درس علاوه بر یادآوری نکاتی که در قسمت پیش‌نیازها گفته شد، برای حل کار در کلاس، در مورد تبدیل یکای اندازه‌گیری مثلاً متر به سانتی‌متر و برعکس و همچنین یکای اندازه‌گیری مثلاً مایل به کیلومتر و برعکس، در کلاس صحبت شود. با حل این کار در کلاس دانش‌آموزان به کاربردی بودن و

ضرورت محاسبهٔ وارون یک تابع پی می‌برند.

الف) هر مایل تقریباً ۱/۶ کیلومتر است. تعیین کنید که هریک از جملات سمت راست مربوط به کدام‌یک از رابطه‌های سمت چپ است.

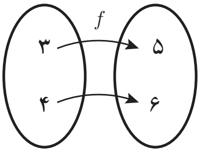
این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است. $f(x)=\frac{۸}{۵}x$

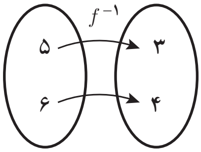
این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است. $g(x)=\frac{۵}{۸}x$

ب) تندی ۳۰ مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟

$f(۳۰)=\frac{۸}{۵}\times ۳۰=۴۸$ ۴۸ کیلومتر بر ساعت

در ادامه به تعریف رسمی وارون تابع f براساس نمایش زوج مرتبی اشاره شده است. لازم است مثال‌های دیگری نیز برای درک بهتر مطالب زده شود. سپس مثالی مانند مثال زیر بیاورید و در مورد تعداد اعضای دامنه و برد در f و $f^{-۱}$ صحبت کنید.





کار در کلاس صفحه ۵۷

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}$ $s^{-۱}=\{(۱,۴),(۴,۱),(۳,۳),(۵,۲)\}$

$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}$ $t^{-۱}=\{(۱,۵),(۴,۱),(۳,۴),(۳,۲)\}$

$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}$ $u^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$

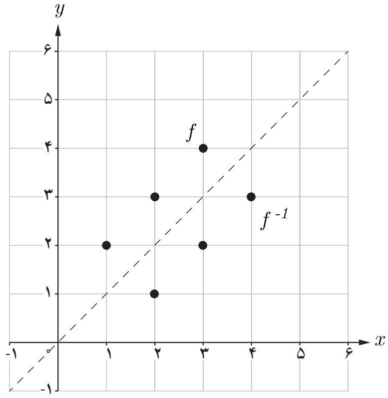
فعالیت صفحه ۵۸

برای درک این مطلب که چگونه با در دست داشتن نمودار f، می‌توان $f^{-۱}$ را رسم کرد، حتماً زمان کافی را در کلاس اختصاص دهید و به دانش‌آموزان متذکر شوید که به موقعیت خط $y=x$ (نیمساز

ربع اول و سوم) توجه کنند.

نتیجه‌ای که در قسمت (ب) خواهیم گرفت بسیار مهم است.

۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.



الف) تابع f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

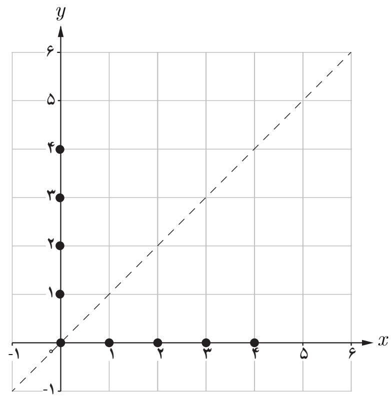
ب) تابع f^{-1} را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

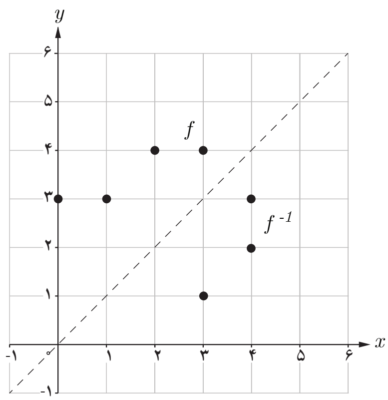
ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟

«نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند».

۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.



تابع است، چون هر خط موازی با محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

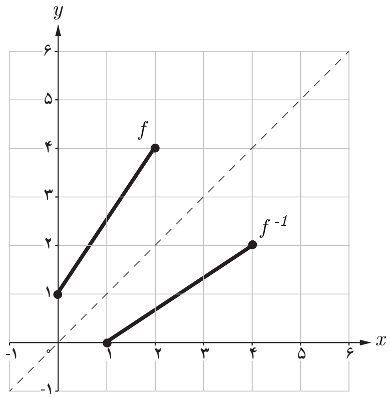


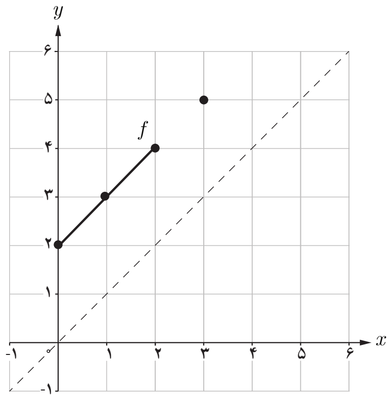
تابع است، چون هر خط موازی با محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.

۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

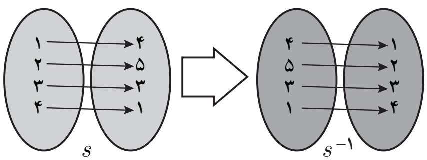


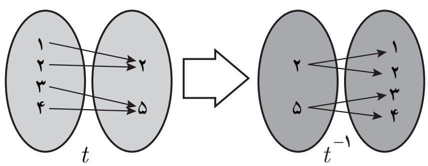


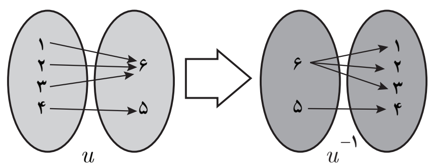
دانش‌آموزان در سؤال ۲، f و f^{-1} را در حالت گسسته و در سؤال ۳ به حالت پیوسته می‌بینند و این سؤال شاید در ذهنشان بیاید که آیا f^{-1} در هر دو حالت تابع است یا خیر؟ مثال‌های ترکیبی از حالت گسسته و پیوسته نیز در این قسمت برای فهم بیشتر دانش‌آموزان بیاورید.

فعالیت صفحه ۵۹

۱ الف) به نمونهٔ داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به‌دست آورید.







ب) در جدول مقابل گزینه‌های درست را انتخاب کنید.

s^{-1} یک تابع است.	بله☑ خیر☐
t^{-1} یک تابع است.	بله☐ خیر☑
u^{-1} یک تابع است.	بله☐ خیر☑

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع f، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های دوم تکراری وجود نداشته باشد.

به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد تابع **یک‌به‌یک** می‌گوییم.

تذکر : وارون هر تابع **یک‌به‌یک**، خود یک تابع است.

ت) تابع $f=\{(1,2),(-2,4),(2,-1),(-1,2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبهٔ f^{-1}، تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

خیر یک‌به‌یک نیست.

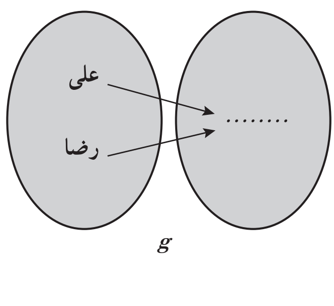
در قسمت الف سؤال ۱ این فعالیت، هدف رسیدن به تعریف تابع یک‌به‌یک است و با رسیدن به این درک، قسمت (ب) گزینه درست را انتخاب می‌کنند و در نهایت به نتیجه مورد نظر در قسمت (پ) خواهند رسید.

ارتباط یک‌به‌یک بودن و وارون بودن در قالب (تذکر) داده شده است.

اهمیت یک‌به‌یک بودن توابع و تناظر بین اعضا در مثال گروه خونی فعالیت سؤال ۲، آورده شده است و مصداق‌هایی از توابع یک‌به‌یک می‌باشد.

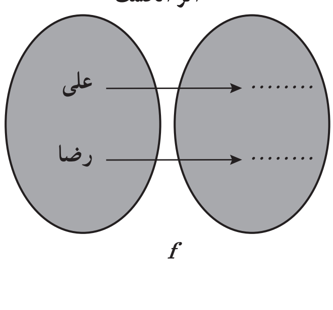
۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.

گروه خونی



g

اثر انگشت



f

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا f و g هر دو تابع‌اند؟ بله

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟ f^{-1} تابع است ولی g^{-1} تابع نیست.

ت) کدام‌یک از دو تابع f و g یک‌به‌یک هستند؟ f یک‌به‌یک است.

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

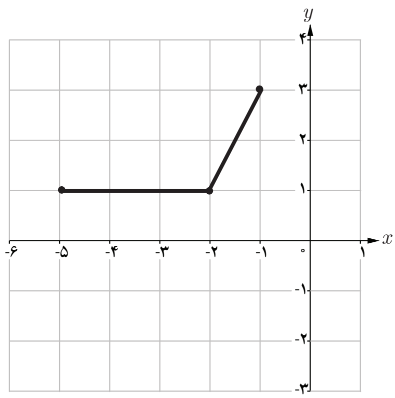
همانطور که می‌دانید، اثر انگشت منحصر به فرد است و حال آنکه چندین نفر هم می‌توانند گروه خونی یکسان داشته باشند.

فعالیت صفحه ۶۰

۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.

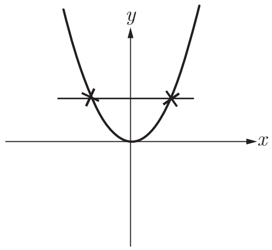
الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک‌به‌یک است؟

ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

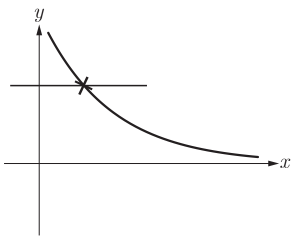


اگر هر خطِ موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک‌به‌یک است.

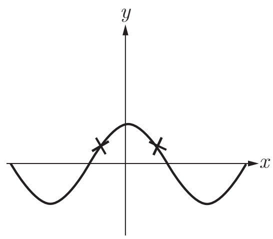
۲ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟



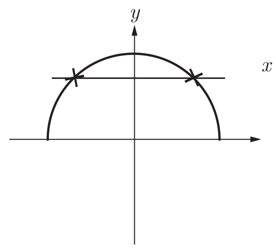
یک‌به‌یک نیست.



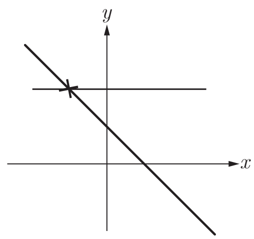
یک‌به‌یک است.



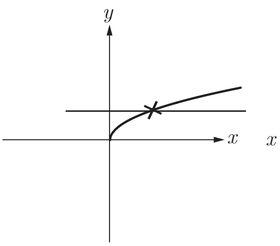
یک‌به‌یک نیست.



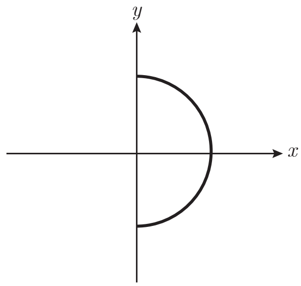
یک‌به‌یک نیست.



یک‌به‌یک است.



یک‌به‌یک است.



و در ادامه می‌توان با دادن تمرین‌هایی توجه دانش‌آموزان را به «تابع بودن» نیز جلب کرد. به‌طور مثال: آیا نمودار روبه‌رو، یک تابع یک‌به‌یک است؟

پاسخ: خیر

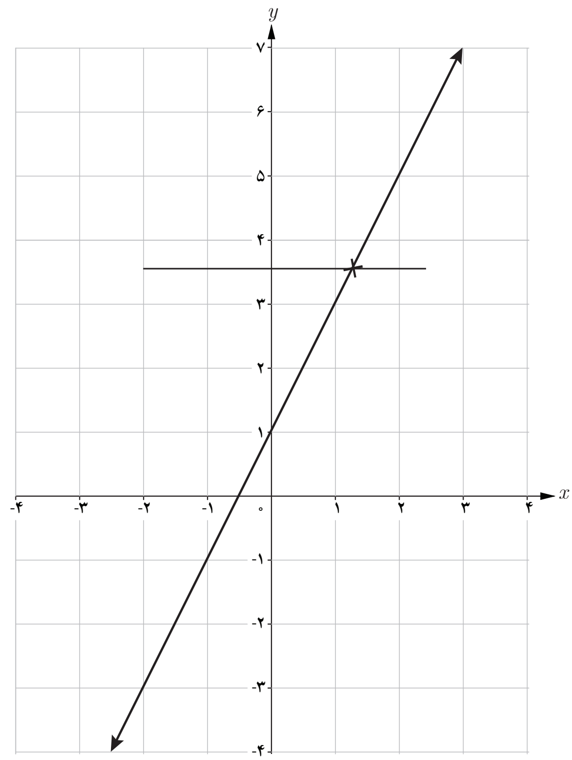
در کتاب ریاضی یازدهم رشتهٔ تجربی مبحث به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع، محدود به توابع خطی غیرثابت است و دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی کافی است با به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت آشنا شوند بنابراین نیازی به حساب کردن وارون توابعی با ضابطه‌ای مانند $f(x)=\frac{1}{x}$ نیز نمی‌باشد. نماد R_f را به دانش‌آموزان معرفی کنید و درک دیاگرام صفحهٔ ۶۱ مورد انتظار است.

فعالیت صفحه ۶۱

تابع با ضابطهٔ $f(x)=2x+1$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک‌به‌یک است.

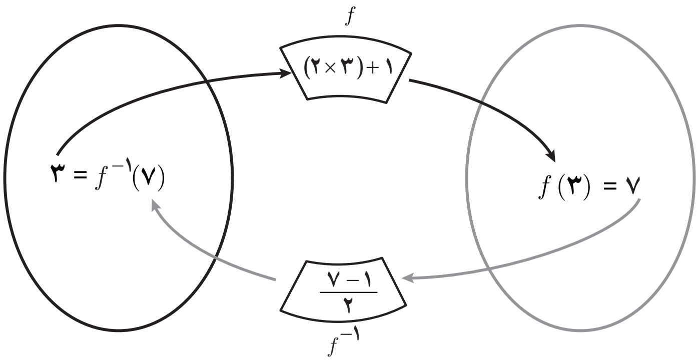
هر خطی موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند بنابراین f یک‌به‌یک است.



ب) نمودار زیر را توضیح دهید :

$(۷,۳) \in f^{-۱}$ و $(۳,۷) \in f$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۷$ و $f^{-۱}(۷) = ۳$

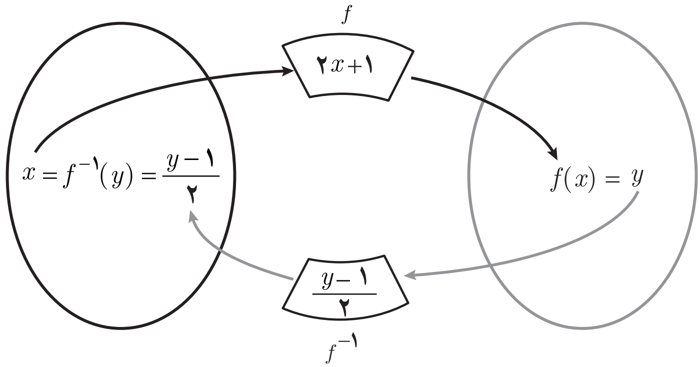


عدد ۳ از D_f، توسط تابع f، به عدد ۷ =۱+۳×۲= $f(۳)$ از R_f نظیر می‌شود و متناظر با این عمل، عدد ۷ از R_f، توسط تابع $f^{-۱}$ به عدد $f^{-۱}(۷) = \frac{۷-۱}{۲} = ۳$ از D_f نظیر می‌شود. به‌طور معادل داریم :

$$(۳,۷) \in f \Leftrightarrow (۷,۳) \in f^{-۱}$$

$$f(۳) = ۷ \Leftrightarrow f^{-۱}(۷) = ۳$$

پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، داریم :



با توجه به دیاگرام رسم شده، برای هر عضو x از D_f، با تأثیر تابع f روی x، عدد $f(x)=۲x+۱=y$ از R_f، به‌دست می‌آید و متناظر با این عمل، عضو $f(x)=y$ از R_f، توسط تابع $f^{-۱}$ به عدد $x = \frac{y-۱}{۲} = f^{-۱}(y)$ از D_f، برده می‌شود. با درک دیاگرام و آنچه در قسمت بعد آمده است، نتیجهٔ کلی در کادر آبی آورده شده است.

ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} f(x) = ۲x+۱ & (x \in D_f) \\ f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲} & (y \in R_f) \end{cases}$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

به‌طور کلی :

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معـادله $y = f(x)$، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

کار در کلاس صفحه ۶۲

۱ هر تابع خطی غیر ثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.
زیرا هر مقدار y فقط با یک x در تناظر است و هر خط موازی محور طول‌ها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

الف) $f(x) = x+۵ \longrightarrow y = x+۵$

$$\longrightarrow x = y-۵$$
$$\longrightarrow f^{-۱}(y) = y-۵$$
$$\longrightarrow f^{-۱}(x) = x-۵$$

ب) $g(x) = ۴x \longrightarrow y = ۴x$

$$\longrightarrow x = \frac{y}{۴}$$
$$\longrightarrow g^{-۱}(y) = \frac{y}{۴}$$
$$\longrightarrow g^{-۱}(x) = \frac{x}{۴}$$

پ) $u(x) = ۲x+۳ \longrightarrow y = ۲x+۳$

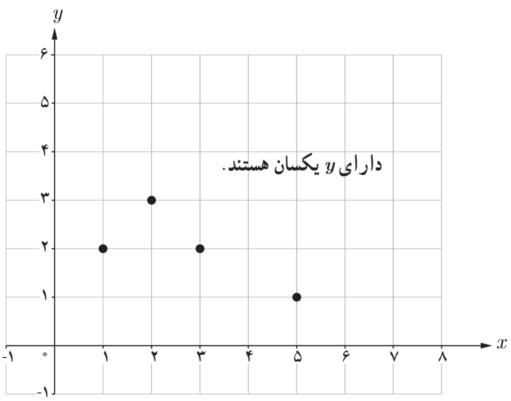
$$\longrightarrow -۲x = -y+۳$$
$$\longrightarrow x = \frac{y}{۲}-\frac{۳}{۲}$$
$$\longrightarrow u^{-۱}(y) = \frac{y}{۲}-\frac{۳}{۲}$$
$$\longrightarrow u^{-۱}(x) = \frac{x}{۲}-\frac{۳}{۲}$$

ت) $v(x) = \frac{۲}{۳}x-۴ \longrightarrow y = \frac{۲}{۳}x-۴$

$$\longrightarrow -\frac{۲}{۳}x = -y-۴$$
$$\longrightarrow x = \frac{۳}{۲}y+۶$$
$$\longrightarrow v^{-۱}(y) = \frac{۳}{۲}y+۶$$
$$\longrightarrow v^{-۱}(x) = \frac{۳}{۲}x+۶$$

۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟ زیرا در نقاطی به طول $x=۳$ و $x=۱$، مقدار y یکسان $(y=۲)$ است.

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید. مسئله چند جواب دارد؟ کافی‌است یکی از نقاط $x=۳$ یا $x=۱$ را حذف کنیم. مسئله ۲ جواب دارد.

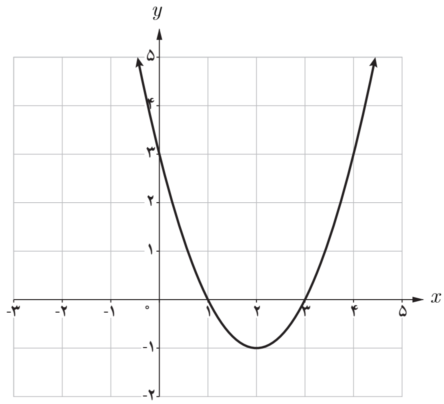


با حل این کار در کلاس، دانش‌آموزان یاد خواهند گرفت که چطور با داشتن ضابطهٔ یک تابع خطی غیرثابت، در مورد ضابطهٔ تابع وارون صحبت کنند. به روند ارائه شده توجه کنید :

$$f(x)=ax \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{a}$$

$$f(x)=x+a \longrightarrow f^{-1}(x)=x-a$$

کار در کلاس صفحه ۶۳



الف) به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{2}-4x+3$ در شکل مقابل، دقت کنید.

با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

☐ $[1,4)$

☑ $[0,2]$

ب) آیا هر تابع درجهٔ ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟ در حالت کلی، خیر، زیرا نقاطی یافت می‌شود که دارای xهای متفاوت و yهای یکسان است و هر خطی که موازی با محور طول‌ها رسم شود، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند و فقط در صورت محدود کردن دامنهٔ آن است که می‌توانیم یک تابع درجه ۲ را تبدیل به یک تابع یک‌به‌یک کنیم.

در قسمت پایانی درس ۲، نشان داده می‌شود که با محدود کردن دامنهٔ توابع، چگونه می‌توان نمودار تابع یک‌به‌یک را ساخت و نیازی به مسائل پیچیده نیست و مثال‌هایی که در کتاب گفته شده و همچنین مسئله‌هایی در همین حد، برای تفهیم مسئله کافی‌است.

توصیه‌های آموزشی

حدود و ثغور مطالب

۱ تنها به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت مدنظر است.

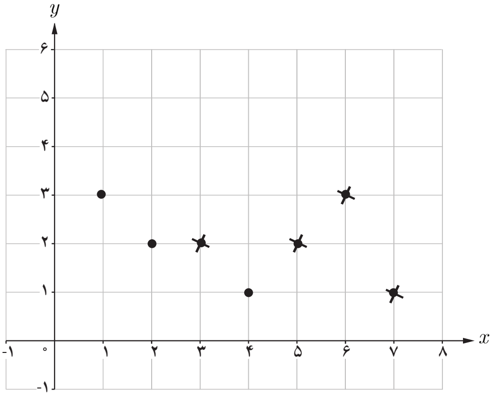
۲ محدود کردن دامنه یک تابع غیریک‌به‌یک و تبدیل آن به تابع یک‌به‌یک در حد مسائل کتاب باشد و نیازی به طرح مسئله‌های پیچیده نیست.

۳ برای محاسبه وارون یک تابع در نمایش زوج مرتب و نمودار، به چالش دانش‌آموزان بابت عدم شناخت x و y توجه داشته باشیم.

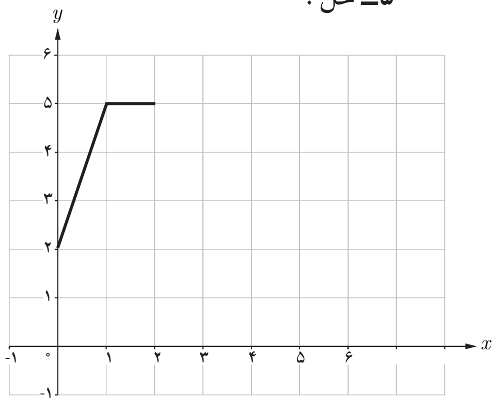
حل برخی از تمرین‌های درس دوم فصل سوم (تابع صفحهٔ ۶۳)

۴ــ حل : اگر هر خط موازی محور yها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع، یک‌به‌یک است. بنابراین روی هر خط $y=k$ حداکثر یک نقطه از نقاط نمودار باید قرار داشته باشد. پس حداقل ۴ نقطه باید حذف شود و حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند.

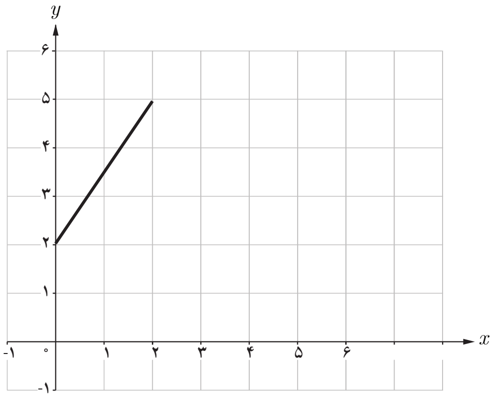
رسم نمودار روبه‌رو، برای درک بهتر از این مسئله پیشنهاد می‌شود.



۵ــ حل :



(ب)

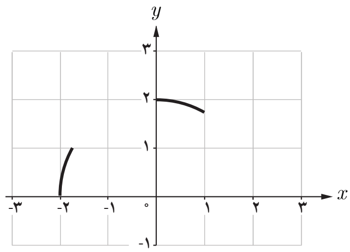


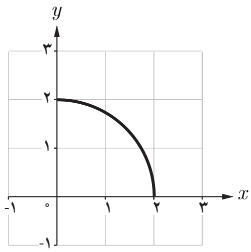
(الف)

بی‌شمار تابع خطی یا غیرخطی می‌توان در هر دو قسمت (الف) و (ب) رسم کرد.

۲ــ حل : برای دانش‌آموزان چند نمونه یک‌به‌یک از بخش‌های نمودار داده شده را رسم کنید.

مثال :





درس سوم

اعمال جبری روی توابع

اهداف درس:

۱ آشنایی با چهار عمل اصلی روی نمایش جبری توابع (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)

۲ رسم نمودار تابع با ضابطه‌های $f+g$ و $f-g$ با استفاده از نمودار f و g

۳ رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$

پیش‌نیازها

۱ شناخت فرمول معادلهٔ خط از روی دو نقطه از نمودار

۲ انتقال عمودی و افقی نمودار توابعی با ضابطهٔ $f(x)=|x|$ و $f(x)=x^{۲}$

روش تدریس

در ابتدای این درس، تعریف اعمال جبری توابع با تأکید روی ضابطه و دامنه آمده است. برای درک بهتر، فعالیت صفحهٔ ۶۵ آورده شده است.

از مثال‌هایی مانند مثال زیر نیز استفاده کنید :

مثال : اگر $f=\{(۱,۲), (۲,۰), (۳,۵)\}$ و $g=\{(-۲,۱), (۱,۰), (۲,۳)\}$ ، آنگاه مطلوبست :

الف) $D_{f+g}=$ ب) $D_{f\times g}=$ پ) $D_{\frac{f}{g}}=$

ت) $(f+g)(x)=$ ث) $(f-g)(x)=$ ج) $(\frac{f}{g})(x)=$

به دانش‌آموزان حتماً متذکر شوید که در حل این‌گونه مسائل (مانند تمرین ۲ قسمت (ت) در صفحهٔ ۶۹) ابتدا دامنه را تعیین کنند.

فعالیت صفحه ۶۵

اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=x-۲$، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم آنها $(\frac{f}{g})$ را

به‌دست آورید و دامنهٔ هر یک را مشخص کنید.

حل :

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (۲x-۱)+(x-۲) = ۳x-۳$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = (۲x-۱)-(x-۲) = x+۱$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (۲x-۱).(x-۲) = ۲x^۲-۵x+۲$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

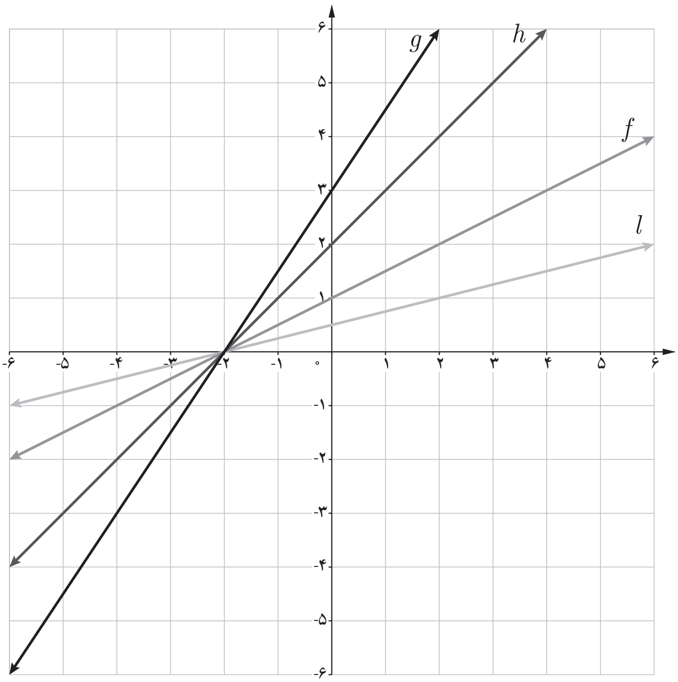
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۲x-۱}{x-۲}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \left(D_f \cap D_g\right) - \{x \mid g(x) = ۰\} = \left(\mathbb{R} \cap \mathbb{R}\right) - \{x \mid x-۲ = ۰\} = \mathbb{R} - \{۲\}$$

توصیه می‌شود حتماً برای تفهیم آنچه گفته شد خواندنی صفحهٔ ۶۶ سر کلاس خوانده شود. در این خواندنی طریقهٔ رسم نمودار $f+g$، از روی نمودارهای f و g توضیح داده شده است.

برای درک بیشتر می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید تعبیر $f-g$ و $f.g$ یا $\frac{f}{g}$ را با یک مثال کاربردی بیان کنند.

فعالیت صفحه ۶۸



با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x) = \frac{۱}{۲}f(x)$ جاهای خالی را پر کنید.

$g(x) = \underline{۳}\, f(x)$

$h(x) = \underline{۲}\, f(x)$

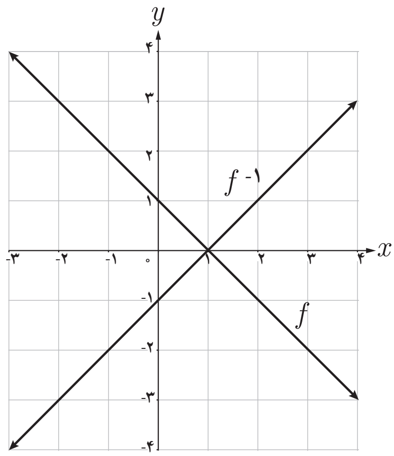
برای درک بهتر و رسیدن به جواب مناسب حتماً وقت لازم را در نظر بگیرید. کافی‌ست در دو نقطه مقایسه را انجام دهید؛ مثلاً در نقطه‌ای به‌طول $x=۲$، مقدار y در تابع f برابر ۲، در تابع l برابر

۱، در تابع h برابر ۴، در تابع g برابر ۶ می‌باشد که دانش‌آموزان با مقایسه به جواب درست خواهند رسید.
با توجه به نمودار صفحه قبل ملاحظه می‌شود که :

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

کار در کلاس صفحه ۶۸

۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-f(x)$ را رسم کنید.



۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها (x) رسم کنیم.

در فعالیت و کار در کلاس صفحهٔ ۶۸، به بیان مهارت رسم تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ از روی تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ پرداخته شده است، که در آن داریم : الف) $k>0$ ب) $k=-1$ پ) $k<0$

الف) اگر $k>0$ باشد، کافی‌است مقادیر روی نمودار (عرض‌ها) k برابر شوند.

ب) اگر $k=-1$ باشد، کافی‌است نمودار نسبت به محور xها قرینه شوند.

پ) اگر $k<0$ باشد مراحل رسم را می‌توان به دو صورت زیر انجام داد :

۱ـ $y=f(x)$		۱ـ $y=f(x)$
۲ـ $y=kf(x)$	یا	۲ـ $y=-f(x)$
۳ـ $y=-kf(x)$		۳ـ $y=k\times(-f(x))$

سؤال‌های ۳ و ۲ از کار در کلاس صفحهٔ ۶۸، گویای نکات فوق می‌باشند.

تأکید مهم درس سوم روی اعمال جبری می‌باشد، پس از تدریس این درس دانش‌آموزان باید بتوانند توابعی همچون $y=-\frac{1}{x}$ و یا $y=-\sqrt{x}$ را هم رسم کنند. توجه کنید که به هیچ‌وجه بحث دربارهٔ ترکیب توابع مدّنظر نیست و ترکیب دو تابع یک عمل جبری روی توابع تلقی نمی‌شود.

توصیه‌های آموزشی

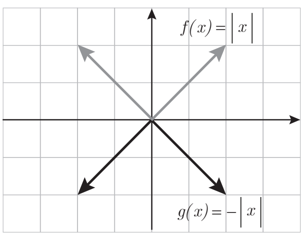
حدود و ثغور تدریس

۱ نیازی به تدریس رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ نمی‌باشد.

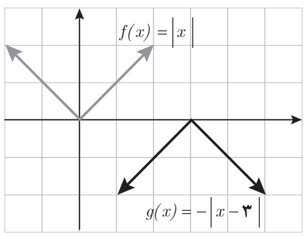
۲ نیازی به بحث دربارهٔ ترکیب دو تابع نیست.

حل برخی از تمرین‌های درس سوم فصل سوم (تابع صفحهٔ ۶۹)

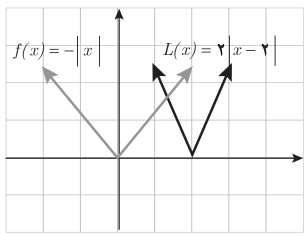
۱ـ



الف) نقاط مربوط به نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



ب) نمودار رسم شده در قسمت (الف) را به اندازهٔ ۳ واحد روی محور طول‌ها به سمت راست حرکت می‌دهیم.



پ) کافی‌است نقاط مربوط به نمودار تابع f را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده و سپس عرض هر نقطه از این نمودار را دو برابر کنیم.

۲ــ

$$\text{الف)}\ (f+g)(x) = f(x)+g(x) = |x| + \frac{۱}{x} = \begin{cases} x+\dfrac{۱}{x} & x>۰ \\ -x+\dfrac{۱}{x} & x<۰ \end{cases}$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = |x| - \frac{۱}{x} = \begin{cases} x-\dfrac{۱}{x} & x>۰ \\ -x-\dfrac{۱}{x} & x<۰ \end{cases}$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = |x|.\frac{۱}{x} = \begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{\frac{۱}{x}} = \begin{cases} x^۲ & x>۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{۰\} = \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \underbrace{D_f \cap D_g}_{\mathbb{R}-\{۰\}} - \{x \mid g(x)=۰\} = \mathbb{R} - \{۰\} - \underbrace{\{x \mid \frac{۱}{x} = ۰\}}_{\varnothing} = \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$\text{ت)}\ (f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{x-۲}{x+۵} + x^۲ + ۳x - ۱۰$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{x-۲}{x+۵} - x^۲ - ۳x - ۱۰$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \frac{x-۲}{x+۵}\ .\ (x^۲+۳x-۱۰) = (x-۲)^۲$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-۲}{x+۵}}{x^۲+۳x-۱۰} = \frac{x-۲}{(x+۵)(x^۲+۳x-۱۰)} = \frac{۱}{(x+۵)^۲}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-۵\}$ و $D_g = \mathbb{R}$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = (\mathbb{R} - \{-۵\}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-۵\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=۰\} = (\mathbb{R} - \{-۵\}) - \underbrace{\{x \mid x^۲ + ۳x + ۱۰ = ۰\}}_{-۵,۲} = \mathbb{R} - \{-۵,۲\}$$

به دانش‌آموزان متذکر می‌شویم که در پاسخ به این سؤالات، می‌توانند ابتدا دامنه و سپس ضابطه‌ها را

به‌دست آورند. در قسمت (ث) بهتر است ابتدا دامنه تعیین شود.

ث) $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\} \longrightarrow D_f=\{۰,۲,۳\}$

$g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\} \longrightarrow D_g=\{-۱,۰,۲,۳\}$

$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f \cap D_g=\{۰,۲,۳\}$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{\underbrace{x \mid g(x)=۰}_{۳}\}=\{۰,۲,۳\}-\{۳\}=\{۰,۲\}$$

$$\begin{cases}(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=-۲+۳=۱ \rightarrow (۰,۱) \in f+g \\ (f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۵+۴=۹ \rightarrow (۲,۹) \in f+g \\ (f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۴+۰=۴ \rightarrow (۳,۴) \in f+g\end{cases}$$

$f+g=\{(۰,۱),(۲,۹),(۳,۴)\}$

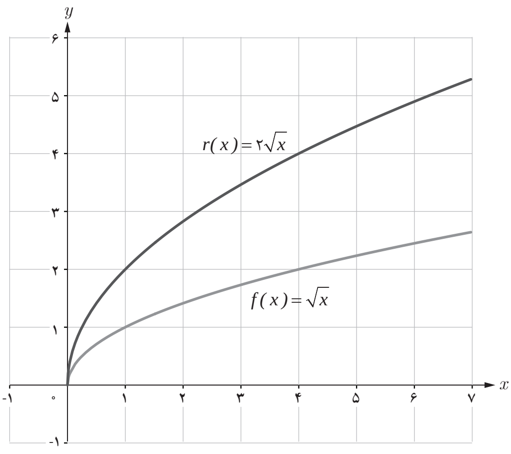
به‌طور مشابه $f-g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$f-g=\{(۰,-۵),(۲,۱),(۳,۴)\}$ $\qquad f.g=\{(۰,-۶),(۲,۲۰),(۳,۲۰)\}$

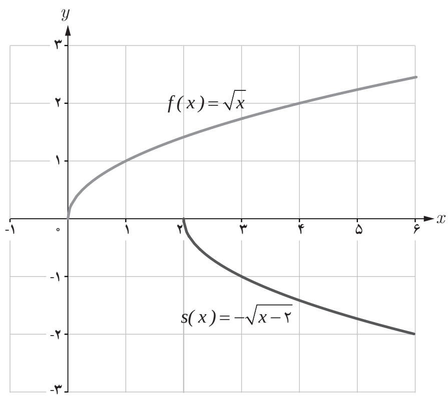
$\frac{f}{g}=\{(۰,-\frac{۲}{۳}),(۲,۵)\}$

۳ــ

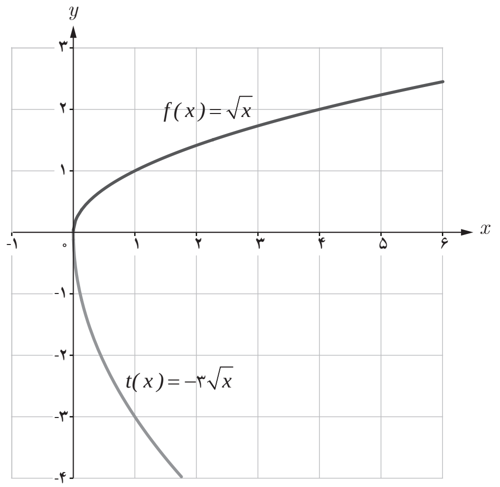
در این سؤال پیشنهاد می‌شود که برای فهم بهتر دانش‌آموزان، مراحل رسم به‌طور کامل توضیح داده شود.



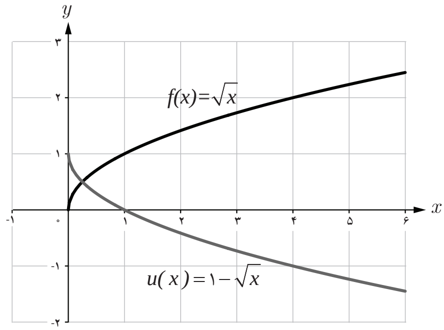
(الف)



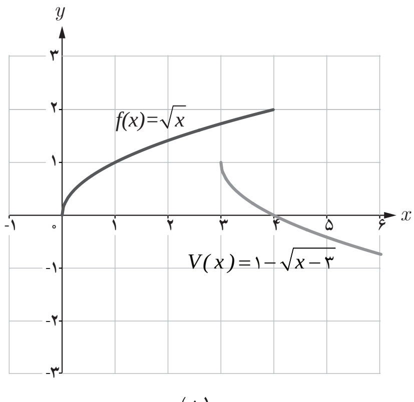
(ب)



(پ)



(ت)



(ث)

و در جمع‌بندی مطالب نکات زیر را ارائه داد :

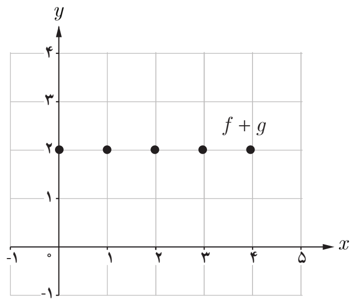
الف) $r(x)=۲f(x)$ ⟵ کافی‌است عرض هر نقطه از نمودار f، دو برابر شود.

ب) $s(x)=-f(x-۲)$ ⟵ ابتدا نمودار f را به اندازه دو واحد روی محور طول‌ها به سمت راست انتقال داده و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

پ) $t(x)=-۳f(x)$ ⟵ ابتدا عرض هر نقطه از نمودار f را سه برابر کرده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

ت) $u(x)=-f(x)+۱$ ⟵ ابتدا نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس به اندازهٔ ۱ واحد روی محور yها به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

ث) $v(x)=-f(x-۳)+۱$ ⟵ ابتدا نمودار f را به اندازه سه واحد روی محور طول‌ها به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار جدید را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



۴ـ کافی‌است مقدار $f+g$ را در نقاط مشخص شده به‌دست آوریم.

با توجه به شکل، دامنهٔ f و g با هم برابرند. لذا مجموع مقادیر دو تابع، در این دامنهٔ مشترک وجود دارد. به دانش‌آموزان متذکر شویم اعمال روی توابع، در خارج از دامنهٔ مشترک تعریف نمی‌شوند.

۵ـ نمودار g، مجموع دو تابع f و h است.

کافی‌است در هر نمودار چند نقطه را مشخص کرده و سپس با مقایسهٔ مقادیر این نقاط، به جواب مسئله برسیم. راه حل دیگری که در این سؤال می‌توان به دانش‌آموزان پیشنهاد داد، نوشتن معادلهٔ خط f و g و h و مقایسه این ضابطه‌ها با هم است.

نمونه سؤالات فصل ۳ (تابع) ــ کتاب ریاضی ۲ تجربی

۱ تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.

ب) $D_f=(-۳,۳)-\{۰\}$ الف) $D_f=\{\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},۱,۲\}$

۲ دامنهٔ هریک از توابع گویای زیر را بیابید.

پ) $h(x)=\frac{x-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-x}$ ب) $g(x)=\frac{-۲x+۳}{۵}$ الف) $f(x)=\frac{x+۰/۲}{-x}$

ج) $u(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۲x-۳}$ ث) $l(x)=\frac{x+۱}{۱-x^۲}$ ت) $k(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}$

۳ اگر دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\dfrac{x-۳}{x-a}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-۲\}$ باشد، a را بیابید.

۴ مقدار عددی k $(k\in \mathbb{Z})$ را در ضابطهٔ $y=\dfrac{k\sqrt{x}+۱}{x-۲}$ طوری بیابید که y ضابطهٔ یک تابع گویا باشد.

۵ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ و $g(x)=۱$

ب) $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x-۴}{x+۱}$ و $g(x)=x-۴$

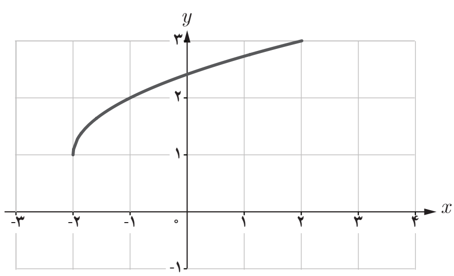
ج) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{۲} & x>۰\\ \dfrac{۱}{۲} & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{|x|}{-۲x}$

د) $f(x)=\dfrac{x^۲-۱۶}{x^۲+۴}$ و $g(x)=x^۲-۴$

۶ اگر $f(x)=x+۲$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{\sqrt{x}} & x\neq ۲\\ m & x=۲\end{cases}$ باشد، m را طوری بیابید که دو تابع f و g با هم مساوی باشد.

۷ با استفاده از نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ ، مقدار a را در تابع رادیکالی $g(x)=\sqrt{x+a}$ ، طوری بیابید که دامنهٔ آن $[۳,+\infty)$ باشد.

۸ در شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=a+\sqrt{x+b}$ ، با استفاده از نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ رسم شده است. a و b را بیابید.



۹ نمودار توابع زیر را در دامنه‌های داده شده، رسم کنید.

الف) $f(x) = [x]$ و $D_f = [-۱,۲]$

ب) $g(x) = [x]+۲$ و $D_g = [-۳,۳]$

۱۰ برای تساوی نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) $[x+۱]=[x]+۱$

ب) $[x+\frac{۱}{۲}]=[x]+\frac{۱}{۲}$

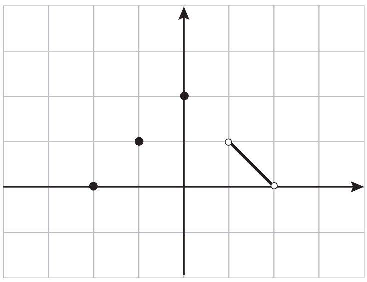
۱۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x+۱ & x \leq ۰ \\ x-۲ & x > ۳ \end{cases}$ مفروض است.

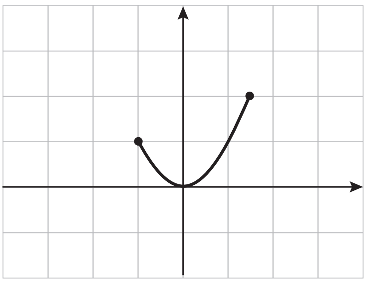
الف) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید.

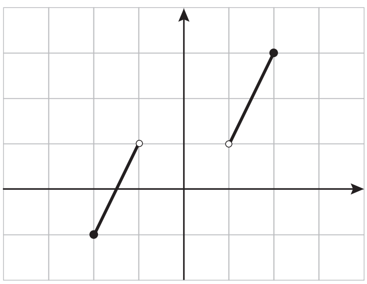
ب) نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ را به کمک خط $y=x$ رسم کنید.

۱۲ به ازای چه مقادیری از a و b، تابع $f(x)=\{(a-۲,۵) , (-۷,۳) , (-۵,۵) , (a+b,۳)\}$، یک‌به‌یک است.

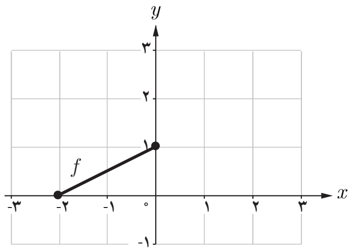
۱۳ یک‌به‌یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.







۱۴ نمودار تابع f به‌صورت شکل مقابل است. اگر نقاط $(m-۲,۰)$ و $(۳n,-۲)$ روی نمودار $f^{-۱}$ باشد، مقدار m و n را بیابید.



۱۵ اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و عدد ۳ عضو دامنه‌اش باشد، آن‌گاه در معادلهٔ $f^{-۱}(۳)=m$، m دارای چند جواب است؟

۱۶ الف) وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=-۲x+k$ از نقطهٔ $(۰,\frac{۱}{۲})$ می‌گذرد، مقدار عددی k را به‌دست آورید.

ب) حاصل $f^{-۱}(-۵)$ را به‌دست آورید.

۱۷ f یک تابع وارون‌پذیر است. اگر وارونش در ربع اول دستگاه مختصات واقع شود، نمودار تابع f، در کدام ناحیه بوده است؟

۱۸ الف) آیا تابعی یک‌به‌یک می‌توان یافت که دامنهٔ آن شامل چهار عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

ب) دامنهٔ یک تابع یک‌به‌یک $۳n+۱$ عضو و برد آن $-۲n+۱۱$ عضو دارد. مقدار ممکن برای عدد طبیعی n را بیابید.

۱۹ معادلهٔ خطی را بنویسید که قرینهٔ خط $y=۳x-۱$ نسبت به نیمساز اول و سوم باشد.

۲۰ اگر $f(۱)=-۲$ و $f(-۳)=۱$ باشد، ضابطهٔ وارون این تابع خطی را بنویسید.

۲۱ الف) ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=ax+b$ $(a\neq ۰)$ را به‌دست بیاورید.

ب) تابعی مثال بزنید که وارونش با خودش برابر باشد.

۲۲ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد c» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطهٔ $F=\frac{۹}{۵}c+۳۲$ به یکدیگر وابسته هستند.

الف) ۲۰- درجه سانتی‌گراد برحسب فارنهایت چقدر می‌شود؟

ب) ۱۰۴ درجه فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟

ج) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت مشخص کند.

۲۳ مقدار a را طوری بیابید که تابع داده شده، یک‌به‌یک باشد.

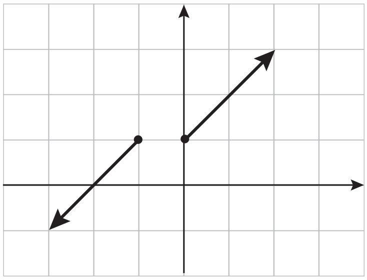
$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x\neq ۳ \\ a & x=۳ \end{cases}$$

۲۴ نمودار تابعی مانند y را رسم کنید که دامنهٔ آن $[-۴,۲]$ و برد آن $[۰,۴]$ باشد، به‌طوری‌که :

الف) تابع y، یک‌به‌یک باشد.

ب) تابع y، یک‌به‌یک نباشد.

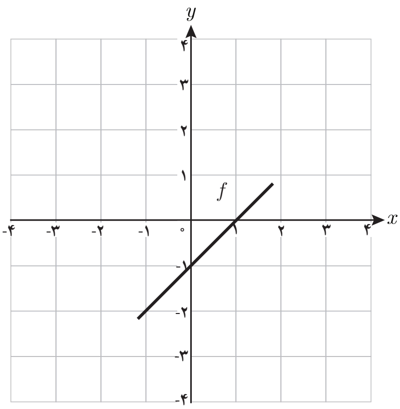
۲۵ با حذف کوچک‌ترین بخش از نمودار تابع داده شده، نمودار را تبدیل به یک تابع یک‌به‌یک کنید.

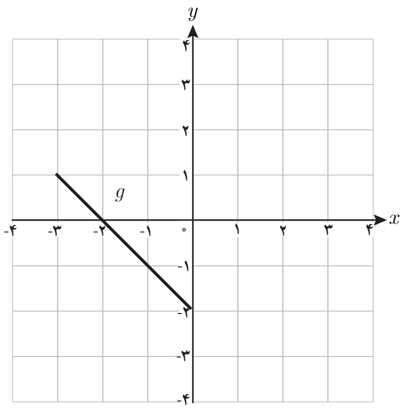


۲۶ اگر دو تابع f و g به‌صورت $f=\{(۰,۱),(۱,-۲),(۲,۳)\}$ و $g=\{(۰,۳),(۲,-۳),(۳,۲)\}$ تعریف شده باشند، دامنه و ضابطه‌های $\frac{f}{g}$ و $f\times g$ و $f-g$ و $f+g$ را بیابید.

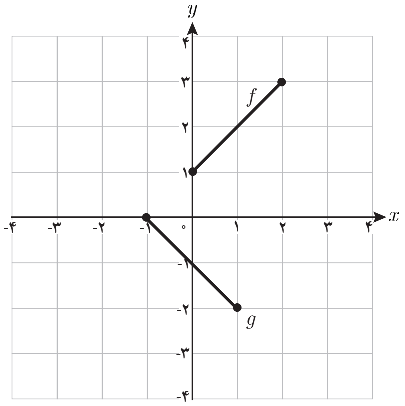
۲۷ اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x}$ و $g(x)=\{(-۲,۰),(۰,۱),(۳,۴),(۴,۷)\}$ باشد، دامنه و ضابطه‌های $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را بیابید.

۲۸ نمودار توابع f و g به‌صورت زیر داده شده است. دامنهٔ $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ $\frac{g}{f}$ را بیابید.



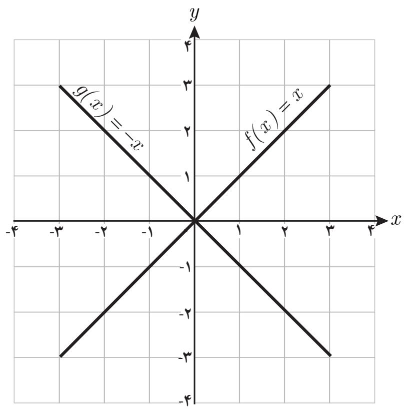


۲۹ با توجه به نمودارهای توابع f و g، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را در صورت وجود، بیابید.



الف) $(g+f)(۱)$
ب) $(f\times g)(۰)$
پ) $(f-g)(۲)$
ت) $(\frac{g}{f})(-۱)$
ث) $(f-۲g)(۰)$
ج) $(\frac{g-f}{-۳f})(۰)$

۳۰ نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=-x$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.
نمودارهای توابع $g+f$ و $g-f$ را به کمک نمودارهای داده شده، رسم کنید.

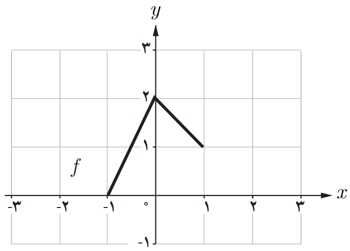


۳۱ الف) با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $[-۳,۳]-\{۰\}$ رسم کنید.
ب) با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۰,+\infty)$ رسم کنید.

۳۲ مساحت محدود به تابع با ضابطهٔ $y=۳-|x|$ و محور xها را بیابید.

۳۳ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر داده شده است. به کمک این نمودار، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

الف) $g(x)=-۲f(x)$
ب) $h(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$
پ) $k(x)=f(x)+۱$
ت) $l(x)=۲f(x)-۳$
ث) $u(x)=f(x-۲)$
ج) $v(x)=-f(x+۱)$



۳۴ نقطه $(-۵,۱۲)$ روی نمودار $y=f(x)$ واقع شده است. این نقطه با چه نقطه‌ای از نمودار توابع زیر متناظر است؟

الف) $g(x)=-f(x)$
ب) $g(x)=\frac{۱}{۳}f(x)$
پ) $g(x)=f(x)-۷$
ت) $g(x)=-f(x)-۲$

فصل ۴

مثلثات

اهداف کلی فصل

- ❑ معرفی رادیان به‌عنوان واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه
- ❑ ارتباط میان دو واحد اندازه‌گیری درجه و رادیان
- ❑ آشنایی با نمایش زاویه‌ها برحسب درجه و رادیان روی دایرهٔ مثلثاتی
- ❑ معرفی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، مکمل، متمم و هم‌انتها
- ❑ رسم توابع سینوس و کسینوس در صفحهٔ مختصات با استفاده از نقطه‌یابی
- ❑ آشنایی با ویژگی‌های توابع سینوس و کسینوس
- ❑ رسم تابع با ضابطهٔ $y = a \sin (x + b)$ و $y = a \cos (x + b)$ به کمک انتقال

نگاه کلی به فصل

این فصل در تکمیل مباحث مطرح شده در فصل مثلثات کتاب دهم تهیه شده است. نسبت‌های مثلثاتی، دایره مثلثاتی و اتحادهای مثلثاتی دروسی بود که در سال گذشته به دانش‌آموزان آموخته شد. آشنایی با واحد درجه و جهت مثلثاتی و محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه دلخواه مباحثی بود که در کتاب دهم ارائه شد. همچنین محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با دانستن یکی از نسبت‌های مثلثاتی آن مهارتی بود که دانش‌آموز کسب کرد. حال سؤالاتی را می‌توان طرح نمود که علت ارائه مطالب این فصل را برای دانش‌آموز روشن کرد.

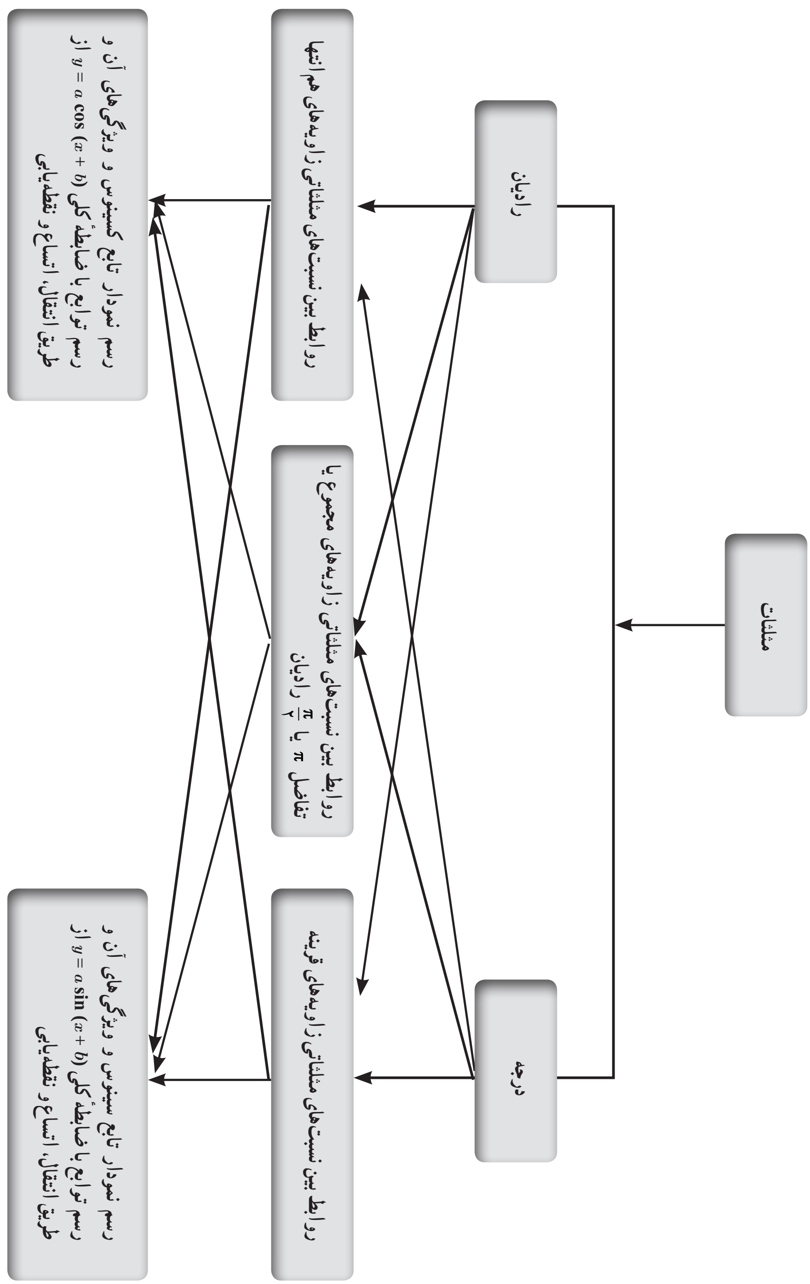
۱ آیا به جز درجه، واحد اندازه‌گیری دیگری برای زاویه وجود دارد؟ (همان‌طوری که مثلاً برای طول به جز متر یا سانتی‌متر یا کیلومتر واحدهایی چون اینچ یا مایل وجود دارد.)

۲ در صورت وجود واحد دیگر، ارتباط آن با درجه چیست و روی دایره مثلثاتی چگونه می‌توان با واحد جدید یک زاویه را نمایش داد؟

۳ با توجه به آشنایی دانش‌آموز با دو زاویه قرینه، متمم و مکمل، این مفاهیم روی دایره مثلثاتی چگونه تعریف می‌شوند و نسبت‌های مثلثاتی آنها چگونه به‌دست می‌آیند؟

۴ با توجه به آشنایی دانش‌آموز با مفهوم تابع و رسم آن، چگونه تابع مثلثاتی چون سینوس یا کسینوس روی صفحه مختصات رسم می‌شود؟

نقشهٔ مفهومی


مثلثات
رادیان
درجه
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های هم انتها
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مجموع یا تفاضل π یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه
رسم نمودار تابع کسینوس و ویژگی‌های آن و رسم توابع با ضابطهٔ کلی $y = a \cos (x + b)$ از طریق انتقال، اتساع و نقطه‌یابی
رسم نمودار تابع سینوس و ویژگی‌های آن و رسم توابع با ضابطهٔ کلی $y = a \sin (x + b)$ از طریق انتقال، اتساع و نقطه‌یابی

دانستنی معلم فصل ۴

محاسبه تقریبی فاصله بین دو نقطه روی کرهٔ زمین

در ابتدا لازم به ذکر است زمین یک کره دقیق نیست زیرا اندازه شعاع آن در تمام نقاط روی آن برابر نیست. معمولاً شعاع کره زمین به‌طور تقریبی ۶۳۷۱ $\simeq r$ کیلومتر در نظر گرفته می‌شود که در کتاب درسی برای راحتی در محاسبات این شعاع به‌طور تقریبی ۶۴۰۰ کیلومتر فرض شده است.

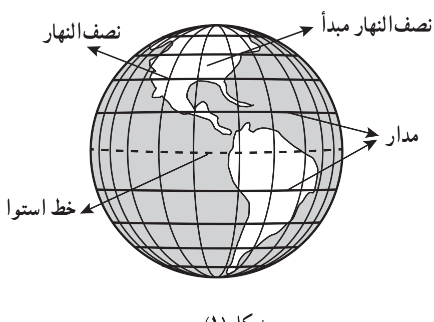
دایره‌های عظیمه‌ای که از قطب‌های کره زمین می‌گذرند نیم‌دایره‌هایی را روی کره زمین پدید می‌آورند که به هر کدام آنها **نصف‌النهار** می‌گویند.

به‌طور قرارداد، نصف‌النهاری که از شهر گرینویچ در نزدیکی لندن پایتخت کشور انگلستان می‌گذرد، **نصف‌النهار مبدأ** می‌گویند.

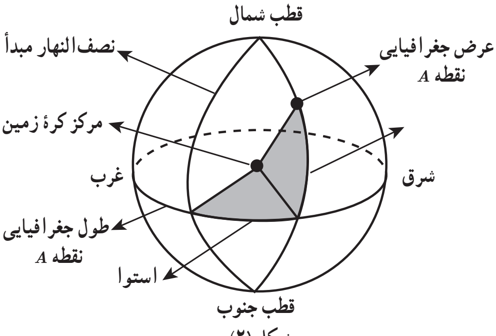
دایره عظیمه‌ای که شعاع آن بر شعاع دایره عظیمه متناظر با نصف‌النهار مبدأ عمود باشد، **استوا** نام دارد.

اگر صفحه‌ای موازی با استوا کره زمین را قطع کند، دایره حاصل، **مدار** نام دارد.

در واقع استوا بزرگ‌ترین مدار در کره زمین است که شعاع آن همان شعاع کره زمین است. به این ترتیب روی کره زمین یک دستگاه مختصات تنظیم شده است به‌طوری که هر نقطه روی کره زمین محل تلاقی یک مدار و یک نصف‌النهار است (شکل ۱). عرض جغرافیایی یک نقطه بیانگر آن است که نقطه مفروض چقدر بالا یا پایین خط استوا است که آن را به‌صورت مقداری برحسب درجه (شمالی یا جنوبی) بیان می‌کنند. عرض جغرافیایی خط استوا صفر درجه و عرض جغرافیایی قطب شمال $^\circ$۹۰ شمالی است. به همین ترتیب طول جغرافیایی یک نقطه بیانگر آن است که نقطه مفروض چقدر شرق یا غرب نصف‌النهار مبدأ است که آن را به‌صورت مقداری برحسب درجه (شرقی یا غربی) بیان می‌کنند. طول جغرافیایی نصف‌النهار مبدأ صفر درجه است (شکل ۲).

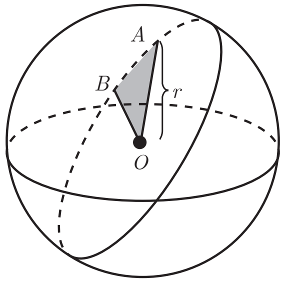


شکل (۱)



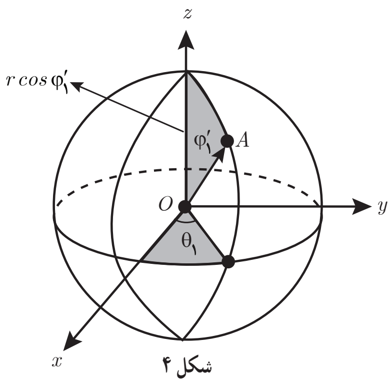
شکل (۲)

حال گیریم A و B دو نقطه مفروض روی کره زمین باشند.
هدف یافتن طول $\widehat{AB}$ روی دایره عظیمه گذرنده بر این کمان است (شکل ۳).



شکل (۳)

هدف یافتن اندازه $\widehat{AOB}$ برحسب رادیان است. اگر عرض جغرافیایی نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$، φ_1° شمالی و طول جغرافیایی این نقطه θ_1° شرقی باشد، با توجه به شکل ۴ داریم :



شکل ۴

$$\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l} x_1 = r\sin\varphi_1' \cos\theta_1 = r\cos\varphi_1 \sin\theta_1 \\ y_1 = r\sin\varphi_1' \sin\theta_1 = r\cos\varphi_1 \sin\theta_1 \\ z_1 = r\cos\varphi_1' = r\sin\varphi_1 \end{array}\right.$$

که در آن $\varphi'_1 = 90^\circ - \varphi_1$ و r شعاع کره زمین است.
به همین ترتیب برای نقطه B نیز داریم :

$$\overrightarrow{OB}\left|\begin{array}{l} x_2 = r\cos\varphi_2 \cos\theta_2 \\ y_2 = r\cos\varphi_2 \sin\theta_2 \\ z_2 = r\sin\varphi_2 \end{array}\right.$$

که در آن φ_2 و θ_2 به ترتیب عرض و طول جغرافیایی نقطه B هستند. بنابراین با معلوم بودن مختصات این دو بردار ضرب داخلی آنها به‌صورت زیر حاصل می‌شود :

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 =$ ضرب داخلی زاویه‌های $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$

در ضمن $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = r$

در نتیجه با جایگذاری مقادیر مختصات نقاط داریم :

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|}$$

$$= \cos\varphi_۱ \cos\varphi_۲ (\cos\theta_۱ . \cos\theta_۲ + \sin\theta_۱ \sin\theta_۲) + \sin\varphi_۱ \sin\varphi_۲$$

حال با مشخص شدن زاویه α برحسب رادیان و به‌کارگیری رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ مقدار $l = \widehat{AB}$ حاصل می‌شود.

به‌عنوان مثال دو شهر لاهیجان در استان گیلان و خمین در استان مرکزی را در نظر می‌گیریم که دارای طول جغرافیایی تقریباً یکسان $\theta_۱ = \theta_۲ = ۵۰^\circ$ و به‌ترتیب دارای عرض جغرافیایی تقریبی $\varphi_۱ = ۳۷^\circ$ و $\varphi_۲ = ۳۳^\circ$ هستند. با فرض $r = ۶۳۷۰\ km$ در این صورت با توجه به اتحاد مثلثاتی $\cos(\theta_۱ - \theta_۲) = \cos\theta_۱ \cos\theta_۲ + \sin\theta_۱ \sin\theta_۲$ و $\cos(\varphi_۱ - \varphi_۲) = \cos\varphi_۱ \cos\varphi_۲ + \sin\varphi_۱ \sin\varphi_۲$ خواهیم داشت :

$$\cos\alpha = \cos(۳۷^\circ - ۳۳^\circ) \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \alpha = ۴^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴۵} \quad \text{رادیان}$$

$$\xrightarrow{\pi \simeq ۳/۱۴} l = r \times \alpha = ۶۳۷۰ \times \frac{\pi}{۴۵} \simeq ۴۴۴\,km$$

لذا فاصله تقریبی شهر خمین و لاهیجان روی کرهٔ زمین ۴۴۴ کیلومتر است. توجه کنید که فاصله جاده‌ای بین این دو شهر حدود ۵۶۰ کیلومتر است.

مثال ۱ : شهر کرمان دارای طول جغرافیایی تقریبی ۵۷° و عرض جغرافیایی ۳۰° و شهر بجنورد در استان خراسان شمالی طول جغرافیایی تقریبی یکسان با شهر کرمان و عرض جغرافیایی ۳۷° است. فاصله تقریبی این دو شهر روی کرهٔ زمین تقریباً چند کیلومتر است؟

مثال ۲ : شهر تهران دارای طول جغرافیایی تقریبی ۵۱° و عرض جغرافیایی ۳۵° و شهر اهواز دارای طول جغرافیایی تقریبی ۴۸° و عرض جغرافیایی ۳۱° هستند. فاصله تقریبی این دو شهر روی کره زمین چند کیلومتر است؟

درس اول

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

اهداف درس

۱ معرفی رادیان به‌عنوان واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه و اهمیت آشنایی با این واحد
۲ رابطهٔ بین طول کمان روبه‌روی یک زاویهٔ مرکزی و اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان با توجه به شعاع
۳ رابطهٔ بین واحدهای اندازه‌گیری درجه و رادیان

پیش‌نیازها

۱ تشخیص زاویهٔ مرکزی و کمان روبه‌روی آن
۲ شناخت واحد اندازه‌گیری درجه
۳ درک عدد π
۴ شناخت دایرهٔ مثلثاتی و جهت مثلثاتی

روش تدریس

دانش‌آموز پس از آموزش این درس توسط معلم باید قادر باشد :

۱ زاویه‌های مختلف را برحسب رادیان روی دایره مثلثاتی مشخص کند.
۲ رابطه بین طول کمان روبه‌روی یک زاویه و اندازه یک زاویه برحسب رادیان را با توجه به شعاع دایره به کار ببرد.
۳ زاویه‌ای برحسب درجه (رادیان) را به زاویه متناظر آن برحسب رادیان (درجه) تبدیل کند.
۴ از ماشین حساب جهت محاسبه یک زاویه برحسب رادیان استفاده کند.

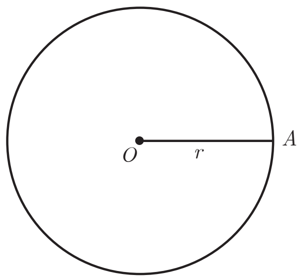
توصیه‌ها

۱ در هنگام آموزش مفهوم رادیان، لزوم یادگیری و اهمیت این واحد اندازه‌گیری اشاره شود.

۲ از آموزش واحدهای کوچک‌تر از درجه چون دقیقه و ثانیه و به‌کارگیری آنها در تبدیل یک زاویه به رادیان اجتناب شود.

۳ از آموزش واحد اندازه‌گیری «گراد» در کنار دو واحد مذکور اجتناب شود و روی آموزش دقیق و رابطه بین درجه و رادیان تمرکز گردد.

فعالیت صفحه ۷۲



۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به‌دست آورید. **محیط دایره را مشخص می‌کند.**

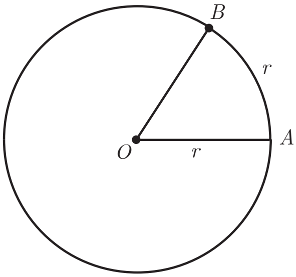
هدف از ارائه این فعالیت معرفی مفهوم رادیان از طریق طول کمان روبه‌رو به یک زاویه است. به عبارتی می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که چگونه می‌توان طول کمان روبه‌روی یک زاویهٔ مرکزی در دایره را برحسب یک واحد طولی نظیر سانتی‌متر، متر یا کیلومتر بیان نمود؟

برای انجام این فعالیت قبل از تدریس از دانش‌آموزان خواسته شود مقداری نخ، خط‌کش، نقاله و یک شیء دایره‌ای شکل نظیر CD به همراه داشته باشند.

در ابتدا شیء دایره‌ای شکل مورد نظر را برمی‌داریم و نخی را دور آن می‌پیچیم و باز می‌کنیم. این شیء می‌تواند دهانه یک لیوان و یا یک CD باشد. حال با خط‌کش، طول این نخ را اندازه می‌گیریم و این واقعیت که این مقدار همان محیط آن شیء دایره‌ای شکل را مشخص می‌کند، مطرح می‌کنیم. با یادآوری این مطلب از هندسه که محیط دایره برابر قطر × π است، از دانش‌آموز می‌خواهیم شعاع را بیابد. اگر به عنوان مثال محیط دایره برابر ۳۸ cm باشد (محیط تقریبی یک CD) آنگاه با فرض ۳/۱۴ ≃ π، داریم:

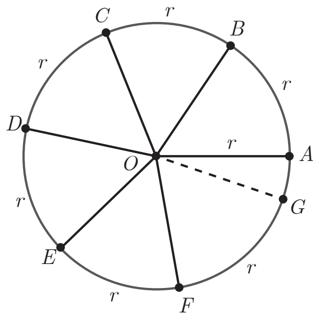
۳۸ = قطر دایره × ۳/۱۴ ← قطر دایره ≃ ۱۲cm ← r = شعاع دایره = ۶cm

۲ قطعه نخی را به اندازهٔ شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطهٔ A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطهٔ B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه



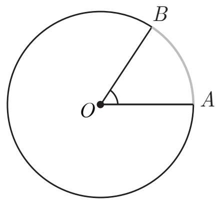
است؟ ۵۷°

به اندازهٔ شعاع حاصل، از دانش‌آموز خواسته شود قطعه نخی را برش داده و روی محیط همان شکل دایره‌ای‌شکل قرار دهد و $\widehat{AOB}$ را بسازد. حال نقاله را برداشته و اندازهٔ این زاویه را روی این شیء اندازه بگیرد. این زاویه تقریباً ۵۷° است.

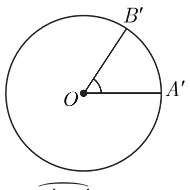


۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطهٔ B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطهٔ C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$، $\widehat{COD}$، $\widehat{DOE}$، $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویهٔ $\widehat{AOB}$ برابر و هر یک تقریباً ۵۷° است. آیا دو نقطهٔ G و A برهم منطبق می‌شوند؟ خیر $\widehat{GOA} \simeq ۱۸^\circ$

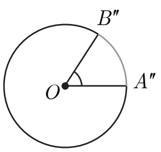
در تمام دایره‌های زیر اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.



$\widehat{AOB} \simeq ۵۷^\circ$



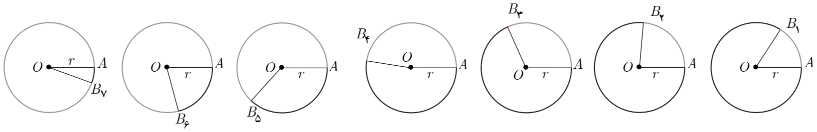
$\widehat{A'OB'} \simeq ۵۷^\circ$



$\widehat{A''OB''} \simeq ۵۷^\circ$

در ادامه با به کارگیری نقاله، هر یک از زاویه‌های $\widehat{AOB}$، $\widehat{A'OB'}$ و $\widehat{A''OB''}$ تقریباً ۵۷° است. به این ترتیب در این قسمت دانش‌آموز این مطلب را باید درک کند که در هر دایره با شعاع مفروض یک رادیان (که تقریباً ۵۷° است) برابر با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی است که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

۴ جدول زیر را کامل کنید.



طول کمان AB_i $1 \leq i \leq 7$	r	$\frac{3}{2}r$	$2r$	$3r$	$4r$	$5r$	$6r$
اندازهٔ زاویه AOB_i $1 \leq i \leq 7$	۱ رادیان	$\frac{3}{2}$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۴ رادیان	۵ رادیان	۶ رادیان

هدف از این بند فعالیت، آشنایی دانش‌آموز با رابطهٔ رادیان و طول کمان است. لذا با توجه به کمان‌ها در هر شکل برحسب شعاع دایره (r) می‌توان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر را بیان کرد. در این حالت هدف آن است که دانش‌آموز به این نتیجه برسد که نسبت طول کمان روبه‌روی یک زاویه بر شعاع دایره، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر را برحسب رادیان، مشخص می‌کند.

در انجام فعالیت فوق حتماً دانش‌آموز به خواندن زاویه‌ها در جهت مثلثاتی جلب گردد و مثلاً زاویهٔ $\widehat{AOB_7}$ در شکل آخر جدول، زاویه‌ای است که کمان روبه‌روی آن به رنگ قرمز مشخص شده و با زاویه‌ای که در خلاف جهت مثلثاتی به‌دست می‌آید، نباید اشتباه شود.

کار در کلاس صفحه ۷۴

با استفاده از رابطهٔ بالا جدول زیر را کامل کنید :

l	۵ سانتی‌متر	۵۰۰ سانتی‌متر	۰/۷۵ متر	۲۰۰ سانتی‌متر	۹۰ سانتی‌متر	۵۰ متر	۱۰ متر	۴۰۰ سانتی‌متر
r	۵ سانتی‌متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر	۳۰ سانتی‌متر	۱۰ متر	۱ متر	۲۰ سانتی‌متر
α	۱ رادیان	۱ رادیان	۱/۵ متر	۲ رادیان	۳ رادیان	۵ رادیان	۱۰ رادیان	۲۰ رادیان

در این کار در کلاس، مهارت دانش‌آموز در به کارگیری رابطهٔ $\alpha = \frac{l}{r}$ و توجه به هم‌واحد بودن l و r

را افزایش می‌دهد. مثلاً وقتی $r = ۵\,cm$ و رادیان ۱ = α، داریم :

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow ۱ = \frac{l}{۵} \rightarrow l = ۵\,cm$$

یا وقتی $l = ۵۰۰\,cm$ و $r = ۵m$ داریم :

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{۵۰۰cm}{۵۰۰cm} = \text{۱ رادیان}$$

با توجه به آشنایی دانش‌آموز با عدد π به صورت نسبت محیط دایره به قطر آن، توجه او به این موضوع که زاویه‌ای هم به نام π رادیان داریم باید جلب شود و نباید این زاویه که دارای واحد هست با عدد π که تقریباً ۳/۱۴ است و واحدی ندارد اشتباه شود.

ضمناً در جدول صفحهٔ ۷۴، با توجه به اینکه مقدار تقریبی رادیان، ۵۷° است، دانش‌آموز را هدایت می‌کنیم تا مقادیر تقریبی زاویه‌هایی چون ۰/۵رادیان (نصف۵۷°)، ۲ رادیان ($۵۷^\circ \times ۲$)، ۳ رادیان ($۵۷^\circ \times ۳$)، ۳/۱۴ رادیان ($۵۷^\circ \times ۳/۱۴$) را برحسب درجه بیابد و در نهایت به او این موضوع را آموزش می‌دهیم که با استفاده از تقریب‌های بهتر عدد π، مقدار تقریبی زاویهٔ π رادیان برحسب درجه به ۱۸۰° نزدیک می‌شود طوری که π رادیان دقیقاً بر ۱۸۰° منطبق می‌شود. یعنی π رادیان اندازهٔ زاویهٔ نیم‌صفحه است.

π رادیان	۳/۱۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	۰/۵ رادیان	**زاویه برحسب رادیان**
دقیقاً ۱۸۰°	تقریباً ۱۷۹°	تقریباً ۱۷۱°	تقریباً ۱۱۴°	تقریباً ۵۷°	تقریباً $۲۸/۵^\circ$	**زاویه برحسب درجه**

بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با ۱۸۰ درجه یا π رادیان. به عبارت دیگر اندازهٔ زاویه نیم‌صفحه برابر است با π رادیان. در نتیجه :

$$\frac{\pi}{۱۸۰}\ \text{رادیان} = \text{یک درجه}$$

به این ترتیب :

$$\pi\ \text{رادیان} = ۱۸۰^\circ$$

$\xrightarrow{\div ۲}$ $\frac{\pi}{۲}$ رادیان $= ۹۰^\circ$

$\xrightarrow{\div ۳}$ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان $= ۶۰^\circ$

$\xrightarrow{\div ۴}$ $\frac{\pi}{۴}$ رادیان $= ۴۵^\circ$

$\xrightarrow{\div ۶}$ $\frac{\pi}{۶}$ رادیان $= ۳۰^\circ$

کار در کلاس صفحه ۷۵

۱ مطابق نمونه هر یک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$۳۶^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{ رادیان}} \frac{\pi}{۵}$ رادیان

$۶۰^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{۳}$ رادیان

$۱۸۰^\circ \longrightarrow \pi$ رادیان

$۳۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{ رادیان}} \frac{\pi}{۶}$ رادیان

$۴۵^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{۴}$ رادیان

$۹۰^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{۲}$ رادیان

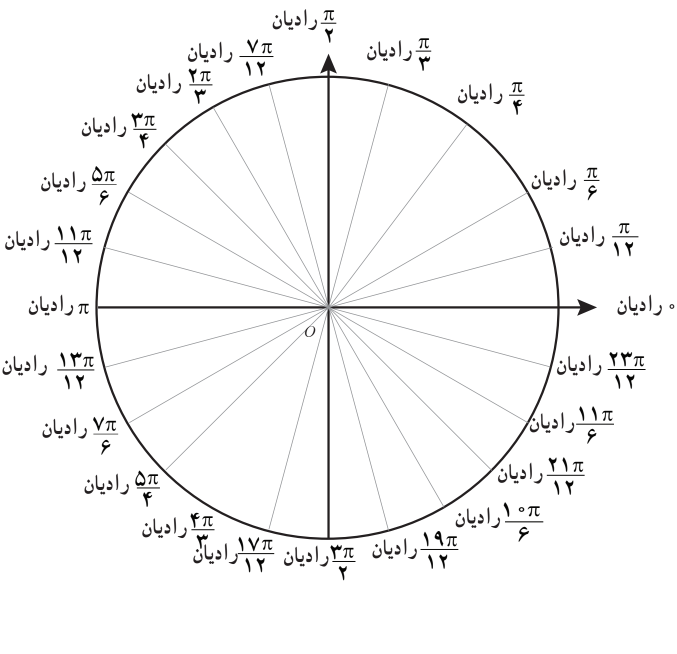
اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

D (درجه)	۵°	$۲۵/۷^\circ$	۲۴°	۷۲°	۱۲۰°	۲۲۵°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{۳۶}$	$\frac{\pi}{۷}$	$\frac{۲\pi}{۱۵}$	$\frac{۲\pi}{۵}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۴}$

۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویهٔ مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.



هدف از این کار در کلاس، آماده‌سازی دانش‌آموز در ایجاد مهارت تبدیل درجه به رادیان و برعکس است. با تقسیم کردن طرفین رابطهٔ $180^\circ = \pi$ رادیان بر عدد ۱۸۰ می‌توان گفت :

$$\frac{\pi}{180}\ \text{رادیان} = 1^\circ$$

همچنین با تقسیم کردن طرفین رابطهٔ $180^\circ = \pi$ رادیان بر عدد π می‌توان گفت :

$$\text{(با ماشین حساب)}\ 57/3^\circ \simeq \frac{180}{\pi}\ \text{درجه} = 1\ \text{رادیان}$$

به این ترتیب برای تبدیل درجه به رادیان اندازه زاویه را در $\frac{\pi}{180}$ رادیان ضرب می‌کنیم و برای تبدیل رادیان به درجه، اندازه زاویه را در $\frac{180}{\pi}$ درجه ضرب می‌کنیم.

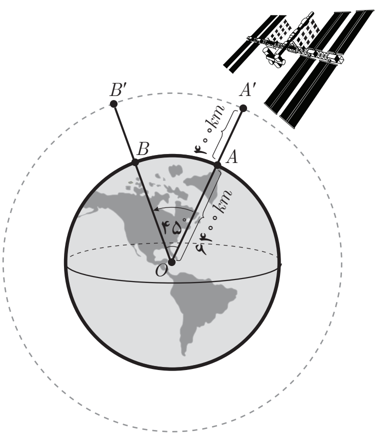
در انتهای سؤال ۱ گفته شود : 2π رادیان $= 360^\circ$ (یک دور کامل دایره)

سؤال ۲ این کار در کلاس از رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}$ تکمیل می‌شود. مثلاً اگر $R = \frac{\pi}{7}$ آنگاه :

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{7}\ \text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}} \rightarrow D \simeq 25/7^\circ$$

سؤال ۳، برای ایجاد مهارت در مشخص نمودن زاویه‌ها برحسب رادیان روی دایره مثلثاتی تنظیم شده است. شکلی که داده شده دقیقاً همان دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ ۷۲ است که زاویه‌های مربوط برحسب رادیان مشخص شده است. لذا شکل بـا افزودن $\frac{\pi}{12}$ رادیان و در جهت مثلثاتی تکمیل می‌شود. توصیه می‌شود زوایایی مانند $\frac{-\pi}{12}$ رادیان، $\frac{-\pi}{6}$ رادیان و $\frac{-\pi}{4}$ رادیان و مانند آنها در شکل نشان داده می‌شود.

فعالیت صفحه ۷۶



ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصلهٔ تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کرهٔ زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B که با مرکز زمین زاویه 45° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

۱ ابتدا زاویهٔ مرکزی ۴۵° را به رادیان تبدیل کنید.

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۱۸۰} \times ۴۵^\circ = \alpha = \text{اندازهٔ زاویهٔ مرکزی } \widehat{AOB} \text{ برحسب رادیان}$$

۲ شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با

$$r = OA' = ۶۴۰۰ + ۴۰۰ = ۶۸۰۰\ km$$

۳ طول کمان روبه‌روی $\widehat{A'OB'}$ با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با :

$$\text{طول کمان } A'B' = l = \frac{\pi}{۴} \times ۶۸۰۰ \simeq ۵۳۳۸\ km$$

هدف از ارائه این فعالیت معرفی یک کاربرد عملی از مفهوم رادیان است. در این حالت می‌خواهیم با داشتن اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $\widehat{AOB}$ ، اندازهٔ $\widehat{A'B'}$ را برحسب کیلومتر به دست آوریم.

فعالیت‌های مشابهی توسط معلم می‌تواند ارائه شود. نمونهٔ آن شکل ابتدای فصل است که در آن ماهواره امید در مدار خود نشان داده شده است.

خواندنی صفحهٔ ۷۶

توصیه می‌شود جهت آشنایی دانش‌آموز با به کارگیری ماشین حساب این خواندنی در کلاس انجام شود و مقادیر زاویه‌های خواسته شده به‌طور تقریبی توسط دانش‌آموزان به‌دست آید.

$\text{رادیان } ۰/۵ \simeq ۰/۵ \times \frac{۱۸۰}{\pi} \simeq ۲۸/۶^\circ$

$\text{رادیان } \frac{۴}{۵} \simeq ۴۵/۸^\circ$

$\text{رادیان } ۲ \simeq ۱۱۴/۶^\circ$

$\text{رادیان } ۳ \simeq ۱۷۱/۹^\circ$

$\text{رادیان } ۳/۱۴ \simeq ۱۷۹/۹^\circ$

$\text{رادیان } \frac{\pi}{۳} \simeq ۶۰^\circ$

$\text{رادیان } \frac{\pi}{۴} \simeq ۴۵^\circ$

$\text{رادیان } \pi \simeq ۱۸۰^\circ$

حل برخی از تمرین‌های درس اول

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi \text{ رادیان}}\to\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{\pi}{۲۰}\text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}}\to D=۹^\circ$$

به دانش‌آموزان متذکر می‌شویم که l و r هم‌واحد هستند و α برحسب رادیان به‌دست می‌آید.

$$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}\quad\text{رادیان}$$

۵← حل :

الف) درست است.
$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi \text{ رادیان}}\to\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۱}{\pi \text{ رادیان}}\to D=\frac{۱۸۰}{۳/۱۴}\simeq ۵۷/۳^\circ$$

مجموع زوایای پای ساق $۱۸۰^\circ - ۵۷/۳^\circ = ۱۲۲/۷^\circ$

هر یک از زوایای پای ساق $۱۲۲/۷^\circ \div ۲ = ۶۱/۳۵^\circ$

با توجه به کوچک‌تر بودن زاویهٔ روبه‌رو به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین نسبت به زوایای پای ساق، اندازهٔ قاعدهٔ مثلث نیز نسبت به اندازهٔ دو ساق مثلث کوچک‌تر است.

ب) درست است.
$$\alpha=\frac{l}{r}\to l=r\,\alpha=۱\times\pi\text{ رادیان}=\pi\text{ رادیان}\simeq ۳/۱۴\text{ cm}$$

پ) نادرست است.
$$\frac{۶\pi}{۵}\text{ رادیان}\xrightarrow{\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi\text{ رادیان}}}\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۶\pi}{۵}\text{ رادیان}}{\pi\text{ رادیان}}\to D=۲۱۶^\circ$$

در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

ت) نادرست است.

$$\frac{۲\pi}{۳}\text{ رادیان}\xrightarrow{\pi\text{ رادیان}=۱۸۰^\circ}D=۱۲۰^\circ$$

$$\text{—رادیان}\xrightarrow{\qquad\qquad}\quad=۲۰^\circ$$

$$\frac{۷\pi}{۳۶}\text{ رادیان}\xrightarrow{\qquad\qquad}D=۳۵^\circ$$

همان‌طور که می‌دانیم جمع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است. حال آنکه در این مثلث جمع هر سه زاویه ۱۷۵° می‌باشد. می‌توان به این نکته نیز اشاره کرد که جمع زوایای داخلی یک مثلث π رادیان است. حال آنکه جمع زوایای داده شده π رادیان نمی‌شود. بنابراین این زوایا تشکیل مثلث نمی‌دهند.

درس دوم

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

اهداف درس

۱ شناخت زاویهٔ قرینه $(-\alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
۲ شناخت زاویهٔ مکمل $(\pi - \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
۳ شناخت زاویه با اختلاف π رادیان $(\pi + \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
۴ شناخت زاویهٔ متمم $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
۵ شناخت زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
۶ شناخت زاویهٔ هم‌انتها و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن

پیش‌نیازها

۱ شناخت دایرهٔ مثلثاتی و جهت مثلثاتی و پیدا کردن زوایا روی دایرهٔ مثلثاتی
۲ آشنایی با اتحادهای مثلثاتی فصل مثلثات در سال دهم
۳ محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای °۳۰، °۴۵، °۶۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰، °۳۶۰
۴ شناخت علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع از دایرهٔ مثلثاتی
۵ آشنایی با مفهوم قرینهٔ نقطه $(x$ و $y)$ نسبت به محور xها، yها و مبدأ مختصات

روش تدریس

دانش‌آموز پس از تدریس این درس باید قادر باشد :

۱ با معلوم بودن یک زاویه برحسب رادیان،انتهای کمان روبه‌روی آن را مشخص کند در کدام ربع

دایره مثلثاتی قرار دارد.

۲ مفهوم قرینه یک زاویه و نمایش آن در دایره مثلثاتی را تشخیص داده و نسبت‌های مثلثاتی قرینه یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه محاسبه کند.

۳ با دانستن مفهوم دو زاویه مکمل، نسبت‌های مثلثاتی مکمل یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه (برحسب درجه یا رادیان) محاسبه کند. همچنین با فرض معلوم بودن یک زاویه، آن را به‌صورت دو زاویه دیگر تجزیه کند که مجموع یا اختلاف آنها π رادیان (یا °۱۸۰) است و سپس نسبت‌های مثلثاتی زاویه مفروض را با به کارگیری روابط معرفی شده به‌دست آورد.

۴ با دانستن مفهوم دو زاویه متمم، نسبت‌های مثلثاتی متمم یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه (برحسب درجه یا رادیان) محاسبه کند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت صفحه ۷۹

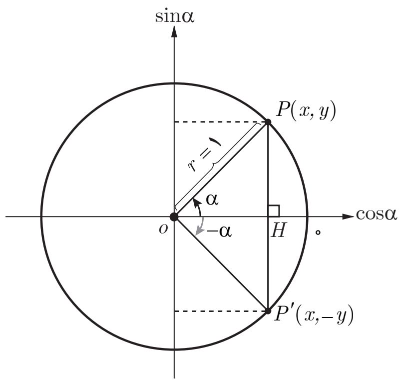
دو زاویهٔ α و α− را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل زیر °α=۳۰، نسبت‌های مثلثاتی زاویه °۳۰− در $O\overset{\Delta}{P'}H$ عبارت‌اند از :

$$\sin(-۳۰^\circ) = \frac{-y}{r} = -\sin ۳۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(-۳۰^\circ) = \frac{x}{r} = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(-۳۰^\circ) = \frac{-y}{x} = \frac{-\sin ۳۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ} = -\tan ۳۰^\circ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(-۳۰^\circ) = \frac{x}{-y} = -\cot ۳۰^\circ = -\sqrt{۳}$$



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

در این قسمت دانش‌آموز ضمن آشنایی با مفهوم قرینه یک زاویه باید مهارت یابد زوایای منفی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (خلاف جهت مثلثاتی) روی دایره مثلثاتی شناسایی کند و دو زاویه که

مجموع آنها صفر شود را قرینه بداند. نظیر $\frac{\pi}{۷}$ رادیان و $\frac{-\pi}{۷}$ رادیان ۳۰° و -۳۰°.

همچنین به این مطلب که انتهای کمان‌های روبه‌روی زاویه‌های $\frac{-\pi}{۲}$ رادیان و $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان، $\pi-$ رادیان و π رادیان، $\frac{-۳\pi}{۲}$ رادیان و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان و امثالهم برهم منطبق هستند دقت کند.

در این صفحه، قبل از معرفی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، این نکته که قرینه نقطه‌ای به مختصات (x و y) نسبت به محور افقی (در اینجا محور کسینوس‌ها) نقطه‌ای به مختصات (x و $-y$) است مطرح شود تا دانش‌آموز رابطه بین مختصات نقاط P و P' در شکل را مورد توجه قرار دهد. سپس با فرض $\alpha = ۳۰^\circ$ در $O\overset{\Delta}{P'}H$ مشابه نمونه خواهیم داشت:

$$\cos(-۳۰^\circ) = \frac{x}{r} = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(توجه شود که در دایره مثلثاتی، $r = ۱$) و دو سطر بعد را نیز مطابق حل تکمیل نماید.

توجه شود که در حالت کلی $x = \cos\alpha$ و $y = \sin\alpha$ (با توجه به اینکه $r=۱$) و بنابراین $\sin(-\alpha) = -y$ و $\cos(-\alpha) = x$ و در نهایت روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$ در حالت کلی ارائه شود.

کار در کلاس صفحه ۷۹

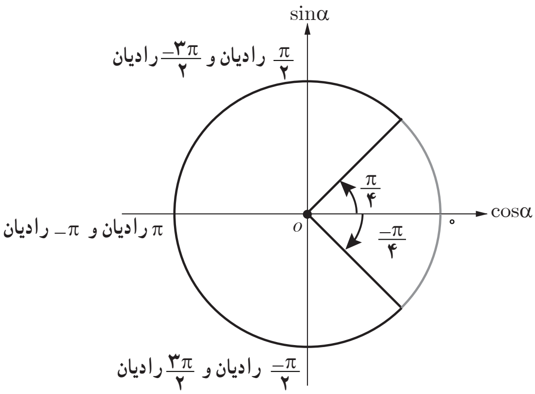
۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\sin(-\frac{\pi}{۴}) = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{۴}) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(-\frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\cot(-\frac{\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۴} = -۱$$



۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{۳})\times\cos(\frac{-\pi}{۶})+\tan(\frac{-\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱=\frac{-۳}{۲}$$

الف) $$\frac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)}=\frac{\cos ۹۰^\circ-\sin ۲۷۰^\circ}{-\sin ۱۸۰^\circ-\cos ۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

ب) $$\cot(\frac{-\pi}{۶})+\tan(\frac{-\pi}{۳})=-\cot\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}$$

پ) $$\cos(-۴۵^\circ)\times\cos(-۶۰^\circ)+\sin(-۴۵^\circ)\times\sin(-۶۰^\circ)=$$

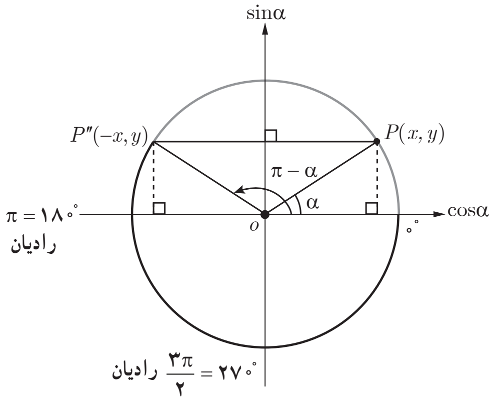
$$\cos ۴۵^\circ\times\cos ۶۰^\circ-\sin ۴۵^\circ\times(-\sin ۶۰^\circ)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

در این قسمت عبارت‌ها طوری ساده شود که حتماً از روابط مذکور در نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه استفاده شود.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت صفحه ۸۰

دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۱۸۰° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ ۳۰° و ۱۵۰° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر $\alpha=۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطهٔ P'' و انتهای کمان زاویهٔ ۱۵۰° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° عبارت‌اند از:



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

$$\sin ۱۵۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=y=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-x=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۱۵۰^\circ = \frac{\sin ۱۵۰^\circ}{\cos ۱۵۰^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{-\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\tan ۳۰^\circ$$

$$\cot ۱۵۰^\circ = \frac{۱}{\tan ۱۵۰^\circ} = -\sqrt{۳} = -\cot ۳۰^\circ$$

در ابتدای این مبحث پس از معرفی مفهوم دو زاویه مکمل و مثال‌های مختلف از این زاویه‌ها در هر دو حالت درجه و رادیان این نکته اشاره شود که قرینه یک نقطهٔ مختصات (y و x) نسبت به محور عمودی (در اینجا محور سینوس‌ها) نقطه‌ای به مختصات (y و $-x$) است تا دانش‌آموز رابطه بین مختصات دو نقطه P و P'' در شکل این صفحه را درک کند. سپس از روی این شکل به ازای $\alpha = ۱۵۰^\circ$ و با توجه به تصویر P'' روی محورهای کسینوس و سینوس حاصل $\sin ۱۵۰^\circ$ و $\cos ۱۵۰^\circ$ مطابق نمونه بیان شود و در ادامه جاهای خالی کامل گردد.

در ادامه حالت کلی نسبت‌های مثلثاتی $\pi - \alpha$ (مکمل زاویه α) ارائه شود.

کار در کلاس صفحه ۸۰

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید:

الف) ۷۵°

$۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۰۵^\circ$

مکمل زاویهٔ ۷۵°، زاویهٔ ۱۰۵° است.

ب) -۲۵°

$۱۸۰^\circ - (-۲۵^\circ) = ۲۰۵^\circ$

مکمل زاویهٔ -۲۵°،زاویهٔ ۲۰۵° است.

پ) $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان

$\pi - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱۱\pi}{۱۲}$

مکمل زاویهٔ $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان، $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ است.

ت) $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان

$\pi - (-\frac{\pi}{۴}) = \frac{۵\pi}{۴}$

مکمل زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ است.

در هر حالت بهتر است هر زاویه و مکمل آن روی شکل دایره مثلثاتی نمایش داده شود.

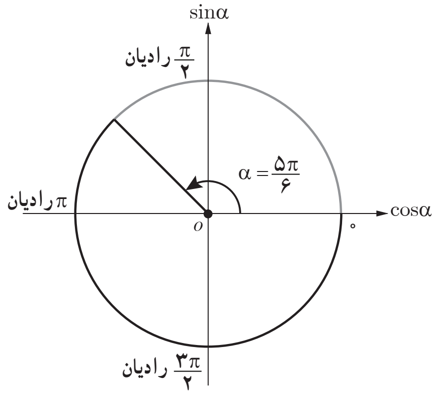
۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه به‌دست آورید.

$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۶}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\frac{۵\pi}{۶}=\cot(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cot\frac{\pi}{۶}=-\sqrt{۳}$$



فعالیت صفحه ۸۱

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۴}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot(-۱۲۰^\circ)=-\cot(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\cot ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

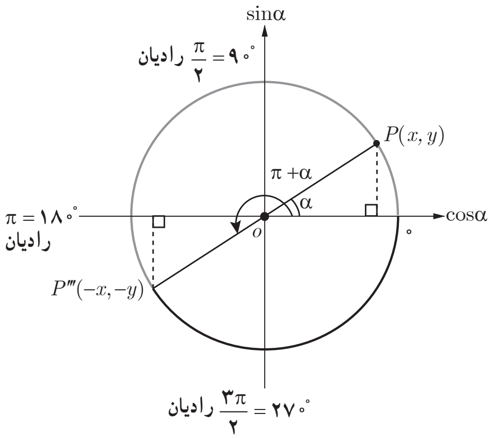
$$\cos(۱۳۵^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\cos ۴۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

هدف از ارائهٔ این فعالیت افزایش مهارت دانش‌آموز در به کارگیری روابط نسبت‌های مثلثاتی $۱۸۰^\circ-\alpha^\circ$ یا (رادیان) $\pi-\alpha$ است.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت صفحه ۸۱

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۱۰° را به دست آورید.



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است.

انتهای کمان زاویه ۲۱۰° در ربع سوم واقع است. در ضمن $۲۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویهٔ ۲۱۰° و ۳۰° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° عبارت‌اند از :

$$\sin ۲۱۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -y = -\sin ۳۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -x = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

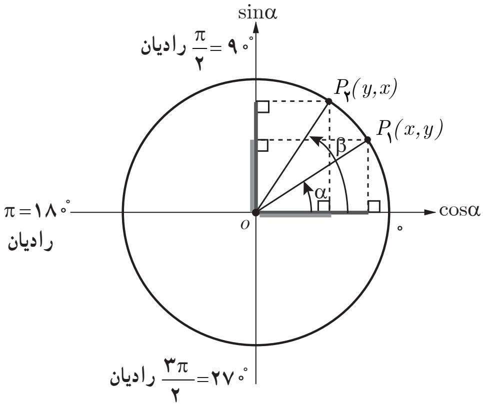
$$\tan ۲۱۰^\circ = \frac{\sin ۲۱۰^\circ}{\cos ۲۱۰^\circ} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan ۳۰^\circ$$

$$\cot ۲۱۰^\circ = \frac{۱}{\tan ۲۱۰^\circ} = \sqrt{۳} = \cot ۳۰^\circ$$

در این قسمت ابتدا با ذکر مثال‌هایی به دانش‌آموز آموزش داده شود زوایایی نظیر ۲۱۰° و ۳۰°، $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان اختلافی برابر با ۱۸۰° (یا π رادیان) دارند و با مفهوم دو زاویهٔ مکمل متفاوت است و نباید اشتباه شود. سپس به این نکته اشاره شود که قرینه نقطه‌ای به مختصات (x و y) نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ای به مختصات ($-x$ و $-y$) است تا دانش‌آموز در شکل این فعالیت، رابطه بین مختصات نقاط P و P'' را درک کند. در ادامه، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° کامل شود و در نهایت در حالت کلی نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\pi + \alpha$ مطرح شود.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت صفحه ۸۲



$$\sin\frac{\pi}{۴} = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\frac{\pi}{۴} = \cot\frac{\pi}{۴} = ۱$$

همچنین زاویه $\circ$ و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین:

$$\sin\frac{\pi}{۲} = \cos\circ = ۱$$

$$\tan\frac{\pi}{۲} = \cot\circ = \text{تعریف نشده}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

فعالیت صفحه ۸۳

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به‌دست آورید.

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

در این قسمت دو هدف دنبال می‌شود. یکی معرفی رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه نظیر $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۶}$ رادیان که اختلاف آنها $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است، دوم ارائه مهارت به دانش‌آموز در انجام روش‌های مختلف به منظور یافتن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مفروض. به عنوان مثال برای یافتن نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان به دو روش می‌توان عمل کرد.

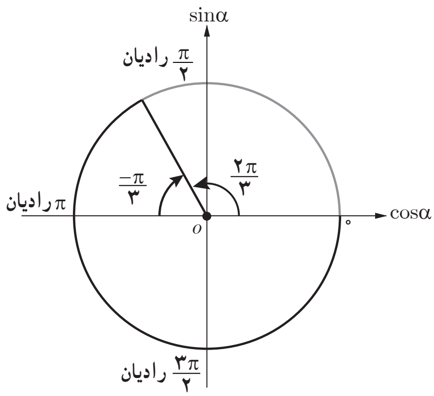
در روش اول این زاویه به‌صورت $\frac{۲\pi}{۳} = \pi - \frac{\pi}{۳}$ (یعنی به عنوان مکمل زاویه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان) در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، با توجه به روابط مربوط به نسبت‌های مثلثاتی مکمل یک زاویه داریم :

$$\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cot\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



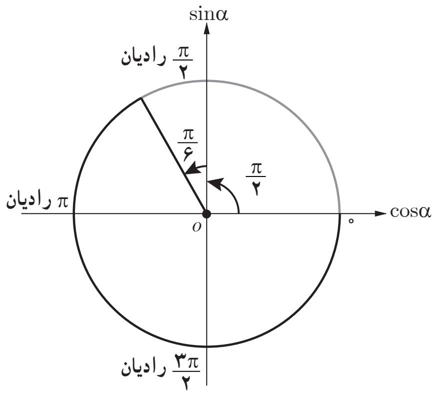
در روش دوم این زاویه به‌صورت $\frac{۲\pi}{۳} = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$ (یعنی زاویه‌ای که اختلاف آن با $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است) در نظر گرفته می‌شود. حال با توجه به شکل و قرار گرفتن انتهای کمان درربع دوم و مشابه توصیفی که در قسمت دو زاویه متمم ارائه شد، خواهیم داشت :

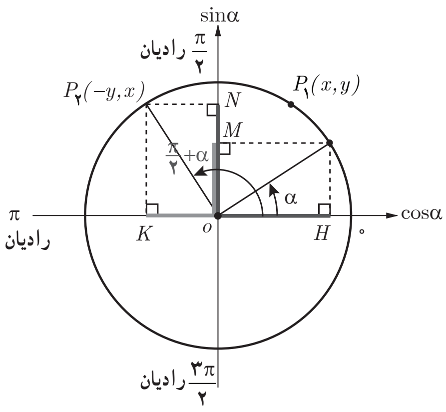
$$\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳} = \tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = -\cot\frac{\pi}{۶} = -\sqrt{۳}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳} = \cot(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$





به این ترتیب این مطلب به دانش‌آموز ارائه شود که از هر دو روش نتایج یکسان خواهد بود و به‌کارگیری هر کدام از روابط مذکور مجاز است.

برای فهم بهتر در شکل دایره مثلثاتی صفحه ۸۴ با نام‌گذاری نقاط مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث $OP_۱H$ داریم:

$$\sin\alpha = P_۱H = OM = y$$

از طرفی چون انتهای کمان زاویه $\frac{\pi}{۲}+\alpha$ در ربع دوم است، $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = oK = -y$ یعنی $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = -\sin\alpha$، این مطلب با رنگ سبز در شکل مشخص شده است.

به‌طور مشابه در مثلث $OP_۱H$ داریم: $\cos\alpha = OH = x$

از طرفی: $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = NO = x$ یعنی $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = \cos\alpha$

این مطلب به رنگ قرمز در شکل مشخص شده است. در نهایت صورت کلی روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{۲}+\alpha$ ارائه شود.

حل برخی از تمرین‌های درس دوم

۲

دانش‌آموزان در تکمیل این جدول، از روابط قید شده در درس استفاده کنند.

مثلاً: $\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

زاویه x / نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$
$\cos x$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\tan x$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\sqrt{۳}$

۳

الف) $\sin ۸۴۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$

$\sin ۸۴۰^\circ = \sin (۴ \times ۱۸۰^\circ + ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin (۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ$

ب) $\cos (-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

$\cos (-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۲۴^\circ = \cos (۲ \times ۱۸۰^\circ - ۳۶^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan (-۱۰۰۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$

$\tan (-۱۰۰۰^\circ) = -\tan (۱۰۰۰^\circ) = -\tan (۶ \times ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

$\sin ۸۷۵^\circ = \sin (۴ \times ۱۸۰^\circ + ۱۵۵^\circ) = \sin ۱۵۵^\circ$

۴

الف) $x + ۲۰^\circ + x = ۹۰^\circ \rightarrow x = ۳۵^\circ$

خیر. مثلاً $x = ۳۹۵^\circ$ نیز در تساوی صدق می‌کند.

ب) $x + \text{رادیان}\,\frac{\pi}{۱۸} + \text{رادیان}\,\frac{۲\pi}{۹} + x = \text{رادیان}\,\frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \text{رادیان}\,\frac{\pi}{۹}$

خیر. مثلاً $x = \frac{۱۹\pi}{۹}$ نیز در تساوی صدق می‌کند.

دانش‌آموزان با توجه به نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم، روابط بالا را می‌توانند نتیجه بگیرند، اما برای یکتایی پاسخ ارائه‌شده باید برای دانش‌آموزان توضیح دهیم که با افزودن مضارب زوج π رادیان، می‌توان زوایای بسیاری یافت که در تساوی‌های الف و ب صدق می‌کنند.

درس سوم

توابع مثلثاتی

اهداف درس

۱ آشنایی با رسم توابع سینوس و کسینوس در صفحهٔ مختصات از طریق نقطه‌یابی

۲ آشنایی با ویژگی‌های توابع سینوس و کسینوس

۳ رسم تابع با ضابطهٔ $y=a\ \sin(x+b)$ به کمک انتقال $y=\sin x$

۴ رسم تابع با ضابطهٔ $y=a\ cos(x+b)$ به کمک انتقال $y=\cos x$

پیش‌نیازها

۱ محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس تمامی زوایا

۲ آشنایی با مفهوم بازه‌ها

۳ شناخت دامنه و برد

۴ درک مفاهیم انتقال عمودی، افقی، انبساط و انقباض در راستای محور yهای نمودار توابع

روش تدریس

دانش‌آموز پس از مطالعه و آموزش این درس توسط معلم باید بتواند :

۱ تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کند.

۲ تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کند.

۳ پس از رسم هر یک از توابع مذکور در یک تکرار، نمودار حاصل را در تکرارهای دیگر نیز رسم کند.

۴ با استفاده از نمودار هر یک از توابع فوق، نمودار توابعی که از طریق انتقال، قرینه کردن (نسبت به یکی از محورها) یا انقباض و انبساط آنها حاصل می‌شوند را رسم کند.

۵ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس ویژگی‌های هر کدام از این توابع را در ربع‌های مختلف دایره مثلثاتی و رفتار این توابع را در نقاط خاص مشخص کند.

توصیه‌ها

۱ از آموزش مفهوم دوره تناوب در رسم نمودار توابع مثلثاتی اجتناب شود.

۲ از آموزش رسم توابع تانژانت و کتانژانت اجتناب شود.

۳ در رسم توابع، روی رسم نمودار توابع باضابطه $y = a\sin(x+b)$ یا $y = a\sin x + b$ (a و b دو مقدار مفروض هستند) بحث شود و از آموزش رسم نمودار توابع باضابطه $y = a\sin kx + b$ یا $y = a\sin(kx+b)$ (a، b، k مقادیر مفروض هستند) اجتناب شود. ضمن آنکه مقادیر a و b طوری درنظر گرفته شود که امکان رسم نمودار به آسانی فراهم باشد و مشکلی برای دانش‌آموز هنگام رسم به‌وجود نیاید.

وسایل مورد نیاز : خط‌کش ــ ماشین حساب

رسم تابع سینوس

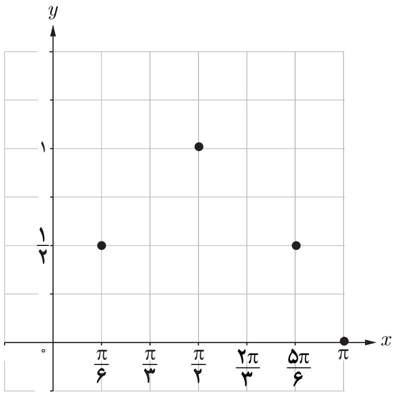
فعالیت صفحه ۸۸

هدف از ارائه این فعالیت رسم گام به گام نمودار تابع باضابطهٔ $y = \sin x$ از طریق نقطه‌یابی است.

۱ در ابتدایی فعالیت جدول به‌صورت مقابل کامل شود. بنابراین تابع f به‌صورت زیر مشخص می‌شود :

x	$y = \sin x$	مختصات نقطه
۰	۰	$(۰,۰)$
$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$
$\frac{\pi}{۲}$	۱	$(\frac{\pi}{۲},۱)$
$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$
π	۰	$(\pi,۰)$

$$f = \left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\frac{\pi}{۲},۱),(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\pi\ ,\ ۰)\right\}$$



۲ نقاط گام قبلی را به صورت مقابل در صفحهٔ مختصات نمایش دهید. توجه شود که در محور افقی بازهٔ $[\circ,\pi]$ به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده که اندازهٔ هر قسمت $\frac{\pi}{۶}$ است.

۳ با افزودن نقاط $(\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲})$، $(\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲})$، $(\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ به جدول بالا، شکل زیر به‌دست می‌آید.

(با فرض $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$)

$$(\frac{\sqrt{۳}}{۲} \simeq \circ/۸۷ \ , \ \frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq \circ/۷۱)$$

در شکل این قسمت نقاط جدید (با رنگ قرمز) به همراه نقاط قبلی (به رنگ آبی) رسم شده‌اند. توجه شود که در این شکل محور افقی در بازهٔ $[\circ,\pi]$ به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم شده که اندازهٔ هر قسمت $\frac{\pi}{۱۲}$ است.

۴ در این گام، نقاط حاصل را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید. در هنگام رسم، با توجه دانش‌آموز به این مطلب جلب شود که نقاط به شکل منحنی به یکدیگر وصل می‌شوند نه خط راست و برای اطمینان از این موضوع باید تعداد نقاط را بیشتر نمود.

۵ برای رسم نمودار این تابع در بازه $[\pi,۲\pi]$ ابتدا جدول داده شده در این گام را به‌صورت زیر کامل کنید تا پس از مشخص شدن این نقاط در صفحه مختصات و وصل کردن آنها به یکدیگر نمودار رسم شده حاصل شود.

x	$y=\sin x$	مختصات نقطه
π	۰	$(\pi, ۰)$
$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{-۱}{۲}$	$(\frac{۷\pi}{۶}, \frac{-۱}{۲})$
$\frac{۳\pi}{۲}$	-۱	$(\frac{۳\pi}{۲}, -۱)$
$\frac{۱۱\pi}{۶}$	$\frac{-۱}{۲}$	$(\frac{۱۱\pi}{۶}, \frac{-۱}{۲})$
۲π	۰	$(۲\pi, ۰)$

۶ با ادغام دو نمودار حاصل در شکل‌های گام‌های ۴ و ۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ در بازه $[۰,۲\pi]$ همان طوری که در صفحه ۸۹ رسم شده است به‌دست می‌آید. مطابق این نمودار جدول زیر رفتار تابع سینوس را در هر یک از ربع‌های چهارگانه مشخص می‌کند.

$\left[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi\right]$	$\left[\pi, \frac{۳\pi}{۲}\right]$	$\left[\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$	$\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$
مقدار تابع سینوس از ۱− به ۰ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱− کاهش می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
مقدار تابع سینوس در ربع چهارم منفی است.	مقدار تابع سینوس در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع سینوس در ربع دوم مثبت است.	مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.

در این قسمت معلم می‌تواند با رسم دایره مثلثاتی رفتار نسبت مثلثاتی سینوس را با رفتار تابع سینوس در هر ربع مقایسه کند.

۷ با توجه به رابطهٔ $\sin(x+۲k\pi)=\sin x$، $k\in\mathbb{Z}$، که در درس قبل آشنا شدید می‌توان گفت:

$$\sin(x+۲\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن ۲π رادیان به کمان آن تغییری نمی‌کند. بنابراین نمودار تابع سینوس

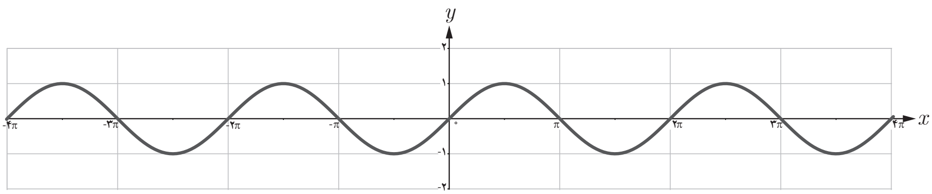
در بازه‌های $[۰ \text{ و } ۲\pi]$ و $[۲\pi , ۴\pi]$ یکسان است.

همچنین داریم :

$$\sin (x-۲\pi)= \sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن ۲π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند. در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۰ , ۲\pi]$ و $[-۲\pi , ۰]$ یکسان است. در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۲k\pi \text{ و } (۲k+۲)\pi]$، $k\in\mathbb{Z}$، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه $[۰ , ۲\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[۲\pi , ۴\pi]$، $[۴\pi , ۶\pi]$، $[-۲\pi , ۰]$، $[-۴\pi , -۲\pi]$ تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در ۲ تکرار رسم شده است. این نمودار را برای ۴ تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را دربارهٔ ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع سینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱ \text{و} ۱]$ است.

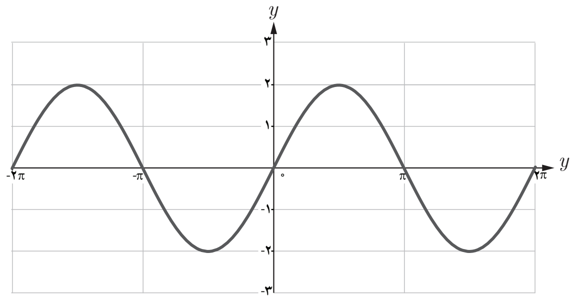
ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ۱ است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=\frac{۵\pi}{۲}$، $x=\frac{-۳\pi}{۲}$، $x=\frac{-۷\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید. (در این قسمت از دانش‌آموزان خواسته شود طول‌ها، نقاطی که مقدار تابع به ازای آنها ۱ می‌شود در شکل مشخص کنند، همچنین با مقدار دهی به k این طول‌ها را از روی رابطه کلی نیز به‌دست آورند.)

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با ۱- است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{۳\pi}{۲}$، $x=\frac{۷\pi}{۲}$، $x=\frac{-\pi}{۲}$، $x=\frac{-۵\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{۳\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید. (مشابه قسمت قبل این نقاط هم روی شکل و هم با مقدار دهی به k مشخص شود.)

کار در کلاس صفحه ۹۰

هدف از این کار در کلاس افزایش مهارت دانش‌آموز در رسم نمودار آن دسته از توابع مثلثاتی است که از طریق انتقال تابع با ضابطه $y=\sin x$ با قرینه کردن نمودار آن نسبت به یکی از محورها و یا با انقباض یا انبساط آن به‌دست می‌آیند. به عنوان نمونه برای رسم تابع با ضابطهٔ $y=۲\sin x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چون برد این تابع بازهٔ $[-۲, ۲]$ است کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را روی این بازه انبساط دهیم. نمودار حاصل در بازهٔ $[-۲\pi, ۰]$ نیز تکرار می‌شود و شکل زیر به‌دست می‌آید :



برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x+۱$ کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را به اندازه یک واحد در جهت محور عمودی انتقال دهیم تا شکل ب حاصل شود.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ واحد در جهت محور افقی انتقال دهیم تا شکل پ حاصل شود.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\sin x+۱$ ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\sin x$ را با قرینه‌کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور xها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازهٔ یک واحد در جهت محور yها انتقال دهیم تا شکل ت حاصل شود. در این قسمت می‌توان با نقطه‌یابی نیز نمودار صحیح را یافت بنابراین روی این مطلب نیز در کلاس بحث شود.

رسم تابع کسینوس

این فعالیت مشابه با فعالیت قبلی به منظور آشنایی دانش‌آموز با رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ مطرح می‌شود.

فعالیت صفحه ۹۱

۱ جدول زیر را کامل کنید.

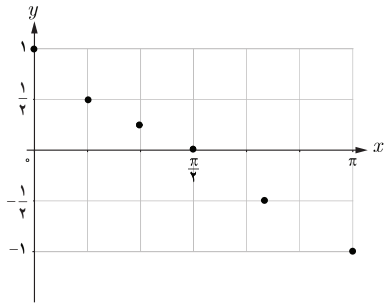
x	$y=\cos x$	مختصات نقطه
۰	۱	$(۰,۱)$
$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq ۰/۷$	$(\frac{\pi}{۴}, ۰/۷)$
$\frac{\pi}{۲}$	۰	$(\frac{\pi}{۲}, ۰)$
$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{-\sqrt{۲}}{۲} \simeq -۰/۷$	$(\frac{۳\pi}{۴}, -۰/۷)$
π	-۱	$(\pi, -۱)$

به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به‌دست می‌آید.

$$f = \{(۰,۱), (\frac{\pi}{۴}, ۰/۷), (\frac{\pi}{۲}, ۰), (\frac{۳\pi}{۴}, -۰/۷), (\pi, -۱)\}$$

آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟ بله

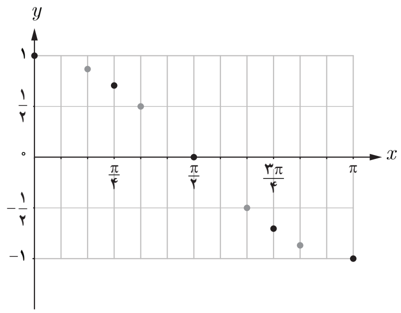
۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.



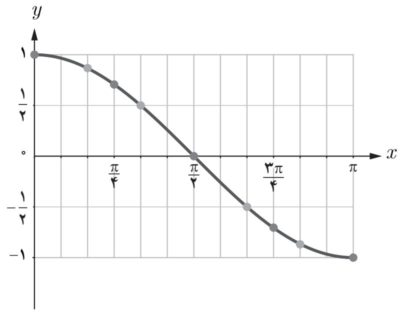
۳ نقاط به طول‌های $x = \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۶}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به‌دست آید.

$(\sqrt{۳} \simeq ۱/۷)$.

x	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$
$y=\cos x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$

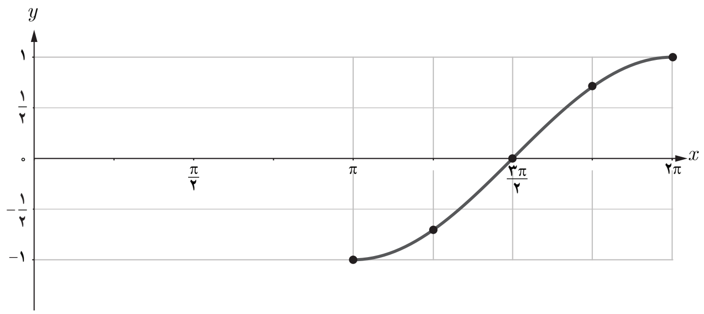


۴ نقاط شکل صفحهٔ قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست آید. این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y=\cos x$ را در بازهٔ $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.

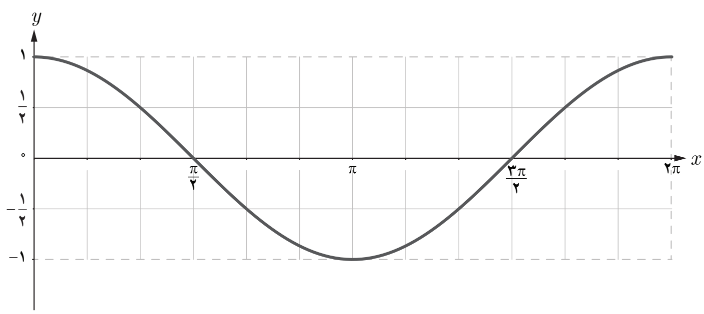


۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\pi$ و $2\pi]$ به‌صورت شکل مقابل به‌دست آید.

x	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

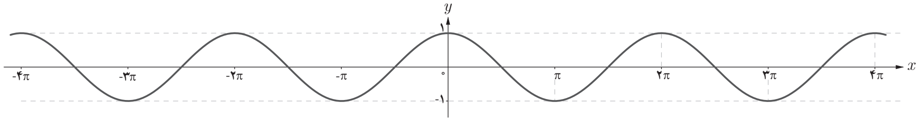


۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$
مقدار تابع کسینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از ۱− به ۰ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از صفر به ۱− کاهش می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.
مقدار تابع کسینوس در ربع چهارم مثبت است.	مقدار تابع کسینوس در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع کسینوس در ربع دوم منفی است.	مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[۰,۲\pi]$، $[۲\pi,۴\pi]$، $[-۲\pi,۰]$ و $[-۴\pi,-۲\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[۰,۴\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحهٔ قبل جاهای خالی را درخصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ کامل کنید.

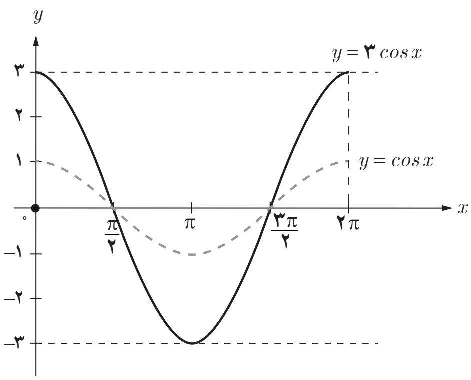
الف) دامنهٔ تابع کسینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱,۱]$ است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های $x=\frac{k\pi}{۲}$ برابر با صفر است. $(k\in\mathbb{Z})$

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس ۱ است که در طول‌های $x=۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ۱− است که در طول‌های $x=(۲k+۱)\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ به‌دست می‌آید.

کار در کلاس صفحه ۹۳



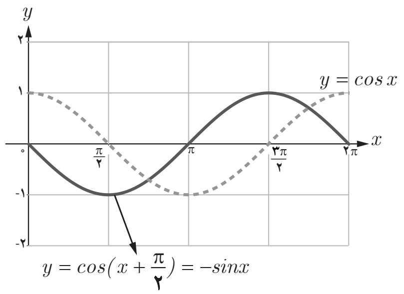
شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳\cos x$ را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.

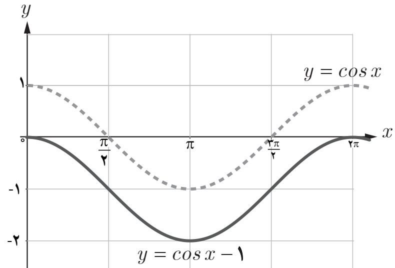
۱) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

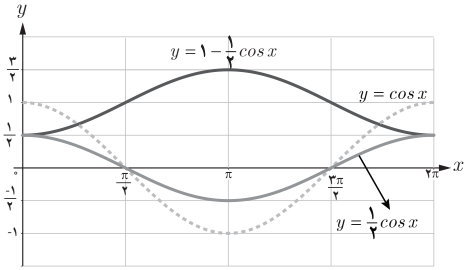
۲) $y=\cos x-۱$

۳) $y = ۱ - \frac{۱}{۲}\cos x$

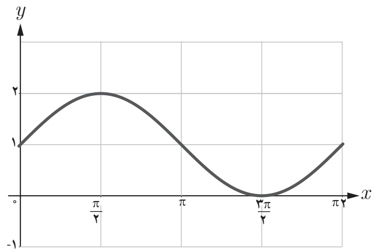
۴) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{۲}\right) + ۱$







$y = ۱ \div \frac{۱}{۲}\cos x$



$y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) + ۱$

حل تمرین درس سوم

۱

$$۱\text{ـ}\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) = \cos(-(\frac{\pi}{۲} - x)) = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x \end{cases}$$

این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$
۲\_ \begin{cases} y = \cos x \\ y = \sin(\frac{\pi}{۲} + x) = \cos x \end{cases}
$$

این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$
۳\_ \begin{cases} y = \cos x \\ y = \cos(۲\pi - x) = \cos x \end{cases}
$$

این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$
۴\_ \begin{cases} y = \sin x \\ y = \sin(۵\pi - x) = \sin(۴\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}
$$

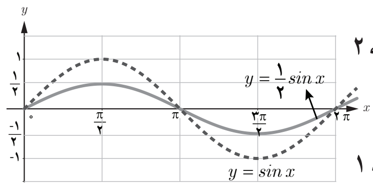
این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲

به دانش‌آموزان متذکر شویم برای پاسخ دادن به این سؤال از روش انتقال استفاده کنند و سپس با توجه به بازه‌های داده شده نمودار را مشخص کنند.

۱) $y = \frac{۱}{۲}\sin x \, , [\circ, ۲\pi]$

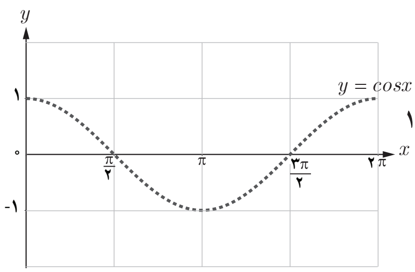
مرحله ۲



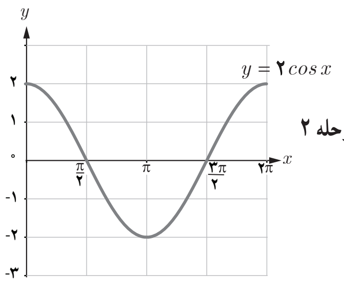
مرحله ۱

ابتدا ضابطه را در بازهٔ $[\circ, ۲\pi]$ رسم می‌کنیم و سپس این نمودار را در بازهٔ $[-۲\pi, \circ]$ تکرار می‌کنیم. در ضمن رسم نمودار در سه مرحله انجام بگیرد تا دانش‌آموزان بهتر متوجه شوند.

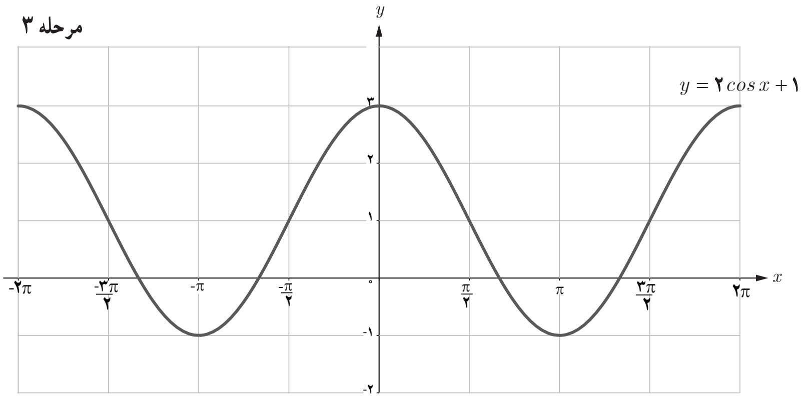
۲) $y = ۲\cos x + ۱ \, , [-۲\pi \, , ۲\pi]$



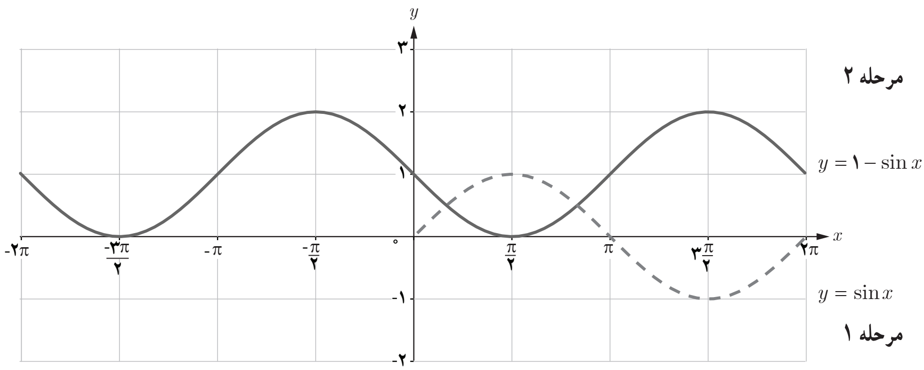
مرحله ۱



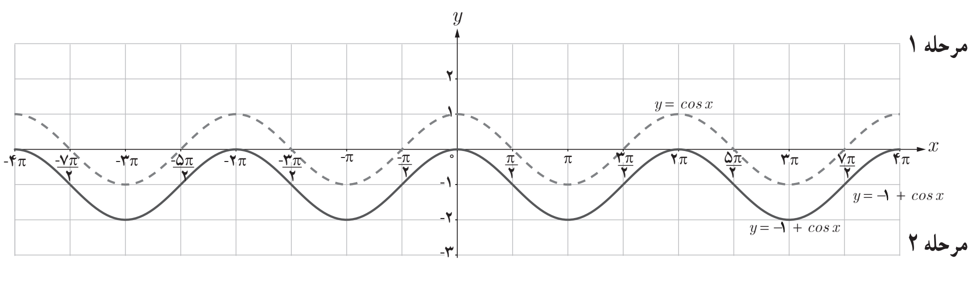
مرحله ۲



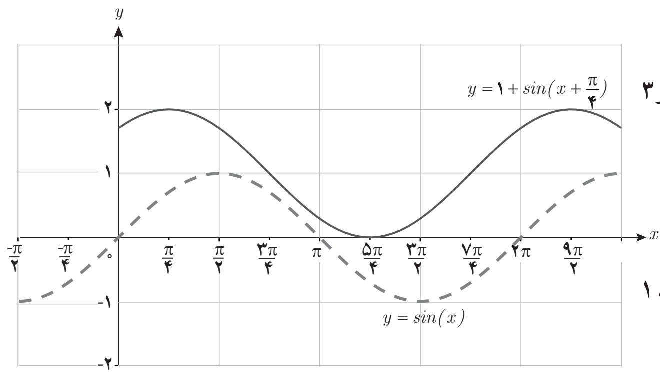
۳) y=۱−sin$x$, [−۲π ,۲π]



۴) y=−۱+ cos$x$, [−۴π ,۴π]



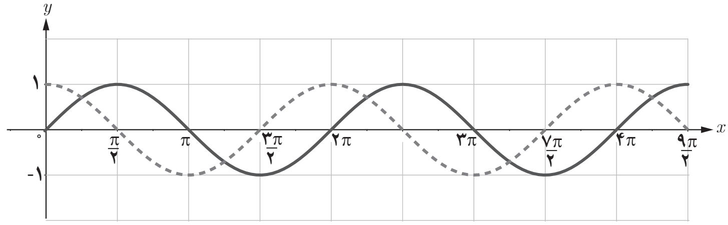
۵) $y = ۱ + \sin(x + \frac{\pi}{۴})\,,\, [۰, ۲\pi]$



ابتدا $y=\sin x$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید و سپس به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ به سمت چپ انتقال دهید و در پایان نمودار را ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهید. با توجه به بازهٔ داده شده نمودار را حذف کرده و یا امتداد دهید.

۶) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۲})\,,\, [۲\pi, ۴\pi]$

راه حل پیشنهادی دیگری که می‌توان ارائه داد، ساده‌کردن ضابطه و تبدیل آن به تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ است سپس می‌توان ضابطهٔ فوق را در بازهٔ خواسته شده رسم کرد.

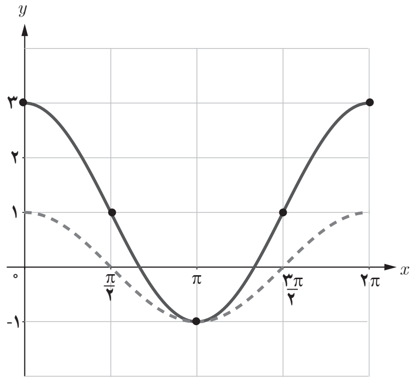


۳

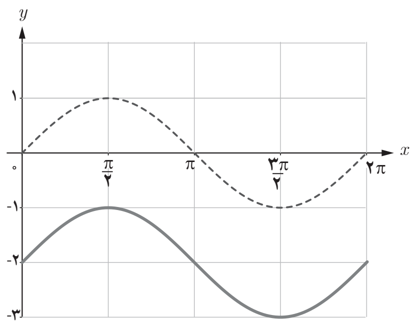
نمودار سمت راست : ضابطهٔ $y=۲\sin x-۱$ (قسمت ب)

نمودار سمت چپ : ضابطهٔ $y=۲-\cos x$ (قسمت پ)

الف) $y=۲\cos x+۱$



ت) $y=\sin x-۲$



۴

الف) درست است. (مقدار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$، $\frac{۱}{۲}$ برابر شده است.)

ب) درست است. (تابع با ضابطه $y=\cos x$ به اندازه $\frac{۱}{۲}$ واحد به سمت راست انتقال یافته است.)

پ) نادرست است. (نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ باید ۱ واحد در راستای محور yها انتقال یابد نه محور xها.)

ت) درست است.

برای پاسخ دادن به این سؤال کافی است از روش انتقال و مفاهیم آن استفاده کرد و در قسمت (پ)، ضابطه داده شده را با تابع با ضابطهٔ $y=\sin(x-۱)$ مقایسه کنید.

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ زاویه‌های -۹۰°، -۱۲۰° و ۵۸۵° را به رادیان تبدیل کنید.

۲ زاویه‌های $\frac{۱۱\pi}{۱۸}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، $\frac{-۴\pi}{۵}$ رادیان و -۲ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

۳ طول کمان روبه‌روی زاویهٔ ۱۳۵° در دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر چند است؟

۴ زاویهٔ ۶۶۰° را به رادیان و زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۶}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

۵ یک پیتزا به قطر ۲۵ سانتی‌متر را به ۸ قسمت مساوی برش می‌دهیم اندازه کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی در هر قطاع چند سانتی‌متر است؟

۶ عبارت $\cos\alpha + \frac{\sin^۲\alpha}{۱-\cos\alpha}$ را ساده کنید.

۷ عبارت $\frac{\sin^۳\theta + \cos^۳\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ را ساده کنید.

۸ اگر $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه x را تعیین کنید.

۹ حاصل $\sin^۲\frac{\pi}{۵} + \frac{۱}{\cos^۲\frac{۲\pi}{۷}} + \cos^۲\frac{\pi}{۵} - \tan^۲\frac{۲\pi}{۷}$ را بیابید.

۱۰ ثابت کنید :

الف) $\frac{۱+\sin x}{\sin x} + \frac{\cot x - \cos x}{\cos x} = \frac{۲}{\sin x}$

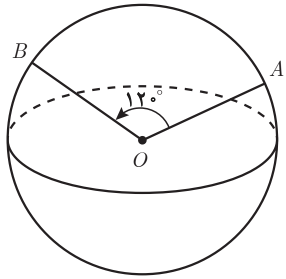
ب) $\sin(\frac{۳\pi}{۲}) \times \cot^۲(\frac{\pi}{۳}) + \cos^۲\pi \times \tan\frac{\pi}{۴} = \frac{۲}{۳}$

۱۱ اگر $\tan\beta = \frac{۳}{۴}$ و $\sin\beta < ۰$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ β را بیابید.

۱۲ حاصل عبارت $\tan ۱۴^\circ - \cot ۷۶^\circ + \sin ۳۵^\circ - \cos ۵۵^\circ$ را به دست آورید.

۱۳ فاصلهٔ دو نقطه A و B روی کره زمین که نسبت به مرکز زمین با یکدیگر زاویهٔ ۱۲۰° می‌سازند چند

کیلومتر است؟ شعاع کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.



۱۴ حاصل $\tan ۱^\circ \times \tan ۲^\circ \times ... \times \tan ۸۹^\circ$ را بیابید.

۱۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۳۳۰° را به‌دست آورید.

۱۶ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{-۷\pi}{۶}$ رادیان را به‌دست آورید.

۱۷ حاصل کسر $\frac{\sin(\frac{-۹\pi}{۴}) - \tan(۳\pi)}{\tan(-۶\pi) + \cos(\frac{۹\pi}{۴})}$ رابیابید.

۱۸ عبارت $\cos ۲۵^\circ \times \sin ۷۵^\circ + \cos ۷۵^\circ \times \sin ۲۵^\circ$ را ساده کنید.

۱۹ نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{۱۷\pi}{۴}$ رادیان را به‌دست آورید.

۲۰ حاصل عبارت $\cos(\frac{-۵\pi}{۶}) + \tan(\frac{-۱۱\pi}{۶}) \times \cos(\frac{-۷\pi}{۶})$ را بیابید.

۲۱ مشخص کنید هر یک از زاویه‌های ۷۲۰°، ۴۵۰°، ۲۲۵° با چه زاویه‌هایی هم انتها هستند، سپس حاصل $\sin ۲۲۵^\circ + \cos ۴۵۰^\circ - \tan ۷۲۰^\circ$ رابیابید.

۲۲ هر یک از نمودارهای توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازه‌های خواسته شده رسم کنید.

الف) $y = ۲\sin(x + \frac{\pi}{۲}) \quad , \quad x \in [۰, ۴\pi]$

ب) $y = ۱ + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) \quad , \quad x \in [-۲\pi, ۲\pi]$

پ) $y = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin x \quad , \quad x \in [۰, ۲\pi]$

ت) $y = -\cos(-x) + ۲ \quad , \quad x \in [۰, ۲\pi]$

۲۳ هر یک از زوایای زیر را به رادیان تبدیل کرده و آن را روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهید :

الف) 18° ب) -54° پ) 84°

ت) -215° ث) 330° ج) -420°

۲۴ هر یک از زوایای زیر را به درجه تبدیل کنید و سپس آن را به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهید :

الف) $\frac{-\pi}{9}$ ب) $\frac{2\pi}{5}$ پ) $-\frac{3\pi}{8}$

ت) $\frac{7\pi}{9}$ ث) $\frac{17\pi}{6}$ ج) $\frac{-20\pi}{3}$

۲۵ مجموع دو زاویه 385° و تفاضل آنها $\frac{13\pi}{36}$ رادیان است. اندازهٔ این دو زاویه برحسب رادیان چقدر است؟

۲۶ در دایره‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $\frac{\pi}{6}$ رادیان است. طول کمان متناظر به آن زاویه را به‌دست آورید.

۲۷ طول برف پاک‌کن یک ماشین ۴۰ سانتی‌متر است. زاویهٔ دوران چقدر باشد تا انتهای تیغهٔ برف پاک‌کن مسافت ۳۰ سانتی‌متر را طی کند؟

۲۸ مسافت پیموده شده توسط نقطه‌ای روی محیط یک چرخ به شعاع ۲۴ سانتی‌متر، هنگامی که چرخ ۸ دور می‌زند چقدر است؟

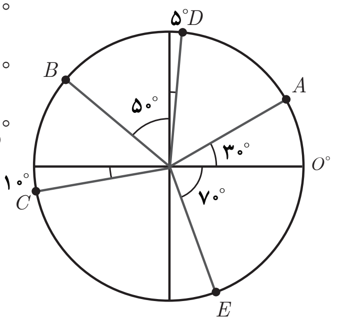
۲۹ الف) اندازهٔ زاویه‌ای که عقربهٔ ساعت شمار از ۱ بعد از ظهر تا ۶ غروب طی می‌کند، چند رادیان است؟

ب) در مدت ۴۸ دقیقه هر یک از عقربه‌های ساعت چند رادیان طی می‌کنند؟

۳۰ چرخی در ۵ دقیقه ۷۵۰ دور می‌چرخد زاویهٔ چرخش این چرخ در مدت یک ثانیه چند رادیان است؟

۳۱ چند دقیقه طول می‌کشد تا عقربهٔ دقیقه شمار یک ساعت، به اندازهٔ $\frac{4\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

۳۲ با استفاده از مضارب 180° و مانند الگو، تعیین کنید که انتهای کمان هر یک از زاویه‌های صفحه بعد منطبق برکدام نقطهٔ مشخص شده روی دایرهٔ مثلثاتی است؟



الف) $۱۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ + ۱۰^\circ \rightarrow C$ انتهای کمان نقطهٔ

ب) -۴۳۰°

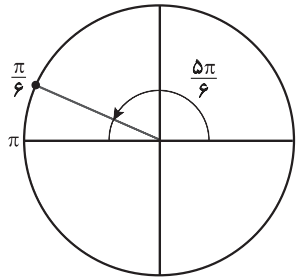
پ) ۷۵۰°

ت) ۱۲۲۰°

ث) ۱۵۸۰°

ج) -۹۹۵°

۳۳ با استفاده از مضارب π و مانند الگو، انتهای کمان هر یک از زاویه‌های زیر را به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید.



الف) $\frac{۵\pi}{۶} = \pi - \frac{\pi}{۶}$

ب) $\frac{۴\pi}{۳}$

پ) $\frac{۲۱\pi}{۱۰}$

ت) ۳π

ث) ۱۰π

ج) $\frac{۹\pi}{۲}$

چ) $\frac{-۱۳\pi}{۲}$

ح) $\frac{۲۱\pi}{۴}$

خ) $\frac{۳۷\pi}{۳}$

د) $\frac{-۵۵\pi}{۷}$

ذ) $\frac{۷۷\pi}{۶}$

ر) $\frac{-۸۳\pi}{۴}$

ز) $\frac{۱۱۱\pi}{۵}$

۳۴ روی دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ $P(۱ , ۰)$ تحت زاویهٔ $\frac{۳۷\pi}{۶}$ رادیان حول مبدأ، دوران می‌کند. مختصات جدید نقطهٔ P را بیابید.

۳۵ انتهای کمان هر یک از زاویه‌های زیر در کدام ناحیه از نواحی چهارگانهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

الف) ۳۹۵°

ب) -۲۳۷

پ) ۱۱۰۰

ت) -۸۶۰°

ث) $\frac{۱۶\pi}{۵}$

ج) $\frac{۴۷\pi}{۴}$

چ) $\frac{۵۶\pi}{۳}$

ح) ۲ رادیان

خ) ۱۹ رادیان

۳۶ فرض کنید $\alpha = \frac{\pi}{۹}$ باشد، در هر یک از بازه‌های زیر زاویه‌ای پیدا کنید که انتهای کمان آن زاویه، بر انتهای کمان α منطبق باشد:

الف) $[\pi, ۳\pi]$ ب) $[-۲\pi, -\pi]$ پ) $\left[\frac{۱۵\pi}{۲}, \frac{۱۹\pi}{۲}\right]$

۳۷ اگر $\sin^۴\alpha \cos\alpha > ۰$ و $\cos\alpha \sin\alpha < ۰$، آنگاه انتهای کمان زاویهٔ α در کدام ناحیه از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۳۸ علامت هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین کنید. (زاویه‌های داده شده برحسب رادیان هستند)

الف) $\sin\frac{۱۱\pi}{۹}$ ب) $\cos ۳$

پ) $\cot(-۲)$ ت) $\tan(\frac{-۶\pi}{۷})\cot(۳\pi + \frac{۹\pi}{۵})$

ث) $\dfrac{\sin(۸\pi + ۶)\cos(-۳۳)}{\tan(\frac{۵\pi}{۶} + \frac{\pi}{۵})}$ ج) $\sin(\frac{۱۰۰\pi}{۳}) + \tan(\frac{۱۹\pi}{۴})$

۳۹ اگر $\sin x = ۰/۷$ باشد، هر یک از مقادیر زیر را محاسبه کنید:

الف) $\sin(-x)$ ب) $\sin(\pi + x)$ پ) $\cos(\frac{\pi}{۲} + x) + \sin(x + ۵\pi)$

ت) $\sin(x - \pi)\cos(\frac{۳\pi}{۲} - x)$ ث) $\sin(x - ۴\pi)$ ج) $\sin(۱۹\pi - x) - \cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)$

۴۰ اگر $\cos\theta = m$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید:

الف) $\cos(\pi - \theta)$ ب) $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ پ) $\sin(\theta + \frac{۳\pi}{۲})$

ت) $\cos(۳۵\pi + \theta)$ ث) $\sin(\frac{۲۳\pi}{۲} + \theta)$ ج) $\sin(\theta - \frac{۳\pi}{۲}) - \cos(\theta + ۲\pi)$

۴۱ حاصل هر یک از عبارات زیر را برحسب نسبت‌های مثلثاتی α بنویسید:

الف) $\cos(۲۰\pi + \alpha)$ ب) $\sin(\alpha - ۱۹\pi)$ پ) $\cot(۲۸\pi + \alpha)$

ت) $\sin(\frac{37\pi}{2}+\alpha)$ ث) $\tan(\alpha-\frac{7\pi}{2})$ ج) $\sin(\frac{15\pi}{2}-\alpha)+\cos(\alpha-21\pi)$

۴۲ نسبت‌های مثلثاتی هر یک از زاویه‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) 120° (با استفاده از زاویهٔ مکمل)   ب) $\frac{-5\pi}{4}$

پ) 390° ت) $\frac{23\pi}{6}$

ث) -900° ج) $\frac{19\pi}{2}$

۴۳ فرض کنید $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ چهارم باشد. مطلوب است محاسبهٔ هر یک از مقادیر زیر :

الف) $\cos(\frac{7\pi}{2}-\alpha)$ ب) $\sin(51\pi+\alpha)$

پ) $\tan(3\pi-\alpha)$ ت) $\cot(8\pi+\alpha)$

۴۴ اگر $\tan\alpha=2$ و انتهای کمان زاویهٔ α در ربع سوم باشد، هر یک از مقادیر زیر را به‌دست آورید :

الف) $\tan(\frac{5\pi}{2}-\alpha)$ ب) $\cos(33\pi+\alpha)$ پ) $\cot(\alpha-5\pi)$

ت) $\sin(\alpha+6\pi)$ ث) $\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ ج) $\cos(\frac{161\pi}{2}+\alpha)$

۴۵ اگر $\tan 15^\circ=m$، حاصل عبارت $\frac{\sin 75^\circ+3\cos 195^\circ}{\cos 105^\circ-\cos 285^\circ}$ را به‌دست آورید.

۴۶ فرض کنید $\sin x=\frac{1}{2}$ ،

الف) دو مقدار برای x در بازهٔ $[0,2\pi]$ پیدا کنید.

ب) در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ چند مقدار برای x می‌توان یافت؟

پ) فرمولی برای یافتن همهٔ مقادیر x ارائه کنید.

۴۷ الف) یک مقدار برای x ارائه کنید که در تساوی $\cos(x-\frac{\pi}{7})=\sin x$ صدق کند؟

ب) آیا مقادیر دیگری برای x، می‌توان پیدا کرد که در تساوی فوق صدق کنند؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، xهای صادق در تساوی صفحه قبل را معرفی کنید.

۴۸ درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید :

الف) $\dfrac{\sin ۲۲۵^\circ + \cos ۴۹۵^\circ}{\tan ۳۱۵^\circ} = \sqrt{۲}$

ب) $\sin ۹۶۰^\circ \cos(-۵۷۰^\circ) + \tan(\dfrac{۱۳\pi}{۶}) \cot(\dfrac{-۵\pi}{۶}) = \dfrac{۷}{۴}$

پ) $\sin ۲۳۰^\circ - ۲\sin ۱۴۰^\circ + \sin ۴۱۰^\circ + \sin ۵۰^\circ + \cos(-۵۰^\circ) + \sin ۴۰^\circ = \cos ۴۰^\circ$

ت) $\tan(۱۰\pi + x) \cot(۳\pi + x) + \cos(۴\pi - x) \sin(\dfrac{۳\pi}{۲} - x) = \sin^۲ x$

ث) $۳\tan ۳۱۰^\circ + \cot ۲۲۰^\circ - \tan ۵۰^\circ - ۵\tan ۱۳۰^\circ - ۲\cot ۳۲۰^\circ = ۴\tan ۵۰^\circ$

ج) $\cos(\dfrac{\pi}{۲} - \theta) \sin(۱۹\pi - \theta) - \cos(\theta - ۳۷\pi) \sin(\dfrac{\pi}{۲} + \theta) = ۱$

۴۹ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ ، ثابت کنید :

$$\frac{\cos B + \cos c}{\sin B + \sin c} = \sin A$$

۵۰ در هر مورد مشخص کنید که آیا نمودار توابع داده شده بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

الف) $y = \sin x \quad , \quad y = \sin(۳\pi - x)$

ب) $y = \cos x \quad , \quad y = \sin(\text{——} - x)$

پ) $y = \cos(\dfrac{۱۵\pi}{۲} + x) \quad , \quad y = \cos(x - \dfrac{\pi}{۲})$

ت) $y = \sin(\dfrac{۳\pi}{۲} + x) \quad , \quad y = \cos(x - ۲\pi)$

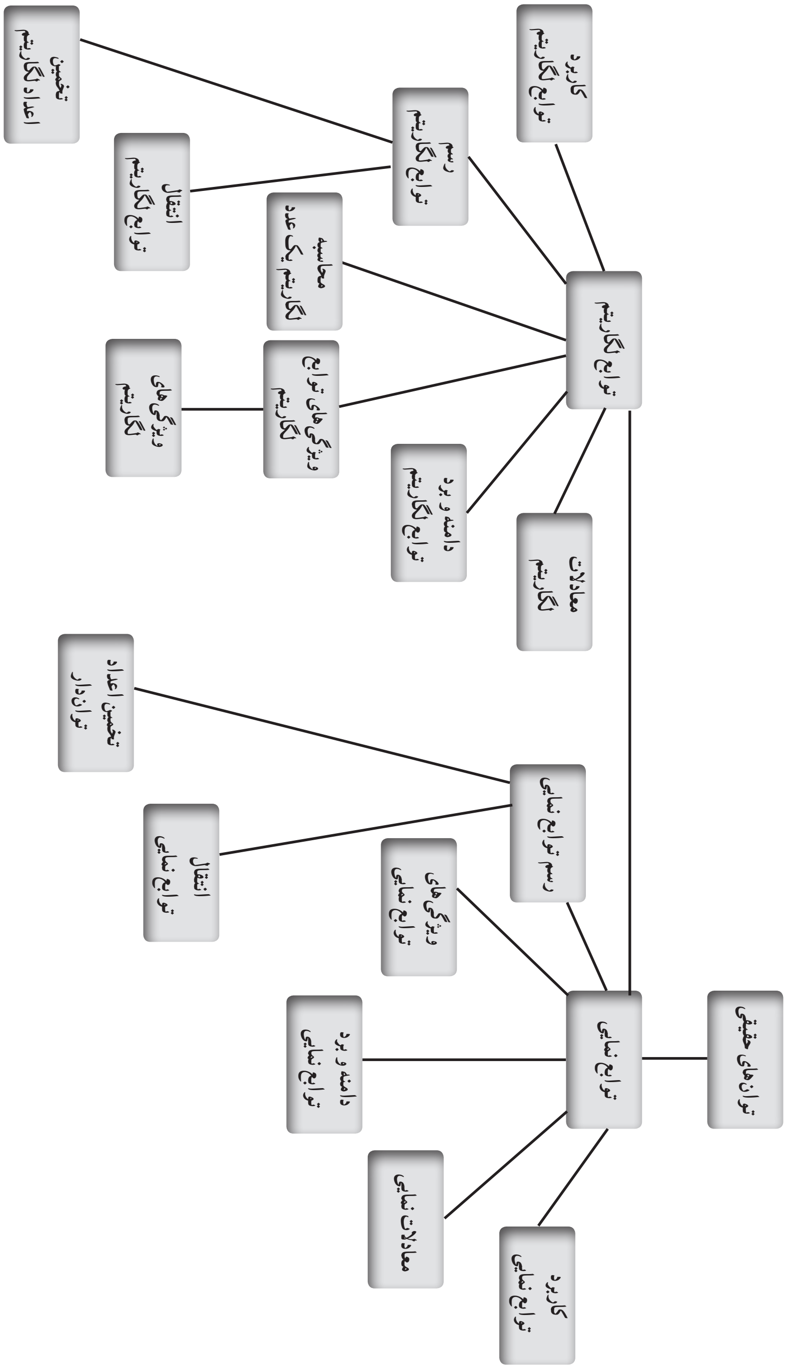
فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

اهداف کلی فصل

- ❑ آشنایی با توان‌های حقیقی
- ❑ آشنایی با توابع نمایی و نمودارهای آنها
- ❑ آشنایی با ویژگی‌های توابع نمایی
- ❑ حل معادلات نمایی
- ❑ آشنایی با توابع لگاریتمی و نمودارهای آنها
- ❑ آشنایی با ویژگی‌های توابع لگاریتمی
- ❑ حل معادلات لگاریتمی
- ❑ آشنایی با کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی
- ❑ آشنایی با انتقال نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

نقشه‌های مفهومی



دانستنی برای معلم

خلاصه‌ای از تاریخ پیدایش لگاریتم :

جان‌نپر ریاضی‌دان اسکاتلندی در سال ۱۶۱۴ میلادی کتابی به زبان لاتین تحت عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» منتشر کرد که فوق‌العاده مورد توجه ریاضی‌دانان آن زمان قرار گرفت، جدول این کتاب بعدها به جدول لگاریتم معروف شد.

نپر برای محاسبات این کتاب بیست سال زحمت کشیده بود. مبنای لگاریتم نپر عدد e (عدد اویلر) است که مقدار آن از سری $e=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\cdots$ یا از حد به‌دست $\lim\limits_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n=e$ به‌دست می‌آید. مقدار تقریبی این عدد ۲/۷۱۸۲۰۰۰۰ است.

یک سال پس از انتشار این کتاب، یک دبیر ریاضی در انگلستان به نام بریگز، از کار خود دست کشید و به اسکاتلند نزد نپر رفت و ضمن تشویق و قدردانی، از او خواست که جدول لگاریتمی برمبنای ۱۰ بنویسد. نپر نیز از این پیشنهاد استقبال کرد ولی عمرش کفاف نداد که آن را به پایان برساند. بریگز کار نیمه تمام نپر را ادامه داد تا در سال ۱۶۲۴ میلادی جدول لگاریتم دهگانی را به پایان رسانید. این جدول بعدها به‌وسیلهٔ دیگران تکمیل شد.

کاربرد جالبی از لگاریتم :

در انتهای درس سوم این فصل فرمول بین انرژی آزاد شده در زلزله (برحسب ارگ) و ریشتر (مقیاس بزرگی زمین‌لرزه) به‌صورت زیر آمده است :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵\ M$$

که E مقدار انرژی آزاد شده و M اندازهٔ ریشتر زلزله است.

یک سؤال اینجا مطرح می‌شود که اگر اندازهٔ بزرگی زمین‌لرزه برحسب ریشتر یک واحد بزرگ‌تر شود، انرژی آن چند برابر می‌شود؟ مثلاً چه تفاوتی از نظر میزان انرژی آزادشده بین زلزلهٔ ۶ ریشتری و ۷ ریشتری وجود دارد؟

زلزلهٔ ۶ ریشتری $\to \log E_۱ = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶) = ۲۰/۸$

$\to E_۱ = ۱۰^{۲۰/۸}\ Erg$: میزان انرژی آزاد شده در زلزلهٔ ۶ ریشتری

زلزلهٔ ۷ ریشتری $\to \log E_۲ = ۱۱/۸ + ۱/۵(۷) = ۲۲/۳$

$\to E_۲ = ۱۰^{۲۲/۳}\ Erg$: میزان انرژی آزاد شده در زلزلهٔ ۷ ریشتری

بنابراین :

$$\frac{E_۲}{E_۱}=\frac{۱۰^{۲۲/۳}}{۱۰^{۲۰/۸}}=۱۰^{۱/۵}\simeq ۳۱/۶۲$$

یعنی با یک واحد افزایش در مقیاس ریشتر، انرژی آزاد شده تقریباً ۳۲ برابر می‌شود.

تصویر عنوانی

تصویر عنوانی این فصل شامل دو تصویر است :

۱ سنگ نوشته‌های گنج‌نامه : نوشتارهایی از دوران داریوش و خشایار شاه هخامنشی است که بر دل یکی از صخره‌های الوند در فاصله ۵ کیلومتری غرب همدان و در انتهای درهٔ عباس‌آباد حکاکی شده است و قدمتی حدود ۲۵۰۰ سال دارد.

۲ ریتون طلایی هگمتانه (کشف‌شده در همدان) شاهکار هنر فلزکاری عصر هخامنشیان با قدمتی بیش از ۲۵۰۰ سال.

روش سال‌یابی کربن ۱۴ یکی از روش‌های بسیار متداول است که از آن در سطح گسترده‌ای استفاده می‌شود و یکی از تکنیک‌هایی است که به خوبی زمان مطلق را تعیین می‌کند. این روش اولین بار در سال ۱۹۴۹ توسط $J.R.Arnold$ و $W.F.Libby$ استفاده شد و از آن زمان به بعد باستان‌شناسان برای تعیین سن مطلق آثار باستانی از این روش استفاده می‌کنند. اتمسفر بالایی زمین توسط پرتوهای کیهانی بمباران می‌شود و باعث شکسته شدن نیتروژن موجود در اتمسفر و تبدیل ایزوتوپ پایدار کربن ۱۲ به ایزوتوپ ناپایدار کربن ۱۴ می‌شود. ایزوتوپ ناپایدار از طریق فعالیت اتمسفر به زمین آورده می‌شود، این فعالیت‌ها شامل توفان‌های ناگهانی است و این عمل باعث تثبیت فعالیت‌های بیوسفری می‌شود زیرا این ایزوتوپ‌های ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ به‌صورت کاملاً یکسان با کمپلکس‌های مولکولی آلی واکنش انجام می‌دهند و این عمل روی فرایندهای فتوسنتزی گیاهان تأثیر می‌گذارد. جانورانی که از این گیاهان استفاده می‌کنند ایزوتوپ کربن ۱۴ را به‌خوبی جذب می‌کنند و آن را به ایزوتوپ پایدار تبدیل می‌کنند. کربن ۱۴ دائماً در حال تخریب شدن و تبدیل به ایزوتوپ پایدار کربن است. موجودات زنده در طول حیات خود به میزان بالایی، ایزوتوپ کربن ۱۴ را جذب می‌کنند و نسبت کربن ۱۴ به کربن ۱۲ که در اجساد و بقایای جانداران وجود دارد همانند نسبت اتمسفری این ایزوتوپ‌ها است. وقتی که موجودات زنده می‌میرند نسبت کربن ۱۴ که در اجساد آنها وجود دارد به تدریج کم می‌شود. نسبت کاهش این ایزوتوپ $\frac{۱}{۲}$ است و ۵۷۳۰ سال طول می‌کشد تا این کربن در اجساد باقی‌مانده از بین برود.

فرمول زیر جهت تعیین سن یک نمونه باستانی به کمک کربن ۱۴ استفاده می‌شود :

$$T = \left[Ln(\frac{nf}{n\circ}) / (-\circ/۶۹۳) \right] \times t_{۱/۲}$$

نیمه عمر کربن ۱۴

درصد کربن ۱۴ در نمونه به درصد کربن ۱۴ در بافت زنده

مثلاً اگر یک فسیل با ۱۰ درصد کربن ۱۴ نسبت به یک جاندار زنده داشته باشیم، خواهیم داشت :

$T = [Ln\,(\circ/۱\circ)\,/\,(-\circ/۶۹۳)] \times ۵۷۳\circ$

$= [(-۲/۳\circ۳)\,/\,(-\circ/۶۹۳)] \times ۵۷۳\circ = ۱۹\circ۴۲$ سال

درس اول

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

اهداف درس

۱ آشنایی با توان‌های گنگ
۲ آشنایی با تابع نمایی و ضابطهٔ آن
۳ آشنایی با نحوهٔ رسم نمودار توابع نمایی
۴ تقریب مقدار اعداد توان‌دار با استفاده از نمودار
۵ آشنایی با ویژگی‌های توابع نمایی
۶ تشخیص دامنه و برد توابع نمایی
۷ حل معادلات نمایی

پیش نیازها

۱ آشنایی با قوانین توان‌های گویا
۲ رسم نمودار توابع با استفاده از جدول مقادیر
۳ تشخیص دامنه و برد یک تابع با استفاده از نمودار آن
۴ آشنایی با تابع یک به یک و تشخیص آن با استفاده از نمودار آن

روش تدریس

در این درس دانش‌آموزان با مفهوم جدیدی به نام تابع نمایی آشنا می‌شوند. این تابع برای توصیف و مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی و به‌ویژه مسائل رشد و زوال استفاده می‌شود.

فعالیت صفحه ۹۶

فعالیت اول درس با یک مثال با مضمون فوتبال که مورد علاقه اکثر دانش‌آموزان است، آغاز شده است و ارتباط نمایی بین تعداد مراحل بازی و تعداد کل تیم‌ها مورد نظر بوده است. باید از ارائهٔ پاسخ درست، بلافاصله پس از مطرح کردن صورت فعالیت پرهیز کرد و تنها نقش هدایتگر را در کلاس داشت. سعی شود دانش‌آموزان به سؤال‌های ۱ تا ۶ این فعالیت پاسخ دهند.

سؤال ۱ و ۲ را به‌راحتی با توجه به نمودار صفحهٔ ۹۶ پاسخ می‌دهند.

سپس با تفکر باید پاسخ سؤال ۳ را بیان کنند :

۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۲ تیم

۲ در مرحله قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۴ تیم

۳ تعداد تیم‌ها در هرمرحله با تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟ تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل = تعداد تیم‌ها در هر مرحله × ۲

۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت‌کننده در این مسابقات برقرار است؟

$۲^{(\text{تعداد مراحل})}$ = تعداد کل تیم‌های شرکت‌کننده

۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تاست؟ $۶۴ = ۲^۶$ = تعداد تیم‌های اولیه

۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ $y = ۲^x$

این فعالیت طوری طراحی شده که دانش‌آموز بتواند به آسانی به سؤالات فوق پاسخ دهد و الگوی نمایی مستتر در شکل را کشف کنند.

در ابتدای صفحهٔ ۹۸، توان‌های حقیقی و ویژگی‌های مقدماتی آنها به‌طور خلاصه معرفی می‌شود که با توجه به زمان کلاس می‌توانید مثال‌هایی از آنها را حل کنید.

کار در کلاس صفحه ۹۸

این کار در کلاس تفاوت‌ها و شباهت‌های دو تابع $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را از طریق رسم نمودار آموزش می‌دهد.

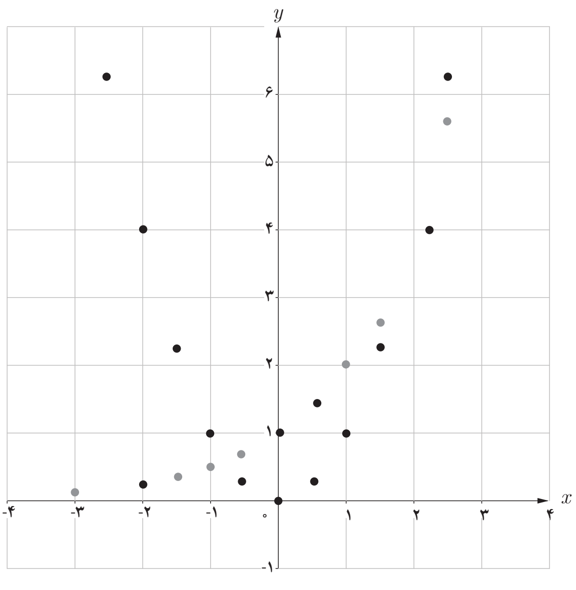
۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.

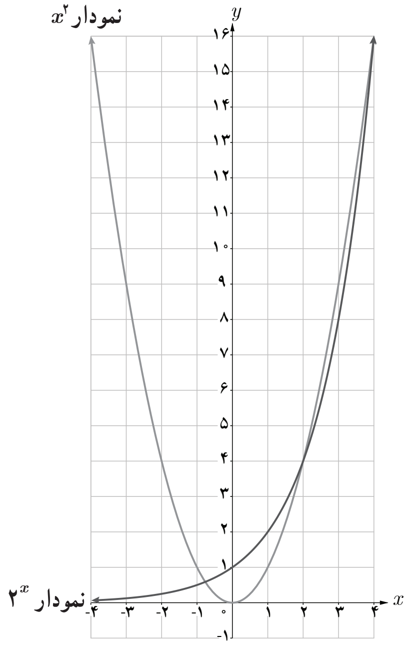
x	$-\frac{۵}{۲}$	**−۲**	$-\frac{۳}{۲}$	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=x^2$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵

x	−۳	−۲	$-\frac{۳}{۲}$	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=2^x$	۰/۱۲	$\frac{۱}{۴}$	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	۱	۱/۴	۲	۲/۸۳	۴	۵/۶۶

۲ حال این دو نمودار را دریک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 باهم مساوی‌اند؟ سه نقطه

۳ در x^2، متغیر در **پایه** و عدد ثابت در **توان** است؛ ولی در 2^x، **متغیر** در توان و عدد **ثابت** در پایه است.





این سؤال در بسیاری از کتب درسی متوسطه طرح می‌شود زیرا در تابع نمایی، دانش‌آموز برای نخستین بار متغیر را در توان می‌بیند و ممکن است آن را با تابع $y=x^2$ اشتباه بگیرد.

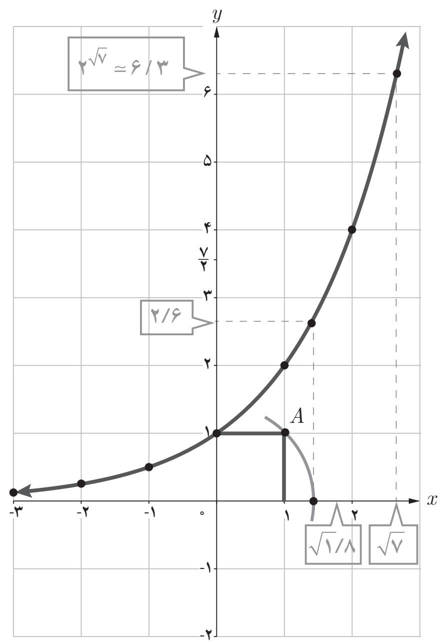
برای حل سؤالات این کار در کلاس ابتدا دو جدول تکمیل می‌شوند و سپس نمودار سمت چپ تکمیل شود. سؤال ۲ با توجه به نمودار سمت راست با راهنمایی معلم پاسخ داده می‌شود. نمودار ۲^x و $x^۲$ در سه نقطهٔ ۴ و ۲ و ۰/۷۵- با هم مقدار مساوی دارند. سؤال ۳ به جایگاه متفاوت توان و عدد ثابت در این دو تابع اشاره دارد و تکراری نبودن کلمات جاهای خالی تفکر بیشتر دانش‌آموز را در پی دارد.

در ابتدای صفحهٔ ۹۹، به‌طور رسمی تابع نمایی معرفی می‌شود، تأکید بر مثبت بودن و مخالف یک بودن پایه از فصل ۳ ریاضی ۱ آغاز شده و در کتاب ریاضی ۲ در تعریف تابع نمایی استفاده شده است. علاوه بر مثال‌هایی که در کتاب آورده شده است، شما می‌توانید از دانش‌آموزانتان بخواهید تا چند تابع نمایی مثال بزنند.

فعالیت صفحه ۹۹

این فعالیت بسیار مهم بوده و حل آن در کلاس ضروری است.

درشکل زیر نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y=۲^x$ رسم شده است.



۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟ نقطهٔ (۰,۱)

۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید. $D=(-\infty\ ,+\infty)$ و $R=(\circ\ ,+\infty)$
تأکید بر استفاده از نمادهای دامنه و برد ضروری است.

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟ بله، زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند.

۴ عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. با توجه به نمودار، کمان OA را رسم می‌کنیم تا محور xها را در نقطه $\sqrt{۲}$ قطع کند سپس به نمودار و محور yها عمود می‌کنیم عدد تقریبی ۲/۶ به‌دست می‌آید.

۵ عدد $\frac{۷}{۲}$ روی محور yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری‌که $۲^a \simeq \frac{۷}{۲}$. این سؤال، به نوعی تابع وارون را یادآوری می‌کند. از نقطه $\frac{۷}{۲}$ که روی محور yها مشخص شده عمودی بر نمودار و سپس بر محور xها رسم می‌کنیم که نقطه ۱/۸ به‌دست می‌آید.

۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$۲^{-۱}\quad,\quad ۲^{-\circ/۴}\quad,\quad ۲^{۵}\quad,\quad ۲^{\circ/۳}\quad,\quad ۲^{\frac{۵}{۲}}\quad,\quad ۲^{\frac{۳}{۲}}\quad,\quad ۲^{\sqrt{۵}}$$

$$۲^{-۱} < ۲^{-\circ/۴} < ۲^{\circ/۳} < ۲^{\frac{۳}{۲}} < ۲^{\sqrt{۵}} < ۲^{\frac{۵}{۲}} < ۲^{۵}$$

۷ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین ۲^x و ۲^y برقرار است؟

$$x<y \to ۲^x < ۲^y$$

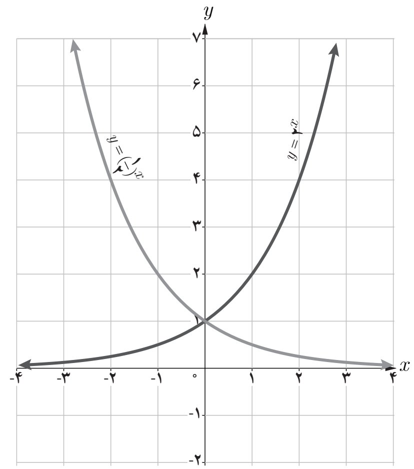
در سؤال ۱ با توجه به نموداری که در کتاب رسم شده است، پاسخ داده می‌شود. اگر عدد ۱ را هم به عنوان پاسخ بنویسند صحیح است. توجه کافی به این نقطه و توضیح آن یکی از ویژگی‌های مهم تابع نمایی را مشخص می‌سازد. در سؤال ۲ دانش‌آموزان با توجه به نمودار ۲^x و از روش‌هایی که در سال دهم آموخته‌اند، دامنه و برد این تابع را می‌نویسند. سؤال ۳ را با توجه به مطالبی که در فصل ۳ (تابع) خوانده‌اند، می‌توانند پاسخ دهند. سؤال ۴ مطلب مهمی را آموزش می‌دهد و آن تخمین اعداد توان‌دار با استفاده از نمودار تابع نمایی است. برای حل این سؤال از روش نوشته شده می‌توانید استفاده کنید یا به‌طور تقریبی عدد $\sqrt{۲}$ را روی محورها مشخص کرده $(\sqrt{۲} \simeq ۱/۴)$ و سپس باقی حل را مانند قبل انجام می‌دهید. در سؤال ۵ مقدار مجهول در توان ۲ ظاهر شده است، این سؤال به‌طور ضمنی مفهوم لگاریتم که موضوع درس دوم این فصل است را آموزش می‌دهد.

ارائهٔ سؤالاتی مشابه سؤال ۴ و ۵ در کلاس و همچنین آزمون‌های کلاسی مفید می‌باشد. در سؤال ۶ این فعالیت، چند عدد توان‌دار با پایه ۲ نوشته شده است که باید از کوچک به بزرگ نوشته و مرتب شوند. در

این کتاب، مفهوم تابع صعودی و نزولی ارائه نشده و هدف این سؤال هم ذکر این مفاهیم و تعریف آنها نیست. صرفاً باید با توجه به نمودار این ارتباط را درک کرده و اعداد را به ترتیب بنویسند. سؤال ۷ نیز مقدمه‌ای بر مفهوم تابع صعودی است.

در صفحهٔ ۱۰۱، مطلبی خواندنی دربارهٔ نرم‌افزار *Geo Gebra*، آورده شده است. این نرم‌افزار، برای دبیران ریاضی بسیار کارآمد و مفید بوده که در صورت امکان کار با آن به دانش‌آموزان نیز بهتر است تعلیم داده شود.

کار در کلاس صفحه ۱۰۲



نمودار توابع با ضابطه‌های $y=2^{-x}$ و $y=(\frac{1}{2})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟ محور yها

۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=2^x$ به تابع با ضابطهٔ $y=2^{-x}$ یا همان $y=(\frac{1}{2})^x$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟ با هم مساوی‌اند.

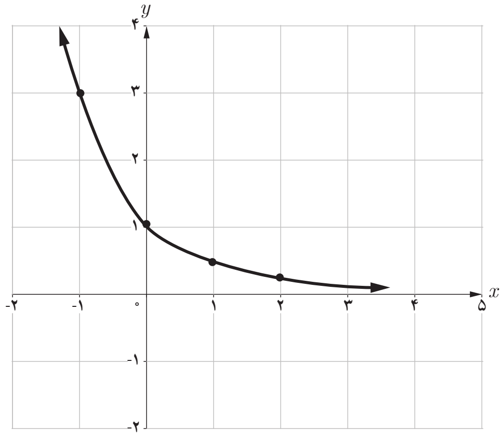
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه‌اند، مثال بزنید.

$y=(\frac{5}{2})^x$ و $y=(\frac{2}{5})^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=3^x$

در این کار در کلاس، تقارن نمودار توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=(\frac{1}{2})^x$ نسبت به محور yها مورد توجه قرار گرفته است. در سؤال ۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=2^x$، به تابع با ضابطهٔ $y=2^{-x}$ یا همان $y=(\frac{1}{2})^x$ دست می‌یابیم. هدف سؤال ۳، تأکید بر این نکته است که توابع نمایی، دامنه و برد یکسان دارند. سؤال ۴ سؤالی باز پاسخ است و دانش‌آموزان می‌توانند مثال‌های زیادی برای آن ارائه کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۰۲

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را رسم کنید.



x	y
۱-	۳
۰	۱
۱	$\frac{۱}{۳}$
۲	$\frac{۱}{۹}$

این سؤال نیز برای تسلط بیشتر دانش‌آموزان به رسم توابع نمایی با ضابطه‌هایی به‌صورت $y=a^x$ $(۰<a<۱)$ آورده شده است.

فعالیت صفحه ۱۰۳

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

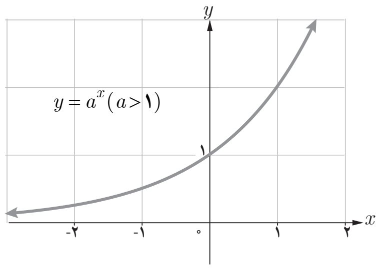
۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ $(a>۱)$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(۰\ ,+\infty)$ است.

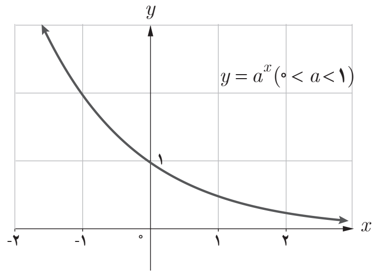
۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ $(۰<a<۱)$ $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $(۰\ ,+\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق محور yها را درنقطهٔ $(۰\ ,\ ۱)$ قطع می‌کند و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۴ این دو تابع، یک به یک‌اند زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای صفحه بعد است.





تمام مطالب که از ابتدای درس اول تا این صفحه ارائه شده‌اند، در این فعالیت جمع‌بندی شده است.

معادلات نمایی نیز در صفحهٔ ۱۰۳ تعریف شده و با استفاده از یک به یک بودن تابع نمایی، روش حل آنها توضیح داده می‌شود : $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

در حل معادله‌های نمایی باید این نکته توضیح داده شود که در حل، ابتدا دو طرف معادله را هم پایه می‌کنیم و سپس توان‌ها را مساوی هم قرار داده و مجهول را می‌یابیم. بهتر است علاوه بر مثال‌های کتاب، چند نمونه دیگر نیز حین تدریس در کلاس حل شود.

حل برخی از تمرین‌های درس اول

۶ برای حل معادلات نمایی ابتدا پایه‌های دو طرف تساوی را یکسان می‌کنیم.

الف) $2^{3n-2} = \frac{1}{32^2} \Rightarrow 2^{3n-2} = \frac{1}{(2^5)^2} \Rightarrow 2^{3n-2} = \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow 2^{3n-2} = 2^{-10} \Rightarrow$

$3n-2=-10 \Rightarrow 3n=-8 \Rightarrow n=\frac{-8}{3}$

ب) $9^{3y-3}=27^{y+1} \Rightarrow (3^2)^{3y-3}=(3^3)^{y+1}$

$3^{6y-6}=3^{3y+3} \Rightarrow 6y-6=3y+3 \Rightarrow 3y=9 \Rightarrow y=3$

پ) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3} \Rightarrow 4^{3x+2}=\frac{1}{(4^3)^3} \Rightarrow 4^{3x+2}=4^{-9}$

$3x+2=-9 \Rightarrow x=\frac{-11}{3}$

ت) $9^x = 3^{x^2-4x} \Rightarrow (3^2)^x = 3^{x^2-4x} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-4x} \Rightarrow$

$x^2-4x=2x \Rightarrow x^2-6x=0 \Rightarrow x(x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$

ث) $(\frac{3}{5})^{x+1}=\frac{25}{9} \Rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1}=(\frac{5}{3})^2 \Rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1}=(\frac{3}{5})^{-2} \Rightarrow$

$x+1=-2 \Rightarrow x=-3$

درس دوم

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

اهداف درس

۱ آشنایی با تابع لگاریتمی و ارتباط آن با تابع نمایی
۲ آشنایی با ضابطهٔ تابع لگاریتمی
۳ آشنایی با نحوهٔ رسم نمودار توابع لگاریتمی
۴ تشخیص ضابطهٔ تابع لگاریتمی با توجه به نمودار آن
۵ آشنایی با ویژگی‌های توابع لگاریتمی
۶ تشخیص دامنه و برد توابع لگاریتمی
۷ تعیین مقدار لگاریتم یک عدد با توجه به نمودار تابع لگاریتمی آن
۸ تبدیل یک تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی و برعکس
۹ آشنایی با قضایای لگاریتم
۱۰ حل معادلات لگاریتمی

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با تابع وارون یک تابع و رسم نمودار آن
۲ آشنایی با رسم نمودار یک تابع با استفاده از جدول مقادیر
۳ تشخیص دامنه و برد یک تابع با استفاده از نمودار آن
۴ آشنایی با تجزیه اعداد
۵ آشنایی با حل معادلات درجهٔ دوم

روش تدریس

در این درس، دانش‌آموزان با یکی از مهم‌ترین توابع ریاضی در سطح مقدماتی یعنی تابع لگاریتمی آشنا می‌شوند که هم در زندگی روزمره و هم در علوم مختلف بسیار کاربرد دارد. توصیه می‌شود قبل از شروع درس راجع به کاربردهای این تابع که در قسمت‌های خواندنی درس دوم آورده شده است، توضیحات مختصری داده شود. از خود دانش‌آموزان نیز می‌توانید بخواهید که قبل از شروع درس در این زمینه تحقیق کنند و اطلاعاتی کسب نمایند.

فعالیت صفحه ۱۰۵

۱ دامنه و برد دو تابع f و $f^{-۱}$ در نمودار قبل را به‌دست آورید.

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=(\circ,+\infty)\qquad D_{f^{-۱}}=(\circ,+\infty)\ ,\ R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$

۲ با توجه به نقاط f و $f^{-۱}$ در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$$f(-۲)=\frac{۱}{۴}\qquad f(-۱)=\frac{۱}{۲}\qquad f(\circ)=۱\qquad f(۲)=۴$$

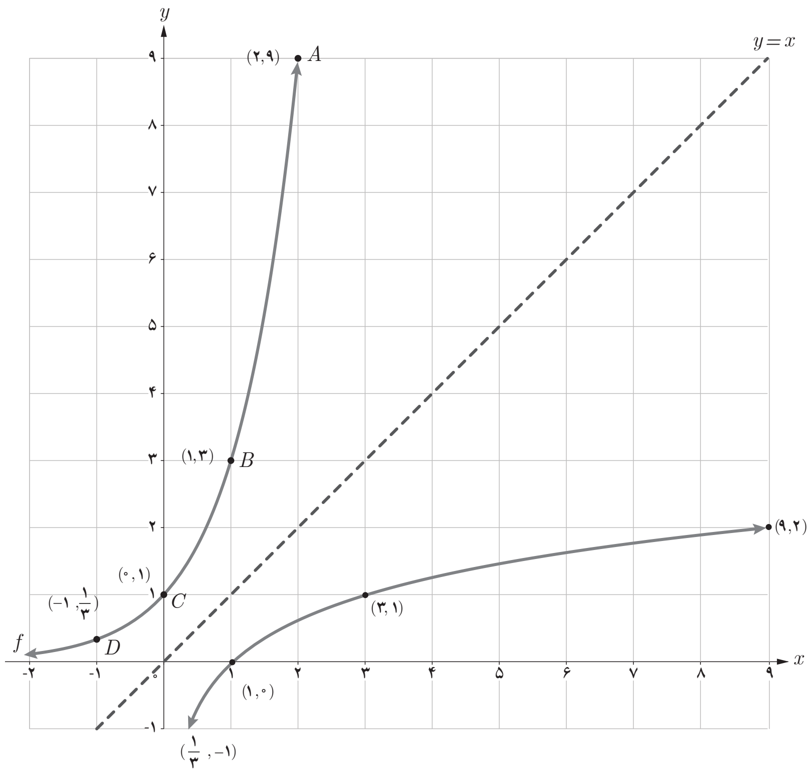
$$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۴}\right)=-۲\qquad f^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)=-۱\qquad f^{-۱}(۱)=\circ\qquad f^{-۱}(۴)=۲$$

این فعالیت برای روشن ساختن ارتباط بین تابع نمایی و تابع لگاریتمی طراحی شده است و تمرکز بر وارون‌پذیر بودن تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=۲^x$ می‌باشد که این امر را دانش‌آموزان از درس قبل فراگرفته و در نمودار هم واضح است که تابع وارون دارد. چند نقطه نیز روی نمودار مشخص شده است که درک نمودار وارون این تابع را راحت‌تر می‌سازد. در واقع در این فعالیت صرفاً برای تابعی که در درس اول با آن آشنا شده‌اند و با توجه به یک به یک بودن آن، نمودار وارون آن رسم شده است. توصیه می‌شود نام تابع لگاریتمی در این فعالیت آورده نشود. سؤالات ۱ و ۲ در ابتدای صفحهٔ ۱۰۶ که در بالا پاسخ داده شده‌اند، با توجه به نقاط نمودارهای f و $f^{-۱}$ نوشته می‌شوند.

فعالیت صفحه ۱۰۶

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و $f^{-۱}$ در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(-۲) = \frac{۱}{۹}$ $\quad$ $f(۰) = ۱$ $\quad$ $f(۱) = ۳$ $\quad$ $f(۲) = ۹$

$f^{-۱}(\frac{۱}{۹}) = -۲$ $\quad$ $f^{-۱}(۱) = ۰$ $\quad$ $f^{-۱}(۳) = ۱$ $\quad$ $f^{-۱}(۹) = ۲$

۳ دامنه و برد دو تابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (۰, +\infty)$ $\quad$ $D_{f^{-۱}} = (۰, +\infty)$, $R_{f^{-۱}} = \mathbb{R}$

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = \log_۳ x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتمِ x در مبنای ۳ می‌نامیم. به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید.

$D_f = \mathbb{R}\ ,\ R_f = (0, +\infty) \qquad D_{f^{-1}} = (0, +\infty)\ ,\ R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

این فعالیت اولین قسمتی در این فصل است که نام تابع لگاریتمی در آن ذکر شده است، بنابراین حل کامل آن الزامی است. برای حل سؤال ۱، ابتدا با توجه به نقاط نمودار f، نقاط نمودار f^{-1} را به‌دست می‌آورند و سپس این نقاط را به هم وصل می‌کنند تا نمودار تابع f^{-1} نمایان شود. سؤال ۲ را نیز با توجه به نقاط بالا، تکمیل می‌کنند. سؤال ۳ کاملاً مشابه سؤال ۱ فعالیت قبل است. بهتر است به دانش‌آموزان زمان کافی دهید تا پاسخ‌ها را خودشان در کتاب بنویسند.

بعد از سؤال ۳ توضیحی نوشته شده است و به f^{-1} یک نام نسبت می‌دهیم و آن همان تابع لگاریتم است. با توجه به مطالب دو فعالیتی که طرح شده است و توضیحات هدایتگر معلم، دانش‌آموز به این درک می‌رسد که توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

در سؤال ۴ نیز با توجه به تکرار این موضوع که دامنه و برد توابع نمایی و وارون آنها یعنی توابع لگاریتمی چه مجموعه‌هایی هستند، پاسخ‌ها توسط دانش‌آموزان نوشته می‌شود.

بهتر است با جملاتی مانند : چه اعدادی می‌توانند در پایهٔ توابع نمایی قرار گیرند؟ چه اعدادی جلوی لگاریتم می‌توانند نوشته شوند؟ لگاریتم برای چه اعدادی تعریف می‌شود؟ آیا حاصل لگاریتم می‌تواند منفی باشد؟ و ...، دید دانش‌آموزان را نسبت به مفهوم دامنه و برد این توابع روشن‌تر کرد.

توجه : از طرح سؤالاتی خارج از سطح کتاب درسی برای تعیین دامنهٔ تابع لگاریتمی مانند توابع با ضابطه‌های :

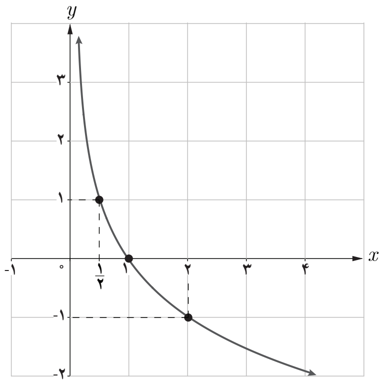
$$f(x) = \log_{x^2-1} \frac{2x-3}{x+1} \quad , \quad g(x) = \log_{\frac{4x-3}{x^2+1}} (3x^2-1) \quad , \ldots$$

اکیداً احتراز شود. طرح چنین سؤالاتی و پاسخگویی به آنها از اهداف این کتاب نیست. بدیهی است طرح این نمونه سؤالات در آزمون مدارس نیز مورد نظر نمی‌باشد و تنها سؤالاتی مجاز است که دانش‌آموز به‌راحتی بتواند نمودار آنها را رسم نماید و دامنه و برد آنها را از روی نمودار تشخیص دهد. درک عمیق مفاهیم ریاضی از اهداف اصلی است.

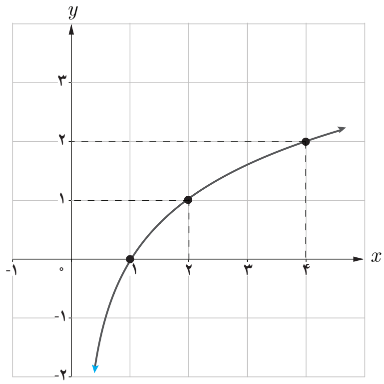
در ابتدای صفحهٔ ۱۰۷، ارتباط کلی توابع نمایی و لگاریتمی نوشته شده است.

حل سؤال صفحهٔ ۱۰۸

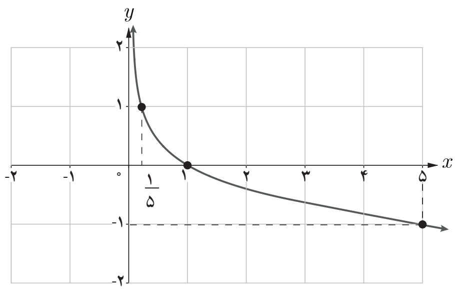
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



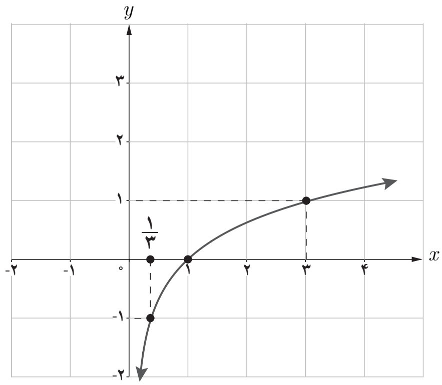
(۱) $y_1 = \log_{\frac{1}{2}}^{x}$



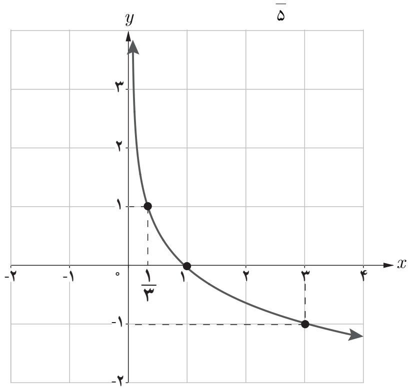
(۲) $y_2 = \log_{2}^{x}$



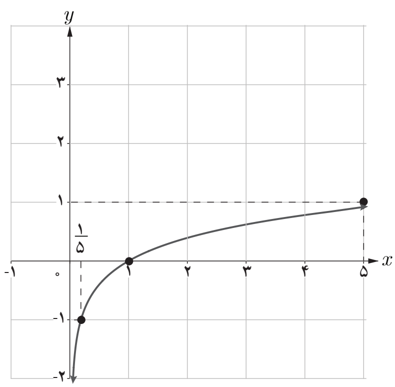
(۳) $y_3 = \log_{\frac{1}{5}}^{x}$



(۴) $y_4 = \log_{3}^{x}$



(۵) $y_5 = \log_{\frac{1}{3}}^{x}$



(۶) $y_6 = \log_{5}^{x}$

در ادامهٔ کار در کلاس ۱۰۷، سؤال بالا مطرح شده که نمودار شش تابع لگاریتمی داده شده و دانش‌آموزان باید با توجه به نقاط متعلق به نمودار، ضابطهٔ آنها را بنویسند، به عنوان مثال چند نمونه را اینجا می‌آوریم :

(۱) $(\frac{۱}{۲},۱) \in y_۱ \to (۱,\frac{۱}{۲}) \in y_۱^{-۱}$ و تابع $y_۱^{-۱}$، تابع نمایی است.

$$\to y_۱^{-۱} = a^x \to \frac{۱}{۲} = a^۱ \to a = \frac{۱}{۲} \to y_۱ = \log_{\frac{۱}{۲}} x$$

(۲) $(۲,۱) \in y_۲ \to (۱,۲) \in y_۲^{-۱}$ و تابع $y_۲^{-۱}$، تابع نمایی است.

$$\to y_۲^{-۱} = a^x \to ۲ = a^۱ \to a = ۲ \to y_۲ = \log_۲ x$$

(۳) $(\frac{۱}{۵},۱) \in y_۳ \to (۱,\frac{۱}{۵}) \in y_۳^{-۱}$ و تابع $y_۳^{-۱}$، تابع نمایی است.

$$\to y_۳^{-۱} = a^x \to \frac{۱}{۵} = a^۱ \to a = \frac{۱}{۵} \to y_۳ = \log_{\frac{۱}{۵}} x$$

لگاریتم یک عدد

فعالیت صفحه ۱۰۹

با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$۲^۳=۸$	$۲^۲=۴$	$۲^۱=۲$	$۲^۰=۱$	$۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$	$۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$	نمایی
$\log_۲ ۸=۳$	$\log_۲ ۴=۲$	$\log_۲ ۲=۱$	$\log_۲ ۱=۰$	$\log_۲ \frac{۱}{۲}=-۱$	$\log_۲ \frac{۱}{۴}=-۲$	لگاریتمی

در این فعالیت، مجدداً نمودار تابع با ضابطه‌های $f(x)=۲^x$ و $f_{(x)}^{-۱}=\log_۲ x$ رسم شده است و جدولی که قبلاً با نقاط تابع f و $f^{-۱}$ تکمیل شده بود، با نمادهای نمایی و لگاریتمی تکمیل می‌شود. هدف این فعالیت، دستیابی به مقدار لگاریتم یک عدد است و همچنین تبدیل تساوی‌های نمایی و لگاریتمی به یکدیگر و در نهایت در صفحهٔ ۱۱۰ به این مطلب می‌رسیم که :

به‌طور کلی اگر $a^y=x$ آن‌گاه $\log_a x = y$ و به عکس. $(x>۰ , a\neq۱ , a>۰)$

$$b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \qquad (c>۰ , b>۰ , b\neq۱)$$

کار در کلاس صفحه ۱۱۰

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$۱۰^{۳}=۱۰۰۰ \rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$	$\log_{۸}۱=۰ \rightarrow ۸^{۰}=۱$
$۹^{\frac{۱}{۲}}=۳ \rightarrow \log_{۹}۳=\frac{۱}{۲}$	$\log_{۲}(\frac{۱}{۱۶})=-۴ \rightarrow ۲^{-۴}=\frac{۱}{۱۶}$
$۴^{۳}=۶۴ \rightarrow \log_{۴}۶۴=۳$	$\log_{۵}۱۲۵=۳ \rightarrow ۵^{۳}=۱۲۵$
$۲^{۵}=۳۲ \rightarrow \log_{۲}۳۲=۵$	$\log_{\frac{۱}{۳}}۲۷=-۳ \rightarrow (\frac{۱}{۳})^{-۳}=۲۷$
$۲^{-۳}=\frac{۱}{۸} \rightarrow \log_{۲}^{\frac{۱}{۸}}=-۳$	$\log_{\frac{۱}{۵}}۱۲۵=-۳ \rightarrow (\frac{۱}{۵})^{-۳}=۱۲۵$
$۳^{-۴}=\frac{۱}{۸۱} \rightarrow \log_{۳}^{\frac{۱}{۸۱}}=-۴$	$\log_{\frac{۱}{۲}}۱۶=-۴ \rightarrow (\frac{۱}{۲})^{-۴}=۱۶$

در این کار در کلاس، مثال‌های متنوعی از تبدیل تساوی‌های نمایی و لگاریتمی به‌هم آورده شده است. حل سؤالاتی مشابه این سؤال برای تسلط بیشتر دانش‌آموزان، توصیه می‌شود.

در صفحهٔ ۱۱۱، لگاریتم اعشاری (دهدهی) معرفی می‌شود : لگاریتم در مبنای ۱۰، لگاریتم اعشاری نامیده می‌شود و معمولاً مبنای لگاریتم اعشاری نوشته نمی‌شود.

$$\log_{۱۰}{}^{a}=\log{}^{a}$$

بنابراین بهتر است به دانش‌آموزان گوشزد کرد که هرگاه مبنا نوشته نشده بود باید آن را برابر ۱۰ فرض کنند، مانند فرجهٔ ۲ که معمولاً نوشته نمی‌شود.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت صفحه ۱۱۱

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت $(a\neq۱)$ باشد، همواره داریم :

$$\log_{a}۱=۰ \quad \text{و} \quad \log_{a}a=۱ \quad \text{و} \quad \log_{a}(\frac{۱}{a})=-۱$$

هر سه ویژگی قسمت ۱ را می‌توان از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی اثبات کرد :

$$a^{۰}=۱ \rightarrow \log_{a}{}^{۱}=۰ \quad , \quad a^{۱}=a \rightarrow \log_{a}a=۱ \quad , \quad a^{-۱}=\frac{۱}{a} \rightarrow \log_{a}(\frac{۱}{a})=-۱$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات : فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$، از این‌رو $ab = c^m . c^n = c^{m+n}$

بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم : $\log_c ab = m + n$ و در نتیجه :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

ویژگی ۲، یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های لگاریتم را بیان می‌کند که همان تبدیل ضرب به جمع است. در مثال بعد، لگاریتم‌ها تا دو رقم اعشار گرد شده‌اند.

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات :

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b \ldots b}^{n \text{ بار}} = \underbrace{\log_a b + \ldots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n \log_a b$$

تذکر این نکته که اگر n عددی حقیقی باشد، ویژگی ۳ برقرار است، ضروری است.

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم :

$$\log_c (\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات : فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$. بنابراین :

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

در ویژگی ۴ نیز، تبدیل تقسیم به تفاضل را توسط لگاریتم بیان می‌کند.

در مثال انتهای صفحهٔ ۱۱۱، مقدار $\log ۵$ با استفاده از مقدار $\log ۲$ به‌دست آمده است، تذکر این نکته که همیشه در مسائل، یکی از مقادیر $\log ۲$ یا $\log ۲$ از دیگری به‌دست می‌آید لازم است.

توصیه می‌شود با توجه به سطح کلاس، مثال‌های بیشتری از ویژگی‌های لگاریتم حل شود.

فعالیت صفحه ۱۱۲

در این فعالیت شش معادلهٔ لگاریتمی آورده شده است که سه قسمت آن به‌طور کامل حل شده و سه قسمت باید در کلاس با هدایت و راهنمایی دبیر تکمیل شود.

۴ $\log_{۴}(x+۲)=\log_{۴}۸ \to x+۲=۸ \to x=۶$ قابل قبول

۵ $۳\log_{۲}x=-\log_{۲}۲۷ \to \log_{۲}x^{۳}=\log_{۲}(۲۷)^{-۱} \to x^{۳}=\frac{۱}{۲۷} \to x=\frac{۱}{۳}$ قابل قبول

۶ $\log(x+۱)-\log(x-۳)=۳ \to \log\frac{x+۱}{x-۳}=۳ \to \frac{x+۱}{x-۳}=۱۰^{۳} \to x+۱=۱۰۰۰(x-۱)$

$\to x=\frac{۱۰۰۱}{۹۹۹}$ قابل قبول

ذکر دو نکته در این قسمت ضروری است :

۱ از دانش‌آموزان بخواهید در مثال‌های اولیهٔ معادلات لگاریتمی، در هر مرحله مشخص کنند از چه ویژگی یا رابطه‌ای استفاده می‌کنند و به مرحلهٔ بعد دست می‌یابند.

۲ بعد از یافتن جواب هر معادلهٔ لگاریتمی، حتماً تعریف شدن لگاریتم را به‌ازای آن بررسی کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۱۳

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_{۵}x=۳ \to x=۵^{۳}$ قابل قبول

۲ $\log_{۲}(۲x+۱)=۳ \to ۲x+۱=۲^{۳} \to x=\frac{۷}{۲}$ قابل قبول

۳ $\log_{۲}(x+۱)+\log_{۲}(x+۴)=۲ \to \log(x+۱)(x+۴)=۲ \to x^{۲}+۵x+۴=۴ \to$

$x(x+۵)=۰ \to x=۰$ قابل قبول , $x=-۵$ غیر قابل قبول

۴ $\log_{۳}۲۴۳=۲x+۱ \to \log_{۳}۳^{۵}=۲x+۱ \to ۲x+۱=۵ \to x=۲$ قابل قبول

۵ $\log_{۳}(x-۱)=۴ \to x-۱=۳^{۴} \to x=۸۲$ قابل قبول

۶ $\log(۲x)-\log(x-۳)=۱ \to \log\frac{۲x}{x-۳}=۱ \to \frac{۲x}{x-۳}=۱۰ \to x=\frac{۳۰}{۸}$ قابل قبول

۷ $۲\log_{۴}(x-۱)=۳ \to \log_{۴}(x-۱)^{۲}=۳ \to (x-۱)^{۲}=۶۴ \to x=۹$ قابل قبول

$x=-۷$ غیر قابل قبول ,

حل برخی از تمرین‌های درس دوم ـ صفحهٔ ۱۱۳

۱

الف) $\log_c^{abd} = \log_c^{(ab)d} = \log_c^{ab} + \log_c^{d} = \log_c^{a} + \log_c^{b} + \log_c^{d}$

$$\Rightarrow \log_c^{abd} = \log_c^{a} + \log_c^{b} + \log_c^{d}$$

ب) فرض می‌کنیم $\log_b^a = x$ ، بنابراین $b^x = a$. حال لگاریتم طرفین تساوی را در مبنای عدد حقیقی مثبت c $(c \neq ۱)$ می‌نویسیم :

قرار می‌دهیم $x = \log_b^a$ ،بنابراین $b^x = a$. حال لگاریتم دو طرف تساوی را در مبنای c می‌نویسیم.

$$b^x = a \Longrightarrow \log_c^{b^x} = \log_c^a \Rightarrow x\log_c^b = \log_c^a \Rightarrow$$

$$x = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \xrightarrow{x=\log_b^a} \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

این تساوی نتیجه می‌دهد که : $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$. بهتر است مثال عددی نیز برای دانش‌آموزان آورده شود : $\log_۲^۳ \times \log_۵^۲ = \log_۵^۳$

پ) بدیهی است که $\log_a^b = \log_a^b$. حال اگر تساوی لگاریتمی را به‌صورت نمایی بنویسیم داریم :

$$\log_a^b = \log_a^b \Rightarrow a^{\log_a^b} = b$$

ت) از رابطه قسمت ب را طرفین وسطین کنیم داریم :

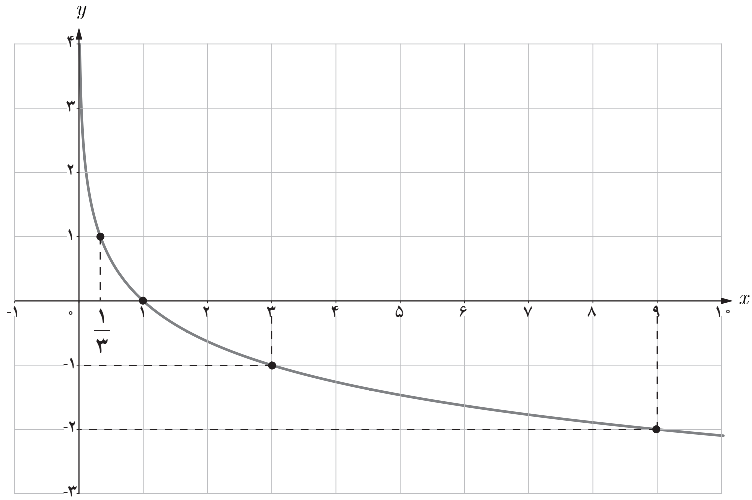
$$\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$$

حال در این رابطه قرار دهیم $c = a$ بنابراین :

$$\log_b^a \times \log_a^b = \log_a^a \Rightarrow \log_b^a \times \log_a^b = ۱$$

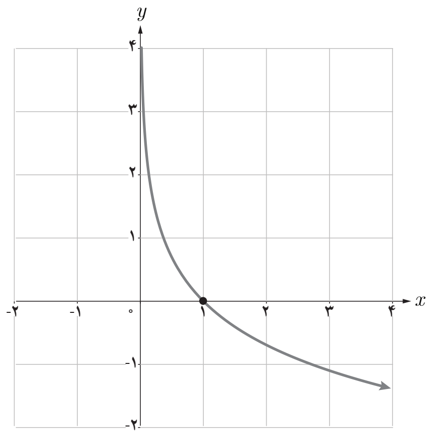
۵ با استفاده از جدول نقاط کمکی نمودار را رسم می‌کنیم.

x	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
y	۱	۰	−۱	−۲



۶ الف) نادرست است زیرا $y=\log_a^x \Rightarrow a^y=x$

ب) راه اول : نمودار تابع $y=\log_a^x$ و $(\circ<a<1)$ در حالت کلی مشابه نمودار زیر است :



با توجه به نمودار، گزاره درست است.

راه دوم : به x مقدار ۱ می‌دهیم و y را محاسبه می‌کنیم.

$$y=\log_a^1=\circ \Rightarrow y=\circ$$

پس نمودار از نقطه $(\circ\ ,\ 1)$ عبور می‌کند. بنابراین گزاره درست است.

پ) با توجه به تعریف، صحیح است.

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

اهداف درس

۱ آشنایی با انتقال نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی
۲ تشخیص ضابطهٔ توابع نمایی و لگاریتمی انتقال داده‌شده با استفاده از نمودار آنها
۳ آشنایی با کاربردهای تابع لگاریتمی و نمایی

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با انتقال طولی و عرضی نمودار توابع
۲ آشنایی با قرینه کردن نمودار نسبت به محور xها

روش تدریس

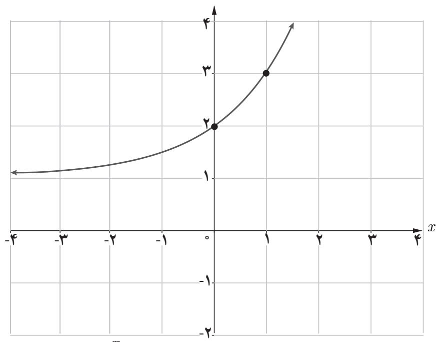
در این درس دانش‌آموزان با انتقال نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا می‌شوند. تشخیص ضابطهٔ یک تابع با استفاده از نمودار آن، یکی از اهداف اصلی این درس است. باید توجه شود که سطح سؤالات مطرح‌شده در آزمون مدارس از سطح سؤالات کتاب بالاتر نرود. تعمیق مفهوم ارائه شده، مورد نظر کتاب است.

فعالیت صفحه ۱۱۵

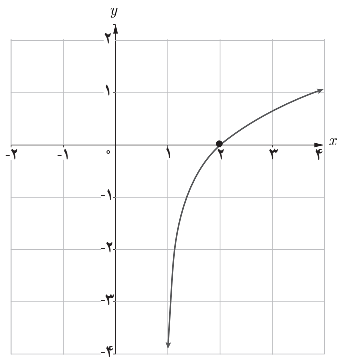
نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_{۲} x$ ب) $l(x) = ۲ + \log x$ پ) $h(x) = -(\frac{۱}{۲})^x$

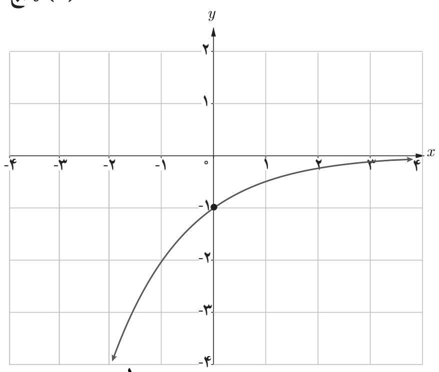
ت) $g(x) = \log(x - ۱)$ ث) $j(x) = ۳^{(x-۱)}$ ج) $f(x) = ۲^x + ۱$



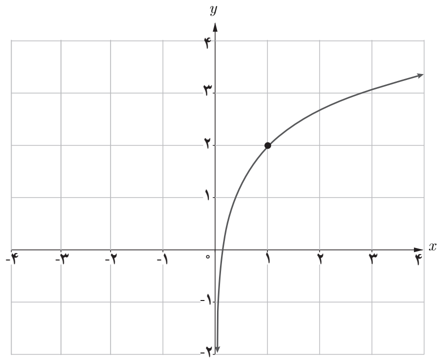
(۱) ج) $f(x) = ۲^x + ۱$



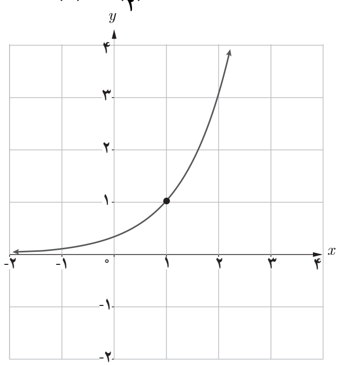
(۲) ت) $g(x) = \log(x - ۱)$



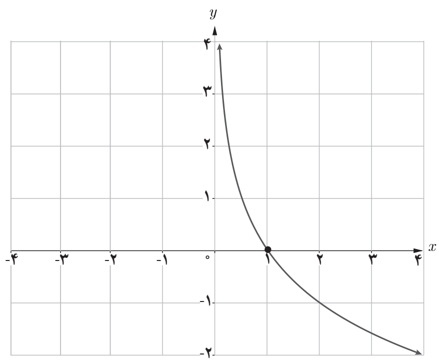
(۳) پ) $h(x) = -(\frac{۱}{۲})^x$



(۴) ب) $l(x) = ۲ + \log x$



(۵) ث) $j(x) = ۳^{(x-۱)}$



(۶) الف) $k(x) = -\log_{۲} x$

در فعالیت صفحهٔ ۱۱۵، شش ضابطه و شش نمودار داده شده است که باید نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کرد. برای حل این فعالیت می‌توانید یکی از آنها را با شرح کامل حل کنید و بقیه را دانش‌آموزان با هدایت و راهنمایی شما حل کنند.

۱ نمودار (۱) از نقطهٔ (۰,۲) و (۱,۳) رد شده است، بنابراین با توجه به ضابطه‌ها، یکی از قسمت‌های پ و ث و ج است، با امتحان کردن این نقاط در این ضابطه‌ها به جواب صحیح دست می‌یابیم :

ث) $(۰,۲) \to ۲ \overset{?}{=} ۳^{۰-۱} \times$

پ) $(۰,۲) \to ۲ \overset{?}{=} (-\frac{۱}{۲})^{۰} \times$

ج) $(۰,۲) \to ۲ \overset{?}{=} ۲^{۰}+۱ \checkmark$ و $(۱,۳) \to ۳ \overset{?}{=} ۲^{۱}+۱ \checkmark$

بنابراین نمودار (۱) متعلق به ضابطهٔ (ج) است.

۲ نمودار (۲) از نقطهٔ (۲,۰) عبور کرده است :

الف) $۰ \overset{?}{=} -\log_{۲}^{۲} \times$ ب) $۰ \overset{?}{=} ۲+\log ۲ \times$

پ) $۰ \overset{?}{=} -(\frac{۱}{۲})^{۲} \times$ ت) $۰ \overset{?}{=} \log(۲-۱) = \log ۱ = ۰ \checkmark$

ث) $۰ \overset{?}{=} ۳^{۲-۱} \times$

بنابراین نمودار (۲) متعلق به ضابطهٔ (ت) است.

۳ نمودار (۳) از نقطهٔ (۰,۱−) عبور کرده است :

با توجه به ضابطه‌ها، قسمت‌های الف و ب نمی‌توانند پاسخ این قسمت باشند، بنابراین ضابطه‌های پ و ث را امتحان می‌کنیم :

پ) $-۱ \overset{?}{=} (-\frac{۱}{۲})^{۰} \checkmark$

ث) $-۱ \overset{?}{=} ۳^{۰-۱} \times$

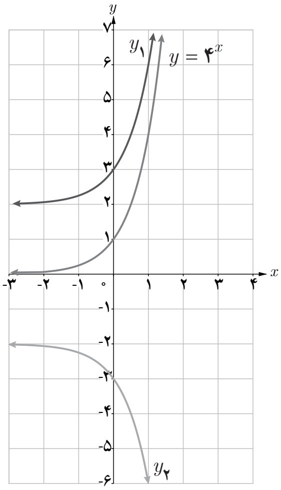
بنابراین نمودار (۳) متعلق به ضابطهٔ (پ) است.

کار در کلاس صفحه ۱۱۶

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.

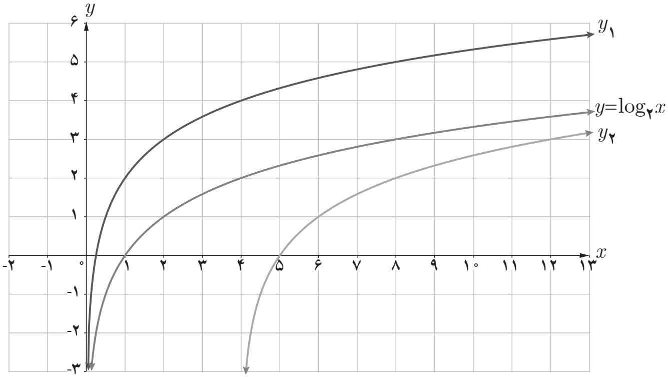
$y_۱ = ۴^x + ۲$

$y_۲ = -۴^x - ۲$



$y_۱ = \log_۲ x + ۲$

$y_۲ = \log_۲ (x - ۴)$



در این کار در کلاس، نمودار یک تابع لگاریتمی و یک تابع نمایی و دو نمودار انتقال یافته برای هر کدام از آنها رسم شده است که دانش‌آموزان باید با توجه به ضابطهٔ تابع اصلی و نقاط راهنما، ضابطهٔ توابع $y_۱$ و $y_۲$ را به‌دست آورند. در نمودار اول (نمایی)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴^x$ رسم شده است. نمودار سبز رنگ که انتقال یافتهٔ آن است، ضابطه‌ای به‌صورت $y_۱ = ۴^x + a$ دارد، زیرا نمودار چند واحد در راستای محور yها به طرف بالا انتقال داده شده است. با توجه به نقطهٔ $(۰,۱)$ که به نقطهٔ $(۰,۳)$ انتقال داده شده است، حدس می‌زنیم ضابطهٔ $y_۱$ به‌صورت زیر باشد :

$$y_۱ = ۴^x + ۲$$

حال این ضابطه را با نقاط دیگر نمودار $y_۱$ امتحان می‌کنیم :

$$(۰,۳) \rightarrow ۳ \stackrel{?}{=} ۴^۰ + ۲ \checkmark$$

$$(۱,۶) \rightarrow ۶ \stackrel{?}{=} ۴^۱ + ۲ \checkmark$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ضابطه صحیح است.

در مورد نمودار قرمز رنگ می‌توان گفت که نمودار y ابتدا نسبت به محور xها قرینه شده است و سپس دو واحد در راستای محور yها به‌طرف پایین انتقال داده شده است، یعنی حدس می‌زنیم :

$$y_۲ = -۴^x - ۲$$

نقاط دیگر را امتحان کرده و می‌بینیم که حدسمان درست بوده :

$$(۰,-۳) \to -۴^۰ - ۲ \stackrel{?}{=} -۳ \checkmark$$

$$(۱,-۶) \to -۴^۱ - ۲ \stackrel{?}{=} -۶ \checkmark$$

در دستگاه مختصات سمت راست که نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_۲^x$ رسم شده است، حدس زده می‌شود که نمودار سبز رنگ، حاصل انتقال نمودار اصلی در راستای محور yها به‌طرف بالا است، یعنی :

$$y_۱ = \log_۲^x + ۲$$

امتحان کردن نقاط :

$$(۱,۲) \to ۲ \stackrel{?}{=} \log_۲^۱ + ۲ \checkmark$$

$$(۲,۳) \to ۳ \stackrel{?}{=} \log_۲^۲ + ۲ \checkmark$$

$$(۴,۴) \to ۴ \stackrel{?}{=} \log_۲^۴ + ۲ \checkmark$$

$$(۸,۵) \to ۵ \stackrel{?}{=} \log_۲^۸ + ۲ \checkmark$$

در نمودار بنفش، حدس زده می‌شود که نمودار اصلی چهار واحد به سمت راست انتقال داده شده است، یعنی :

$$y_۲ = \log_۲(x - ۴)$$

امتحان کردن ضابطه :

$$(۵,۰) \to ۰ \stackrel{?}{=} \log_۲(۵-۴) \checkmark$$

$$(۸,۲) \to ۲ \stackrel{?}{=} \log_۲(۸-۴) \checkmark$$

$$(۱۲,۳) \to ۳ \stackrel{?}{=} \log_۲(۱۲-۴) \checkmark$$

حل برخی از تمرین‌های درس سوم ـ صفحهٔ ۱۱۸

۱ **راه اول** : با توجه به شکل، نمودار تابع y از دو نقطه $(۰,۲)$ و $(۱,۳)$ عبور می‌کند.

$$\overset{x}{\uparrow}\ \overset{y}{\uparrow}$$
$$(۰,۲) \Rightarrow ۲ = a + ۲^{۰-b} \Rightarrow ۲ = a + ۲^{-b}$$
$$(۱,۳) \Rightarrow ۳ = a + ۲^{۱-b}$$

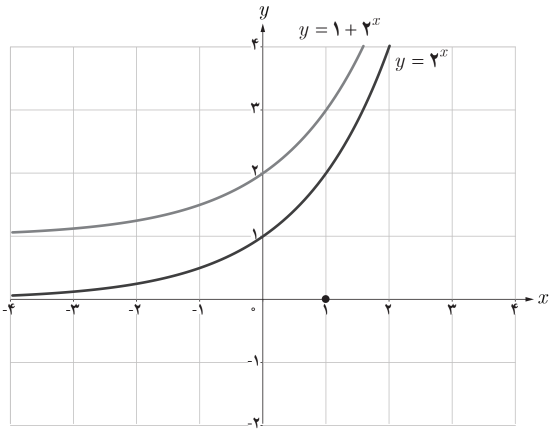
دو رابطه فوق را درنظر بگیرید

$$\begin{cases} a + ۲^{۱-b} = ۳ \\ a + ۲^{-b} = ۲ \end{cases} \underset{\times(-۱)}{\Rightarrow} \begin{cases} a + ۲^{۱-b} = ۳ \\ -a - ۲^{-b} = -۲ \end{cases}$$
$$۲^{۱-b} - ۲^{-b} = ۱ \qquad \Rightarrow ۲^{-b}(۲^{۱} - ۱) = ۱$$
$$\Rightarrow ۲^{-b} = ۱ \Rightarrow ۲^{-b} = ۲^{۰} \Rightarrow b = ۰$$

با جایگذاری $b = ۰$ در یکی از روابط a نیز به‌دست می‌آید

$$a + ۲^{-b} = ۲ \Rightarrow a + ۲^{۰} = ۲ \Rightarrow a + ۱ = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

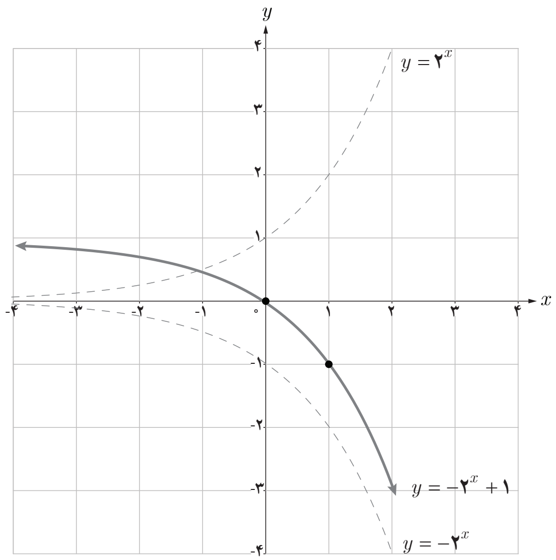
راه دوم : اگر نمودار تابع $y = ۲^{x}$ را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم نمودار مسئله حاصل می‌شود، یعنی $y = a + ۲^{(a-b)}$ همان تابع $y = ۱ + ۲^{x}$ است. لذا $a = ۱$ و $b = ۰$ است.



۴ **الف)** برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -۲^{x} + ۱$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

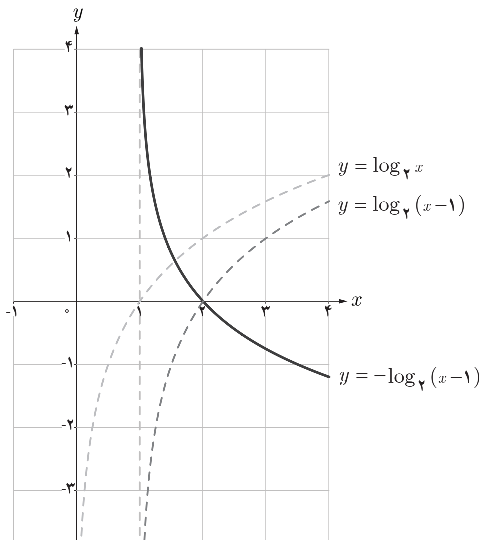
ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۲^{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم،

سپس نمودار حاصل را یک واحد در راستای محور yها، به طرف بالا انتقال می‌دهیم.



ب) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_۲(x - ۱)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_۲ x$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، تا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_۲(x - ۱)$ حاصل شود، سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = (\ x --)$ ب) $y = x^{۷}$ پ) $y = (۰/۰۲)^{x}$

ت) $y = x^{\frac{۱}{۲}}$ ث) $y = \frac{۴^{x}}{۳^{x}}$ ج) $y = ۶x^{۲} + ۱$

۲ حدود m را چنان بیابید که تابع $y = (۲ - m)^{x}$ یک تابع نمایی باشد.

۳ کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع $y = (\frac{۱}{۳})^{x}$ قرار دارند؟

الف) $(-۱,۳)$ ب) $(۱,-۳)$ پ) $(۰,۱)$ ت) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۹})$ ث) $(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۳})$ ج) $(-۲,۹)$

۴ در هر مورد اعداد را با هم مقایسه کنید. (از نمادهای $>$، $<$ و $=$ استفاده کنید)

الف) $۴^{۱/۲} \bigcirc ۴^{\frac{۷}{۵}}$ ب) $(\frac{۱}{۳})^{\sqrt{۳}} \bigcirc (\frac{۱}{۳})^{\sqrt{۲}}$

پ) $۴^{-۰/۵} \bigcirc ۳^{-۰/۵}$ ت) $\log_{۳}^{\frac{۷}{۴}} \bigcirc \log_{۳}^{\frac{۱۱}{۵}}$

ث) $\log_{۰/۷}^{۱} \bigcirc \log_{۰/۸}^{۱}$ ج) $\log_{۴}^{۹} \bigcirc \log_{۷}^{۹}$

۵ الف) به کمک نقطه‌یابی و با درنظر گرفتن شکل کلی نمودار توابع نمایی، نمودار توابع $f(x)=۵^{x}$ و $g(x)=۶^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

(در رسم نمودار، از نقاط با طول‌های ۲− , ۱− , ۰ , ۱ , ۲، کمک بگیرید)

ب) در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات، نمودار کدام تابع بالاتر از دیگری است؟ این وضعیت در ناحیهٔ دوم چگونه است؟

پ) اگر $۱ < a < b$، نمودار توابع نمایی $y = a^{x}$ و $y = b^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ت) با الگو گرفتن از قسمت‌های قبل، با فرض $۰ < a < b < ۱$، نمودار توابع $y = a^{x}$ و $y = b^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۶ فرض کنید $f(x)=۲^x$، $g(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ و $h(x)=۵^x$. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(۱۰)$ ب) $g(-۳)$ پ) $h(-۴)$

ت) $(f+g+h)(۱)$ ث) $f(۲)-g(-۱)$ ج) $f(۴)\,g(۲)$

چ) $\frac{۵}{۲}h(-۲)+\frac{۱}{۵}f(-۱)$ ح) $(۴g+h)(۱)-f(۰)$

۷ الف) نمودار توابع نمایی $y=(۱/۸)^x$ و $y=(۰/۳)^x$ در چه نقطه‌ای مقادیر مساوی دارند؟
ب) تعیین کنید که نقطهٔ تقاطع دو تابع فوق، روی نمودار توابع زیر قرار دارد یا خیر؟

$y=(\frac{۲}{۷})^x$ و $y=۶^x$ و $y=(\sqrt{۳}-۱)^x$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۸ توابع نمایی $f(x)=۷^x$ و $g(x)=(\frac{۱}{\sqrt{۷}})^x$ را درنظر بگیرید :

الف) مقادیر زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(۳)$ ب) $g(۴)$ پ) $g(-۲)$

ت) $f(۴)\,g(۸)$ ث) $f(۱)+g(-۱)$ ج) $(f(۱)-۱۴\,g(۲))^۲$

ب) معادلهٔ $(\frac{g}{f})(x)=۳۴۳$ را حل کنید.

۹ اگر نمودار تابع $y=a\times b^x+۱$، از نقاط $(۱,۱۹)$ و $(۷,\frac{۱}{۲})$ عبور کند، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۱۰ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۵^{۲x-۴}=\frac{۱}{۲۵}$ ب) $(\frac{۱}{۳})^{۱-x}=۷۲۹$

پ) $۲^{۷x+۱}=۱۶^{x^۲+۱}$ ت) $(\frac{۱}{۴۹})^{x-\frac{۵}{۲}}-۷^{۴-x}=۰$

ث) $۴^{x+۱}=۸\times ۲^{x+۴}$ ج) $۵^{x+۱}+۵^{x+۲}=۶$

چ) $۵^{۲x-۱}\times ۲^{۲x-۱}=۰/۰۰۱$ ح) $۹^x+۳=۴\times ۳^x$

خ) $۴^x-۲^{x+۱}=۳$ د) $۸^{x+۲}=۸\times ۳^{۴x+۴}$

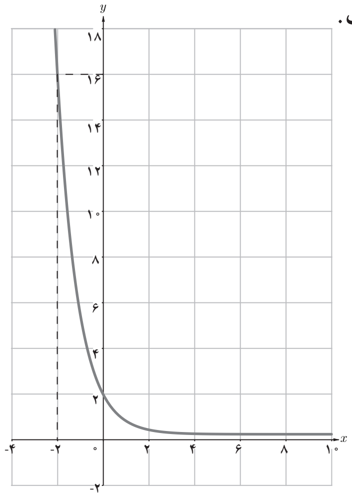
۱۱ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ مقابل را به‌دست آورید :

$$(۸۱)^{x^{۲}-۸}=۳^{x+۳}$$

۱۲ نمودار تابع نمایی $f(x)=a^{x}$ به‌صورت مقابل داده شده است.

الف) ضابطهٔ تابع را به‌دست آورید.

ب) ضابطهٔ تابع وارونِ آن را مشخص کنید.



۱۳ تابع نمایی $y=۳^{x}$ محور yها را در نقطهٔ A و نمودار تابع معکوس آن، محور xها را در نقطهٔ B قطع می‌کند. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را به‌دست آورید.

۱۴ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع $y=\log_{۲}^{x}$ قرار دارند؟

الف) (۳,۶) ب) (۱,۲) پ) (۲,۱)

ت) (۸,۳) ث) (۱,۰) ج) (۰/۲۵,−۲)

۱۵ نمودار تابع $f(x)=۲^{x}$ از نقطهٔ A به طول ۳ و نمودار تابع $g(x)=\log_{۳}^{x}$ از نقطهٔ B به طول ۹ عبور می‌کنند :

الف) با محاسبهٔ $f(۳)$ و $g(۹)$، مختصات A و B را کامل کنید.

ب) معادلهٔ خط AB را بنویسید.

پ) با رسم نمودار توابع f و g، و رسم خط AB، مشخص کنید که آیا خط AB نمودار توابع f و g را در نقاط دیگری جز A و B قطع می‌کند یا خیر؟

۱۶ در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید :

الف) $\log_{۳}^{\square}=-۲$

ب) $۲\ \log_{\square}^{۸}=۶$

پ) $\log_{۵}^{۳۲}=\square\log_{۵}^{۲}$

ت) $\log_{۷}^{\square}=\log_{۷}^{۳۶}-\log_{۷}^{۹}$

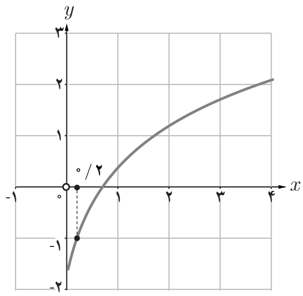
ث) $\log_{۲}^{۲۴}=\square+\log_{۲}^{۱۲}$

ج) $\log_{۷}^{۲۵}\times\log_{۵}^{۷}=\square$

۱۷ نمودار تابع لگاریتمی $f(x) = \log_a^x$ داده شده است.

الف) مقدار a را به‌دست آورید.

ب) مقدار $f(۰/۰۴)$ را حساب کنید.



۱۸ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log_{۲} ۶۴$ ۲) $\log_{۳} \frac{۱}{۸۱}$ ۳) $\log_{۵}(\sqrt{۱۲۵})^{-۵}$

۴) $\log_{۲} \sqrt[۷]{۸}$ ۵) $\log_{۲۷} ۸۱$ ۶) $\log_{(\frac{۱}{۳})} ۲۷$

۷) $\log_{۷} \frac{۱}{\sqrt{۴۹}}$ ۸) $\log_{(\frac{۱}{۲})} ۰/۲۵$ ۹) $\log_{۳} ۹\sqrt[۳]{۳}$

۱۰) $\log_{۶} ۲ + \log_{۶} ۳$ ۱۱) $\log_{۳} ۴۵ - \log_{۳} ۵$ ۱۲) $۵^{۲\log_{۵} ۷}$

۱۳) $۲^{\log_{۲} ۵} + ۳^{\log_{۳}(\frac{۱}{۵})}$ ۱۴) $۲\log ۵ + \log ۴$ ۱۵) $\log_{۱۵} ۵\sqrt{۳} + \log_{۱۵} ۳\sqrt{۵}$

۱۶) $۳\log \sqrt[۳]{۴} - \log ۲۵$ ۱۷) $\log_{۷} ۴ \times \log_{۶۴} ۷$

۱۸) $\log ۲۴ + ۳\log ۵ - \log ۳$ ۱۹) $\log_{۴} \frac{۱}{۲} + \log_{۴} \frac{۲}{۳} + \log_{۴} \frac{۳}{۴}$

۱۹ اگر $\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۴$، هر یک از مقادیر زیر را به‌دست آورید :

۱) $\log ۱/۵$ ۲) $\log ۲۰$

۳) $\log ۰/۰۳$ ۴) $\log ۱۵$

۵) $\log ۱۸$ ۶) $\log \sqrt[۵]{۱۲}$

۷) $\log \sqrt[۴]{۱۲۵}$ ۸) $\log_{۳}^{۲}$

۹) $\log_{۲} ۱۰۸$ ۱۰) $\frac{\log_{۳} ۱۶}{\log_{۵}^{۸} + \log_{۵} ۴}$

۲۰ فرض کنید $\log ۲= ۰/۳$ ، $\log ۳= ۰/۴$ و $\log ۷= ۰/۸$. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

۱) $\log ۴۲$ ‏ ۲) $\log \sqrt{۶۳}$

۳) $\log ۷۰$ ‏ ۴) $\log ۲۵\sqrt[۳]{۲۴۳}$

۵) $\log_۲ ۳ \times \log_۷ ۳$ ‏ ۶) $\log \frac{۲۴۵}{۳\sqrt[۳]{۲}}$

۲۱ اگر $\log_{۴۲} ۳ = m$ و $\log_{۴۲} ۷ = n$، حاصل عبارات زیر را برحسب m و n بنویسید :

۱) $\log_{۴۲} ۲۱$ ‏ ۲) $\log_{۴۲} ۶۳$ ‏ ۳) $\log_۳ ۲۱$

۴) $\log_۷ ۱۸۹$ ‏ ۵) $\log_{۴۲} ۱۶$ ‏ ۶) $\log_{۴۲} ۳۴۳$

۲۲ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید :

۱) $\log_۳ (۳x + ۴) = ۴$ ‏ ۲) $x^۲ = ۵x + \log_۲ ۱۶$

۳) $\log_۲ x^۲ + \log_۳ ۲۷ = ۷$ ‏ ۴) $\log_{۰/۲} (۱ - ۶x) = -۲$

۵) $\log_x ۸ = -۳$ ‏ ۶) $\log_y ۳۲ = \frac{۵}{۴}$

۷) $\log_۳ ۵ + \log_۳ x = \log_۳ ۱۰$ ‏ ۸) $\log ۱۶ - \log ۲a = \log ۲$

۹) $\log_۶ (p^۲ + ۲) + \log_۶ ۲ = ۲$ ‏ ۱۰) $\log_۲ (x + ۲) + \log_۲ (x - ۲) = ۱$

۱۱) $\log (۴ - x) + \log x = \log (۶ - x)$ ‏ ۱۲) $\log (۲x + ۵۶) - \log (x + ۱) = ۱ + \log ۲$

۱۳) $\log_۳ (x^۲ - ۲x + ۴) = ۲ - \log_۳ (x + ۲)$ ‏ ۱۴) $\log_۳ (\log_۴ (x^۲ + ۳)) = ۰$

۱۵) $۹^{\log ۳ (۲x + ۱)} = ۱$ ‏ ۱۶) $\log_۷ x + \log_x ۷ = ۲$

۱۷) $\log_x (x^۳ - ۲x) = ۲$ ‏ ۱۸) $x^{\log_۳ x} = ۹$

۲۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $A = \log (\cot ۸^\circ) + \log (\cot ۸۲^\circ)$

ب) $B = \frac{۱}{\log_۲ ۵!} + \frac{۱}{\log_۳ ۵!} + \frac{۱}{\log_۴ ۵!} + \frac{۱}{\log_۵ ۵!}$

پ) $C = \log_۴ (\log_۳ (\log_۲ ۵۱۲))$

۲۴ الف) اگر سه عدد مثبتِ a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، ثابت کنید اعداد $\log a$، $\log b$ و $\log c$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند.

ب) اگر $\log_b a + \log_c a = ۲\log_b a \times \log_c a$ باشد، نشان دهید a واسطهٔ هندسی بین b و c است.

۲۵ لگاریتم عددی در مبنای ۵ از لگاریتم عکس آن عدد در همین مبنا، به‌اندازهٔ ۴ واحد بیشتر است. آن عدد را بیابید.

فصل ۶

حد و پیوستگی

اهداف کلی فصل

- ❑ آشنایی با فرایندهای حدی
- ❑ بررسی رفتار یک تابع در نزدیکی یک نقطه
- ❑ شناخت شهودی مفهوم حد
- ❑ درک تفاوت مقدار تابع و حد تابع در یک نقطه
- ❑ بررسی حد توابع به کمک نمودار آنها
- ❑ محاسبه حد انواع توابع شامل تابع ثابت، همانی، چند جمله‌ای، گویا، جزء صحیح و برخی توابع مثلثاتی و رادیکالی
- ❑ آشنایی با قوانین محاسبه حد توابع (حد مجموع، حد تفاضل و...)
- ❑ آشنایی با مفهوم پیوستگی به طور شهودی
- ❑ ارائه تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه و پیوستگی روی بازه
- ❑ معرفی برخی توابع پیوسته

نگاه کلی به فصل

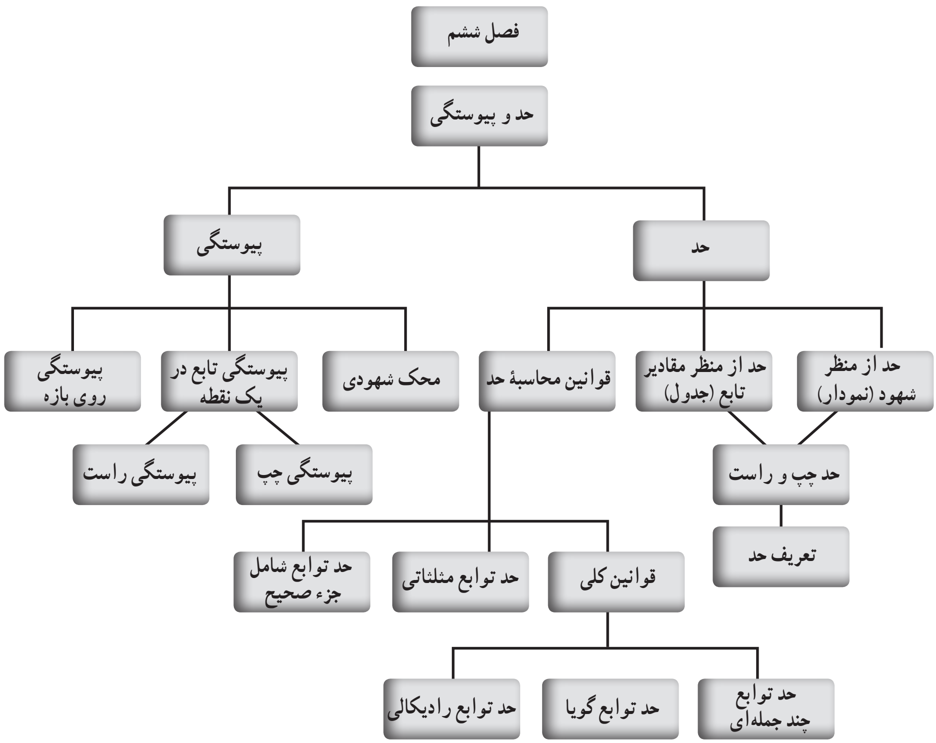
حد یکی از مباحث مهم و پایه‌ای در ریاضیات محسوب می‌شود. در این فصل دانش‌آموزان برای اولین بار با این موضوع آشنا می‌شوند. ورود به این مبحث دارای ظرافت‌های زیادی است. ارائه تعریف صوری و رسمی حد در ابتدای کار منطقی و مفید نیست. به گفته فرودنتال «گام آخر در علم ریاضی صورت‌بندی مسائل از طریق اصل موضوعی ساختن آن است. این نقطه پایانی، نباید به عنوان نقطه آغازین تدریس ریاضی به حساب آید.» ارائه یک تعریف کار ساده‌ای است، امّا درک آن و گشودن رمز و رازهای نهفته در آن کار دشواری است. پژوهش‌ها تأکید می‌کنند که به عوض سر و کار داشتن در ابتدا با تعاریف رسمی بهتر است از رویکردی استفاده شود که در آن دو نکته در نظر گرفته شود:

نکته اوّل استفاده از مفاهیم آشنا و نکته دوم اینکه این مفهوم آشنا پایه‌ای برای ساختن مفهوم جدید فراهم کند. معرفی ایده‌های مجرد بدون فراهم نمودن زمینه‌ای طبیعی و مناسب برای آنها و نیز بدون توجه به دانش و تجربه قبلی دانش‌آموزان بر دشواری‌های یادگیری می‌افزاید و گاهی دسترسی فراگیران به ایده‌ها را ناممکن می‌سازد و علاوه بر این باعث بروز پدیده‌ای به نام مقاومت در برابر یادگیری دانش‌آموزان می‌شود. در این فصل تکیه اساسی مبتنی بر شهود و استفاده از تصاویر و نمودارها و تعاریف مقدماتی است. در این مسیر

در ارائه مباحث، موارد زیر مد نظر مؤلفان بوده است :

رایج بودن و متداول بودن در کتاب‌های معتبر، قابل فهم بودن برای دانش‌آموزان، متکی بر شهود و تجسم بودن، مورد قبول و پذیرش اکثریت معلمان بودن، تعادل بین مفاهیم و رویه‌ها، استفاده از پژوهش‌های مرتبط، پرهیز از ارائۀ نابجای رویه‌های الگوریتمی و در نهایت تکیه بر خرد جمعی.

نقشۀ مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم*

بسیاری از دانش‌آموزان با مفهوم حد مشکل دارند و اساس جهان‌بینی ریاضی آنان این است که

* مطالب این بخش از مقاله زیر اقتباس شده است :

ریحانی، ابراهیم؛ شریفی، زهرا وسلطانی، محمد (۱۳۹۵). بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال سوم متوسطه در مورد مفهوم حد، فصلنامه علمی پژوهشی تعلیم و تربیت شماره ۱۲۸

ریاضیات مجموعه‌ای از فرمول‌ها و محاسبات پیچیده روی آنهاست که با دنیای واقعیت و فعالیت‌های روزمره ارتباطی ندارند، از این رو ملموس و قابل درک نیستند و فقط عده خاصی توانایی درک آنها را دارند. برخی از معلمان از همان ابتدای کار و بدون هیچ مقدمه‌ای با هدایت دانش‌آموزان به سمت استفاده از نمادها و رویه‌های پیدا کردنِ مقدار حد، آنها را از درک درستِ مفهوم حد دور می‌کنند. دانش‌آموزان نیز معمولاً توانایی محاسبهٔ حدها را با به کارگیری الگوریتمی فرمول‌ها و رویه‌ها دارند، بدون اینکه قادر به تفسیر نتایج کار خود باشند. لذا شاید بیشتر دانش‌آموزان با تمرکز بر روش‌های جبری و الگوریتمی برای محاسبه، بتوانند مسائل معمولی را حل کنند ولی برای حل مسائل غیرمعمول و غیرروتین که نیازمند درک ویژگی‌های خاصی از مفهوم حد باشد، ناتوان می‌باشند (جوتر[۱]، ۲۰۰۶).

همان‌طور که اشاره شد، عدم درک صحیح دانش‌آموزان از مفهوم حد منجر به بروز بدفهمی‌های متعددی در این زمینه می‌شود که ممکن است درک دیگر مفاهیم مرتبط با حد را نیز دچار مشکل کند. جهت شناسایی این بدفهمی‌ها تحقیقات متعددی انجام گرفته است که هر کدام نوعی بدفهمی را معرفی می‌کند و یا بر بدفهمی‌های شناسایی شده توسط دیگران صحه می‌گذارد. در اینجا ابتدا بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد را بیان می‌کنیم و سپس به بررسی عوامل مؤثر در ایجاد این بدفهمی‌ها خواهیم پرداخت.

بدفهمی‌های رایج

۱ــ بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد

بدفهمی‌های شناسایی شده در این زمینه در جدول ۱ ارائه شده است :

جدول ۱ــ انواع بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد (برگرفته از سلطانی، ۱۳۹۰)

شماره	نوع بدفهمی	تشریح بدفهمی
۱	**حد و مرز**[۲]	به تصور دانش‌آموزان حد تابع به واقع مرز و سر حد تابع است و تابع هرگز نمی‌تواند از آن مقدار فراتر رود؛ یعنی مثلاً زمانی که حد تابع ۲ است، مقدار تابع از مقدار ۲ بیشتر نخواهد شد.
۲	**حد و نماد**	پنداشت‌های نادرستی که از نمادها و اصطلاحات زیادی که برای بیان تعاریف حد به کار می‌رود مانند : میل کردن به سمتِ ... و نزدیک می‌شود به ...، ایجاد می‌شود. زمانی که مثلاً به دانش‌آموز گفته می‌شود x نزدیک a می‌شود ولی هرگز به آن نمی‌رسد، در پی آن بدفهمی‌هایی ایجاد خواهد شد که به نماد $x \to a$ مربوط است.

۱ــ Juter

۲ــ Does not exceed

۳	حد و حرکت[3]	برخی تصور می‌کنند زمانی که متغیر یک تابع به یک مقدار نزدیک می‌شود، حد حرکت تابع را به سمت یک عدد توصیف می‌کند، پس حد به مفهوم حرکت گره خورده است. این اتفاق در زمان پر کردن جدول‌هایی رخ می‌دهد که برای آموزش حد در ابتدای یادگیری، دانش‌آموز با آن مواجه می‌شود.
۴	حد و جایگزینی	برخی تصور می‌کنند که یک تابع باید در یک نقطه تعریف شده باشد تا در آن نقطه حد داشته باشد یا حد تابع در یک نقطه همواره با مقدار تابع در آن نقطه برابر است یا حتی برخی آن را با مفهوم پیوستگی مرتبط دانسته و معتقدند که تابع فقط می‌تواند در نقاطی که پیوسته باشد حد داشته باشد.
۵	حد و بی‌نهایت[2]	برخی تصورات مربوط به مفهوم بی‌نهایت و فرایندهای نامتناهی است. چون دانش‌آموزان قادر به فهم فرایندهای نامحدود نیستند و فقط از فرایندهای معین و محدود برای حل مسائل مربوط به حد استفاده می‌کنند؛ مثلاً در محاسبهٔ حدهای بی‌نهایت، دانش‌آموز چون درک خوبی از بی‌نهایت ندارد مانند عدد با آن برخورد کرده و در تابع به عنوان عدد آن را جایگزین می‌کند.
۶	حدِ غیرقابل دسترسی[3]	برخی تصور می‌کنند حد عددی یا نقطه‌ای است که تابع نزدیک آن می‌شود ولی هرگز به آن نمی‌رسد. مثلاً زمانی که حد تابعی در یک نقطه عدد ۵ به دست می‌آید، تصور می‌کنند هرگز نمی‌توان آن را برابر ۵ در نظر گرفت بلکه عددی نزدیک ۵ است.

۲ـ عوامل مؤثر بر ایجاد بدفهمی‌ها

تحقیقات فراوانی که در این زمینه انجام شده است، عوامل متعددی را در ایجاد این بدفهمی‌ها دخیل می‌دانند که این عوامل مانع ساخت و سازهای مفهومی در مورد حد می‌شوند. از جملهٔ این موانع شناخته شده می‌توان به موارد زیر اشاره کرد :

الف) مشکلات ناشی از طرح‌واره‌ها[1] : اغلب اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان ریشه در ساختارهای ذهنی دارد یا به عبارت دیگر طرح‌واره‌های ذهنی عامل مؤثری در ایجاد بدفهمی‌ها در مورد مفهوم حد می‌باشد. گویا و حسام (۱۳۸۴) چند نوع از تأثیرات طرح‌واره‌های ذهنی دانش‌آموزان را به صورت زیر ذکر کرده‌اند :

الف) ۱ـ مداخله طرح‌واره‌های پیشین در یادگیری جدید

همواره طرحواره‌های قبلی دانش‌آموزان که در ذهن آنها شکل گرفته است ممکن است یادگیری آنها را تحت تأثیر قرار دهد. اولیور[2] (۱۹۹۲) معتقد است دانش‌آموزان به جای آنکه طرح‌واره‌های ذهنی خود را بازسازی کنند؛ عموماً تمایل دارند ایده‌های جدید را در طرحواره‌های موجود خود جذب کرده و با آنها منطبق سازند. مثلاً زمانی که دانش‌آموز حد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ را زمانی که $x\to+\infty$ برابر ۶ محاسبه می‌کند، طرح‌وارهٔ ذهنی او از حد در نقطه $x=۳$ در حل این مسئله مداخله کرده و باعث ایجاد این اشتباه شده است.

۱ـ Schema

۲ـ Oliver

الف) ۲ـ مداخله یادگیری جدید در طرح‌واره‌های قبلی

در این حالت دانش‌آموز با یادگیری مطالب جدید، دچار بدفهمی‌ها و اشتباهاتی در مورد مطالب گذشته می‌گردد که قبل از آن، آنها را نداشته است، یعنی در این حالت طرح‌وارهٔ جدید است که طرح‌وارهٔ پیشین را تحت تأثیر قرار می‌دهد؛ مثلاً دانش‌آموزی که قبل از آموزش «حد در بی‌نهایت»، محاسبه حد توابع گویا در یک نقطه را عددی ثابت محاسبه می‌کند، پس از آموزش حد در بی‌نهایت در مورد حدهایی که به جواب $\pm\infty$ می‌رسند، دچار تناقض خواهد شد. در این زمان طرح‌وارهٔ جدید است که طرح‌وارهٔ قبلی را دچار مشکل خواهد کرد.

الف) ۳ـ بازخوانی یک طرح‌وارهٔ نامناسب

زمانی که دانش‌آموز در موقعیت حل مسئله قرار می‌گیرد، باید طرح‌واره‌هایی را در ذهن خود بازخوانی و فعال نماید که به کارگیری آنها برای حل مسئله مفید باشد. گاهی ممکن است دانش‌آموز برای یک مسئله از طرح‌وارهٔ نامناسب استفاده کند و باعث بروز یک اشتباه مفهومی گردد؛ مثلاً زمانی که دانش‌آموز حد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}-۲۵}$ را در نقطه ۵ برابر ۱ محاسبه می‌کند، ممکن است طرح‌واره حدهای بی‌نهایت را به طور نامناسب بازخوانی کرده باشد.

ب) مشکلات ناشی از روش‌های آموزشی غیرمؤثر : یکی از عوامل تأثیرگذار بر عدم یادگیری و درک ناصحیح مفهوم حد نحوهٔ آموزش این مفهوم و تأکید بر دانش رویه‌ای به جای دانش مفهومی در کتاب‌های درسی و توجه معلمان به این نوع دانش در بحث‌های کلاسی و ارزشیابی تحصیلی می‌باشد. طیف وسیعی از دانش‌آموزان وجود دارند که ضمن تسلط کامل بر روش‌های الگوریتمی و جبری که با بازنمایی‌های دیگر مفهوم مثل گرافیکی و هندسی سازگاری ندارد، اکثر مفاهیم را بدون درک مفهومی آن آموزش می‌بینند. طبق نتایج به‌دست آمده از تحقیقات برای آموزش مفاهیم به دانش‌آموزان باید بین رویه‌های الگوریتمی و درک مفهومی تعادل ایجاد کرد تا معنای مفاهیم از جمله حد و پیوستگی و مشتق و انتگرال توسط استفاده از روش‌های الگوریتمی قدرتمند پوشیده نشود (آرتیگ[۱] (۱۹۹۸) و براسائو[۲] (۱۹۹۷) نقل شده در ایلیا[۳] (۲۰۰۹)).

ج) مشکلات ناشی از فرایندهای انتزاعی و ساختن مفهوم : معمولاً اولین برخورد دانش‌آموزان با مفهوم حد، با مسائلی شروع می‌شود که بر تعاریف تکیه نمی‌کند، بلکه بر خواص متنوع شهودی مفهوم حد تکیه دارد. با چنین شروعی اغلب دانش‌آموزان تصوراتی از پویایی حد پیدا خواهند کرد و به این باور

۱ـ Artigu

۲ـ Broussea

۳ـ Elia

می‌رسند که تعاریف حد را بدون نیاز به دستیابی به همه نتایج مفهومی رسمی حد درک کرده‌اند. همچنین تأکید بر فرایندهای انتزاعی مانند «نزدیک شدن به ...» که در آموزش اولیه حد وجود دارد باعث ایجاد بدفهمی‌ها می‌گردد.

د) مشکلات به وجود آمده در برخورد با تعریف رسمی حد: مشکل اساسی در مفهوم حد زمانی به اوج خود می‌رسد که دانش‌آموزان باید از مفاهیم پویایی حد بگذرند و به مفاهیم رسمی برسند. همان‌طور که می‌دانیم در آموزش مفهوم حد ابتدا جملاتی مانند «میل می‌کند به سمتِ ...» و «نزدیک می‌شود به...» و نظایر آن برای دانش‌آموزان معنی می‌شود. دانش‌آموزان حتی بعد از آموزش رسمی حد، هنوز هم بر همان معانی اولیه تکیه می‌کنند و بدفهمی‌هایی نظیر «آیا تابع به حد خود می‌رسد؟» یا «حد، حرکتی است به سمت یک شیء که ممکن است به آن برسد یا نرسد» برای آنها ایجاد می‌شود. این بدفهمی‌ها در درک دانش‌آموزان از تعریف رسمی حد مؤثر است. بنابراین زمانی که تعاریف رسمی که با ایده‌های شهودی و پویایی از حد سازگاری ندارند مطرح می‌شوند، دانش‌آموزان در درک آن دچار مشکل شده و به بدفهمی‌های آنها، نمادها و اصطلاحات موجود در تعریف رسمی هم اضافه می‌شود (ایلیا، ۲۰۰۹).

به علت اهمیت و جایگاه مفهوم حد در ریاضیات و مشکلات دانش‌آموزان در این زمینه، تحقیقات متعددی در سراسر دنیا در مورد این مفهوم انجام گرفته است که بخشی از آنها به نحوه آموزش این مفهوم و بخشی دیگر از تحقیقات به شناسایی انواع مشکلات و بدفهمی‌های ایجاد شده می‌پردازد. از جملهٔ این تحقیقات می‌توان به تحقیق مونوقان[1] (۱۹۹۱) اشاره کرد که تأثیرات زبان را بر باورهای دانش‌آموزان دربارهٔ واژه‌هایی مانند «به سمتِ ... میل می‌کند.»، «به ... نزدیک می‌شود.»، «در ... همگرا می‌گردد.» و «حد» بررسی نمود و مشاهده کرد که دانش‌آموزان این واژه‌ها را با شکل‌های متفاوتی به کار می‌برند.

تصویر عنوانی

برج کاشانه، برج بلند و زیبایی است که در جنوب شهر بسطام و جنوب خاوری مسجد جامع بسطام قرار دارد. برج کاشانهٔ بسطام از بناهای تاریخی قرن هفتم و هشتم هجری است. تاریخ بنای برج کاشانه بر اساس کتیبه سردر ورودی، سال ۷۰۰ قمری است. ارتفاع این برج ۲۰ متر است و در بالای برج نوشته‌ای به خط کوفی دیده می‌شود که در آن نام الجایتو ثبت شده است. ارتفاع برج کاشانه از درون ۲۴ متر و از بیرون نزدیک به ۲۰ متر است. شکل خارجی آن چند ضلعی منتظم سی ضلعی است.

در بالای برج کاشانه دو حاشیه از آجرهای بزرگ وجود دارد که روی آن مطالبی نوشته شده است.

۱ـ Monaghan

در ضلع جنوب غربی این برج روی یک آجر کلمه بسم الله الرحمن الرحیم با خط ثلث بسیار زیبایی دیده می‌شود.

برخی از شرق‌شناسان از جمله آندره گدار بر این گمان است که این بنا از آثار غازان‌خان مغول است و نام اصلی آن غازانه بوده که به مرور زمان و بدون توجه به اصل آن کاشانه نامیده شده است.

در دوره‌های بعد از اسلام، از این برج برای دیده‌بانی بسطام استفاده می‌شد. با توجه به اسلوب ساختمان و عوامل دیگر، این بنا بسیار شبیه رصدخانه به نظر می‌رسد.

ساختمان برج کاشانه که نمای خارجی آن دارای جلوه و شکوه خاصی است، از بناهای درخور اهمیت خطه قومس بوده و نمای خارجی آن نیز دارای جلوه و شکوه خاصی است. برج کاشانه در سال ۱۳۱۰ به شماره ۶۹ در فهرست آثار تاریخی به ثبت رسیده است.

درس اول

فرایندهای حدی

هدف کلی : درک مفهوم حد به صورت شهودی

اهداف جزئی درس

۱ معرفی فرایندهای حدی (با استفاده از اشکال هدفمند و درج مقادیر متناظر در جدول)
۲ درک اولیهٔ مفهوم حد، حد چپ و حد راست با استفاده از فرایندهای حدی
۳ آشنایی با مفهوم حد چپ و حد راست تابع در یک نقطه
۴ آشنایی با تعریف حد تابع در یک نقطه
۵ درک شهودی حد راست، حد چپ و تشخیص حد داشتن تابع در یک نقطه، از روی نمودار
۶ بررسی حد توابع با استفاده از جدول مقادیر
۷ درک تفاوت بین حد تابع در یک نقطه و مقدار تابع در همان نقطه
۸ بررسی حد توابع رادیکالی ساده، چند ضابطه‌ای، شامل قدرمطلق از روی نمودار

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با توابع خطی و رسم نمودار آن
۲ آشنایی با توابع درجه دوم (سهمی) و رسم نمودار آن
۳ آشنایی با مفهوم قدرمطلق
۴ آشنایی با رسم نمودار توابع چند ضابطه‌ای

روش تدریس

درس اوّل به فرایندهای حدی اختصاص دارد و در آن دانش‌آموزان به طور شهودی و غیررسمی با مفهوم حد آشنا می‌شوند. لازم به ذکر است که در این کتاب به تعریف حد در همین سطح بسنده شده و از ارائه تعریف رسمی و دقیق حد اجتناب کرده‌ایم. حد راست و حد چپ نیز به طور شهودی و با تکیه بر نمودار توابع مطرح می‌شود.

در فعالیت صفحهٔ ۱۲۰ به کمک چندضلعی‌های منتظم محاطی در یک دایره، مفهوم حد به طور شهودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به همکاران محترم توصیه می‌شود در انجام این فعالیت از دانش‌آموزان بخواهند که در مورد مساحت‌ها حدس بزنند به این معنی که مساحت چندضلعی را با مساحت دایره مقایسه کنند و در صورت امکان و داشتن زمان کافی، مساحت برخی از چندضلعی‌ها مثلاً مثلث و مربع را به‌دست بیاورند.

فعالیت صفحه ۱۲۰

حدس می‌زنید مساحت کدام‌یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه‌اتفاقی می‌افتد؟ مساحت مربع به مساحت دایره نزدیک‌تر است. هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های محاطی بیشتر شوند، مساحت چندضلعی منتظم به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌شود.

برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟ برای نزدیک‌تر شدن مساحت چندضلعی منتظم محاطی به مساحت دایره، می‌توان تعداد اضلاع چندضلعی را بیشتر کرد.

بله هر قدر که بخواهیم می‌توانیم مساحت چندضلعی منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم.

چند ضلعی منتظم محاطی	۳	۴	۵	۶	۷	...	۱۲	زیاد شدن تعداد اضلاع $\rightarrow$
مساحت تقریبی	$۱/۳r^۲$	$۲r^۲$	$۲/۳۸r^۲$	$۲/۶r^۲$	$۲/۸r^۲$	...	$۳r^۲$	نزدیک‌تر شدن مساحت $\rightarrow$ چند ضلعی‌ها به مساحت دایره

جمع‌بندی پایان صفحهٔ ۱۲۰، فعالیت را کامل می‌کند. با اینکه در این جمع‌بندی از نمادهای ریاضی استفاده نشده است ولی جملات دقیق و بی‌نقص ارائه شده‌اند.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۲۱، همین مطلب با استفاده از چندضلعی‌های منتظم محیط بر دایره تکرار شده است.

توصیهٔ آموزشی

همکاران محترم . . .

۱ اجازه دهید دانش‌آموزان با جملات خودشان نتیجه را بیان کنند و در مورد آن در کلاس بحث شود.

۲ در این دو فعالیت، طرح مفهوم حد به کمک دنباله‌ها و مثلاً میل کردن تعداد اضلاع به بی‌نهایت به هیچ عنوان جزو اهداف کتاب نیست.

کار در کلاس صفحه ۱۲۱

نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به‌دست آمد، دربارهٔ این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).

نتیجه : هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های منتظم محیط بر دایره را افزایش دهیم، مساحت چندضلعی‌های منتظم محیطی، به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌شود.

به عبارت دیگر مساحت چندضلعی‌های منتظم محیط بر دایره را هر قدر که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم به شرط آنکه تعداد اضلاع چندضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم.

در فعالیت صفحهٔ ۱۲۱، دانش‌آموزان با مقایسهٔ مساحت مستطیل‌ها، با گونه‌ای دیگر از فرایندهای حدی آشنا می‌شوند. تکمیل جدول‌ها، به دانش‌آموزان امکان مقایسهٔ مساحت مستطیل‌ها را می‌دهد.

جدول و تصاویر به دانش‌آموز کمک می‌کند که مفهوم میل کردن و نزدیک شدن به یک نقطهٔ خاص، و مفهوم حد را به طور شهودی و غیررسمی درک نماید. همچنین ارائه مساحت در قالب یک تابع، نوعی مدل‌سازی ریاضی مقدماتی به حساب می‌آید و تکیه بر روی یک تابع و رفتار آن را تا حدی توجیه می‌کند.

فعالیت صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲

مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل $AMND$ چقدر است؟ مساحت مستطیل $AMND$ برابر است با؛ ۸=۴×۲.

جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

عرض مستطیل‌ها با مقادیر کمتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۲/۹۹	۲/۹	۲/۸	۲/۷	۲/۵	۲/۱	۲	**عرض مستطیل‌ها**
مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.	۱۱/۹۶	۱۱/۶	۱۱/۲	۱۰/۸	۱۰	۸/۴	۸	**مساحت مستطیل رنگی**

عرض مستطیل‌ها با مقادیر بیشتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴	**عرض مستطیل‌ها**
مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.	۱۲/۰۴	۱۲/۴	۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶	**مساحت مستطیل رنگی**

x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود ←

→ x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود

x	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	→۳←	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴
$f(x)$	۸	۸/۴	۱۰	۱۱/۲	۱۱/۶	۱۱/۹۶	→۱۲←	۱۲/۰۴	۱۲/۴	۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶

$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود ←

→ $f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود

با استفاده از فعالیت صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲، تعاریف شهودی حد راست و حد چپ را با دقت مناسبی در صفحهٔ ۱۲۳ ارائه کرده‌ایم و در نهایت مفهوم حد برای این مثال بیان شده است.

پس از این مطلب، با الهام از مثال صفحهٔ ۱۲۴، تعریف حد تابع در یک نقطه را در همان صفحه ارائه کرده‌ایم.

هدف فعالیت صفحهٔ ۱۲۵، درک بهتر مفهوم حد و برطرف کردن برخی از بدفهمی‌های مرتبط با حد است. در این فعالیت دانش‌آموزان با سه تابع f و g و h مواجه شده و دلیل مساوی نبودن این سه تابع را توضیح می‌دهند. سپس با تکمیل جدول‌ها و بررسی رفتار سه تابع در نزدیکی نقطهٔ ۴، رفتار این توابع را یکسان می‌بینند. رفتار یکسان این سه تابع به وسیلهٔ مفهوم حد قابل توجیه است. با اینکه سه تابع مساوی نیستند ولی حد هر سه تای آنها در نقطهٔ ۴ برابر با ۷ است.

فعالیت صفحه ۱۲۵

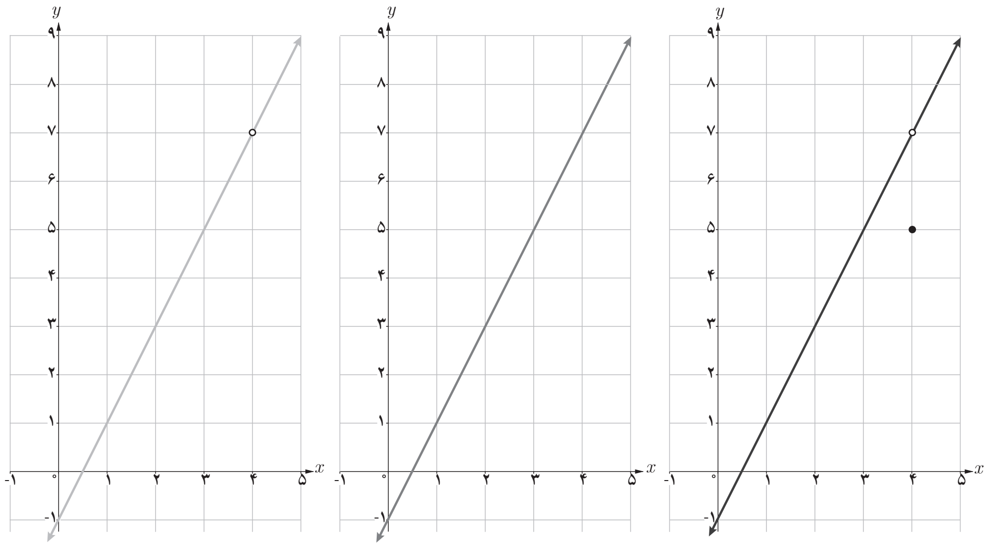
نمودار توابع زیر رسم شده‌اند :

$h(x)=۲x-۱ \quad (x\neq ۴)$

$g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq ۴ \\ ۵ & x=۴ \end{cases}$

$f(x)=۲x-۱$

هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.



$g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq ۴ \\ ۵ & x=۴ \end{cases}$

$f(x)=۲x-۱$

$h(x)=۲x-۱ \; (x\neq ۴)$

$\begin{cases} D_g=\mathbb{R} \\ R_g=\mathbb{R}-\{۷\} \end{cases}$

$D_f=R_f=\mathbb{R}$

$\begin{cases} D_h=\mathbb{R}-\{۴\} \\ R_h=\mathbb{R}-\{۷\} \end{cases}$

خیر، سه تابع با هم مساوی نیستند زیرا نمودارهایشان دقیقاً برهم منطبق نیستند.

می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.

x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود | **x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود**

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	$\rightarrow$ ۴ $\leftarrow$	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	$\rightarrow$ ۷ $\leftarrow$	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$g(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	$\rightarrow$ ۷ $\leftarrow$	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$h(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	$\rightarrow$ ۷ $\leftarrow$	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹

مقادیر f، g و h را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به عدد ۷ نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ۴ نزدیک شود. حد هر سه تابع وقتی که $x \to ۴$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ۷ است. به عبارت دیگر :

$$\lim_{x\to ۴} f(x) = ۷ \qquad \lim_{x\to ۴} g(x) = ۷ \qquad \lim_{x\to ۴} h(x) = ۷$$

در پایان درس، به عنوان جمع‌بندیِ بحث، تأکید شده است که حد تابع و مقدار تابع (در صورت وجود)، الزاماً با یکدیگر برابر نیستند. مثال‌های ۱ و ۲ در صفحهٔ ۱۲۶، برای تثبیت این موضوع ارائه شده‌اند.

توصیهٔ آموزشی

همکاران محترم در طرح سؤالاتی که در آنها بررسی حد با رسم نمودار مدنظر است، لطفاً به موارد زیر عنایت فرمایید :

۱ استفاده از توابع ثابت، توابع خطی و توابع درجه ۲ توصیه می‌شود.

۲ از آوردن توابع قدرمطلقی جز حالت $y=|x-a|$ اجتناب نمایید.

۳ استفاده از توابع رادیکالی، فقط به فرم $y=\sqrt{x-a}$ توصیه می‌شود.

مطرح کردن نمونه‌هایی جز این موارد، خارج از اهداف کتاب است. همچنین طرح سؤال‌های حدی در مورد نمودارهایی که شاخهٔ بی‌نهایت دارند یا دارای مجانب هستند، به هیچ وجه جزء اهداف آموزشی این کتاب نمی‌باشد، لذا از طرح چنین سؤالاتی خودداری فرمایید.

حل تمرین‌های صفحهٔ ۱۲۷

۱ الف) نادرست $\left(\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۰\right)$

ب) درست

پ) نادرست (تابع f در ۲ تعریف نشده است)

ت) درست

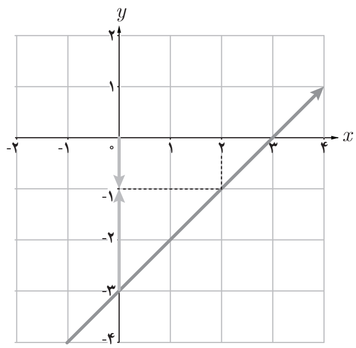
ث) نادرست ($\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد)

ج) درست

چ) درست

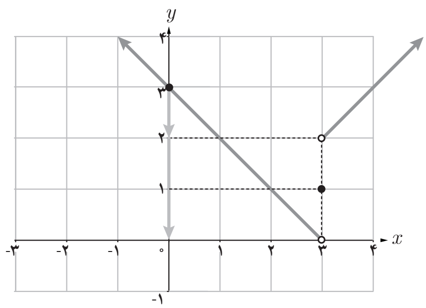
ح) درست

۲ تابع $f(x) = x-۳$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، داریم :



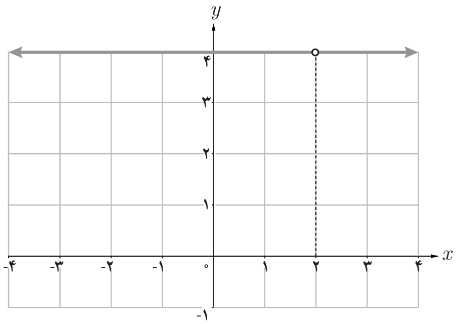
$$\lim_{x\to ۲} f(x) = -۱$$

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} x-۱ & x > ۳ \\ ۱ & x = ۳ \\ ۳-x & x < ۳ \end{cases}$ ، با نمودار مقابل، خواسته‌های مسئله را تأمین می‌کند. در این تابع داریم :



$f(۳) = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد

۴ تابع $f(x) = ۴$ $(x \neq ۲)$، با نمودار مقابل، در نقطهٔ ۲ تعریف نشده است و $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۴$.



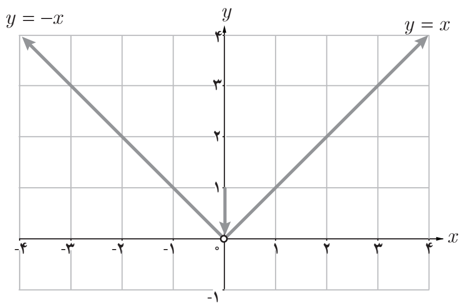
۵ الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد، چون تابع f برای $x<۲$ تعریف نشده است.

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد زیرا تابع f در نقطهٔ $x=۲$، حد چپ ندارد.

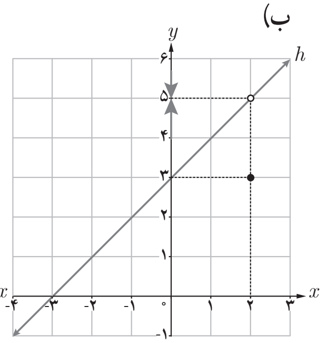
ت) $f(۲) = ۰$

۶ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$ به صورت مقابل است : از ضابطه مشخص است که $f(۰)$ تعریف نشده است و با توجه به نمودار داریم : $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۰$

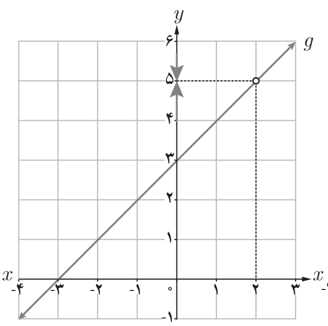


۷ الف) $f(۲) = ۵$، $g(۲)$ تعریف نشده است و $h(۲) = ۳$.

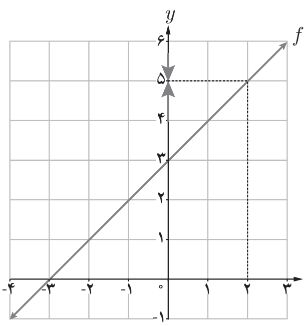
ب)



$\lim\limits_{x\to ۲} h(x) = ۵$



$\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = ۵$



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۵$

۸ برای پاسخ به سؤال، از جدول استفاده می‌کنیم :

x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود — x از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود

x	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲		۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۲	۲/۵	x
$f(x)=x-۳$	۱/۵−	۱/۲−	۱/۱−	۱/۰۱−	۱/۰۰۱−	۱−	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۳	۰/۵	$f(x)=-x+۲$

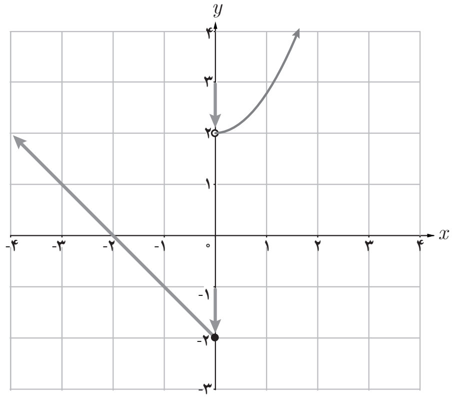
$f(x)$ به ۱− نزدیک می‌شود — $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شود

با توجه به جدول $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$ ، و چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع f در نقطهٔ ۲ حد ندارد.

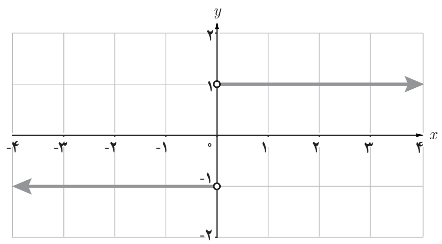
۹ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x>۰ \\ -۲x-۲ & x\le ۰ \end{cases}$ به صورت مقابل است. بنابر نمودار داریم :

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۲$

می‌بینیم که حد چپ و راست برابر نیستند، بنابراین حد تابع f در $x=۰$ وجود ندارد.



۱۰ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$ به صورت روبه‌رو، رسم شده است. با توجه به نمودار داریم :



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱ \\ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱ \end{cases} \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{وجود ندارد } \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$$

درس دوم

محاسبهٔ حد توابع

اهداف آموزشی

۱ آشنایی با قوانین محاسبهٔ حد

۲ درک شهودی برخی از قوانین محاسبهٔ حد از روی نمودار

۳ محاسبهٔ حد توابع با استفاده از ضابطه

۴ آشنایی با نحوهٔ محاسبهٔ حد توابع چندجمله‌ای، رادیکالی، مثلثاتی و چندضابطه‌ای

۵ آشنایی با نحوهٔ محاسبهٔ حد توابع گویا وقتی حد صورت و مخرج برابر با صفر است.

۶ ارائه راهکار دقیق و مناسب برای بحث روی حد توابع شامل قدرمطلق.

۷ ارائه الگوی مناسب و قابل درک در مورد چگونگی بحث وجود یا عدم وجود حد تابع با ضابطهٔ $y=[x]$ در نقاط صحیح و غیرصحیح.

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با توابع، دامنه و نمودار آنها

۲ شناخت تابع جزء صحیح و نمودار آن

۳ آشنایی با مفهوم قدرمطلق، شناخت توابع شامل قدرمطلق و رسم نمودار آنها

۴ آشنایی با روش‌های تجزیهٔ عبارت‌های جبری

۵ درک تعاریف و مطالب مطرح شده در درس اوّل

۶ آشنایی با مقادیر نسبت‌های مثلثاتی و محاسبهٔ مقدار عددی عبارت‌های مثلثاتی

روش تدریس

در این درس، قوانین محاسبهٔ حدِ برخی توابع، آموزش داده می‌شود. این دستورها بدون اثبات و در صورت لزوم به کمک شهود و با استفاده از نمودار توضیح داده می‌شوند. در مورد حد توابع گویا، رفع ابهام در حالت‌های ساده آموزش داده می‌شود که در این قسمت نیز برای درک بهتر، از نمودار توابع کمک گرفته می‌شود.

توصیهٔ آموزشی

حد توابع رادیکالی تنها برای توابعی به شکل $y=\sqrt{ax+b}$ که در آن حد تابعِ خطیِ زیر رادیکال عددی مثبت است مطرح می‌شود و حالت‌های دیگر جزء اهداف این کتاب نیست. در ادامه حد توابع مثلثاتیِ $y=\sin x$ و $y=\cos x$ و یا ترکیبات سادهٔ آنها ارائه می‌شود. پس از این خلاصه، به ابتدای درس بازمی‌گردیم. درس دوم را با ارائه دستورها و قواعدی برای محاسبهٔ حد توابع آغاز کرده‌ایم. در بیان این دستورها، ابتدا محاسبهٔ حد تابع ثابت و تابع همانی با ذکر مثال‌هایی و با تکیه بر شهود و رسم نمودار ارائه شده است.

کار در کلاس صفحه ۱۲۸

حدهای زیر را حساب کنید :

$$\lim_{x\to ۰} x = ۰ \qquad \lim_{x\to ۷} ۵ = ۵ \qquad \lim_{x\to ۷} x = ۷$$

$$\lim_{x\to ۷} x = -۷ \qquad \lim_{x\to ۴} (-۲) = -۲ \qquad \lim_{x\to ۵} ۰ = ۰$$

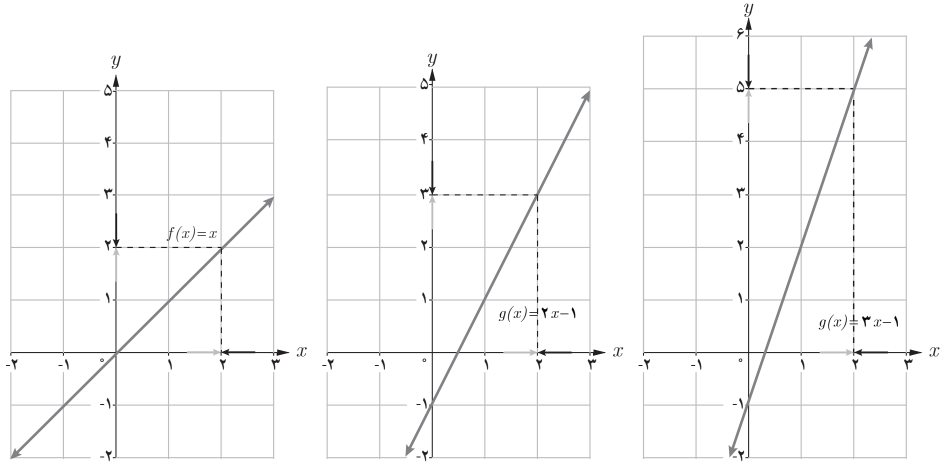
پس از این کار در کلاس، می‌توان با ارائه مثال زیر، بحث را غنی‌تر نموده و به آن عمق بیشتری داد :

مثال : حد تابع $f(x)=\begin{cases} ۵ & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ را در صورت وجود بیابید.

در صفحهٔ ۱۲۹، قانون حد مجموع دو تابع ارائه شده است. توصیه می‌شود قبل از بیان قانون از دانش‌آموزان بخواهیم تا در مورد آن حدس بزنند. کار در کلاس ارائه شده به توضیح بیشتر این قانون با تکیه بر نمودار دو تابع مربوطه می‌پردازد.

کار در کلاس صفحه ۱۲۹

اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x-۱$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲}\big(f(x)+g(x)\big)$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۳$

$$\lim_{x\to ۲}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to ۲} f(x)+\lim_{x\to ۲} g(x) = ۲+۳=۵$$

با توجه به نمودارها، واضح است که با نزدیک شدن x به عدد ۲، مقادیر تابع $f(x)$ به ۲ و مقادیر تابع $g(x)$ به ۳، و در نتیجه مقادیر تابع $f(x)+g(x)$ به عدد ۵=۳+۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to ۲}\big(f(x)+g(x)\big)=۵$$

در ادامه، قانون حد تفاضل و حد حاصل‌ضرب دو تابع ارائه شده است. بهتر است که از دانش‌آموزان بخواهیم مثال‌های دیگری مطرح و حل نمایند. در این فرایند بسیاری از اشکالات آنها با بحث و گفت‌وگوی کلاسی برطرف خواهد شد. در این موقعیت، یک سؤال چالش برانگیز که قابل طرح و بررسی است این است که آیا امکان دارد دو تابع در نقطه‌ای خاص حد نداشته باشند ولی مجموع آنها در آن نقطه دارای حد باشد؟ این سؤال را می‌توان به عنوان یک تحقیق به دانش‌آموزان واگذار کرد و در جلسات بعد مورد بررسی قرار داد.

به کمک قوانینی که تاکنون دانش‌آموزان فراگرفته‌اند، می‌توانند به تعمیم برخی از قوانین محاسبهٔ حد پرداخته و یا از آنها برای محاسبهٔ حد بسیاری از توابع استفاده کنند.
به طور مثال می‌توانند حد توان‌های طبیعی تابع $f(x)$ در یک نقطه را به شرط وجود حد تابع f در آن نقطه، به‌دست آورند و یا از قوانین برای محاسبهٔ حد تابع چندجمله‌ای استفاده کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۳۰

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ، به کمک قانون حد حاصل‌ضرب هر یک از حدهای زیر را بیابید.

فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. در این صورت به کمک قانون حد حاصل‌ضرب، می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^2=\lim_{x\to a}\big(f(x).f(x)\big)$$
$$=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}f(x)=l\times l=l^2$$
$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^3=\lim_{x\to a}\Big(\big(f(x)\big)^2.f(x)\Big)$$
$$=\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^2.\lim f(x)=l^2.l=l^3$$

ب) برای محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to 20}(\frac{2}{5}x-3)$ چگونه از قوانین ۱، ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

ب) برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 20}(\frac{2}{5}x-3)$ ، ابتدا با استفاده از قوانین (۱) و (۲) و (۴) می‌توان نوشت :

$$\overbrace{\lim_{x\to 20}(\frac{2}{5}x)=\underbrace{\lim_{x\to 20}\frac{2}{5}}_{\text{قانون (۱)}}\times\underbrace{\lim_{x\to 20}x}_{\text{قانون (۲)}}}^{\text{قانون ۴}}=\frac{2}{5}\times 20=8$$

اینک با استفاده از قانون (۵)، داریم :

$$\lim_{x\to 20}(\frac{2}{5}x-3)=\lim_{x\to 20}(\frac{2}{5}x)-\lim_{x\to 20}3=8-3=5$$

در صفحهٔ ۱۳۰، قانون محاسبهٔ حد تقسیم دو تابع نیز ارائه شده است که در فعالیت صفحهٔ ۱۳۱ دانش‌آموزان در چند نمونه به استفاده از آن خواهند پرداخت.

فعالیت صفحه ۱۳۱

۱ برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳x^۲+۲x-۷$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱}(۳x^۲+۲x-۷)$$
$$= \lim_{x\to ۱}(۳x^۲) + \lim_{x\to ۱}(۲x) - \lim_{x\to ۱} ۷$$
$$= ۳\lim_{x\to ۱} x^۲ + ۲\lim_{x\to ۱} x - ۷ = ۳\left(\lim_{x\to ۱} x\right)^۲ + ۲(۱) - ۷ = ۳(۱)^۲ + ۲ - ۷ = -۲$$

ب) $f(۱)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = f(۱)$ را بررسی کنید.

با محاسبه‌ای ساده $f(۱) = -۲$ به‌دست می‌آید و با مقایسهٔ این عدد با $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ می‌بینیم که $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = f(۱)$.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x) = \frac{۱}{۸}x^۴ - x^۳ + ۵x - \frac{۱}{۲}$ ، درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = g(۲)$ را بررسی کنید.

$$g(x) = \frac{۱}{۸}x^۴ - x^۳ + ۵x - \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} g(۲) = \frac{۱}{۸}(۲)^۴ - ۲^۳ + ۵(۲) - \frac{۱}{۲} = ۲ - ۸ + ۱۰ - \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲} \\ \lim\limits_{x\to ۲} g(x) = \lim\limits_{x\to ۲}(\frac{۱}{۸}x^۴ - x^۳ + ۵x - \frac{۱}{۲}) \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to ۲}(\frac{۱}{۸}x^۴) - \lim_{x\to ۲} x^۳ + \lim_{x\to ۲}(۵x) - \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۸}\lim_{x\to ۲} x^۴ - \lim_{x\to ۲} x^۳ + ۵\lim_{x\to ۲} x - \lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۸}\left(\lim_{x\to ۲} x\right)^۴ - \left(\lim_{x\to ۲} x\right)^۳ + ۵\lim_{x\to ۲} x - \lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۸}\times ۲^۴ - ۲^۳ + ۵(۲) - \frac{۱}{۲} = ۲ - ۸ + ۱۰ - \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

با مقایسهٔ $g(۲)$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ ، واضح است که : $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = g(۲)$

۲ الف) مطلوب است : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-1}{x^2-4x+1}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{x^2-4x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4x+1)}=\frac{2(3)-1}{3^2-4(3)+1}=-\frac{5}{2}$$

ب) حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3+1}{5x^2+\frac{2}{3}}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^4+2x^3+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(5x^2+\frac{2}{3})}=\frac{1^4+2(1)^3+1}{5(1)^2+\frac{2}{3}}=\frac{12}{17}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\frac{3}{5}x^2-2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(\frac{3}{5}x^2-2x+1)}=\frac{1^2-1}{\frac{3}{5}(1)^2-2(1)+1}=0$$

در صفحات ۱۳۱ و ۱۳۲ برای محاسبهٔ حد تابع گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ وقتی که حد صورت و مخرجِ کسر هر دو برابر صفر می‌شود، دو روش مورد بررسی قرار گرفته است؛ روش ساده کردن عبارت و روش استفاده از نمودار.

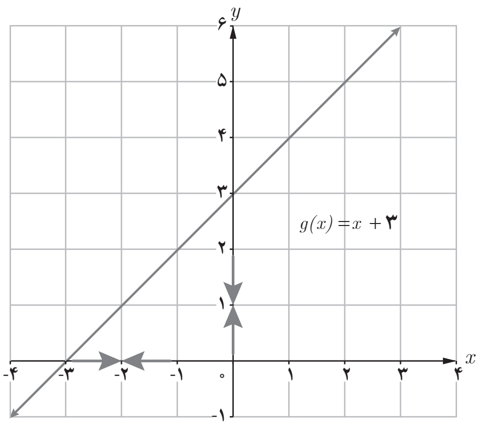
توصیهٔ آموزشی : در این مورد، تابع‌ها باید در محدوده‌ای که کتاب به آن پرداخته است مورد بحث قرار گیرند و طرح حدهای پیچیده و مشکل که تنها بر پایهٔ الگوریتم‌ها و قواعد و بدون درک مناسب ارائه می‌شوند مجاز نیست.

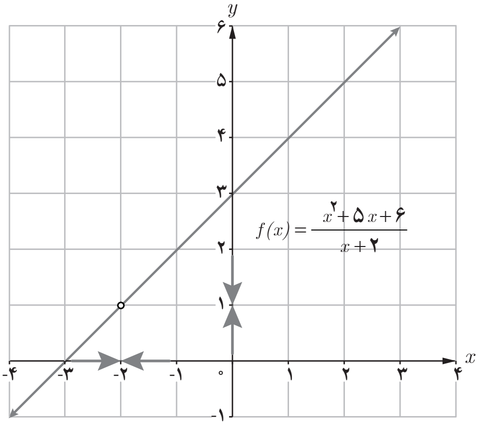
کار در کلاس صفحه ۱۳۲

مانند مثال قبل حدها را محاسبه کنید؛ سپس به کمک نمودارها نیز محاسبهٔ حد را توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$

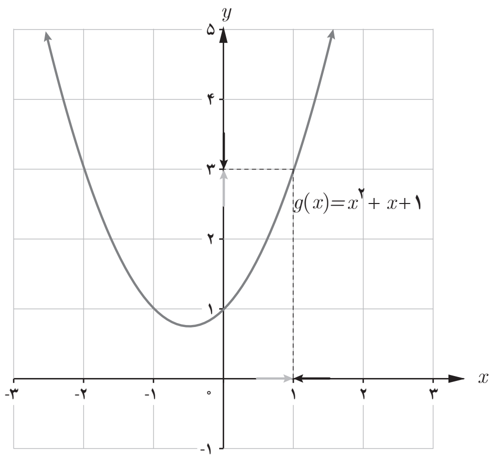
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x+3)=1$$

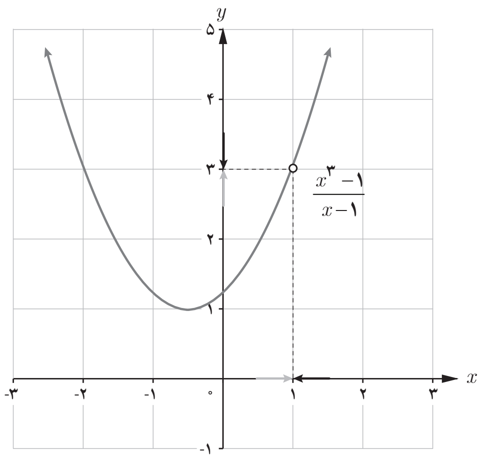




نمودار دو تابع $f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+2}$ و $g(x)=x+3$ رسم شده است. با توجه به نمودارها، واضح است که توابع f و g با هم مساوی نیستند ولی حد آنها در نقطهٔ $x=-2$ با هم برابر و مقدار این حد عدد ۱ است یعنی همان عددی که با استفاده از قوانین محاسبهٔ حد به‌دست آوردیم.

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

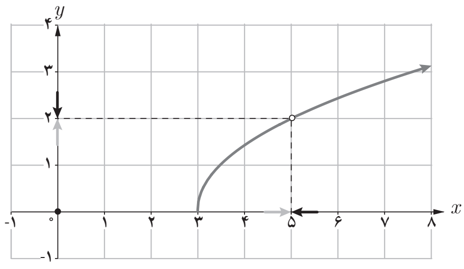




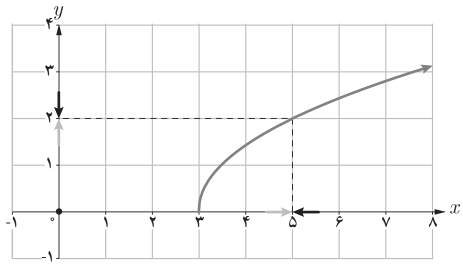
نمودار توابع $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ و $g(x)=x^2+x+1$ آورده شده است. به وضوح f و g برای $x\neq 1$، با هم مساوی‌اند، بنابراین و با تأیید نمودارها، حد هر دو تابع در نقطهٔ $x=1$ برابر با ۳ است.

کار در کلاس صفحه ۱۳۳

۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$ و $(x\neq ۵)$ $g(x)=\sqrt{۲x-۶}$ رسم شده‌اند.



$g(x)=\sqrt{۲x-۶}$ $\quad (x\neq ۵)$



$f(x)=\sqrt{۲x-۶}$

الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ ضابطهٔ هر نمودار، زیر آن آورده شده است.

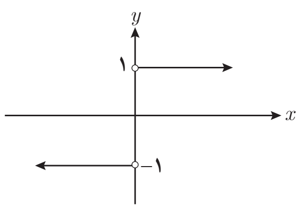
ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)$ موجودند؟ بله ــ حد هر دو تابع در $x=۵$ برابر با **۲** است.

پ) کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}=$ وجود ندارد $\qquad \lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}=$ وجود ندارد $\qquad \lim\limits_{x\to ۳^+}\sqrt{۲x-۶}=۰$

چون $\sqrt{۲x-۶}$ برای $x<۳$ تعریف نمی‌شود، پس $\lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}$ وجود ندارد و در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}$ نیز موجود نخواهد بود.

۲ دربارهٔ تابع $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



$$h(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

الف) $h(x)=۱$ (نادرست) $\qquad$ ب) $D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$ (درست)

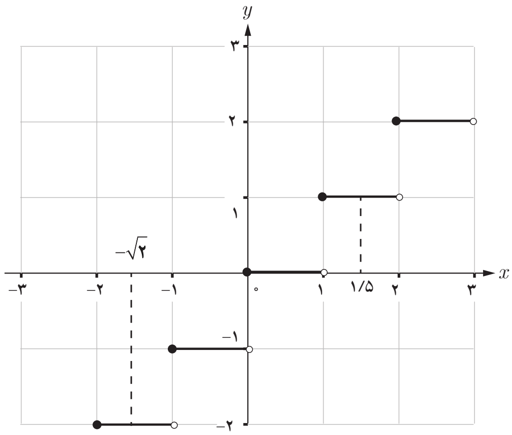
پ) $\lim\limits_{x\to ۰^+} h(x)=۱$ (درست) $\qquad$ ت) $h(۰)=۰$ (نادرست)

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} h(x)$ وجود ندارد. (درست)

در مورد قسمت (پ)، علاوه بر نمودار، از ضابطهٔ تابع h نیز می‌توان برای محاسبهٔ حد راست استفاده نمود. به این صورت که چون حد راست را می‌خواهیم، پس از ضابطهٔ مربوط به $x>۰$، حد می‌گیریم :

$$\lim_{x\to ۰^+} h(x) = \lim_{x\to ۰^+} ۱ = ۱$$

۳ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = [x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $\lim_{x\to ۲^+} [x] = ۲$

ب) $\lim_{x\to ۲^-} [x] = ۱$

پ) $\lim_{x\to ۲} [x]$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to ۱} [x]$ وجود ندارد

ث) $\lim_{x\to ۱/۵} [x] = ۱$

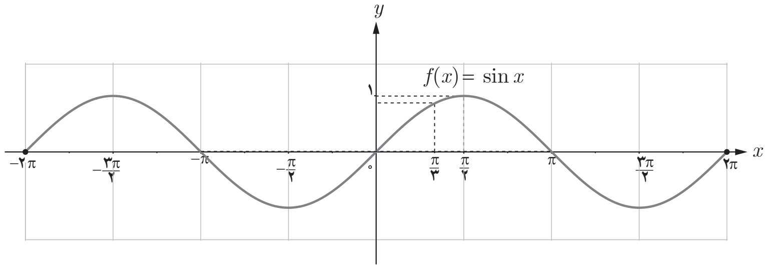
ج) $\lim_{x\to -\sqrt{۲}} [x] = -۲$

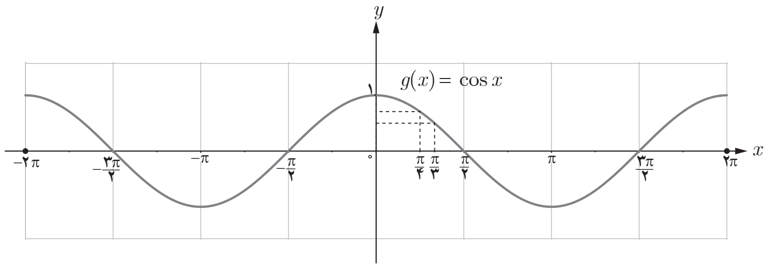
در نقاط ۱ و ۲، حدهای چپ و راست با هم برابر نیستند، پس حد تابع f در این نقطه‌ها وجود ندارد.

در صفحهٔ ۱۳۴ حدهای مثلثاتی با محوریت توابع $\sin x$ و $\cos x$ مطرح شده‌اند. فعالیت این صفحه نیز رفتار توابع مذکور را با کمک نمودار آنها بررسی می‌کند. بهتر است از دانش‌آموزان در مورد حد این دو تابع در نقاط دیگری که در فعالیت ذکر نشده است، نیز سؤال شود. دانش‌آموزان در این فعالیت بدون آنکه به طور مستقیم ذکر شود، با خواص برخی از توابع پیوسته آشنا می‌شوند.

فعالیت صفحه ۱۳۴

با استفاده از نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \sin x = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}^-} \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ت) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \sin x = ۰$

ث) $\lim\limits_{x\to۰} \cos x = ۱$

ج) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}^-} \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to\frac{-\pi}{۲}} \cos x = ۰$

ح) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}^+} \cos x = \frac{۱}{۲}$

حل تمرین‌های صفحهٔ ۱۳۵

۱

الف) $\lim\limits_{x\to۳} f(x) = ۲$

ب) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-۱^+} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to-۱^-} f(x) = ۲ \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to-۱^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-۱^-} f(x) \Rightarrow$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to-۱} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x) = ۵$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to ۳} f(x) + \lim\limits_{x\to ۳} g(x) = ۲+۵ = ۷$

ث) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۱^+}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) + \lim\limits_{x\to -۱^+} g(x) = ۱+(-۱) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to -۱^-}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) + \lim\limits_{x\to -۱^-} g(x) = ۲+(-۱) = ۱ \end{cases}$$

چون حد چپ و راست برابر نیستند، پس تابع $f+g$ در نقطهٔ $x=-۱$ حد ندارد.

ج) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۲^+}\big(۲f(x)+۵g(x)\big) = ۲\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) + ۵\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x) = ۲+(-۱)+۵(-۱) = -۷ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\big(۲f(x)+۵g(x)\big) = ۲\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) + ۵\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x) = ۲(-۱)+۵(۳/۵) = ۱۵/۵ \end{cases}$$

تابع $۲f+۵g$ در نقطهٔ $x=۲$ حد ندارد.

چ) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰}\big(f(x)\big)^۴ = L^۴$

ابتدا ضابطهٔ تابع f را در نزدیکی $x=۰$ تعیین می‌کنیم. ضابطهٔ f نزدیک صفر، معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(-۱ \,,\, ۱)$ و $(۲ \,,\, -۱)$ می‌باشد. معادلهٔ خط را به‌دست می‌آوریم:

$$y-۱ = \frac{۱-(-۱)}{-۱-۲}\big(x-(-۱)\big) \;\to\; y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۱}{۳}$$

پس نزدیکِ صفر، $f(x) = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۱}{۳}$ است و بنابراین داریم:

$$\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰}\left(-\frac{۲}{۳}x + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۱}{۳} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to ۰}\big(f(x)\big)^۴ = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۴ = \frac{۱}{۸۱}$$

ح) $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} g(x) = ۰ \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to ۰^+}\big(g(x)\big)^۲ = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} g(x) = ۱ \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to ۰^-}\big(g(x)\big)^۲ = ۱ \end{cases} \quad , \; \lim\limits_{x\to ۰^+}\big(g(x)\big)^۲ \neq \lim\limits_{x\to ۰^-}\big(g(x)\big)^۲$$

پس $\lim\limits_{x\to ۰}\big(g(x)\big)^۲$ وجود ندارد.

خ) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)} = \dfrac{-۱}{-۱} = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\dfrac{۱}{۴} \end{cases}$

چون حد چپ و راست مساوی نیستند، پس تابع $\dfrac{f}{g}$ در ۲ حد ندارد.

د) $\lim\limits_{x\to ۵}\big(f(x)g(x)\big) = \lim\limits_{x\to ۵} f(x) \times \lim\limits_{x\to ۵} g(x) = ۵\times ۵ = ۲۵$

۲ توابع $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x+۶$ با هم مساوی نیستند ولی در ۲- حدهای مساوی دارند.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۲} f(x) = \lim\limits_{x\to -۲} x^۲ = (-۲)^۲ = ۴ \\ \lim\limits_{x\to -۲} g(x) = \lim\limits_{x\to -۲} (x+۶) = -۲+۶ = ۴ \end{cases}$$

۳

الف) $\lim\limits_{x\to ۷}(-۳) = -۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(-۲x-۷) = -۷$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱}(۳x^۲-۴x+۵) = ۳(-۱)^۲-۴(-۱)+۵ = ۳+۴+۵ = ۱۲$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۳x}{x^۲-۹} = \lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)} = \lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x}{x+۳} = \dfrac{۳}{۶} = \dfrac{۱}{۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{۲x^۲-x} = \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{x(۲x-۱)} = \lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱}{۲x-۱} = -۱$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۳+۸}{x+۲} = \lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{x+۲} = \lim\limits_{x\to -۲}(x^۲-۲x+۴) = ۱۲$

چ) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۲^+}[x] = \lim\limits_{x\to -۲^+}(-۲) = -۲ \\ \lim\limits_{x\to -۲^-}[x] = \lim\limits_{x\to -۲^-}(-۳) = -۳ \end{cases}$ حد چپ $\neq$ حد راست $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to -۲}[x]$ وجود ندارد

ح) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x} = ۰$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۷} = \sqrt{۲+۷} = \sqrt{a} = ۳$

د) تابع $y=\sqrt{x}$ سمت چپ صفر تعریف نشده است، پس $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$ وجود ندارد.

ذ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۵}=\sqrt{۷}$

ر) تابع $y=\sqrt{x-۲}$ در دو طرف ۱ تعریف نشده است، بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۲}$ وجود ندارد.

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x-۲}{[x]+۱}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x-۲}{۳+۱}=\frac{۳-۲}{۴}=\frac{۱}{۴}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}}\cos x=\cos(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)=\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$

ش) $\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{x}{[x]}=\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{x}{-۲}=\frac{-۲}{-۲}=۱$

ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}(۱+\sin x)=۲$

ض) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}\left(x+[x]\right)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(x+۰)=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\left(x+[x]\right)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(x-۱)=-۱\end{cases}$

چون حد چپ و راست برابر نیستند، پس $\lim\limits_{x\to ۰}\left(x+[x]\right)$ وجود ندارد.

۴

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to ۲}f(x)+\lim\limits_{x\to ۲}g(x)=۳+۰=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\left(h(x)\right)^۵=\left(\lim\limits_{x\to ۲}h(x)\right)^۵=(-۱)^۵=-۱$

پ) حد تابع $\frac{f}{g}$ در $x=۲$ وجود ندارد. چون داریم $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲}g(x)=۰$.

ت) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۲}g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲}f(x)}=\frac{۰}{۳}=۰$

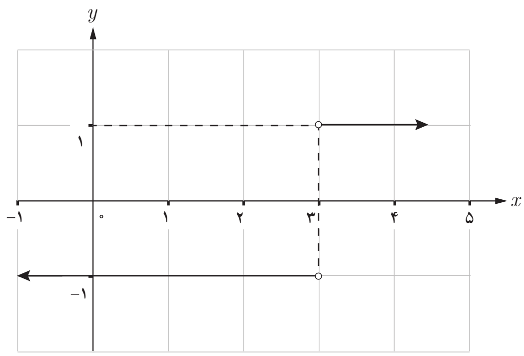
ث) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۳f(x)}{g(x)-۵h(x)}=\dfrac{۳\lim\limits_{x\to ۲}f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲}g(x)-۵\lim\limits_{x\to ۲}h(x)}=\dfrac{۳(۳)}{۰-۵(-۱)}=\dfrac{۹}{۵}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{h(x)}=\dfrac{۱}{\lim\limits_{x\to ۲}h(x)}=\dfrac{۱}{-۱}=-۱$

۵ نمودار توابع f و g به صورت زیر رسم شده‌اند :

$$f(x)=\dfrac{|x-۳|}{x-۳}=\begin{cases}۱ & x>۳\\ -۱ & x<۳\end{cases}$$

$$g(x)=۱$$



با توجه به نمودارها، می‌توان نوشت :

ــ حد تابع f در ۳ وجود ندارد زیرا حد چپ و حد راست با هم برابر نیستند.

ــ حد تابع g در ۳ برابر با ۱ است.

ــ در همهٔ نقاط بزرگ‌تر از ۳، توابع f و g حدی برابر (با ۱) دارند.

۶ الف) اگر f و g هر دو در نقطهٔ a حد نداشته باشند، آنگاه در مورد حد تابع $f+g$ در نقطهٔ a هیچ اظهارنظری نمی‌توان کرد یعنی تابع $f+g$ در نقطهٔ a می‌تواند حد داشته باشد یا حد نداشته باشد. به عنوان مثال :

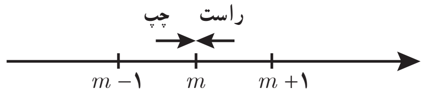
۱ــ دو تابع $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}$ در صفر حد ندارند ولی تابع $(f+g)(x)=۰$ در $x=۰$ حد دارد.

۲ــ دو تابع $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۲ & x>۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}$ در صفر حد ندارند و با یک بررسی ساده می‌بینیم که تابع $(f+g)(x)=\begin{cases}۳ & x>۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$ نیز در $x=۰$ حد ندارد.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد، آنگاه تابع $f+g$ قطعاً در نقطهٔ a حد ندارد.

به اثبات این مطلب می‌پردازیم. به برهان خلف فرض کنیم تابع $f+g$ در نقطهٔ a حد داشته باشد. بنا به فرض تابع f نیز در a حد دارد. حال بنا به قوانین محاسبهٔ حد، چون $f+g$ و f در a حد دارند، آنگاه تفاضل آنها یعنی $g = (f+g) - f$ نیز در a حد دارد که یک تناقض با فرض است. پس فرض خلف نادرست و حکم، یعنی اینکه تابع $f+g$ در a حد ندارد، درست خواهد بود.

۷



الف) $\lim\limits_{x\to m^+}[x] = \lim\limits_{x\to m^+} m = m$

ب) $\lim\limits_{x\to m^-}[x] = \lim\limits_{x\to m^-} (m-۱) = m-۱$

پ) $\lim\limits_{x\to m^+}[x] \neq \lim\limits_{x\to m^-}[x] \Rightarrow$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to m}[x]$

به طور کلی حد تابع $f(x) = [x]$، در نقاط صحیح وجود ندارد ولی حد این تابع در تمام نقاط غیرصحیح وجود دارد.

درس سوم

پیوستگی

اهداف درس

۱ ارائه محک شهودی برای تشخیص پیوستگی تابع از روی نمودار
۲ آشنایی با تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه
۳ آشنایی با مفهوم پیوستگی راست و چپ تابع در یک نقطه
۴ ایجاد مهارت در بررسی پیوستگی تابع در یک نقطه از روی ضابطهٔ تابع
۵ ایجاد توانایی در تشخیص پیوستگی تابع در یک نقطه از روی نمودار تابع
۶ آشنایی با مفهوم پیوستگی تابع روی بازه
۷ بررسی پیوستگی برخی توابع معروف روی بازه
۸ بررسی پیوستگی یک تابع روی یک بازه از روی نمودار آن تابع
۹ ایجاد توانایی در تشخیص بازه‌های پیوستگی و ناپیوستگی تابع، از روی نمودار آن تابع

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با نمودار توابع خطی، درجه ۲، رادیکالی، قدرمطلق، جزء صحیح و مثلثاتی
۲ آشنایی با مفهوم حد
۳ تسلط و مهارت در استفاده از ابزار و قوانین محاسبهٔ حد تابع در یک نقطه
۴ توانایی در تصور نمودار تابع در یک بازهٔ خاص

روش تدریس

درس سوم به پیوستگی اختصاص دارد. در ابتدای درس، نمودار تعدادی از توابع آشنا مطرح شده و

با استفاده از یک محک شهودی، پیوستگی آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه، تعریف پیوستگی در یک نقطه، پیوستگی راست و چپ، و پیوستگی در یک بازه ارائه می‌شود. همچنین شرایط ناپیوستگی یک تابع بررسی و مثال‌هایی از توابع مهم پیوسته، ارائه می‌شود. در مورد اصطلاحات و تعاریف به کار رفته، رایج و متداول بودن آن در کتاب‌های معتبر و نیز قابل فهم بودن تعریف برای دانش‌آموزان و پذیرش آن توسط اکثریت همکاران، مورد نظر بوده است.

همچنین در ارائه مفاهیم تکیه بر تجسم و شهود و استفاده از پژوهش‌های معتبر و تکیه بر خرد جمعی لحاظ شده است. در همین حال از طرح نابه‌جا و افراطِ رویه‌های الگوریتمی و پیچیده و غیرضروری پرهیز شده است.

پس از این نگاه اجمالی و توضیح روشنگر، به ابتدای درس بازمی‌گردیم. در فعالیت صفحهٔ ۱۳۷ نمودار تعدادی از توابع آشنا داده شده و معیاری شهودی برای بررسی پیوستگی ارائه شده است.

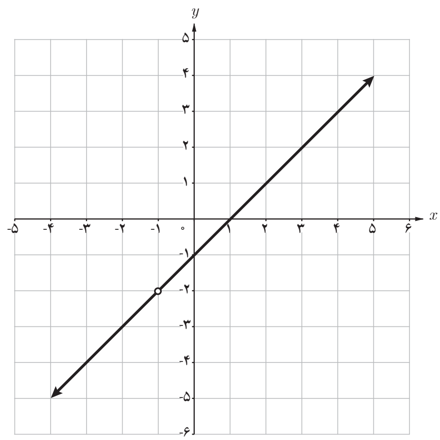
رسم نمودار یک تابع بدون آنکه حکم را از روی کاغذ برداریم، همان معیار موردنظر است.

به همکاران محترم توصیه می‌شود در صورت فراهم بودن شرایط، توابع دیگری نیز در کلاس توسط دانش‌آموزان و معلمین گرامی طرح و بررسی شود.

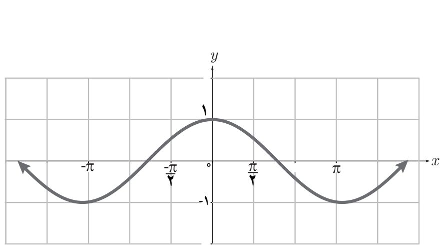
فعالیت صفحه ۱۳۷

الف) در بین این ۹ تابع، شش نمودار ردیف‌های اوّل و دوم را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ می‌توان رسم کرد.

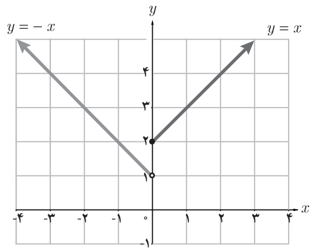
ب) نمودارهای چهار تابع در شکل های زیر رسم شده‌اند :



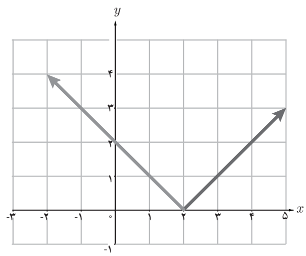
$g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$



$f(x)=\cos x$



$$h(x)=\begin{cases} ۱-x & x<۰ \\ x+۲ & x\geq ۰ \end{cases}$$



$$t(x)=\left|x-۲\right|$$

در بین این نمودارها، نمودار توابع f و t را می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد. لذا این دو تابع نیز نمونه‌هایی از توابع پیوسته هستند.

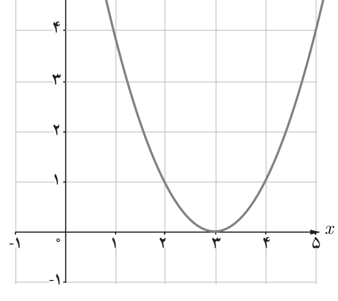
در ادامه، تعریف پیوستگیِ تابع در یک نقطه در صفحهٔ ۱۳۸ مطرح شده است و با توجه به آن و به کمک نمودار، انواع موقعیت‌های ناپیوستگی تابع در یک نقطه، ارائه شده است.

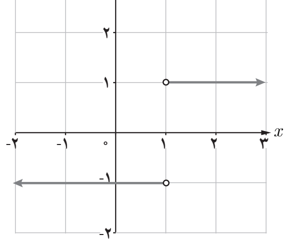
لازم به ذکر است که این نمودارها کلی هستند و به عنوان یک تکلیف مناسب می‌توان از دانش‌آموزان خواست که مثال‌هایی مشخص و متفاوت برای هر مورد ارائه کنند. به این ترتیب عدم وجود حد، عدم وجود مقدار تابع، تفاوت مقدار حد با مقدار تابع و یا ترکیب حالت‌های متفاوت قابل طرح است که مطمئناً به درک عمیق مفهوم پیوستگی کمک خواهد کرد.

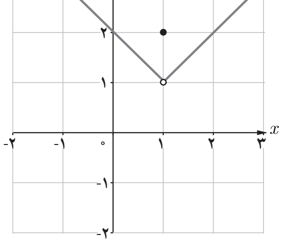
کار در کلاس صفحه ۱۳۹

کدام‌یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده شده در $x=۱$ ناپیوسته‌اند؟

الف) $f(x)=(x-۳)^۲$ ب) $g(x)=\dfrac{|x-۱|}{x-۱}$ پ) $h(x)=\begin{cases} x & x>۱ \\ ۲ & x=۱ \\ -x+۲ & x<۱ \end{cases}$







الف) برای تابع f داریم $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = f(۱) = ۴$ ، پس تابع f در نقطهٔ x=۱ پیوسته است.

ب) تابع g در x=۱ ناپیوسته است. زیرا این تابع در این نقطه تعریف شده است.

پ) تابع h در x=۱ پیوسته نیست. در مورد تابع h، داریم :

$$\begin{cases} h(۱) = ۲ \\ \\ \lim\limits_{x\to ۱} h(x) = ۱ \end{cases} , \lim\limits_{x\to ۱} h(x) \neq h(۱) \quad \Rightarrow$$ h در ۱ ناپیوسته است

در فعالیت صفحهٔ ۱۳۹، پیوستگی راست مورد بررسی قرار گرفته است. به جز تابع ذکر شده، بهتر است از دانش‌آموزان بخواهیم مثال‌های دیگری نیز مطرح کنند.

فعالیت صفحه ۱۳۹

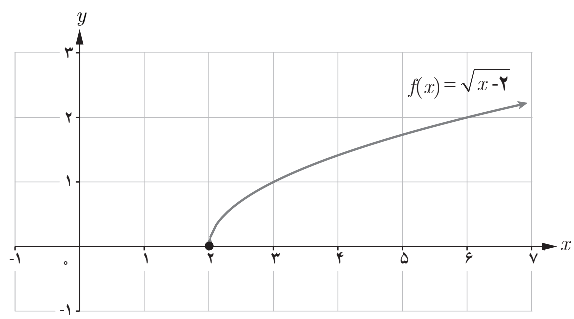
تابع $f(x) = \sqrt{x-۲}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید.

الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ موجودند؟ حد راست تابع f در x=۲ وجود دارد ولی حد چپ موجود نیست.

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۰ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ موجود است؟ خیر

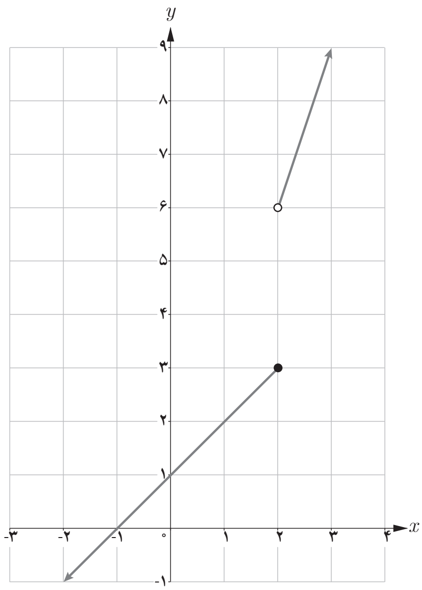
پ) آیا تابع f در x=۲ پیوسته است؟ چون $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد، پس تابع f در x=۲ پیوسته نیست.



پیوستگی چپ در کار در کلاس صفحهٔ ۱۴۰ مطرح شده است. تابع ارائه شده به گونه‌ای تعریف شده است که بررسی پیوستگی راست نیز مطرح شود. در تمام مثال‌های مطرح شده، نمودار تابع نقش مهم و اساسی برای درک رفتار تابع دارد. بررسی مثال‌هایی که توسط دانش‌آموزان طرح می‌شود، بسیار آموزنده خواهد بود.

کار در کلاس صفحه ۱۴۰

تابع با ضابطه $g(x)=\begin{cases}۳x & x>۲\\ x+۱ & x\le ۲\end{cases}$ و نمودار آن را در نظر بگیرید.



الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)$ موجودند؟ با توجه به نمودار واضح است که حدهای راست و چپ هر دو موجودند :

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x)=۳ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۲^+} g(x)=۶$$

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ موجود است؟ خیر حد تابع f در $x=۲$ وجود ندارد. زیرا حد چپ و راست برابر نیستند.

پ) آیا تابع g در $x=۲$ پیوسته است؟ خیر، چون $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ موجود نیست.

در ادامهٔ صفحهٔ ۱۴۰، پیوستگی روی بازه‌های باز و بسته مطرح شده است. این تعریف در بیشتر کتاب‌ها رایج و مورد استفاده است. این تعریف مبتنی بر شهود و قابل درک برای دانش‌آموزان است. پیوستگی روی بازه‌های $(a,b]$ و $[a\,,b)$ توسط دانش‌آموزان تعریف می‌شود و باید در کلاس مورد بررسی و نقد قرار گیرد.

کار در کلاس صفحه ۱۴۰

پیوستگی روی بازه‌های $[a\,,b)$ و $(a\,,b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a\,,b)$ پیوسته است هرگاه f دربازهٔ $(a\,,b)$ پیوسته باشد و در نقطهٔ a پیوستهٔ راست باشد.

تابع f روی بازه $[a\ ,b]$ پیوسته است هرگاه f دربازهٔ $(a\ ,b)$ پیوسته باشد و در نقطهٔ b پیوستهٔ چپ باشد.
در ابتدای صفحهٔ ۱۴۱، تعریف پیوستگی روی بازهٔ $(-\infty\ ,\infty)$ مطرح شده است. توصیه می‌شود در صورت امکان و داشتن زمان کافی، مثال‌هایی از توابع پیوسته و ناپیوسته روی بازهٔ $(-\infty\ ,\infty)$، در کلاس طرح، و در مورد آنها بحث شود.

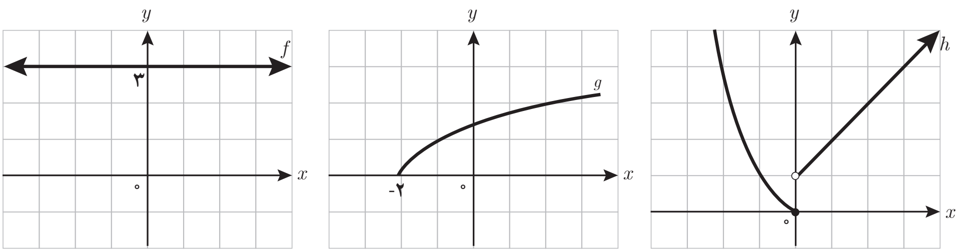
کار در کلاس صفحه ۱۴۱

سه تابع متفاوت مثال بزنید که :

الف) روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشد. تابع $f(x)=۳$ روی بازهٔ $(-\infty\ ,+\infty)$ پیوسته است.

ب) روی بازه $[-۲,+\infty)$ پیوسته باشد. تابع $g(x)=\sqrt{x+۲}$ روی بازهٔ $[-۲,+\infty)$ پیوسته است.

پ) روی بازه $(-\infty,۰]$ پیوسته باشد. تابع $h(x)=\begin{cases} x^۲ & x\leq ۰ \\ x+۱ & x>۰ \end{cases}$ روی بازهٔ $(-\infty,۰]$ پیوسته است.



کار در کلاس صفحه ۱۴۱

۱ تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم :

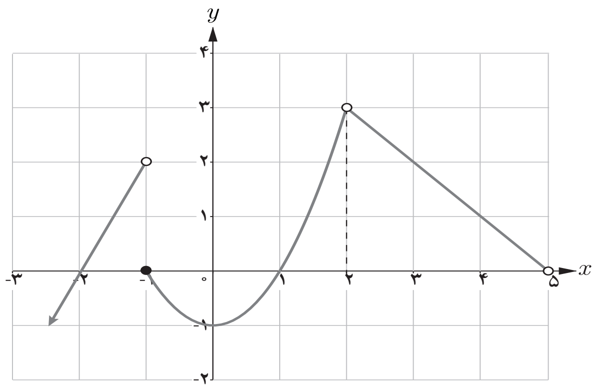
$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\leq x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) نمودار f را کامل کنید.

ب) دامنه و برد f را به‌دست آورید.

$D_f=(-\infty\ ,۵)-\{۲\}$ و $R_f=(-\infty\ ,۳)$

پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-۱,۱]$ و $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.



ــ تابع f در بازهٔ (۱ , ۱−) پیوسته است، در نقطهٔ $x=۱$ پیوستهٔ چپ و در نقطهٔ $x=-۱$ پیوستهٔ راست است پس بنا به تعریف تابع f در بازهٔ [۱ , ۱−] پیوسته است.

ــ تابع f در بازهٔ (۲,۵) ناپیوسته است. زیرا در نقاط $x=-۱$ و $x=۲$ از این بازه، پیوسته نیست. (لازم به ذکر است که ناپیوستگی در یک نقطه از بازه نیز، ناپیوسته بودن تابع در آن بازه را نتیجه می‌دهد)

ــ تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ ناپیوسته است، بنابراین تابع f در بازهٔ [۰ , ۲−] پیوسته نیست.

۲ دربارهٔ تابع f کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) f روی بازهٔ [۱−,∞−) پیوسته است. (نادرست)

ب) f روی بازهٔ (۱−,∞−) پیوسته است. (درست)

پ) f روی بازهٔ [۲,۵] پیوسته است. (نادرست)

ت) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۰$ (نادرست)

ث) $\lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=۰$ (درست)

ج) f روی بازهٔ (۲,۰−) پیوسته است. (نادرست)

۳ با توجه به تابع f :

الف) دو بازهٔ بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد. تابع f در بازهٔ [۲−,۳−] پیوسته و در بازهٔ [۱−,۳−] ناپیوسته است.

ب) a و bای را مثال بزنید که تابع روی (a,b) پیوسته باشد؛ اما روی $[a,b]$ پیوسته نباشد. $a=-۱$ و $b=۲$ بازهٔ $[a,b]$ پیوسته نباشد. به عنوان مثال با در نظر گرفتن $a=-۱$ و $b=۲$، به وضوح تابع f در بازهٔ (۱−,۲)

پیوسته ولی در بازهٔ $[-۱,۲]$ پیوسته نیست.

توصیهٔ آموزشی

با توجه به اینکه درک مفاهیم حد و پیوستگی برای دانش‌آموزان با دشواری‌های متفاوتی همراه است، لذا در طرح سؤالات، نباید با مطرح کردن توابع پیچیده، این دشواری را مضاعف نموده و از اصل موضوع غافل شویم! طرح سؤالات خارج از اهداف کتاب که احتمالاً در گذشته متداول بوده‌اند، مجاز نمی‌باشد.

حل تمرین‌های صفحهٔ ۱۴۲

۱ الف) $f(۲)=۵$ و $g(۲)$ تعریف نشده است و $h(۲)=۳$

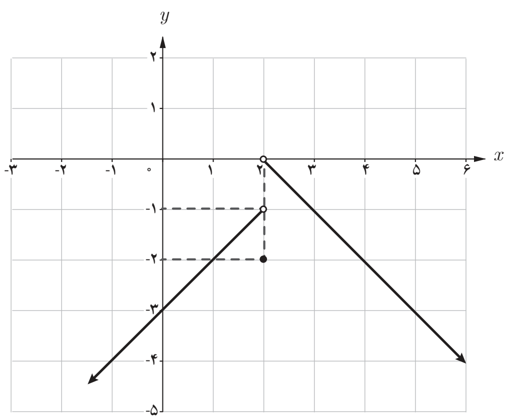
ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲x+۱)=۵$

$\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲x+۱)=۵$

$\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲+x)=۴$

پ) فقط تابع f در $x=۲$ پیوسته است. زیرا در این تابع داریم: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ به صورت مقابل است.



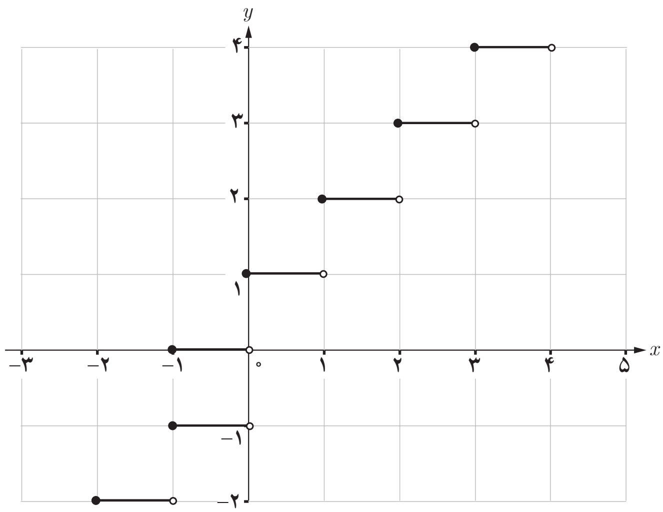
با توجه به شکل، برای رسم نمودار تابع f، فقط در نقطهٔ ۲ مجبور می‌شویم قلم را از روی نمودار برداشته و دوباره بگذاریم و نمودار را طی کنیم. پس تابع f فقط در ۲ ناپیوسته و در بقیهٔ اعداد حقیقی پیوسته است.

۳ تابع $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته نیست. زیرا این تابع در ۳ تعریف نشده است. حال پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ را در $x=۳$ بررسی می‌کنیم :

$$\begin{cases} f(۳)=۶ \\ \lim\limits_{x\to ۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}(x+۳)=۶\end{cases}$$

می‌بینیم که $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=f(۳)$ ، پس بنا به تعریف، تابع f در $x=۳$ پیوسته است.

۴ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=[x]$ رسم شده است : با توجه به نمودار، تابع f در نقاط صحیح ناپیوسته و در بقیهٔ نقاط (یعنی در نقاط مجموعهٔ $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$) پیوسته است.

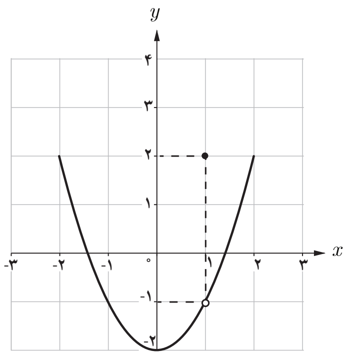


۵ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x\leq ۰\\ x^۲+۲ & x>۰\end{cases}$ را در $x=۰$ بررسی می‌کنیم :

$f(۰)=۲$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(-۲x+۲)=۲\\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(x^۲+۲)=۲\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۲$$

چون $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = f(۰) = ۲$ ، پس تابع f در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است.
از آنجاکه ضابطهٔ تابع f در نزدیکی بقیهٔ نقاط به غیر از صفر، یک چندجمله‌ای است و در چند جمله‌ای‌ها، حد در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است، پس f در بقیهٔ نقاط پیوسته است. اگر نمودار تابع f را رسم کنیم، موارد بررسی شده را می‌توان روی نمودار نیز مشاهده کرد.



۶ توابع بسیاری می‌توان مثال زد. مثلاً، تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲ & x\neq ۱\\ ۲ & x=۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

به وضوح $f(۱)=۲$ و داریم :

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱}(x^۲-۲) = -۱$$

و چون $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) \neq f(۱)$ ، پس f در $x=۱$ پیوسته نیست.
نمودار تابع f به صورت زیر است. ناپیوسته بودن تابع f در نقطهٔ $x=۱$، از روی نمودار نیز قابل درک است.

۷ تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است، زیرا : $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = f(۱) = ۱$
تابع g در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نیست چون تابع g در ۱ حد ندارد.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} g(x) = ۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} g(x) = ۱\end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} g(x) \neq \lim_{x\to ۱^-} g(x) \;\Rightarrow\; \text{وجود ندارد}\ \lim_{x\to ۱} g(x)$$

تابع h در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نیست چون حد تابع h در $x=۱$ با $h(۱)$ برابر نیست.

$$\lim_{x\to ۱} h(x) = ۱ \quad \text{و} \quad h(۱) = ۲$$

تابع k در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نیست چون حد تابع k در $x=۱$ وجود ندارد در واقع تابع k در سمت راست $x=۱$ تعریف نشده است.

۸ الف) $f(۲) = ۱۴$ و $f(۵) = ۲۰$
ب) با توجه به اینکه ضابطه‌های تابع f، خطی (چندجمله‌ای) هستند و این نوع توابع همه‌جا پیوسته‌اند، پس کافی است پیوستگی تابع f را در $t=۱$ بررسی کنیم :

$$f(۱) = ۱۲$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to ۱^-} f(t) = \lim\limits_{t\to ۱^-}(۶t+۴) = ۱۰ \\ \\ \lim\limits_{t\to ۱^+} f(t) = \lim\limits_{t\to ۱^+}(۲t+۱۰) = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \text{حد چپ} \neq \text{حد راست} \Rightarrow \text{وجود ندارد } \lim\limits_{t\to ۱} f(t)$$

پس تابع f در $t=۱$ ناپیوسته و بنابراین تابع f در بازهٔ $[۰ , ۱۰]$ پیوسته نیست.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی فصل ششم (حد و پیوستگی)

۱ در هر مورد با تشکیل جدول، بررسی کنید آیا تابع f در نقطهٔ a حد دارد یا خیر؟

الف) $f(x) = \begin{cases} ۵ & x < ۳ \\ x+۲ & x > ۳ \end{cases} \quad , \quad a = ۳$

ب) $f(x) = x - [x] \quad , \quad a = ۲$

پ) $f(x) = \dfrac{|x+۱|}{x+۱} \quad , \quad a = -۱$

۲ در هر مورد با رسم نمودار، حد تابع f را در نقطهٔ a (درصورت وجود) بیابید :

الف) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۰ \\ x-۲ & x < ۰ \end{cases} \quad , \quad a = ۰$

ب) $f(x) = |x-۱| + ۲ \quad , \quad a = ۱$

پ) $f(x) = \begin{cases} (x+۱)^۲ & x \neq -۱ \\ ۲ & x = -۱ \end{cases} \quad , \quad a = -۱$

ت) $f(x) = \begin{cases} ۳-x & x < ۲ \\ -۱ & x = ۲ \\ x^۲-۴ & x > ۲ \end{cases} \quad , \quad a = ۲$

۳ با محاسبهٔ حد چپ و راست، وجود یا عدم وجود حد تابع f را در نقطهٔ a بررسی کنید :

الف) $f(x) = \begin{cases} x^۲-x+۱ & x \geq ۱ \\ ۳x-۲ & x < ۱ \end{cases} \quad , \quad a = ۱$

ب) $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x} \quad , \quad a = ۰$

پ) $f(x) = \dfrac{x+۱}{[x]} \quad , \quad a = ۲$

ت) $f(x) = \sqrt{۶x-۲} \quad , \quad a = ۳$

۴ تابع $f(x) = x\,[x]$ را درنظر بگیرید. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)$ پ) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ ث) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x)$

۵ تابعی مثال بزنید که حد راست آن در $x = ۳$ برابر ۱−، حد چپ تابع در همین نقطه برابر ۲ بوده و مقدار تابع در $x = ۳$ برابر صفر باشد.

۶ تابعی چون f مثال بزنید که در همهٔ شرایط زیر صدق کند :

$f(۲)$ تعریف نشده باشد و $f(۰) = -۲$ و $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۲$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = -۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$

۷ برای تابع f در نقطهٔ $x = a$ ، داریم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) + \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = ۰$ اگر تابع f در نقطهٔ a حد داشته باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ را به‌دست آورید.

۸ تابع زیر را درنظر بگیرید و حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۲x & x < -۲ \\ ۲ & -۲ \le x \le ۱ \\ \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۱} & x > ۱ \end{cases}$$

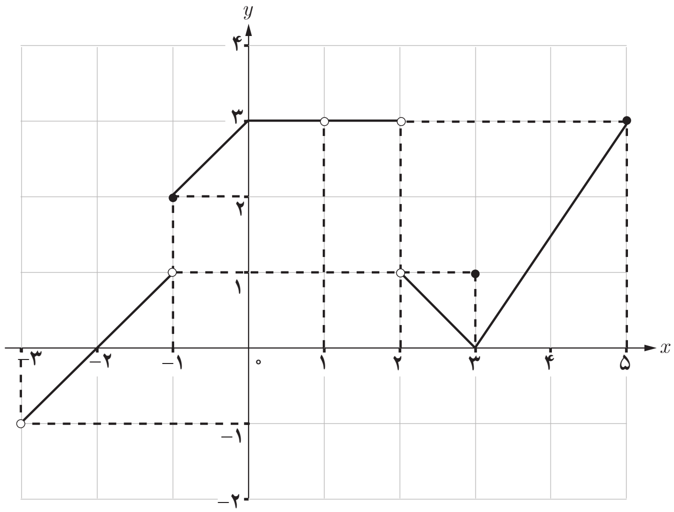
الف) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ ت) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to -۳} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)$ ح) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{۲}} f(x)$

۹ نمودار تابع f داده شده است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید :



الف) $\lim_{x \to -3^-} f(x) = -1$

ب) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$

پ) $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

ت) $\lim_{x \to 0/5} f(x) = 3$

ث) $\lim_{x \to 1} f(x)$ وجود ندارد

ج) $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$

چ) $\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{5}{2}$

ح) $\lim_{x \to 5} f(x)$ وجود ندارد

۱۰ تابع $f(x) = \begin{cases} (a+1)x+3 & x > -2 \\ -2x^2+1 & x < -2 \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-2$ حد داشته باشد.

۱۱ مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+1 & x > 2 \\ \sqrt{4x+1} & x \leq 2 \end{cases}$ در نقطهٔ ۲ حد داشته باشد.

۱۲ تابع $f(x) = \begin{cases} -2x+b & x > -1 \\ x+5 & x = -1 \\ ax+b & x < -1 \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-1$ حد داشته باشد.

۱۳ مقدار a را طوری بیابید که در تابع $f(x)=(x+a)[x]$ داشته باشیم :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x)+۳$$

۱۴ تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲-a & x>۱ \\ ax^۲+a & x<۱ \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۲\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ ، آنگاه :

الف) مقدار a را بیابید.

ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ و $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ را به‌دست آورید. آیا $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود دارد؟

پ) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

$\lim_{x\to \sqrt{۲}} f(x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to -۳} f(x)$

۱۵ اگر تابع f در نقطهٔ c حد داشته باشد و $\lim_{x\to c}\dfrac{۲f(x)+۱}{f(x)+۳}=\dfrac{۳}{۲}$ ، آنگاه $\lim_{x\to c} f(x)$ را بیابید.

۱۶ اگر $\lim_{x\to ۲} f(x)=۲$ و $\lim_{x\to ۲} g(x)=۱$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید :

۱) $\lim_{x\to ۲}(f(x)+g(x))$

۲) $\lim_{x\to ۲}(g(x)-f(x))$

۳) $\lim_{x\to ۲}(۳f(x)-۲)$

۴) $\lim_{x\to ۲}(۷g(x)-\frac{۱}{۲}f(x))$

۵) $\lim_{x\to ۲}\dfrac{(۱+f(x))g(x)}{g(x)+۲}$

۶) $\lim_{x\to ۲}(۳(x)-f(x))$

۷) $\lim_{x\to ۲}(x^۲g(x)-۲x)^{۱۰}$

۸) $\lim_{x\to ۲}(g(x)+\dfrac{۲}{f(x)})^۳$

۹) $\lim_{x\to ۲}(\frac{۱}{۲}f(x)^۲-g(x))$

۱۰) $\lim_{x\to ۲}(\sqrt{۵x-۱}+\dfrac{f(x)}{g(x)})$

۱۷ نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را درصورت وجود بیابید :

۱) $\lim_{x\to -۵} f(x)$

۲) $\lim_{x\to -۲} f(x)$

۳) $\lim_{x\to ۰} f(x)$

۴) $\lim_{x\to ۱} f(x)$

۵) $\lim_{x\to ۲} f(x)$

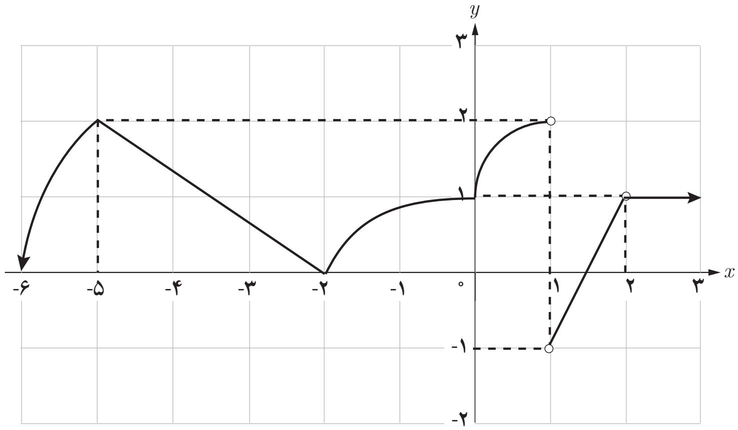
۶) $\lim_{x\to \pi} f(x)$

۷) $\lim_{x\to -۴} f(x)$

۸) $\lim_{x\to -۵}(\frac{x}{۵}-۱)^۲\times f(x)$

۹) $\lim_{x\to -۲}\dfrac{۳+۶f(x)}{۲x+۱}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^2+f(x)}$ ۱۱) $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x-(f(x))^2)$



۱۸ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

۱) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^4-x^3-5x^2+4)$

۲) $\lim\limits_{x\to 4}(1+\dfrac{x}{2})^2(x^2-6x)$

۳) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{5x-9}$

۴) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{2x+4}$

۵) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3+4x^2+2x}{4x+1}$

۶) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}[x]$

۷) $\lim\limits_{x\to 4}[x]$

۸) $\lim\limits_{x\to (\frac{1}{3})^-}\dfrac{|1-3x|}{3x-1}$

۹) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+3x}{[x]+1}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to 0}(x+3)[x]$

۱۱) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}(2\sin x+3)$

۱۲) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\tan x$

۱۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(1+\cot x)^2$

۱۵) $\lim\limits_{x\to \pi}x^2\sin x$

۱۶) $\lim\limits_{x\to \frac{-\pi}{6}}(4\sin x+\cos^2 x)$

۱۷) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$

۱۸) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4x-12}{4-x^2}$

۱۹) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲x^{۲}-x-۱۵}{۲x^{۲}-۲x-۱۲}$

۲۰) $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}\dfrac{x^{۴}-۳x^{۲}+۲}{x^{۳}-۲x}$

۲۱) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{(۳x^{۲}+۱)(x^{۲}-۱)}{x^{۳}+۱}$

۲۲) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\dfrac{۱۶x^{۴}-۱}{۸x^{۳}-۱}$

۲۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos x-\cos^{۲}x}{\sin^{۲}x}$

۲۴) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\dfrac{x^{۲}-۱}{|x-۱|}$

۲۵) $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)\quad,\quad f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x & x<\pi\\ ۲\sin^{۲}x & x>\pi\end{cases}$

۱۹ تابع $f(x)=[x]$ را درنظر بگیرید.

الف) نشان دهید تابع f در $x=۰$ حد ندارد.

ب) تابعی چون g مثال بزنید که در $x=۰$ حد داشته باشد ولی تابع fg در این نقطه فاقد حد باشد. (راهنمایی : از توابع ثابت غیرصفر استفاده کنید)

پ) تابعی چون g مثال بزنید که در $x=۰$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۰}(fg)(x)$ نیز موجود باشد. (راهنمایی : g را می‌توان تابع ثابت صفر درنظر گرفت)

۲۰ در هر مورد پیوستگی تابع f را در نقطهٔ داده شده بررسی کنید :

الف) $f(x)=\sqrt{۵-x}\quad,\quad a=۵$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}}{x+۴} & x\geq ۴\\ \dfrac{۱}{۲}x^{۲}-۶ & x<۴\end{cases}\quad,\quad a=۴$

پ) $f(x)=\begin{cases}[x] & x\leq ۱\\ x^{۲}-۱ & x>۱\end{cases}\quad,\quad a=۱$

ت) $f(x)=\begin{cases}x\cos x & x>\dfrac{\pi}{۲}\\ ۱-\sin x & x\leq\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}\quad,\quad a=\dfrac{\pi}{۲}$

۲۱ نمودار یک تابع رسم کنید که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

۲۲ نمودار یک تابع رسم کنید که در دو نقطهٔ صفر و ۱ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

۲۳ نمودار یک تابع رسم کنید که در دو نقطه ناپیوسته بوده و در یکی از آن نقاط پیوستگی راست و در دیگری پیوستگی چپ داشته باشد.

۲۴ در هر مورد، مقدار a را طوری بیابید که تابع f در نقطهٔ داده شده پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\le -1 \\ x^2+2a & x>-1 \end{cases} \quad , \quad x=-1$

ب) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-ax+5 & x\le 1 \\ x-2a & x>1 \end{cases} \quad , \quad x=1$

۲۵ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ داده شده پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} ax^2+2 & x<2 \\ x-4 & x=2 \\ \dfrac{x+1}{3}-b & x>2 \end{cases} \quad , \quad x=2$

ب) $f(x)=\begin{cases} 5x+a & x>1 \\ x^3-b & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x<1 \end{cases} \quad , \quad x=1$

۲۶ ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a، تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ در صفر پیوسته نخواهد بود.

۲۷ تابع $f(x)=\begin{cases} x+۵ & x\leq -۲ \\ x & -۲<x\leq ۰ \\ ۱-x^{۲} & x>۰ \end{cases}$ را درنظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نقاط ناپیوستگی تابع f را مشخص کنید.

پ) پیوستگی تابع f را روی بازه‌های $[-۱ ،-\infty)$ و $[۳ ،۰)$ و $[-۲ ،۰]$ بررسی کنید.

ت) سه بازه مثال بزنید که تابع f روی آنها پیوسته باشد.

فصل ۷

آمار و احتمال

اهداف کلی فصل

۱ درک احتمال شرطی و توانایی حل مسائل مربوط به آن

۲ درک استقلال و عدم استقلال دو پیشامد و حل مسائل مربوط به آن

۳ درک مفاهیم میانگین، میانه، چارک‌ها، دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات و محاسبهٔ آنها و استفاده از آنها در حل مسائل مربوطه

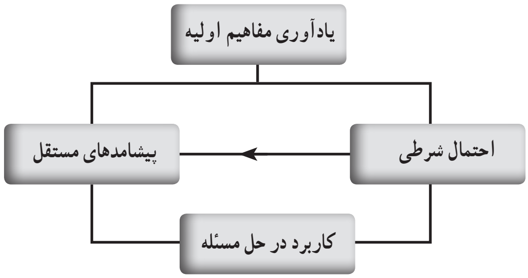
نگاه کلی به فصل

آموزش مفاهیم آمار و احتمال که از همان پایه‌های ابتدایی در کتاب‌های ریاضی مورد توجه قرار گرفته است، در فصل آخر این کتاب در قالب دو درس، یکی احتمال و یکی آمار، ادامه یافته است. در درس اول به بیان احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل پرداخته شده است. ابتدا احتمال شرطی آورده شده است. و با استفاده از پیش دانسته‌های دانش‌آموز و با توجیهی منطقی فرمول احتمال شرطی ارائه شده است. سپس با ارائه کار در کلاس وچند مثال سعی در بالا بردن تسلط دانش‌آموزان شده است. پس از آن با توجه به احتمال شرطی مفهوم پیشامدهای مستقل ارائه گردیده است. مطالعه مثال‌هایی که در کتاب آورده شده و دیگر مثال‌هایی از این دست برای بالا بردن فهم دانش‌آموزان از این مفهوم و تسلط آنها بر حل مسائل این موضوع الزامی است.

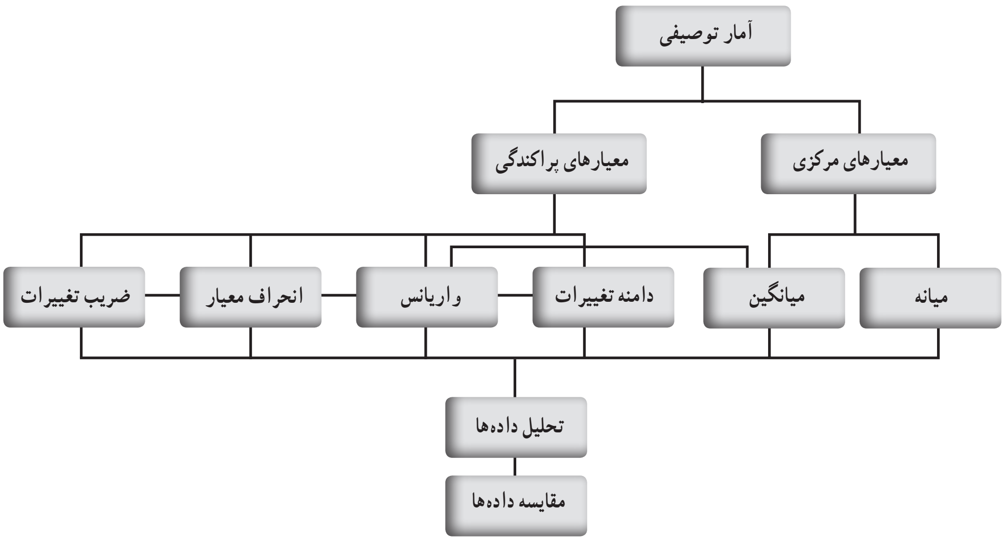
در درس دوم، معیارهای مرسومی شامل میانه و میانگین و معیارهای پراکندگی شامل دامنه تغییرات، واریانس انحراف معیار و ضریب تغییرات و چگونگی نحوه استفاده از این معیارها در تحلیل و مقایسه داده‌ها بیان شده است. دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با مفاهیم اولیه آمار مانند دسته‌بندی داده‌ها، جدول فراوانی، میانگین و نمودارهای مختلف آماری و انواع متغیرهای تصادفی آشنا شده‌اند.

در این درس، دانش آموزان با معیارهای مرکزی و پراکندگی به عنوان معرف جامعه در بررسی و مطالعه داده‌های آماری و میزان حساسیت معیارهای مذکور به تغییرات داده‌ها آشنا می‌شوند.

نقشه مفهومی



نقشه مفهومی بخش آمار



دانستنی‌هایی برای معلم

از زمان‌های دور انسان‌ها به شانس و اقبال در زندگی معتقد بوده‌اند، بازی‌های مبتنی بر شانس چه در عصر باستان و مدارک تاریخی و چه امروزه، حتی در دنیای کودکان قابل مشاهده است.

این روزها، هرگاه انتخاب یک مورد، انتخاب موارد دیگر را در یک رویداد تحت‌الشعاع قرار دهد و

ایجاد شبهه کند از شانس استفاده می شود. مثلاً در مسابقات فوتبال برای شروع بازی از پرتاب سکه استفاده می‌شود.

قرعه کشی نیز یکی دیگر از نمونه‌های انتخاب شانسی است که قدمت آن به روم باستان برمی‌گردد. هرساله قریب ۱۴ میلیون شهروند رومی در یک قرعه‌کشی به‌صورت رایگان شرکت می‌کردند و برنده مبلغ قابل توجهی می‌شوند. جالب است که بعضی از برندگان این قرعه‌کشی از طبقه ثروتمند جامعه بودند. در قرن شانزدهم در ایتالیا برای تعیین فردی که باید هزینه‌های دفاعی شهر را بپردازد در میان طبقه ثروتمند شهر، قرعه‌کشی انجام می‌شد. در برخی جوامع کهن، انتخاب همسر نیز به‌صورت شانسی انجام می‌شد که دست‌کم باعث حفظ تنوع ژنتیکی در میان افراد جامعه می‌شد.

در ادبیات فارسی نیز از شانس به عنوان بخت یاد شده است و دارای نمونه‌های بسیاری در اشعار و متون ادبی است. مثلاً

اگر به هر سر مویت دو صدهنر باشد	هنر به کار نیاید چو بخت بد باشد
از این بوالعجبتر حدیثی شنو	که بی‌بخت کوشش نیرزد دو جو
چندان که جهد بود دویدیم در طلب	کوشش چه سود چون نکند بخت یاوری
چه کند زورمند وارون بخت	بازوی بخت به که بازوی سخت
به رنج بردن بیهوده گنج نتوان یافت	که بخت راست فضیلت نه زور بازو را

با وجود اهمیت و تأثیر شانس در زندگی بشر، بسیاری از متفکران تا قبل از عصر علوم جدید (علوم مبتنی در تجربه)، وجود آن را رد می‌کردند. عدم هماهنگی شانس با موضوعاتی نظیر اراده آزاد،مسئولیت و ... فیلسوفان را از رسیدن به یک بیان قطعی در مورد شانس محروم کرد. دیدگاه منفی فیلسوفان نسبت به شانس، بیشتر حاصل علمی بود که از طریق نظری و نه تجربی به آن دست یافته بودند. به این ترتیب آنها برای آزمایش‌های تجربی ارزشی قائل نبودند.

دو مواور تعریف‌های دقیق و درستی از استقلال پیشامدها، و احتمال شرطی ارائه کرد. لاپلاس کارهای برنولی، دو مونمور و دومواور را توسعه داد. مقاله او با عنوان تئوری تحلیلی احتمال یکی از کارهای مهم تا قرن بیستم به‌شمار می‌رود.

از آن‌جا که قرن نوزدهم مصادف با تغییر ساختار اجتماعی و اقتصادی و تحول علوم تجربی است، بیشتر کارهایی که تا آن زمان در زمینه ریاضیات و به‌ویژه در احتمال انجام شده بود، کاربرد یافت، قرن بیستم را دوران احتمال مدرن می‌دانند. کولموگروف احتمال را براساس اصول موضوعی و در قالب تئوری اندازه بنا نهاد کتاب مبانی تئوری احتمال او در آلمان به سال ۱۹۳۳ منتشر شد و پایه و بنای تئوری احتمال مدرن قرار گرفت.

نتیجه‌ای که تئوری احتمال را تاحد زیادی از قیود عوامل تجربی رهانید «قضیه قانون اعداد بزرگ» است. به موجب این قضیه، احتمالات موضوعی را دست‌کم برای آزمایش‌هایی که به‌طور مستقل و نامحدود قابل تکرارند، به کمک مفهوم حد می‌توان محاسبه کرد. این قضیه اساسی ابتدا توسط امیل بورل برای آزمایش‌های برنولی بیان و اثبات شد و سپس کولموگروف آن را برای رشته هایی از متغیرهای تصادفی مستقل تعمیم داد.

تصویر عنوانی

یکی از راهکارهای عملی، جهت گسترش، بازسازی و عنوان در عرصه‌های مختلف صنعتی، کشاورزی و خدماتی برنامه‌ریزی درست و مدیریت بهینه و صحیح منابع در بخش‌های مذکور است. مثلاً در بخش کشاورزی به منظور افزایش سطح تولید و بهره‌وری، بهینه‌سازی منابع بسیار حائز اهمیت است. موضوع پیش‌بینی بارندگی‌های آینده براساس آمار بارندگی‌های ثبت شده قبلی و فعلی، می‌تواند نقش مهمی در این مدیریت داشته باشد. زیرا بارندگی، نسبت به سایر عوامل اقلیمی نقش تعیین‌کننده‌تری در تولیدات کشاورزی دارد.

اثر سیستم‌های مؤثر بر بارندگی و دوره‌های خشک ممکن است برای چند روز روی یک منطقه تداوم یابد. از این‌رو تعیین احتمال رخدادهای متوالی مانند یک روز تر پس از یک روز تر دیگه، یک روز خشک پس از یک روز تر، یک روز خشک پس از یک روز خشک دیگر و یک روز تر پس از یک روز خشک می‌تواند مفید باشد. در عین حال، چون توده‌های هوای مستقر روی یک اقلیم ممکن است چندهزار کیلومتر را دربرگیرد و سرعت حرکت کندی داشته باشند، اگر یک روز بارانی باشد احتمال آنکه فردای آن روز نیز بارانی باشد زیاد است. در نتیجه وقوع روزهای بارانی و روزهای خشک به بارانی یا خشک بودن روز قبل وابسته است در نتیجه در بررسی احتمال وقوع یا عدم وقوع روزهای بارانی یا خشک با پیشامدهای وابسته سروکار داریم که به ر وزهای قبلی خود وابسته‌اند. بنابراین یکی از مسائلی که در هواشناسی با آن روبه‌رو هستیم، این است که پیشامدهای متوالی با چه احتمالی درپی یکدیگر ظاهر می شوند و در طولانی مدت سهم هر یک از آنها روی اقلیم مورد بررسی چه میزان است.

درس اول

احتمال شرطی

اهداف درس

- آشنایی با احتمال شرطی و کاربرد آن در حل مسائل
- آشنایی با متغیرهای مستقل و وابسته
- درک رابطه بین متغیرهای مستقل و کاربرد آن در حل مسائل مربوطه

پیش‌نیازها

۱ فضای نمونه و پیشامدهای تصادفی را بشناسد.

۲ با احتمال وقوع یک پیشامد در یک فضای نمونه آشنا باشد.

۳ قوانین احتمال (اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم) را بشناسد.

۴ با پیشامدهای ناسازگار آشنا باشد.

روش تدریس

این درس با یادآوری مفاهیم اولیه مبحث احتمال و تلخیص مواردی که دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اند آغاز می شود. لازم به ذکر است که مفاهیم اشاره شده در کادر ابتدای درس، خلاصه‌ای از مفاهیمی است که در پایه‌های هشتم، نهم و دهم در برنامه درسی دانش‌آموزان قرار گرفته است. در بیان احتمال شرطی و ارائه فرمول آن با توجه به آنچه دانش آموز از احتمال می‌داند و با توجه به فرمول احتمال سعی شده است نوعی توجیح منطقی (و نه اثبات کامل ریاضی) ارائه گردد که به پذیرش این رابطه توسط ذهن دانش‌آموز کمک نماید. از نظر توالی مطالب، باید توجه داشت که در بسیاری از کتاب‌های احتمال ابتدا

مفهوم استقلال دو پیشامد بیان شده و سپس احتمال شرطی ارائه می‌شود. ولی از آنجا که رویکرد کتاب‌های جدید التألیف بر ارائه کاربردی و شهودی مطالب برای دانش‌آموزان می‌باشد. در این فصل، برنامه آموزشی مبتنی بر ارائه احتمال شرطی و سپس با استفاده از آن ارائه تعریف استقلال دو پیشامد است.

از آنجا که دانش‌آموزانی که در رشته تجربی تحصیل می‌کنند احتمال دارد در رشته‌هایی ادامه تحصیل دهند که با محاسبه احتمال پیشامدهای مستقل زیاد سروکار داشته باشند، یادگیری این مفهوم اهمیت خاصی خواهد داشت. مطالعه مثال‌های ارائه شده در ادامه درس تسلط دانش‌آموزان را بیشتر نموده و مطالب خواندنی قرار داده شده به منظور مطالعه بیشتر علاقه‌مندان است و می‌تواند برای دانش آموزان رشته تجربی مفید باشد.

گاهی وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع به پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال اینکه قیمت جهانی نفت در ماه آینده افزایش یابد با دانستن اینکه یکی از کشورهای اوپک درگیر جنگ یاناامنی است، متفاوت خواهد بود از وقتی اطلاعی در این مورد نداریم.

آنچه تاکنون دانش‌آموزان در مورد مسائل احتمال آموخته‌اند، دو نوع مسئله شمارشی و تقسیم «تعداد حالات مطلوب» به «تعداد حالات ممکن» است. این تصویر مفید ولی محدود است. با ارائه مسائل احتمال شرطی و استقلال دید دانش‌آموزان نسبت به مسائل احتمال کمی گسترده‌تر خواهد شد.

در احتمال شرطی با محدود کردن تعداد حالت‌های ممکن از مجموعه فضای نمونه S بر یک مجموعه از آن مانند B و محدود کردن تعداد حالت‌های مطلوب از مجموعه A به مجموعه $A\cap B$، رابطه $P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=$ حاصل می‌شود. در این قسمت اثبات دقیق ریاضی به هیچ عنوان مدنظر نیست و تنها توضیح منطقی و درک شهودی رابطه $P(A|B)$ موردنظر بوده است.

منظور از احتمال A به شرط B، احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن است که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B)\neq ۰$$

کار در کلاس صفحه ۱۴۵

با هدف آشنا کردن دانش‌آموزان با جزئیات رابطه احتمال شرطی از جمله نحوه خلاصه‌نویسی چنین مسائلی و نحوه استفاده از احتمال شرطی درحد آنها آورده شده است.

در یک مسابقهٔ اتومبیل رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار

نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل :

A : پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B : احتمال رسیدن به خط پایان

$$\begin{cases} P(A) = ۰/۸ \\ P(A \cap B) = ۰/۷ \end{cases}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۰/۷}{۰/۸} = \frac{۷}{۸}$$

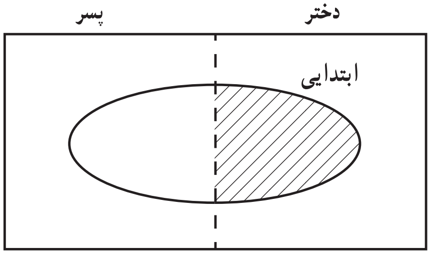
مثال‌های صفحه ۱۴۶ با هدف آشنایی بیشتر دانش‌آموز با مبحث احتمال شرطی آورده شده و به‌طور کامل حل شده‌اند.

توصیه‌های آموزشی

یکی از استراتژی‌های حل مسائل شرطی، کاهش فضای نمونه است. یعنی برای محاسبه احتمال A به شرط B، تعداد اعضایِ فضای نمونه S را به تعداد اعضای مجموعه B کاهش می‌دهیم. توصیه می‌شود در مثال‌های اولیه، نمودار ون مجموعه پیشامدهای A و B رسم شود این امر به دانش‌آموز کمک می‌کند تا درک بهتری از مفهوم احتمال شرطی یافته و آن را به عنوان موضوعی مستقل از آنچه تا امروز در مورد مسائل احتمال آموخته، نبیند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال

فرض کنید در مدارس یک شهر ۱۵۰۰ دانش‌آموز تحصیل می‌کنند که ۸۰۰ تای آنها دختر و بقیه پسر هستند. همچنین ۶۰۰ نفر از آنها که ۳۲۰ نفر دختر و بقیه پسر هستند در مقطع ابتدایی تحصیل می‌کنند. اگر از میان دانش‌آموزان این شهر یکی را به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم که این دانش‌آموز از مقطع ابتدایی انتخاب شده است با چه احتمالی این فرد دختر است؟



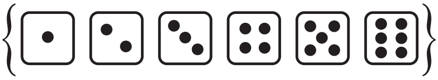
فضای نمونه = (دانش آموزان شهر)

$A =$ پیشامد دختر بودن

$B =$ پیشامد مقطع ابتدایی بودن

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۳۲\cancel{۰}}{۶۰\cancel{۰}} = \frac{۸}{۱۵}$$

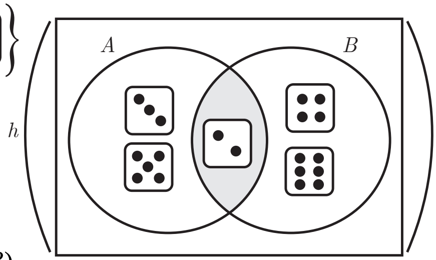
مثال : تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر بدانیم عدد رو شده زوج است، احتمال آنکه اول آمده باشد چقدر است؟

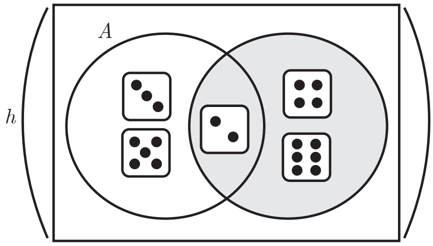


$A =$ پیشامد اول بودن

$B =$ پیشامد زوج بودن

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\text{[figure]}}{\text{[figure]}} = \frac{۱}{۳}$$



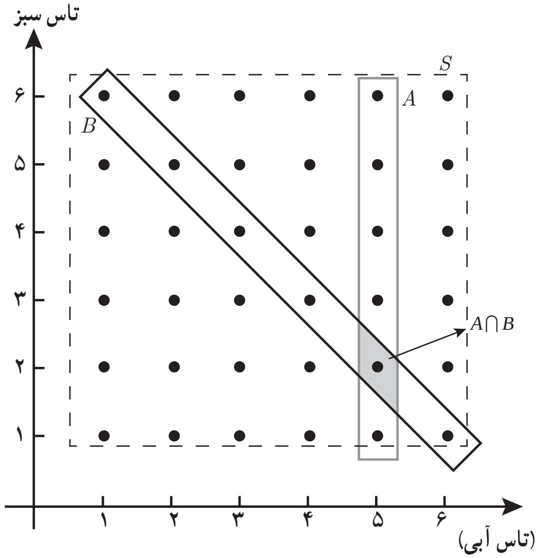


مثال : دو تاس آبی و قرمز را می‌اندازیم، اگر مجموع دو تاس ۷ باشد، احتمال اینکه تاسِ آبی ۵ باشد چقدر است؟

$A =$ پیشامد آنکه تاس آبی ۵ باشد

$B =$ پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۱}{۶}$$



دو پیشامد مستقل

در این قسمت پیشامد مستقل به کمک تعریف احتمال شرطی بیان شده است. در صفحه ۱۴۶ آمده است «پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیرنگذارد» دقت کنیم که در اینجا دوطرفه بودن مفهوم استقلال دو پیشامد ذکر نشده است و بنابه این تعریف تنها استقلال پیشامد A از B بیان شده است. یعنی می‌دانیم وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیری ندارد ولی در مورد این‌که وقوع A هم بر احتمال وقوع B تأثیر نمی‌گذارد اطلاعی در دست نیست. پس از آن با استفاده از مفهوم احتمال شرطی و توجه به این مسئله که وقوع B اثری بر احتمال وقوع A ندارد و نتیجه $P(A|B)=P(A)$ حاصل می‌شود.

در کادر بعدی مفهوم مستقل بودن به‌صورت $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ بیان شده است که حاصل دو رابطه $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ و $P(A|B)=P(A)$ است. اکنون با استفاده از خاصیت جابه‌جایی عمل ضریب دو مجموعه اعداد حقیقی و عمل اشتراک دو مجموعه مستقل بودن B از A نیز نتیجه می‌شود و استقلال دو پیشامد به‌عنوان مفهومی دوطرفه ارائه می‌گردد.

مثال‌های حل شده صفحات ۱۴۷ ــ ۱۴۹ به‌منظور تسلط بیشتر دانش‌آموزان بر این مبحث ارائه گردیده است.

توصیه‌های آموزشی

اگر $P(A)>0$ ، $P(B)$ ، شرط لازم و نه کافی برای استقلال آن است که $A\cap B=\varnothing$ زیرا در غیراین‌صورت $P(A\cap B)=0$ و بنابراین تساوی $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ برقرار نیست.

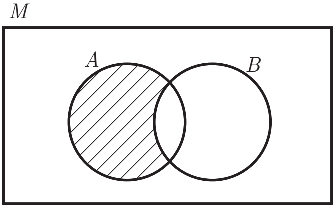
می‌توانید این مطلب را با یک مثال برای دانش‌آموزان مطرح کنید.

اغلب دانش‌آموزان بین دو مفهوم ناسازگاری و استقلال دو پیشامد تمایز قائل نمی‌شوند. به‌ویژه آنکه این دو مفهوم درحال حاضر با تأخیر زمانی یکسان فراگرفته می‌شود. همکاران محترم می‌توانند با توجه به زمان تعریف این دو مفهوم در مسیر آموزش احتمال در برنامه درسی و یادآوری هردو تعریف، مطلب را برای دانش‌آموزان به روشنی توضیح دهند.

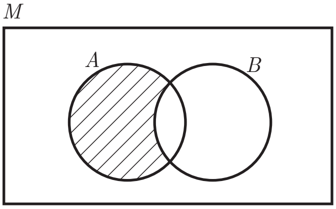
مفهوم ناسازگاری قبل از تعریف احتمال بیان می‌شود ولی استقلال دو پیشامد به کمک احتمال بیان می‌گردد.

درواقع دو پیشامد ناسازگار اشتراکشان برابر تهی است یعنی $A\cap B=\varnothing$ و بنابراین $P(A\cap B)=0$ در حالی‌که اگر A و B دو پیشامد مستقل با احتمال‌های غیرصفر باشند همان‌گونه که گفته شد باید $P(A\cap B)\neq 0$.

از آنجا که دانش‌آموزان در سال‌های قبل با نمودار ون آشنا هستند می‌توان تساوی رابطه $A-B=A\bigcap B'$ را با توجه به نمودار ون برای آنها اثبات کرده و پس از آن در حل این سؤال استفاده کرد.



A-B

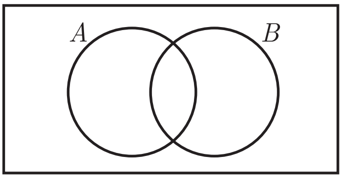


$A\bigcap B'$

تمرین ۳ـــ فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل هستند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.



حل

طبق فرض A و B مستقل و $P(A\bigcap B)=P(A).P(B)$.

الف)

$$\begin{aligned}P(A'\bigcap B)&=P(B-A)=P(B)-P(A\bigcap B)\\&=P(B)-P(A)P(B)\\&=P(B)(-P(A))\\&=P(B).P(A')\end{aligned}$$

ب) طبق (الف) اگر دو پیشامد مستقل باشند هر یک از آنها با متمم دیگری هم مستقل است بنابراین اگر A و B مستقل باشند، در این صورت A و B' مستقل‌اند و از این می‌توان نتیجه گرفت A' و B' نیز مستقل‌اند.

تمرین ۴ـــ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

حل :

$P(A) = ۰/۷ \quad , \quad P(B) = ۰/۸$

الف) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{۵۶}{۱۰۰}$

طبق قسمت ب تمرین ۳ اگر A و B مستقل باشند. آنگاه A' و B' نیز مستقل هستند.

ب) $P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} = \frac{۶}{۱۰۰}$

پ) $P(A \cap B') = P(A)P(B') = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱۴}{۱۰۰}$

ت) $P(A \cap B') + P(A' \cap B) = \frac{۱۴}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{۳۸}{۱۰۰}$

ث) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۱۰} + \frac{۸}{۱۰} - \frac{۵۶}{۱۰۰} = \frac{۹۴}{۱۰۰}$

تمرین ۵ــ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰/۶۲۵ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

$P(A) = x \quad , \quad P(B) = ۲x \quad , \quad P(A \cup B) = \frac{۶۲۵}{۱۰۰۰}$

$P(B) = ?$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = x + ۲x - ۲x^۲$

$$\Rightarrow -۲x^۲ + ۳x = \frac{۶۲۵}{۱۰۰۰} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{۵}{۴} \text{ غ ق ق} \\ x_2 = \frac{۱}{۴} \rightarrow P(B) = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

تمرین ۶ــ دو تاس باهم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هردو عدد روشده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد روشده برابر ۸ است را به‌دست آورید.

حل :

$P(A|B) = ? \quad , \quad P(A) = \frac{۹}{۳۶} \quad , \quad P(B) = \frac{۵}{۳۶}$

A : پیشامد هردو زوج

B : پیشامد مجموع ۸

$$\begin{cases} A\cap B=\{(۲,۶),(۴,۴),(۶,۲)\} \\ P(A\cap B)=\frac{۳}{۳۶} \end{cases}$$

$$P(A|B)=\frac{\frac{۳}{۳۶}}{\frac{۵}{۳۶}}=\frac{۳}{۵}$$

تمرین ۷ــ ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

حل :

$$P(A)=\frac{۱}{۵}\ ,\ P(B)=\frac{۱}{۷}\ ,\ P(B|A)=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۱}{۴}=\frac{P(B\cap A)}{\frac{۱}{۵}}\rightarrow P(B\cap A)=\frac{۱}{۲۰}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۲۰}$$

$$=\frac{۲۸+۲۰-۷}{۱۴۰}$$

$$=\frac{۳۸}{۱۴۰}=\frac{۱۹}{۷۰}$$

درس دوم

آمار توصیفی

اهداف درس

- ❑ آشنایی با معیارهای گرایش به مرکز و محاسبه آنها
- ❑ توانایی بهره‌گیری از معیار گرایش به مرکز مناسب در تحلیل داده‌ها با تمرکز برشناخت ویژگی‌های آنها
- ❑ آشنایی با معیارهای پراکندگی و محاسبه آنها
- ❑ توانایی بهره‌گیری از معیارهای پراکندگی مناسب در تحلیل داده‌ها تمرکز برشناخت ویژگی‌های آنها
- ❑ درک اثر تغییر مقدار عددی داده‌ها روی شاخص‌های گرایش به مرکز و پراکندگی

پیش‌نیازها

- ❑ با متغیرهای تصادفی آشنا باشد.
- ❑ جامعه و نمونه را بشناسد

روش تدریس

یکی از اهداف آمار، خلاصه‌سازی داده‌ها جهت بهره‌مندی از آنها است. انتخاب یک یا چند عدد به نمایندگی از سایر داده‌ها، اطلاعات لازم و کاربردی را در اختیار ذی‌نفعان قرار خواهد داد. بدیهی است که در انتخاب این نمایندگان، نهایت دقت را باید به‌کار برد. زیرا همه استنباط‌ها از داده‌ها و همه برنامه‌ریزی‌ها براساس این نمایندگان انجام خواهد گرفت.

معیارهای گرایش به مرکز

معیارهایی هستند که محل تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهند :

میانگین به عنوان پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز شناخته شده است. این معیار به علت برخورداری از ویژگی‌های خوب به‌عنوان یک برآورد از میانگین جامعه، در قضایای بسیاری به‌کار گرفته شده است. لذا میانگین نسبت به میانه از کاربرد بیشتری برخوردار است. اما همان‌طور که در متن کتاب توضیح داده شده، گاه استفاده از میانگین درست نیست و از میانه به عنوان معیار گرایش به مرکز استفاده می‌کنیم.

قوانین مربوط به میانگین

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{N}$$

البته در کتاب از آوردن علامت Σ خودداری شده است.

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i - N\overline{X} = N\overline{X} - N\overline{X} = 0$$

فعالیت صفحه ۱۵۳

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد :

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۶۲

نحوهٔ محاسبه میانگین

۱ محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد :

۲ سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد :

حل :

$$\overline{X} = \frac{62+55+57+61+55}{5} = 58$$

هدف کار در کلاس صفحه ۱۵۴، بررسی و مشاهده میزان حساسیت میانگین نسبت به تغییرات همه داده‌ها است. هر تبدیلی که روی همه داده‌ها انجام گیرد، روی میانگین هم اعمال خواهد شد. قبل از کار در کلاس دو سؤال در مورد تغییرات داده‌ها و اثر آن روی میانگین پرسیده شده است.

همکاران محترم می‌توانند با مثالی ساده و تغییرات روی آن، از دانش‌آموزان بخواهند پاسخ این سؤالات را به‌دست آورند و یا به‌صورت کلی مطلب را ثابت کنند هرچند اثبات ریاضی این سؤالات مدنظر نبوده است و همکاران با توجه به سطح کلاس می‌توانند با چند مثال و یا اثبات ریاضی بنابه صلاحدید مطلب را نتیجه بگیرند.

کار در کلاس صفحه ۱۵۴

۱ در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟

با توجه به پاسخ و نتایج گرفته شده از سؤالات قبل از این کار در کلاس :

جرم دوستان محمد در فعالیت قبل برحسب کیلوگرم است. در تبدیل واحد کیلوگرم به گرم، همه داده‌ها در ۱۰۰۰ ضرب می شوند. پس میانگین هم در ۱۰۰۰ ضرب شده و برابر ۵۸۰۰۰ خواهد بود.

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، میانگین دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت است؟ (راهنمایی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$)

مانند سؤال قبل چون در تبدیل واحد درجه سانتی‌گراد به فارنهایت همه داده ها در $\frac{۹}{۵}$ ضرب و با ۳۲ جمع می‌شوند پس میانگین داده‌های تبدیل شده برابر $۳۲+۲۸\times\frac{۹}{۵}$ یعنی ۸۲/۴ است.

توصیه‌های آموزشی

همکاران محترم توجه داشته باشند که دانش‌آموزان با مفهوم علم آمار، تعاریف مربوط به آن، مرتب کردن داده‌ها : دسته‌بندی داده‌ها، جدول فراوانی، یافتن میانگین داده‌ها از روی جدول فراوانی و انواع نمودارهای آماری در دوره متوسطه اول آشنا هستند. توصیه می شود فصل ۸ از کتاب ریاضی پایه هشتم مطالعه شود یا از دانش‌آموزان بخواهید این فصل را قبل از تدریس مطالعه و در کلاس ارائه دهند.

میانه

میانه داده‌ای است که نصف داده ها از آن بیشتر و نصف داده ها از آن کمتر است. به‌صورت دقیق‌تر، میانه عبارت است از مقداری که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن باهم برابرند. فلوچارت صفحه ۱۵۴ مراحل یافتن میانه را به‌خوبی بیان می‌کند.

جارک‌ها که در انتهای این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند، تعمیم مفهوم میانه هستند.

از آنجا که میانگین تحت تأثیر داده‌های دور افتاده است، در صورت وجود داده‌های دورافتاده، از میانه استفاده می‌شود برای درک بهتر این مطلب، می‌توان معلمی را مثال زد که نمره مستمر دانش‌آموزان را براساس میانگین نمرات آنها در طول یک ترم محاسبه می‌کند. فرض کنید در این میان دانش‌آموزی دارای نمرات ۱۷/۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۶/۵ و ۱۶ و ۵ باشد. به هر دلیلی دانش‌آموز یک نمره خیلی ضعیف دارد ولی عملکرد او در سایر موارد کاملاً قابل قبول است میانگین نمرات این دانش‌آموز برابر ۱۴ است که نسبت به نمرات او در طول ترم ناعادلانه به‌نظر می‌رسد. از این‌رو برای از بین بردن اثر نمره دور افتاده ۵ بهتر است از میانه استفاده شود.

مثال و کار در کلاس صفحه ۱۵۵ در راستای درک بهتر دانش‌آموز از مفهوم میانه و کاربرد آن است.

کار در کلاس صفحه ۱۵۵

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، قبل از یک مسابقهٔ دو است.

۸۶ ۹۷ ۹۲ ۸۹ ۱۰۱ ۹۸ ۹۸ ۱۰۵ ۷۵ ۸۲ ۹۱ ۱۰۰

ــ میانهٔ داده‌ها را مشخص کنید.

۱۰۵ ، ۱۰۱ ، ۱۰۰ ، ۹۸ ، ۹۸ ، ۹۷ ، ۹۲ ، ۹۱ ، ۸۹ ، ۸۶ ، ۸۲ ، ۷۵

$$\frac{۹۲+۹۷}{۲}=۹۴/۵$$

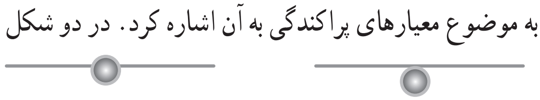
ــ میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

$$\overline{X}=\frac{۱۱۱۴}{۱۲}\simeq ۹۲/۸۳$$

توصیه‌های آموزشی

توجه دانش‌آموزان را به اهمیت بحث میانگین و میانه در تحلیل داده‌ها جلب کنید. مثلاً اینکه اگر میانه نمره ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس ۱۷ باشد، یعنی ٪۵۰ دانش‌آموزان نمره ۱۷ و بالاتر گرفته‌اند و این به معنای رقابت شدید در آن کلاس است.

تعبیر میانگین در فیزیک، مرکز ثقل است که می‌توان برای درک بهتر مفهوم میانگین و اهمیت معیارهای پراکندگی قبل از ورود به موضوع معیارهای پراکندگی به آن اشاره کرد. در دو شکل زیر :



(۲) (۱)

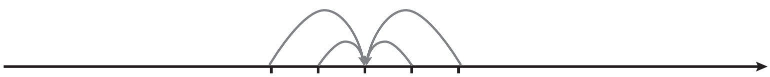
شکل اول از تعادل بیشتر برخوردار است ولی شکل دوم تعادل کمتری دارد. می‌توان بلندی میله‌ها را در دوطرف شکل به پراکندگی بیشتر داده‌ها نسبت داد.

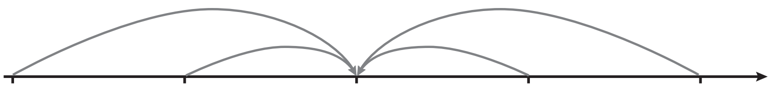
تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی‌تواند اطلاعات کاملی از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد. فعالیت صفحه ۱۵۶ به‌منظور نشان دادن همین موضوع طرح شده است.

فعالیت صفحه ۱۵۶

نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است:

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰





الف) میانهٔ نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

میانه کلاس A = ۱۰   میانه کلاس B = ۱۰

ب) میانگین نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

$\overline{X}_A = 10 \quad , \quad \overline{X}_B = 10$

پ) به‌نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟ از آنجا که میانه و میانگین داده‌ها در هر دو کلاس یکسان است، در این سؤال معیارهای گرایش به مرکز اطلاعات چندانی برای مقایسه وضعیت دو کلاس به دست نمی‌دهد و معلم نمی‌تواند با این اطلاعات، کلاسی را بر کلاس دیگر ترجیح دهد ولی این سؤال برای توجه دادن دانش‌آموزان به مهم بودن معیارهای مربوط به پراکندگی داده‌ها مطرح شده و لذا بحث بر تفاوت پراکندگی داده‌ها و نتایج آن مدنظر است.

معیارهای پراکندگی

تحلیل داده‌ها با استفاده از معیارهای گرایش به مرکز و بدون در دست داشتن معیارهای پراکندگی عملاً غیرممکن است.

دامنه تغییرات به عنوان اولین و ساده‌ترین معیار پراکندگی، دارای اهمیت است. اینکه تغییرات داده‌ها چگونه دامنه تغییرات و سایر معیارهای پراکندگی را تحت تأثیر قرار می‌دهد از مواردی است که دانش‌آموز باید به‌خوبی با آن آشنا شود. حسن دامنه تغییرات در سادگی محاسبه و ایراد آن در این است که تنها با دو داده بزرگ و کوچک سروکار دارد. فعالیت صفحه ۱۵۶ و همچنین مثال آورده شده در همان صفحه به معرفی دامنه تغییرات، حسن و ایراد استفاده از آن می‌پردازد.

هرچند که پراکندگی زیاد به معنای عدم تعادل داده‌هاست و مثلاً پراکندگی زیاد در درآمدهای افراد یک جامعه، نشان‌دهنده بیماری اقتصادی است. اما در برخی موارد پراکندگی زیاد مفید و حتی لازم است.

فرض کنید در یک آزمون استخدامی ۹۰ درصد داوطلبان نمره کامل گرفته باشند. این امر نشان می‌دهد که آزمون نتوانسته است مقایسه درستی بین داوطلبین انجام دهد و شایسته‌ترین‌ها را برگزیند.

کار در کلاس صفحه ۱۵۷ ورود به بحث واریانس و اهمیت این معیار در میان معیارهای پراکندگی است.

کار در کلاس صفحه ۱۵۷

معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند، گزارش کنند.

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

۱ ۴ ۱۴ ۱۲ ۹ ۸ ۱۵

دامنه تغییرات: ۱۴ = ۱ − ۱۵

ب) دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنهٔ تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

دامنه تغییرات : ۱۴ = ۱ − ۱۵

پ) از مقایسهٔ پاسخ الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ از میان همه داده‌ها، دامنه تغییرات تنها با دو داده، یعنی بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده سروکار دارد و تغییرات روی داده‌های بین این دو داده، تأثیری روی دامنه تغییرات ندارد.

واریانس، یکی از مهم‌ترین پارامترهای علم آمار که برابر با میانگین مربع انحرافات از میانگین داده‌هاست. واریانس جامعه را با δ^2 نشان می‌دهیم. لازم است تا دانش‌آموز نقش واریانس را به‌عنوان معیار تکمیل کننده میانگین در بررسی جامعه درک کند. واریانس به دلیل درگیری تمام داده‌ها در محاسبه آن، یکی از معیارهای مهم پراکندگی به‌شمار می‌رود و واحد آن برابر توان دوم واحد دادهٔ موردنظر است.

لزوم مجذورگیری در فرمول واریانس با اشاره به این مطلب که مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است در صفحهٔ ۱۵۸ به‌طور کامل توضیح داده شده است.

فعالیت صفحه ۱۵۷و ادامه آن در صفحه ۱۵۸ دانش‌آموز را برای رسیدن به فرمول واریانس راهنمایی می‌کند. در اینجا تحلیل نتیجه حاصل بسیار مهم است و باید روی آن تأکید شود. اینکه واریانس بزرگ به چه معناست و واریانس کوچک به چه معنا و اساساً کاربرد واریانس در مقایسه دو دسته داده با میانگین یکسان، به‌خوبی باید توسط دانش‌آموزان درک شود.

فعالیت صفحه ۱۵۷

الف) در ادامهٔ فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های روبه‌رو محاسبه کنید.

کلاس B	
y_i	$(y_i - \overline{Y})$
۰	۱۰-
۵	۵-
۱۰	۰
۱۵	۵
۲۰	۱۰

کلاس A	
x_i	$(x_i - \overline{X})$
۸	۲-
۹	۱-
۱۰	۰
۱۱	۱
۱۲	۲

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید. در هر دو حالت مجموع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر است.

الف) مجذور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه کنید.

کلاس B		
y_i	$(y_i-\overline{Y})$	$(y_i-\overline{Y})^2$
۰	۱۰−	۱۰۰
۵	۵−	۲۵
۱۰	۰	۰
۱۵	۵	۲۵
۲۰	۱۰	۱۰۰

کلاس A		
x_i	$(x_i-\overline{X})$	$(x_i-\overline{X})^2$
۸	۲−	۴
۹	۱−	۱
۱۰	۰	۰
۱۱	۱	۱
۱۲	۲	۴

ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$(8-10)^2+\dots+(12-10)^2=10$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$(0-10)^2+\dots+(20-10)^2=250$

پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$\frac{(8-10)^2+\dots+(12-10)^2}{5}=\frac{10}{5}=2$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$\frac{(0-10)^2+\dots+(20-10)^2}{5}=\frac{250}{5}=50$

کار در کلاس صفحه ۱۵۹

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در «کار در کلاس» قبل، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

واریانس	دامنه تغییرات	تعداد کتاب‌های مطالعه شده توسط هر دانش‌آموز
۲۰	۱۴	۱۵ ۸ ۸ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱
$\sigma \simeq$ ۲۲/۹۸	۱۴	۱۵ ۸ ۸ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱ ۵ ۱۱

همان‌طور که در این «کار در کلاس» دیده می شود، واریانس برخلاف دامنهٔ تغییرات با تغییر تعداد و مقادیر داده‌ها تغییر می‌کند.

کار در کلاس‌های صفحه ۱۵۹ به بیان ویژگی‌های واریانس و مزیت آن نسبت به دامنه تغییرات می‌پردازد. این ویژگی، حساسیت واریانس به تعداد داده‌ها و مقدار داده ها را نشان می‌دهد.

ویژگی‌های واریانس

اگر هریک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد. چرا؟

اگر هریک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

در پاسخ به این سؤالات، نیازی به اثبات ریاضی نیست و همکاران با چند مثال عددی می‌توانند ذهن دانش‌آموز را برای درک منطقی نتیجه موردنظر و پاسخ این سؤالات آماده کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۵۹

در سؤال اول، انتظار می‌رود دانش‌آموزان از اطلاعات فعالیت صفحه ۱۵۳ استفاده کرده و واریانس داده‌ها را بیابند. سپس تغییرات داده‌ها را با توجه به نتایج سؤالات مطرح شده قبل از کار در کلاس، بیان نمایند.

۱ در اولین فعالیت، واریانس جرم دوستان محمد چند گرم به توان دو است؟

(واریانس داده‌های قبلی برحسب کیلوگرم) $\times 10^{6}$ = واریانس داده‌های جدید برحسب گرم

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر واریانس دمای هوا ۶ درجه سانتی‌گراد به توان دو باشد، واریانس دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت به توان دو است؟ (راهنمایی : $F = \frac{9}{5}C + 32$)

$$\delta_C^2 = 6 \quad , \quad \delta_F^2 = \frac{81}{25}\delta_C^2 \Rightarrow \delta_F^2 = \frac{81}{25}\times 6 = \frac{486}{25} = 19/44F^2$$

از آنجا که در محاسبه واریانس از میانگین مجذور اختلاف از میانگین داده‌ها استفاده می‌شود، این معیار، پراکندگی داده‌ها را حول میانگین بیشتر از حد انتظار نشان می‌دهد به همین دلیل از واریانس جذر گرفته می‌شود تا معیار بهتری برای بیان پراکندگی داده ها حول میانگین باشد، جذر واریانس را **انحراف معیار** می‌نامند و واحد آن برابر واحد داده‌های مورد بررسی است.

اگر داده‌های مربوط به یک کمیت در دو جامعه آماری با واحدهای متفاوت یا ناشناخته بیان شده باشد، برای مقایسه پراکندگی داده‌ها در دو جامعه از ضریب تغییرات استفاده می‌شود. همچنین ضریب تغییرات برای مقایسه دو جامعه که در مورد یک کمیت میانگین یکسانی ندارند مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ضریب تغییرات را با CV نشان می‌دهند و عبارت است از نسبت انحراف معیار به میانگین ضریب تغییرات به‌عنوان پراکندگی درون واحد مشهور است در صفحات ۱۵۹ و ۱۶۰ کتاب، نحوه محاسبه انحراف معیار و ضریب تغییرات به روشنی توضیح داده شده است.

از ضریب تغییرات تنها زمانی که همه داده‌ها مثبت باشد، استفاده می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۱۶۰

دمای هوای یک هفتهٔ اسفند مشهد و کیش، به ترتیب فارنهایت و سانتی‌گراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کلام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است (ضریب تغییرات کمتری دارد)؟

جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دو شنبه	یکشنبه	شنبه	
۳۷	۳۷	۳۹	۴۱	۴۹	۵۳	۵۰	مشهد (فارنهایت)
۲۱	۲۲	۲۲	۲۳	۲۴	۲۶	۲۷	کیش (سانتی‌گراد)

$\overline{X}_{\text{کیش}} \simeq ۲۳/۵۷$

$\delta^۲_{\text{کیش}} \simeq \frac{۲۹/۷۱}{۷} = ۴/۲۴$

$\delta_{\text{کیش}} \simeq ۲/۰۵$

$cv_{\text{کیش}} = ۰/۰۸$

$\overline{X}_{\text{مشهد}} \simeq ۴۳/۷۱$

$\delta^۲_{\text{مشهد}} \simeq \frac{۲۷۳/۴۳}{۷} = ۳۹/۰۶$

$\delta_{\text{مشهد}} \simeq ۶/۲۴$

$cv_{\text{مشهد}} \simeq ۰/۱۴$

پس کیش دارای دمای هوایی با ضریب تغییرات کمتر است.

لازم است تا دانش‌آموزان مهارت کافی در تعیین اثر تغییرات روی داده‌ها بر انحراف معیار و ضریب تغییرات کسب کنند. در قسمت تمرین صفحه ۱۶۲ سؤال ۱ به این مسئله پرداخته شده است. لازم است تا همکاران با مثال‌های متنوع دیگر به درک بهتر دانش‌آموزان در این مورد کمک کنند.

چارک‌ها نقاطی بر روی مقیاس اندازه‌گیری هستند که کلیه مشاهدات یا نمره‌ها را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دستورالعمل پیدا کردن چارک‌ها در فلوچارت صفحه ۱۶۱ آورده شده است. چارک ها تعمیم میانه هستند سایر تعمیم‌های میانه، دهک‌ها و صدک‌ها هستند که در مطلب خواندنی صفحه ۱۶۲ به آنها پرداخته شده است.

با توجه به اینکه نرم‌افزار آفیس یکی از پرکاربردترین نرم‌افزارهای موجود در سطح جامعه است. قسمت خواندنی انتهای فصل به آموزش نحوه استفاده از برنامه اکسل این نرم‌افزار با هدف کاربرد آن در رسم نمودارهای آماری پرداخته است. دانش‌آموزان دو دوره اول متوسطه با انواع نمودارهای آماری و ویژگی‌های آنها آشنا شده‌اند. توصیه می‌شود در صورت داشتن وقت و امکانات، این قسمت به عنوان یک کار فوق برنامه و به‌منظور آشنایی و ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان در کلاس اجرا شود. در هر صورت انجام ارزشیابی از این قسمت غیرضروری و خارج از برنامه درسی این کتاب است.

کار در کلاس صفحه ۱۶۲

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد کند. وی از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید، در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

۴۵	۹۰	۶۰	۲۰۰	۱۵	۱۸۰	۴۵	۸۰	۳۰	۱۲۰
۷۵	۹۰	۹۰	۶۰	۲۰	۱۲۰	۱۱۵	۶۰	۳۰	۲۰
۴۵	۴۵	۶۰	۶۰	۶۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۲۰۰	۲۵
					۱۵	۳۰	۱۸۰	۱۰۰	۱۲۰

چارک اول، میانه و چارک سوم مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان این کلاس را مشخص کنید.

Q_2 Q_1

۹۰و۹۰و۸۰ و۷۵و۷۵و۶۰و۶۰و۶۰و۶۰و۶۰و۶۰ و۴۵و۴۵و۴۵و۴۵و ۳۰و۳۰و۳۰و۲۵و۲۰و۲۰و۱۵و ۱۵

۲۰۰و۲۰۰و۱۸۰و۱۸۰و۱۲۰و۱۲۰و۱۲۰و۱۱۵و ۱۰۰ و۱۰۰و۹۰و۹۰

Q_3

توصیه‌های آموزشی

معمولاً در متغیرهای آماری، متغیری که پراکندگی آن زیاد نباشد، ثابت درنظر گرفته می‌شود. ذکر این مطلب برای درک بهتر دانش‌آموزان از داده‌هایی که با آنها سروکار دارند مفید است به‌عنوان مثال، در میان دانشجویان ترم اول یک دانشگاه، متغیرهایی مانند قد و سن پراکندگی چندانی ندارند و اطلاعات زیادی در مورد جامعه به ما نمی‌دهند.

برای درک بهتر واریانس، می‌توان دو دسته کارمند را در دو کشور مختلف مثال زد که دارای میانگین درآمدی یکسانی باشند. نمی‌توان نتیجه گرفت شرایط هردو گروه یکسان است. زیرا در کشوری که شاخص قیمت‌ها پایین‌تر است، کارکنان رفاه بیشتری دارند. حتی اگر شاخص قیمت‌ها یکسان باشد، بازهم جامعه‌ای که پراکندگی درآمد آن کمتر است از سلامت اقتصادی بیشتر و رفاه بالاتری برخوردار است. اینجاست که برای مقایسه داده‌ها از واریانس استفاده می شود.

حال اگر میانگین داده‌ها یکسان نباشد، دیگر واریانس هم برای مقایسه مفید نیست و باید از ضریب تغییرات استفاده کرد.

مثالی دیگر : سه استخر را درنظر بگیرید با میانگین عمق‌های یکسان و انحراف معیارهای صفر، ۰/۵ و ۱/۵ از دانش‌آموزان بخواهید تعیین کنند کدام یک برای شنای یک فرد مبتدی با قد ۱/۶۰ مناسب‌تر است.

تمرین صفحه ۱۶۲

۱ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. (با فرض آنکه همه داده‌ها و C مثبت باشند)

ـ اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازهٔ $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد.

ـ اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود.

ـ اگر مقدار ثابت $\frac{1}{c}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می شود.

ـ اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

حل :

ـ نادرست. اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

ـ نادرست. اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین به اندازهٔ c اضافه می شود و در نتیجه ضریب تغییرات $cv = \frac{\delta}{\overline{X}}$ کوچک‌تر می‌شود، چون صورت کسر ثابت و مخرجش بزرگ‌تر شده است.

ـ درست. با ضرب کردن هر مقدار ثابت مثبت در داده‌ها، انحراف معیار نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود.

ـ درست. اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار و میانگین هر دو c برابر می‌شوند، پس ضریب تغییرات $cv = \frac{\delta}{\overline{X}}$ بدون تغییر می‌ماند.

۲ کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است.

حل.

$$A\begin{cases}\overline{X}_A = ۱۱۰۰۰\\ \delta_A = ۲۰۰۰\end{cases} \quad \text{ضریب تغییرات نوع } A = \frac{\delta_A}{\overline{X}_A} = \frac{۲۰۰۰}{۱۱۰۰۰} \simeq ۰/۸۱۲$$

$$B\begin{cases}\overline{X}_B = ۱۰۰۰۰\\ \delta_A = ۱۰۰۰\end{cases} \quad \text{ضریب تغییرات نوع } B = \frac{\delta_B}{\overline{X}_B} = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰۰} \simeq ۰/۱$$

لاستیک نوع B ، که ضریب تغییرات کمتری دارد، بهتر است.

۳ جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد.

الف) میانگین و میانهٔ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

ب) انحراف معیار پول‌توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

حل.

الف)

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	$\overline{X} = ۲۵$	۲۵ = میانه
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	$\overline{Y} = ۲۵$	۲۵ = میانه

$$\begin{cases} \text{میانگین پول توجیبی دوستان مینا } \overline{X} = \dfrac{۲۳+۲۴+۲۵+۲۶+۲۷}{۵} = ۲۵ \\ \text{مرتب شدهٔ داده‌ها } \rightarrow ۲۳،۲۴ ،۲۵،۲۶،۲۷ : \text{میانه} = ۲۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{میانگین پول توجیبی دوستان مریم } \overline{Y} = \dfrac{۱۵+۲۰+۲۵+۳۰+۳۵}{۵} = ۲۵ \\ \text{مرتب شدهٔ داده‌ها } \rightarrow ۱۵ ،۲۰ ،۲۵،۳۰ ،۳۵ : \text{میانه} = ۲۵ \end{cases}$$

ب)

دوستان مریم		
y_i	$y_i-\overline{Y}$	$(y_i-\overline{Y})^۲$
۱۵	−۱۰	۱۰۰
۲۰	−۵	۲۵
۲۵	۰	۰
۳۰	۵	۲۵
۳۵	۱۰	۱۰۰
		۲۵۰ = مجموع

دوستان مینا		
x_i	$x_i-\overline{X}$	$(x_i-\overline{X})^۲$
۲۳	−۲	۴
۲۴	−۱	۱
۲۵	۰	۰
۲۶	۱	۱
۲۷	۲	۴
		۱۰ = مجموع

$$\delta_۱ = \sqrt{\frac{(x_۱-\overline{X})^۲+(x_۲-\overline{X})^۲+\ldots+(x_۵-\overline{X})^۲}{۵}}$$

$$\delta_۱ = \sqrt{\frac{۱۰}{۵}} = \sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱$$

$$\delta_۲ = \sqrt{\frac{(y_۱-\overline{Y})^۲+(y_۲-\overline{Y})^۲+\ldots+(y_۵-\overline{Y})^۲}{۵}}$$

$$\delta_۲ = \sqrt{\frac{۲۵۰}{۵}} = \sqrt{۵۰} \simeq ۷/۱$$

پ) ضریب تغییرات هر دو گروه را به‌دست می آوریم :

$$\text{ضریب تغییرات پول توجیبی دوستان مینا} = \frac{\delta_۱}{\overline{X}} = \frac{۱/۴۱}{۲۵} = ۰/۰۵۶۴$$

$$\text{ضریب تغییرات پول توجیبی دوستان مریم} = \frac{\delta_۲}{\overline{Y}} = \frac{۷/۱}{۲۵} = ۰/۲۸۴$$

برنامه‌ریزی برای گروهی ساده‌تر است که ضریب تغییرات کمتری داشته باشد، پس برنامه‌ریزی سفر یک روزه برای دوستان مینا ساده‌تر است.

۴ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های **۹۴ ــ ۸۴** را براساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹

حل. $$\text{میانگین } \overline{X}=\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}=\frac{۲۰۳/۵}{۱۱}=۱۸/۵$$

۳۴/۷و۳۰/۵ و۲۵/۴ و۲۱/۵و ۱۸/۴و۱۵/۴ و۱۲/۴و۱۱/۹و۱۱/۹و ۱۰/۸ و۱۰/۴ ← مرتب‌شدهٔ داده‌ها

۱۵/۴ = میانه

نرخ تورم x_i	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹	
$x_i-\overline{X}$	−۸/۱	−۶/۶	−۰/۱	۶/۹	−۷/۷	−۶/۱	۳	۱۲	۱۶/۲	−۲/۹	−۶/۶	
$(x_i-\overline{X})^۲$	۶۵/۶۱	۴۳/۵۶	۰/۰۱	۴۷/۶۱	۵۹/۲۹	۳۷/۲۱	۹	۱۴۴	۲۶۲/۴۴	۸/۴۱	۴۳/۵۶	مجموع = ۷۲۰/۷

$$\text{انحراف معیار } \delta=\sqrt{\frac{(x_۱-\overline{X})^۲+(x_۲-\overline{X})^۲+\ldots+(x_{۱۱}-\overline{X})^۲}{۱۱}}=\sqrt{\frac{۷۲۰/۷}{۱۱}}\simeq ۸/۱$$

۵ در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهکیلویه و بویراحمد دیده می‌شود (**راهنمایی :** $۱m=۳/۲۸۱ft$ ، فوت : ft ، متر : m).

		مرکزی			کهکیلویه و بویراحمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
فاصله‌از سطح‌دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

حل.

استان	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)
					۱۸۷۰ (m)	۹۹۰ (m)	۲۲۰۰ (m)

ابتدا به عنوان مثال ارتفاع از سطح دریا برای شهر یاسوج را برحسب متر، به‌دست می‌آوریم :

$$\text{ارتفاع از سطح دریا برحسب متر} = \frac{۶۱۳۵/۴۷}{۳/۲۸۱} = ۱۸۷۰$$

الف) میانگین استان مرکزی $\overline{X} = \dfrac{۱۷۰۸+۱۷۷۵+۱۸۳۰+۱۹۲۰}{۴} = ۱۸۰۸/۲۵$

ب)

ارتفاع x_i از سطح دریا استان مرکزی	۱۷۰۸	۱۷۷۵	۱۸۳۰	۱۹۲۰	
$x_i - \overline{X}$	۱۰۰/۲۵−	۳۳/۲۵−	۲۱/۷۵	۱۱۱/۷۵	
$(x_i - \overline{X})^۲$	۱۰۰۵۰/۰۶۲۵	۱۱۰۵/۵۶۲۵	۴۷۳/۰۶۲۵	۱۲۴۸۸/۰۶۲۵	مجموع = ۲۴۱۱۶/۷۵

$$\text{انحراف معیار استان مرکزی } \delta = \sqrt{\frac{(x_۱ - \overline{X})^۲ + (x_۲ - \overline{X})^۲ + (x_۳ - \overline{X})^۲ + (x_۴ - \overline{X})^۲}{۴}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲۴۱۱۶/۷۵}{۴}} = \sqrt{۶۰۲۹/۱۸۷۵} \simeq ۷۷/۶۵$$

پ) میانگین استان کهکیلویه و بویراحمد $\overline{Y} = \dfrac{۱۸۷۰+۹۹۰+۲۲۰۰}{۳} \simeq ۱۶۸۷$

با توجه به میانگین بیشتر استان مرکزی، ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای استان مرکزی بیشتر است.

نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۷

۱ دو تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم اگر بدانیم مجموع دو تاس کمتر از ۶ است. به چه احتمالی عدد هردو تاس مثل هم هستند؟

۲ اگر $P(A-B)=\frac{1}{4}$ و $P(A)=\frac{3}{4}$ ، مقدار $P(B|A)$ را محاسبه کنید.

۳ یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a ، b ، c و d است. اگر $P(\{b,c,d\})=\frac{2}{3}$ و $P(\{b\})=\frac{1}{4}$ مطلوب است : الف) $P(\{a,c,d\}|\{b,c,d\})$ ب) $P(\{a\}|\{a,c,d\})$

۴ یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم :

پیشامد A : مجموع شماره‌های ظاهر شده در دو پرتاب ۸ باشد.

پیشامد B : شماره‌های ظاهر شده در دو پرتاب مساوی باشد.

الف) $P(A)$ و $P(B)$ را به‌دست آورید.

ب) آیا پیشامدهای A و B مستقل هستند؟

پ) اگر پیشامد A اتفاق بیفتد، احتمال اینکه پیشامد B اتفاق بیفتد، چه‌قدر است؟

۵ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد به‌طوری که $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

الف) آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ ب) $P(A|B)$ را به‌دست آورید.

۶ احتمال آنکه در ده سال آینده اعتراضات مردمی در کشور A به سقوط دولت بینجامد $\frac{1}{7}$ و احتمال آنکه اعتراضات مردمی در کشور B باعث سقوط دولت شود $\frac{1}{2}$ است. چه‌قدر احتمال دارد :

الف) تا دو سال آینده، دولت در هردو کشور سقوط کند.

ب) حداقل یکی از دولت‌ها ظرف ده سال آینده سقوط کند.

۷ A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S می‌باشند و $P(A)=0/25$ و $P(B)=\alpha$ و $P(A\cup B)=0/7$ اگر A و B مستقل باشد، α چه‌قدر است؟

۸ اگر تمام داده‌های x_1 و x_2 و... و x_n را در ۵ ضرب کنیم در مورد تغییرات موارد زیر بحث کنید.

الف) میانگین ب) واریانس پ) ضریب تغییرات

۹ جاهای خالی را پرکنید.

الف) مهم‌ترین شاخص مرکزی .... است.

ب) دامنه تغییرات با .... از داده‌ها سروکار دارد.

پ) برای ازبین بردن واحد اندازه‌گیری از شاخص .... استفاده می‌کنیم.

۱۰ اگر دامنه تغییرات داده‌های x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و ۷ برابر صفر باشد. میانه داده‌های زیر را به‌دست آورید.

$2x_1 - 1$ و $3x_2 - 3$ و $x_3 - 2$ و $x_4 + 1$

۱۱ اگر ده داده آماری را دوبرابر کنیم و ۵ واحد به هرکدام از آنها اضافه کنیم ضریب تغییرات داده‌های جدید ۱/۵ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است مجموع داده‌های قبلی را به‌دست آورید.

۱۲ ۱۳ داده آماری با واریانس ۱۰ و ۱۲ داده آماری با واریانس ۶ را باهم ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هردو گروه یکسان باشد، انحراف معیار ۲۵ داده حاصل را به‌دست آورید.

۱۳ اگر ۲ درصد قیمت هر محصول به عنوان مالیات بر ارزش افزوده به محصولات یک کارخانه اضافه شود. میانگین و ضریب تغییرات قیمت محصولات چه تغییری می‌کند.

۱۴ در داده‌های زیر چارک اول و سوم را تعیین کنید.

۱۵۲ ، ۱۵۵و۱۵۲و۱۵۰و۱۵۶و۱۵۵و۱۵۷و۱۴۰و۱۵۶و۱۵۷و۱۶۰

نمرات درس ریاضی سارا به‌صورت ۱۸و۱۷و۱۷و۱۴و۱۶و۱۷و۶ است.

الف) میانه و میانگین این داده‌ها را به‌دست آورید.

ب) کدام یک از شاخص‌ها برای بررسی نمرات سارا بهتر است؟ چرا؟

پ) برای اینکه معدل او ۱۶/۵ باشد به‌جای نمره ۶ چه نمره‌ای باید بگیرد؟

۱۵ میانگین ۸ داده آماری برابر ۶ محاسبه شده است پس از بررسی مجدد معلوم شد که دو مقدار ۱۱ و ۱۲ باید به داده‌ها اضافه شود. میانگین جدید چقدر است؟

۱۶ در داده های زیر اگر داده‌های بیشتر از چارک سوم را حذف کنیم، میانگین داده‌های جدید را به‌دست آورید.

۱۵و۱۰و۱۲و ۳۴ و ۴۱و ۴۳ و ۳۲ و ۱۸ و ۲۵ و ۳۱و ۱۹

۱۷ امتیازات مهارت کاری دو نفر از پرسنل یک آزمایشگاه در ۵ روز کاری به‌صورت زیر است. دقت عمل کدام یک بیشتر است؟

A : ۲۰و۲۳و۲۴و۲۶و۲۷ $\qquad$ B : ۲۱و۲۲و۲۳و۲۶و۲۸

۱۸ نمرات ریاضی ۲۰ دانش‌آموز به‌صورت زیر است :

۱۹و۱۹و۱۸و۱۷و۱۷و۱۶و۱۶و۱۵و۱۵و۱۴و۱۳و۱۲و۱۲و۱۰و۱۰و۹و ۸و ۸و ۵

الف) میانگین، میانه و واریانس این داده‌ها را به‌دست آورید.

ب) اگر معلم به‌خاطر کار کلاسی دانش‌آموزان یک نمره به تمام دانش‌آموزان اضافه کند، با استفاده از مقادیری که در سؤال ۲۸ به‌دست آورده‌اید، ضریب تغییرات نمرات جدید را به‌دست آورید.

۱۹ میانگین و انحراف معیار امتیازات فنی پروازهای یک خلبان ۳۰ ساله ۲۱ و ۳/۵ و میانگین و انحراف معیار یک خلبان ۴۰ ساله ۲۵ و۴ است. دقت عمل کدام یک بیشتر است؟