بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی

رشته‌های ریاضی و فیزیک ــ علوم تجربی

راهنمای معلم

پایهٔ دهم

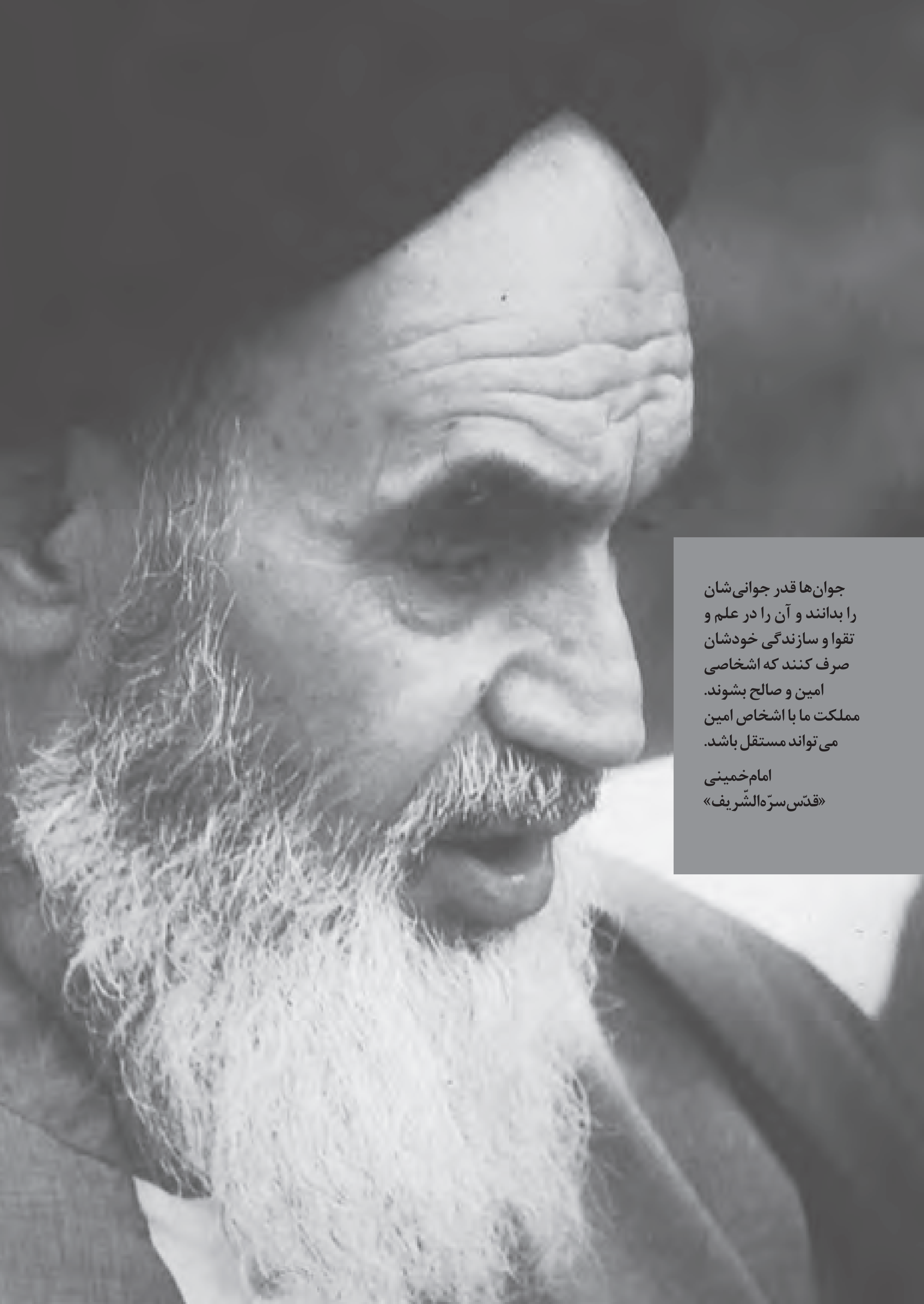
دورهٔ دوم متوسطه

۱۳۹۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب : راهنمای معلم ریاضی ـ پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۰۳۶۴
پدیدآورنده : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف : حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، طیبه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل رحمت و محمد مقاصدی(اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، محمدحسن بیژن‌زاده، احسان بهرامی سامانی، رضا حیدری قزلجه، محمود داورزنی، ابراهیم ریحانی، مهین سنقری، محمدرضا سیدصالحی، فاطمه عرقرلو، مجتبی قربانی، فریده کمالی، آناهیتا کمیجانی، سارا مرعشی‌نیا (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری : اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی : لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری(مدیرهنری) ـ سمیه قنبری (صفحه‌آرا)ـ مریم دهقان‌زاده(رسام)، سیده‌فاطمه محسنی، افسانه امیراحمدی، علی نجمی، علی مظاهری‌نظری‌فر، سپیده ملک‌ایزدی، احمدرضا امینی، حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان : تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه : www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران : کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن : ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ اوّل ۱۳۹۵

شابک ۸ـ۲۶۸۲ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-2682-8



جوان‌ها قدر جوانی‌شان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدّس‌سرّه‌الشّریف»

فهرست

فصل ۱

مجموعه، الگو و دنباله

رویکرد کلی کتاب

روح کلّی حاکم بر این فصل و همین‌طور سایر فصل‌های کتاب آن است که دانش‌آموز خود در فرایند ساخت دانش درگیر شود. هیچ فرمول آماده‌ای به طور مستقیم عرضه نشده است؛ بلکه **فعّالیت‌ها** طوری طرّاحی شده‌اند که دانش‌آموزان عزیز با انجام آنها، خودشان به فرمول یا رابطهٔ مورد نظر دست یابند. در تألیف کتاب سعی شده است علاوه بر استانداردهای محتوایی، تا حدّ امکان استانداردهای فرایندی زیر نیز در کانون توجه باشند :

۱ **مسائل بازپاسخ** : در بخش‌های مختلف هر درس، یعنی «فعّالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین»ها تکالیفی یافت می‌شوند که جواب منحصر به فرد ندارند. ممکن است به تعداد تمام دانش‌آموزان برای چنین سؤالی پاسخ وجود داشته باشد و همگی آنها نیز درست باشند.

۲ **حلّ مسئله وطرح مسئله** : علاوه بر اینکه در قسمت‌های مختلف کتاب، مسائلی برای حلّ دانش‌آموزان وجود دارد، همچنین در موارد مختلفی از دانش‌آموزان خواسته شده است که خودشان مسائلی را در موضوع مورد بحث طرح نمایند.

۳ **ارتباط و اتصال موضوعی** : مطالب ارائه شده در این کتاب، علاوه بر آنکه با کتاب ریاضی سال نهم مرتبط است و در ادامهٔ مطالب آن می‌باشد. همچنین کتاب حاضر ارتباطاتی با سایر دروس دانش‌آموزان هم برقرار کرده است. در جاهای مختلف کتاب می‌توان مطالبی دربارهٔ جغرافیا، فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، تاریخ و دیگر دروس یافت که مفاهیم ریاضی در بستر این موضوعات طرح شده‌اند.

۴ **بازنمایی‌های چندگانه** : بسیاری از مفاهیم ریاضی را می‌توان از منظرهای مختلفی مورد توجه قرار داد. به عنوان مثال، تابع را می‌توان از دیدگاه مجموعه‌ای، نموداری، جدولی و ... مورد مطالعه قرارداد. این مطلب که دانش‌آموز بتواند از چندین زاویهٔ مختلف یک مفهوم ریاضی را ببیند و بتواند بین بازنمایی‌های مختلف حرکت کند، نشان‌دهندهٔ قوت آموزش و معنادار بودن یادگیری او خواهد بود. این موضوع در کتاب حاضر مورد توجه بوده و به عنوان مثال، یک مفهوم خاص ریاضی، هم از منظر جبری و هم از دیدگاه هندسی مورد بررسی واقع شده است.

۵ **توجه به بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان** : در سال‌های اخیر، تحقیقات فراوانی بر روی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ریاضیات صورت گرفته است. اشتباهی که ناشی از بدفهمی دانش‌آموز نسبت به موضوع باشد، نمی‌تواند ناشی از خطای محاسباتی، خستگی دانش‌آموز یا بی‌دقتی او باشد؛ بلکه چنین اشتباهی معمولاً در نتیجهٔ یک قانون غلط است که در ذهن دانش‌آموز وجود دارد. به همین دلیل است که به این گونه اشتباهات، **اشتباهات نظام‌دار** نیز گفته می‌شود.

نخستین گام برای از بین بردن یا حداقل کاهش دادن این بدفهمی‌ها آن است که آنها را شناسایی کنیم و فراگیر بودن آنها در بین دانش‌آموزان را به رسمیت بشناسیم. در گام بعدی باید شرایطی را برای دانش‌آموز فراهم کنیم که او در مواجهه با تکالیف و موارد مناسب بتواند قانون غلط موجود در ذهن خود را حذف، جایگزین، یا اصلاح نماید. چنین ملاحظاتی در بخش‌های مختلف کتاب مدّ نظر بوده است؛ به این صورت که بدفهمی‌های رایج برجسته شده‌اند تا در تقابل با شکل درست آنها موجب تأمّل و تفکر دانش‌آموز گردند.

۶ **گفتمان ریاضی** : در یک تدریس، هر چقدر بتوان دانش‌آموزان را به صحبت کردن و بحث نمودن وادار کرد،آن تدریس اثربخش‌تر خواهد بود. این مطلب که دانش‌آموزان نظرات دوستان خود را مورد نقد قرار دهند، یا اینکه بتوانند از نظرات خودشان در مقابل دیگران به طور مستدل و منطقی دفاع کنند، یکی از اهداف مهم آموزش ریاضی است. در قسمت‌های مختلف این کتاب، از دانش‌آموزان خواسته شده است تا با دوستان خود در موضوعات مورد نظر و از آن جمله در مورد مسائل بازپاسخ بحث کنند و جواب‌های خود را با یکدیگر مقایسه کنند. طبیعی است که هدایت این بحث‌ها و گفتمان ریاضی بر عهدۀ معلمان عزیز خواهد بود.

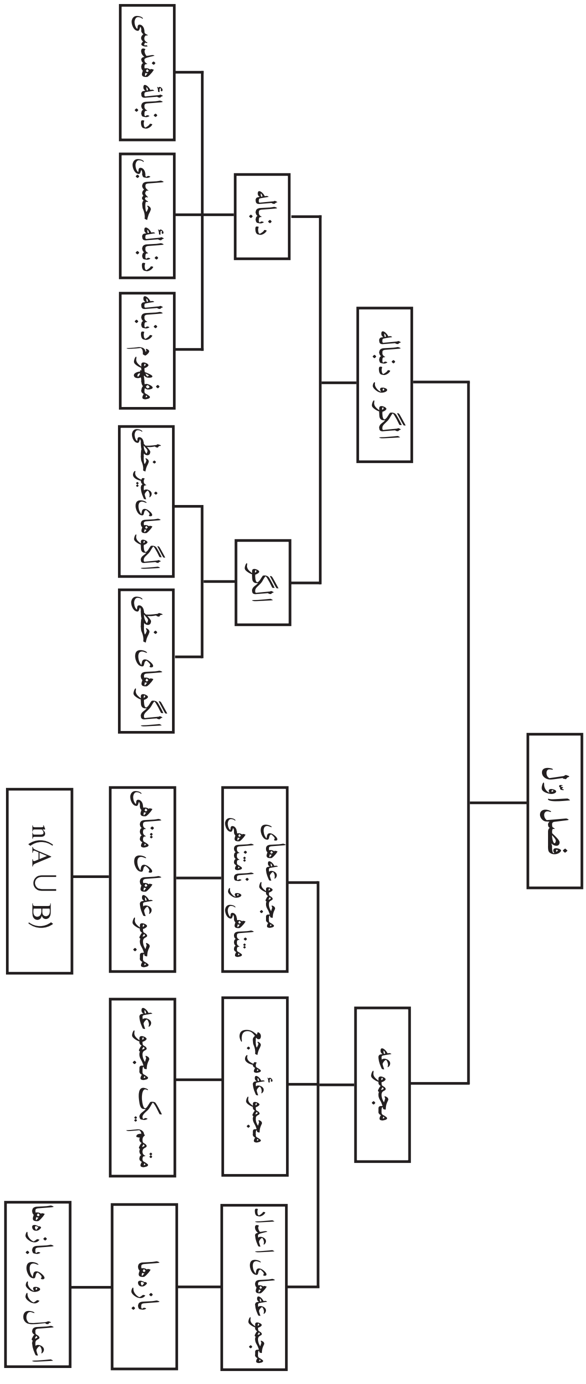
۷ **اثبات و استدلال** : اثبات و استدلال بخش جدانشدنی از آموزش ریاضی هستند. در اینجا به هیچ وجه تأکید بر اثبات صوری نیست و بیشتر استدلال شهودی مدّنظر است. هدف دیگر آن است که دانش‌آموزان ضرورت اثبات و استدلال برای یک حکم ریاضی را درک نمایند.

نگاه کلی به فصل

دانش‌آموزان در کلاس نهم برای اولین بار با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اند. در فصل‌های بعدی کتاب حاضر، مطالبی از مفهوم مجموعه مورد نظر است که در کتاب نهم به آنها پرداخته نشده است؛ لذا دو درس اوّل فصل حاضر، به این پیش‌نیازها اختصاص دارد. مطالبی مانند بازه‌های اعداد حقیقی، مجموعۀ مرجع و متمم یک مجموعه، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی و همچنین اصل شمول و عدم شمول در این دو درس مورد بحث واقع شده‌اند.

دو درس بعدی این فصل، در ارتباط با مفهوم الگو و دنباله است. الگویابی و الگوسازی، موضوعاتی هستند که دانش‌آموزان از کلاس اوّل ابتدایی با آنها سر و کار داشته‌اند. درواقع درس سوم در ادامۀ مطالبی است که دانش‌آموزان در پایه‌های قبل در این زمینه مطالعه کرده‌اند. دنباله هم در انتهای درس سوم مطرح شده است و درس چهارم به دنباله‌های حسابی و هندسی اختصاص دارد.

نقشهٔ مفهومی



فصل اول
الگو و دنباله
مجموعه
دنباله
الگو
دنبالهٔ هندسی
دنبالهٔ حسابی
مفهوم دنباله
الگوهای غیرخطی
الگوهای خطی
مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
مجموعهٔ مرجع
مجموعه‌های اعداد
مجموعه‌های متناهی
متمم یک مجموعه
بازه‌ها
n(A ∪ B)
اعمال روی بازه‌ها

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعضای خانوادهٔ شما

ب) مجموعهٔ نقاط روی محور xها

پ) مجموعهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه

ت) مجموعهٔ سیّاره‌های کهکشان راه شیری

ث) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ج) بازهٔ $(\frac{1}{10}, \frac{2}{10})$

چ) مجموعهٔ جواب‌های حقیقی معادلهٔ $2x-1=0$

ح) مجموعهٔ‌جواب‌های حقیقی نامعادلهٔ $2x-1 \geq 0$

خ) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۴۸

۲ مثال‌هایی برای مجموعه‌های خواسته شده ارائه کنید.

الف) یک مجموعهٔ‌غیرعددی متناهی

ب) یک مجموعهٔ عددی متناهی

پ) یک مجموعهٔ‌غیر عددی نامتناهی

ت) یک مجموعهٔ عددی نامتناهی

۳ فرض کنیم $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A=\{3n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ و $B=\{3n-2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

الف) A و B را با نمایش اعضای آنها بنویسید.

ب) A' و B' را مشخص کنید.

پ) $(A \cup B)'$ را ابتدا با نمایش اعضای آن و سپس با بیان ویژگی مشترک اعضای آن بنویسید.

۴ مجموعه‌های خواسته شده را با هاشور زدن در نمودار ون مشخص کنید.

الف) $(A \cap B)'$

ب) $A' \cup B'$

پ) $A-B$

ت) $A \cap B'$

۵ فرض کنیم $U=\{1,2,3,4,\ldots,20\}$ مجموعهٔ مرجع بوده و A و B و C به ترتیب، مجموعهٔ‌شامل عددهای اوّل، مضرب‌های ۳ و اعداد یک رقمی از U باشند.

الف) A و B و C را با نمایش اعضای هر یک از آنها مشخص کنید.

ب) $A-B$ و $A \cap B'$ را مشخص کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ برای مجموعهٔ زیر، دو مجموعهٔ مرجع دلخواه بنویسید و در هر حالت، متمم A را مشخص کنید.

$A=\{1,3,5,7,9,\ldots\}$

۷ در پرتاب یک تاس، مجموعهٔ شامل تمام حالت‌های ممکن در مورد عدد رو شده را بنویسید. آیا این مجموعه را می‌توان به عنوان یک مجموعهٔ‌مرجع در نظر گرفت؟

۸ اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، مطلوب است متمم هر یک از مجموعه‌های زیر:

الف) $A=[5,+\infty)$

ب) $B=(-\infty,-1] \cup (1,+\infty)$

۹ دو مجموعهٔ متناهی دلخواه مثل A و B مثال بزنید و درستی رابطهٔ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ را برای آنها بررسی کنید.

۱۰ در یک نظرسنجی از ۸۰ خانواده، اطلاعات زیر حاصل شده است :

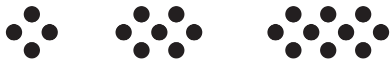
ـ ۲۰ خانواده فقط کامپیوتر شخصی دارند،

ـ ۳۵ خانواده فقط لپ‌تاپ دارند،

ـ ۱۰ خانواده نه کامپیوتر شخصی دارند و نه لپ‌تاپ.

چه تعدادی از این خانواده‌ها هم دارای کامپیوتر شخصی هستند و هم لپ‌تاپ؟

۱۱ شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.



شکل (۳)　　شکل (۲)　　شکل (۱)

الف) در شکل چهلم چند دایره وجود دارد؟

ب) در شکل nام چند دایره وجود دارد؟

پ) آیا حالتی وجود دارد که شامل ۵۵ دایره باشد؟ اگر هست، شمارهٔ آن شکل چند است؟

۱۲ شکل زیر را در نظر بگیرید.

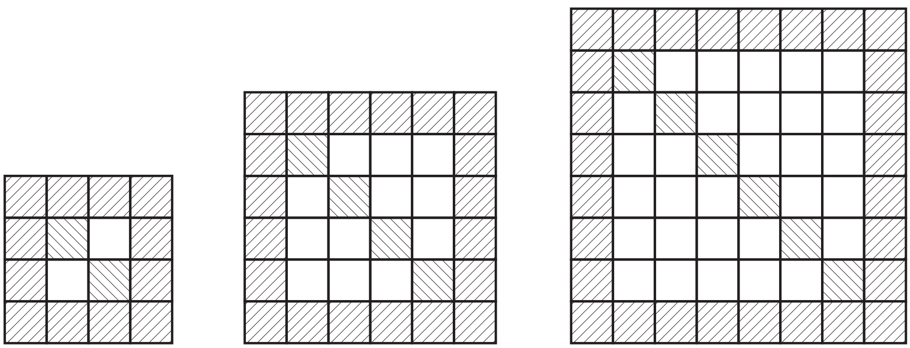
الف) مربع ۱۰ × ۱۰ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟

ب) مربع ۱۰۰ × ۱۰۰ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟

پ) مربع $n \times n$ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟ $(n \geq ۴)$

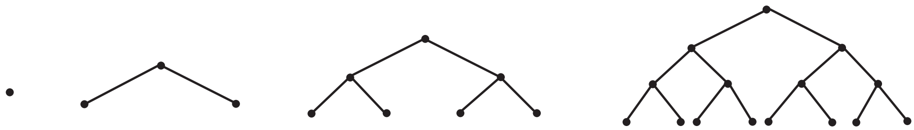
ت) آیا مربعی هست که در آن ۹۴ کاشی تیره به‌کاررفته باشد؟ اگر هست، ابعاد آن را بیابید.

ث) آیا الگوی حاصل یک الگوی خطی است؟ چرا؟

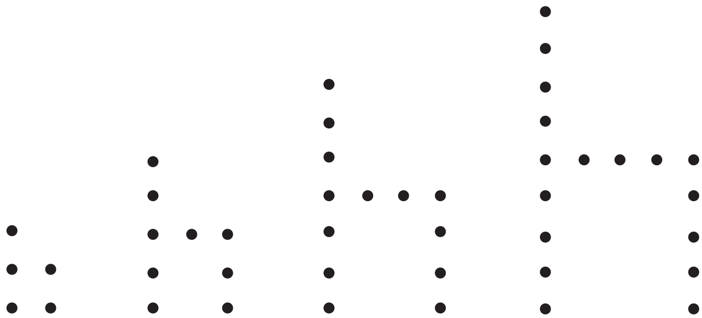


مربع ۸×۸ دارای ۳۴ کاشی تیره　　مربع ۶×۶ دارای ۲۴ کاشی تیره　　مربع ۴×۴ دارای ۱۴ کاشی تیره

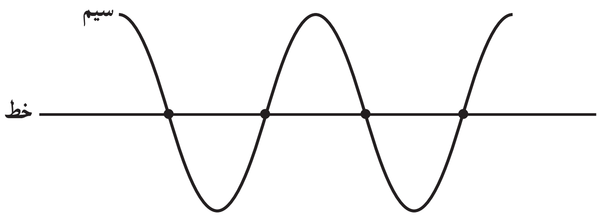
۱۳ در الگوهای زیر، جملهٔ nام را به دست آورید.

(الف)


۱ ۳ ۷ ۱۵

(ب)


۱۴ یک خط افقی، قطعهٔ سیمی را در چهار نقطه قطع کرده است و آن را به پنج قسمت، مطابق شکل زیر تقسیم کرده است. اگر به جای یک خط، ۱۹ خط موازی این سیم را طوری قطع کند که هر یک از آنها چهار نقطهٔ اشتراک با سیم داشته باشند، آن‌گاه سیم مزبور در مجموع به چند قطعه تقسیم می‌شود؟



۱۵ چهار جملهٔ اوّل هر یک از دنباله‌های با جملهٔ عمومی زیر را بنویسید.

الف) $a_n = \frac{n}{n+۱}$ ب) $b_n = \frac{۲^n}{n+۱}$ پ) $C_n = \frac{(-۱)^n}{۲^n}$ ت) $d_n = ۲^n - n^۲$

۱۶ آیا دنبالهٔ $۲, ۴, ۶, ۸, \ldots$ همان مجموعهٔ $\{۲,۴,۶,۸,\ldots\}$ است؟ توضیح دهید.

۱۷ الف) الگوی به کار رفته در مثلث زیر را توضیح دهید.

ب) یک دنباله را در این مثلث مشخص کرده‌ایم (دنبالهٔ اعداد مثلثی). شما سه دنبالهٔ دلخواه دیگر را مشخص نمایید.

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

....
....
....

۱۸ الگوی زیر را در نظر بگیرید.

$۱^۲+۱=۲^۲-۲$

$۲^۲+۲=۳^۲-۳$

$۳^۲+۳=۴^۲-۴$

$۴^۲+۴=۵^۲-۵$

....
....

الف) دو سطر بعدی را در این الگو بنویسید. آیا تساوی‌ها برقرارند؟

ب) سطر nام این الگو را با نمادهای جبری بنویسید و درستی آن را ثابت کنید.

۱۹ در هر مورد سه جملهٔ بعدی را بنویسید و جملهٔ عمومی را بیابید.

(الف) ۵ و ۱۲ و ۲۳ و ۳۸ و ...

(ب) ۱۶ و ۲۷ و ۴۲ و ۶۱ و ...

(پ) ۰ و ۲ و ۶ و ۱۲ و ۲۰ و ...

(ت) ۰ و ۳ و ۸ و ۱۵ و ۲۴ و ...

(ث) ۲ و ۵ و ۱۰ و ۱۷ و ۲۶ و ...

۲۰ دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید.

−۷، ۱، ۹، ۱۷، ۲۵، ...

الف) جملهٔ پنجاهم آن را محاسبه کنید.

ب) چندمین جملهٔ آن برابر ۷۹۳ است؟

۲۱ جملات پنجم و نهم یک دنبالهٔ‌حسابی به ترتیب ۳۰ و ۵۸ هستند. جملهٔ چندم این دنباله عدد ۱۰۰ است؟

۲۲ در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ اوّل عدد $\frac{۱}{\,}$ است. قدر نسبت آن را طوری بیابید که جملهٔ دهم دنباله، برابر

عدد ۱۰۰ شود.

۲۳ اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند؛ یعنی b واسطهٔ حسابی بین a و c باشد، آن‌گاه مقدار b را بر حسب a و c به دست آورید.

۲۴ اگر $\frac{x}{۲}$، $x+۲$ و $۲x-۱۱$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، x را بیابید.

۲۵ بین ۹ و ۶۱ سه واسطهٔ حسابی درج کنید.

۲۶ در یک دنبالهٔ حسابی $t_{۱۳}-t_{۹}=۱۴$ و $t_{۱۳}+t_{۹}=۸۸$ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

۲۷ مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰°، چهارضلعی ۳۶۰°، پنج ضلعی ۵۴۰° می‌باشد. اگر این الگو با همین روند ادامه پیدا کند، الف) مجموع زوایای داخلی یک ۱۲ ضلعی چند درجه خواهد بود؟

ب) مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی چند درجه است؟

۲۸ اگر زاویه‌های یک مثلث تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، ثابت کنید که یکی از زاویه‌های آن باید ۶۰° باشد.

۲۹ زاویه‌های یک پنج ضلعی محدّب تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند.

الف) اگر زاویه‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، زاویهٔ وسط چند درجه است؟

ب) اگر کوچک‌ترین زاویه ۴۰ درجه باشد، اندازهٔ سایر زاویه‌ها را به‌دست آورید.

۳۰ در ردیف اوّل یک استادیوم ورزشی ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۹ و در ردیف سوم ۲۳ صندلی می‌باشد. اگر تعداد صندلی‌ها به همین منوال افزایش یابد، در ردیف ۲۵ چند صندلی وجود خواهد داشت؟

۳۱ دنبالهٔ هندسی مقابل را در نظر بگیرید. $۳,\frac{-۳}{۲},\frac{۳}{۴},\frac{-۳}{۸},\frac{۳}{۱۶},\ldots$

الف) جملهٔ یازدهم آن را به‌دست آورید.

ب) چندمین جملهٔ آن برابر $\frac{۳}{۲۵۶}$ می‌باشد؟

۳۲ جملهٔ چندم دنبالهٔ زیر برابر ۱۰۲۴ می‌باشد؟ $\frac{۱}{۱۶},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\ldots$

۳۳ در یک دنبالهٔ هندسی حاصل‌ضرب سه جملهٔ اوّل برابر ۲۷ و مجموع آنها برابر ۱۳ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید. مسئله چند جواب دارد؟

۳۴ یک دنبالهٔ هندسی بنویسید که در آن هر دو جملهٔ متوالی قرینهٔ یکدیگر باشند.

۳۵ الف) یک دنبالهٔ هندسی دلخواه بنویسید و قدر نسبت آن را مشخص نمایید.

ب) تمام جملات دنبالهٔ مذکوررا معکوس کنید و نشان دهید که دنبالهٔ حاصل نیز یک دنبالهٔ‌هندسی است.

پ) قدر نسبت دنبالهٔ حاصل چه ارتباطی با قدر نسبت دنبالهٔ اصلی دارد؟

ت) به طور کلی اگر a ، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، ثابت کنید اعداد $\frac{۱}{a}$ ، $\frac{۱}{b}$ و $\frac{۱}{c}$ نیز تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند.

۳۶ الف) دو دنبالهٔ هندسی دلخواه مثال بزنید.

ب) نشان دهید حاصل $\frac{t_3 t_9}{t_6^2}$ در مورد جملات هر کدام از دنباله‌های فوق برابر ۱ می‌باشد.
پ) برای یک دنبالهٔ هندسی در حالت کلی ثابت کنید $t_3 t_9 = t_6^2$
ت) آیا می‌توانید حالت کلی‌تری از این رابطه را نوشته و آن را ثابت کنید؟

۳۷ فرض کنید آب یک استخر در هر ساعت ده درصد گرم‌تر شود. اگر دمای فعلی آب ۵۰ درجه باشد، پس از هشت ساعت دمای آن چند درجه خواهد بود؟

۳۸ شهری ۱۰۰۰۰۰۰ نفر جمعیت دارد. فرض کنید نرخ رشد جمعیت در این شهر سه درصد باشد.
الف)جمعیت این شهررا پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج سال پیش‌بینی کنید و در یک جدول بنویسید.
ب) اگر نرخ رشد سه درصد برای جمعیت این شهر ثابت بماند، پس از گذشت n سال، جمعیت شهر از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟
پ) هر گاه جمعیت این شهر را در سال‌های متوالی بنویسیم، دنبالهٔ‌حاصل چه نوع دنباله‌ای خواهدبود؟

درس اوّل

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اهداف

- ❑ یادآوری مختصر از مجموعه‌های مختلف اعداد
- ❑ آشنایی با مفهوم بازه‌های اعداد حقیقی و اعمال بر روی آنها
- ❑ آشنایی با مفهوم مجموعهٔ متناهی و مجموعهٔ نامتناهی

روش تدریس

این درس با یادآوری مجموعه‌های اعداد شروع شده است که دانش‌آموزان از سال‌های قبل با آنها آشنا هستند. کار در کلاس صفحهٔ ۲ با همین هدف طرّاحی شده است. توصیه می‌شود فرصت کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد تا آنها با پرداختن به قسمت‌های مختلف این «کاردر کلاس» بتوانند مطالب گذشته را به یاد آورند.

بازه‌ها اوّلین موضوع جدیدی است که در کتاب آمده است و آموزش آن باید متکی بر فعالیت دانش‌آموز باشد. در ابتدای مبحث از دانش‌آموزان خواسته شده است که اعضای یک مجموعه (جواب یک نامعادله) را روی محور با رنگ کردن مشخص نمایند. حتی تعریف بازه‌ها نیز در فعالیت‌های صفحهٔ ۳ و ۴ بر عهدهٔ دانش‌آموزان گذاشته شده است. بعد از یک مثال حل شده، در «کار در کلاس» صفحهٔ ۵ تکالیف متنوعی آمده است که دانش‌آموزان باید در کلاس انجام دهند.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی پس از انجام یک فعالیت توسط دانش‌آموزان تعریف شده است. سپس در کار در کلاس صفحهٔ۶ مثال‌های متنوعی از مجموعه‌ها آمده است که باید دانش‌آموزان متناهی یا نامتناهی بودن آنها را مشخص کنند. این قسمت ظرفیت آن را دارد که دانش‌آموزان درمورد مثال‌های طرح شده پژوهش هایی را انجام دهند و در کلاس ارائه نمایند؛ نمونه‌هایی از آن در حاشیه‌های صفحهٔ ۶ و ۷ آمده است. به علاوه برخی از سؤالات بازپاسخ هم در این قسمت آمده است. با انجام فعالیت صفحهٔ۷، دانش‌آموزان به نامتناهی بودن Q و برخی زیرمجموعه‌های آن براساس آنچه در کلاس نهم یاد گرفته‌اند، پی می‌برند.

درس دوم

متمّم یک مجموعه

اهداف

- ❑ معرفی مفهوم مجموعهٔ مرجع
- ❑ معرفی مفهوم متمّم یک مجموعه
- ❑ آشنایی با مفهوم دو مجموعهٔ جدا از هم
- ❑ آشنایی با اصل شمول و عدم شمول

روش تدریس

این درس با یک مثال ملموس از دنیای واقعی آغاز می‌شود و با بحث در مورد مجموعهٔ کتاب‌های خطی و مجموعهٔ کتاب‌های چاپی یک کتابخانه، مفاهیمی مثل مجموعهٔ مرجع و متمّم یک مجموعه معرفی می‌شود. توصیه می‌شود در کلاس از دانش‌آموزان خواسته شود تا مثال‌های دیگری از این دست ارائه کنند. در فعالیت صفحهٔ ۸، نقش مجموعهٔ مرجع در معرفی یک مجموعه برجسته شده است. در کار در کلاس صفحهٔ ۹ مثال‌های گوناگونی از دنیای واقعی و ریاضی وجود دارد که دانش‌آموزان با انجام آنها می‌توانند مفهوم مجموعهٔ‌مرجع و متمم یک مجموعه را بهتر درک کنند و به نتایج جدیدی هم برسند.

در مورد تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ متناهی، فعالیتی در صفحهٔ ۱۰ آمده است. در گام اوّل، دانش‌آموزان حاصل $n(A \cup B)$ را برای دو مجموعهٔ جدا از هم محاسبه می‌کنند. در قسمت دوم، حاصل آن را در حالت کلی به دست می‌آورند و سپس در کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ از آنها خواسته می‌شود تا مثال‌های مختلفی را در این زمینه حل کنند. نکتهٔ مهم آن است که در این مثال‌ها هم کاربرد فرمول دیده می‌شود و هم استفاده از نمودار ون. در واقع این دو ابزار، هیچ‌کدام بر دیگری ارجحیت ندارند و در این درس، از هر دو روش استفاده شده است. در قسمت سوم «کار در کلاس» مورد بحث، دانش آموزان به کمک مثال و نمودار ون به طور شهودی به این نتیجه می‌رسند که اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$ خواهد بود.

توصیهٔ آموزشی

دانش‌آموزان را محدود و مجبور به استفاده از روشی خاص در حل تکالیف نکنیم و به آنها اجازه دهیم تا روش حلّ مورد علاقهٔ خود را به کاربرند.

درس سوم

الگو و دنباله

اهداف

- ❑ آشنایی با متغیرهای اندیس‌دار
- ❑ توانایی تعمیم در الگوهای مختلف
- ❑ توانایی تشخیص الگوهای خطی و غیرخطی
- ❑ آشنایی با مفهوم دنبالهٔ‌اعداد
- ❑ ارتقای تفکر تصویری
- ❑ مرتبط کردن الگوهای هندسی و عددی به یکدیگر

روش تدریس

برای مبحث الگو، مقدمه‌ای در حاشیهٔ صفحهٔ ۱۴ آمده و در آنجا تعریفی از الگو داده شده است. درس با یک مثال از الگویی آشنا برای دانش‌آموزان آغاز می‌شود. دو هدف برای این مثال مورد نظراست. اوّل آنکه در حین حلّ این مثال، دانش‌آموزان با متغیرهای اندیس‌دار آشنا شوند؛ چرا که در ادامهٔ موضوع از این نمادگذاری با هدف سهولت کار استفاده شده است. دوم اینکه دانش‌آموزان توانایی تعمیم پیدا کنند و بتوانند

جملهٔ عمومی برخی الگوها را به دست آورند. در اینجا نیز تأکید بر راه حل‌های چندگانه است و دانش‌آموزان آزادند تا از هر روشی دست به تعمیم زده و جملهٔ عمومی را بیابند.

در صفحهٔ ۱۶ الگوی خطی تعریف می‌شود و علت نام‌گذاری آنها با این اسم نیز به اندازه‌ای توضیح داده می‌شود که این موضوع به کتاب ریاضی نهم و قسمت معادلهٔ خط از آن کتاب متصل شود. پس از آن با ارائهٔ یک مثال حل شده به کار در کلاس صفحهٔ ۱۷ می‌رسیم که در آن یک الگوی خطی مورد کنکاش قرار می‌گیرد.

مثال‌های ارائه شده در مورد الگوهای غیرخطی این درس، همگی مربوط به الگوهای درجه دوم هستند. این بخش با فعالیت صفحهٔ ۱۷ آغاز می‌شود که در آن یک الگوی هندسی غیرخطی از دو زاویه مورد توجه قرار گرفته و جملهٔ عمومی آن به‌دست می‌آید.

مفهوم دنباله در انتهای این درس ارائه شده و در کاردر کلاس صفحهٔ ۱۹ تقریباً به تفصیل به آن پرداخته شده است. در اینجا دنباله‌های متنوعی ذکر شده است تا دانش‌آموزان جملات بعدی آنها را بنویسند و در برخی موارد جملهٔ عمومی دنباله‌ها را حدس بزنند. در پایان این درس، دانش‌آموزان فرمول مجموع ۱+۲+۳...+n را به دست می‌آورند.

در تمرین‌های این درس، هم الگوهای خطی و هم الگوهای غیر خطی دیده می‌شوند. در مورد تمرین‌های ۳ و ۴ صفحهٔ ۲۰ که در آنها خواسته شده است تا به دنباله‌های داده شده الگوهای هندسی مناسبی نظیر شوند، احتمالاً دانش‌آموزان، نیازمند کمک معلم باشند؛ زیرا در متن درس، عکس این روند مورد توجه بوده است.

توصیهٔ آموزشی

کار حلّ یک مسئله نباید با به‌دست آمدن جواب آخر آن تمام شده تلقی گردد. بهتر است دانش‌آموزان بیاموزند که درستی جواب حاصل را بررسی نمایند. همان‌طور که در مثال حل شدهٔ صفحهٔ ۱۶ این کار انجام پذیرفته است. در این مثال، پس از به دست آمدن جملهٔ اول و قدر نسبت دنباله، جملات دنباله نوشته شده‌اند تا دانش‌آموزان به وضوح ببینند که جملهٔ چهارم و دهم دنباله همان‌گونه که در فرض مسئله آمده بود به ترتیب ۱۷ و ۴۱ هستند.

درس چهارم

دنباله‌های حسابی و هندسی

اهداف

- ❑ تشخیص و شناسایی دنباله‌های حسابی
- ❑ به دست آوردن جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی
- ❑ تشخیص ارتباط بین الگوهای خطی و دنباله‌های حسابی
- ❑ آشنایی با دنبالهٔ هندسی
- ❑ به دست آوردن جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی
- ❑ یافتن نمونه‌هایی از دنباله‌های حسابی و هندسی در برخی پدیده‌های دنیای واقعی

روش تدریس

درس با ایجاد ارتباط با درس قبل آغاز می‌شود. به این معنا که الگوهای خطی که دانش‌آموزان در درس سوم با آنها آشنا شده‌اند، در این درس دنبالهٔ حسابی نامیده شده است. در فعالیت صفحهٔ ۲۱ که مربوط به سال‌های برگزاری مسابقات المپیک در هزارهٔ سوم میلادی می‌باشد، دانش‌آموزان هدایت می‌شوند تا به ساختار جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی در حالت کلی دست یابند.

کار در کلاس صفحهٔ ۲۲ شامل مثال‌های مختلفی از دنبالهٔ حسابی است تا دانش‌آموزان در به دست‌آوردن قدر نسبت و جملهٔ عمومی دنباله‌های حسابی کاملاً ورزیده شوند. نکتهٔ حائز اهمیت در اینجا آن است که به ارتباط بین دنباله‌های حسابی و الگوهای خطی تأکید گردد؛ به این معنا که مثلاً در یافتن جملهٔ عمومی دنباله‌ای مثل ...,۵,۹,۱۳,۱۷ وقتی دانش‌آموز تشخیص می‌دهد که قدرنسبت برابر ۴ است، باید بلافاصله نتیجه بگیرد که جملهٔ عمومی آن به شکل $t_n = ۴n + \square$ می‌باشد و با مقایسهٔ آن با جملهٔ اوّل دنباله به راحتی به جواب $t_n = ۴n + ۱$ دست یابد. به عبارت دیگر لزومی ندارد که دانش‌آموز را مجبور کنیم تا حتماً از فرمول جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی یعنی $t_n = t_۱ + (n-۱)d$ استفاده کند. این مطلب در مثال ابتدای

صفحهٔ ۲۳ نیز مورد توجه بوده است و مثال مزبور به هر دو روش، حل شده است تا دانش‌آموزان روش مطلوب خود را برگزینند.

همچنین در صفحهٔ۲۲ یک مثال کاربردی در ارتباط با انتخاب اپراتور تلفن همراه مناسب آمده است که توصیه می‌شود در تدریس روزانهٔ خود مثال‌هایی از این دست، سهم بیشتری داشته باشند؛ چرا که این‌گونه مثال‌ها برای دانش‌آموزان ملموس‌ترند و به همین دلیل آنها مفاهیم ریاضی نهفته در این مثال‌ها را بهتر فرا می‌گیرند.

کار در کلاس صفحهٔ ۲۳ به واسطهٔ حسابی مربوط می‌شود که این موضوع با مثال‌های متعددی شرح داده شده است. بسیاری از پژوهشگران معتقدند که توجه دادن دانش‌آموزان به ریشه‌های تاریخی مفاهیم ریاضی، می‌تواند انگیزهٔ آنها را در مطالعهٔ این مفاهیم افزایش دهد. در این راستا تمرین ۶ صفحهٔ ۲۴، از پاپیروس رایند انتخاب شده است.

دنبالهٔ هندسی نیز با یک مسئلهٔ روزمره؛ یعنی نحوهٔ انتشار ویروس آنفلوآنزا آغاز می‌شود و دانش‌آموزان در طی فعالیت صفحهٔ ۲۵ به ساختار جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی دست می‌یابند. کار در کلاس صفحهٔ ۲۶ از یک طرف به برخی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد دنبالهٔ هندسی پرداخته است و از طرف دیگر به موضوع نحوهٔ درج واسطهٔ هندسی بین دو عدد.

تمرین‌های صفحهٔ ۲۷ نیز متنوع اند. به عنوان مثال، تمرین۷ این صفحه در ارتباط با تعداد تلفات جاده‌ای کشور است که با وجود میزان بالای آن خوشبختانه در یک دههٔ گذشته سیرنزولی داشته است. توصیه می‌شود دانش‌آموزان تشویق شوند تا با دقت در پیرامون خود، چنین مسائلی را که مرتبط با مفاهیم درسی آنهاست بیابند و در کلاس طرح نمایند.

حلّ تمرین‌های صفحه ۷

۱ فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$V=\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,...\}$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

U یک مجمو مه نامتناهی است.

پ) یک زیر مجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

زیر مجموعه‌های مختلفی می‌توان ارائه کرد؛ به عنوان مثال : $A=\{۱۰,۲۰,۴۰,۱۰۰\}$

ت) دو زیر مجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید، به طوری که $C \subseteq D$

مثال‌های مختلفی می‌توان نوشت ازجمله :

$C = \{۲۰, ۴۰, ۶۰, ۸۰, ...\}$

$D = \{۱۰, ۲۰, ۳۰, ۴۰, ...\}$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶ . متناهی

پ) بازهٔ $\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}\right)$. نامتناهی

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid ۱ < x < ۲\}$ در واقع A برابر مجموعهٔ تهی و لذا متناهی است.

ث) مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰ . نامتناهی.

۳ دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

مجموعه‌های متفاوتی می‌توان مثال زد : مانند $[۰,۱] \cap [۱,+\infty) = \{۱\}$

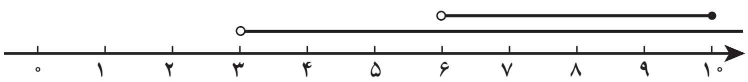
۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید :

با توجه به شکل

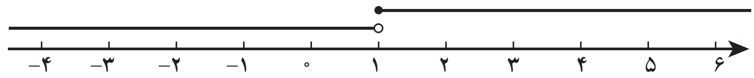
الف) $(-۳,۰) \quad (-۲,۵] ==== (-۳,۵]$

ب) $(-\infty, ۶] \cap (۲,۹) = (۲, ۶]$

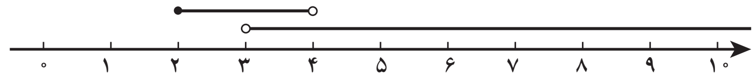
پ) $(۳, +\infty) \cap (۶,۱۰] = (۶, ۱۰]$



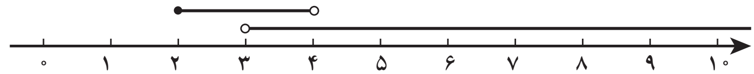
ت) $(-\infty,۱)\cup[۱,+\infty)=\mathbb{R}$



ث) $(۳,+\infty)-[۲,۴]=[۴,+\infty)$

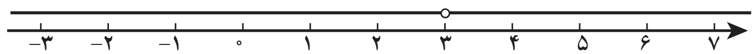


ج) $[۲,۴)-(۳,+\infty)=[۲,۳]$



۵ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

$\mathbb{R}-\{۳\}=(-\infty,۳)\cup(۳,+\infty)$

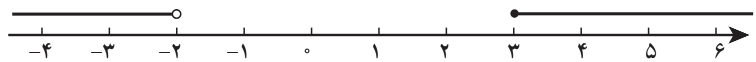


۶ اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ A مجموعه‌ای متناهی خواهد بود.

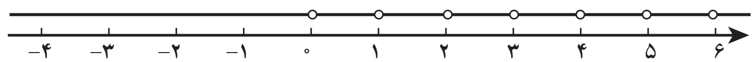
حلّ تمرین‌های صفحه ۱۲

۱ $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید و سپس متمّم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

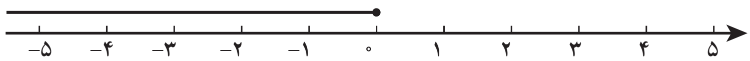
الف) $A=[-۲,۳)\Rightarrow A'=(-\infty,-۲)\cup[۳,+\infty)$



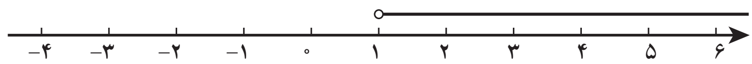
ب) $B=\{۰,۱,۲,۳,۴,...\}\Rightarrow B=\mathbb{R}-\mathbb{W}$



پ) $C=(۰,+\infty)\Rightarrow C'=(-\infty,۰]$



ت) $D=(-\infty,۱]\Rightarrow D'=(۱,+\infty)$



۲ $\mathbb{N}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

مثال‌های مختلفی می‌توان ارائه کرد؛ به عنوان مثال :

$A=\{۱,۳,۵,۷,...\}\ \Rightarrow A'=\{۲,۴,۶,۸,...\}$

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

مثال‌های زیادی وجود دارد؛ مثلاً : $B=\{۵,۶,۷,۸,۹,...\}\ \Rightarrow B'=\{۱,۲,۳,۴\}$

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی ؟

هر زیر مجموعهٔ متناهی و دلخواه از $\mathbb{N}$ مانند C را در نظر بگیریم حتماً C' نامتناهی خواهد شد. به عنوان نمونه

$C=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰۰۰۰۰\}\Rightarrow C'=\{۱۰۰۰۰۰۱,۱۰۰۰۰۰۲,۱۰۰۰۰۰۳,...\}$

۳ اگر $n(A)=۱۵$ ، $n(A\cap B)=۵$ و $n(A\cup B)=۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$۳۰=۱۵+n(B)-۵\Rightarrow n(B)=۲۰$

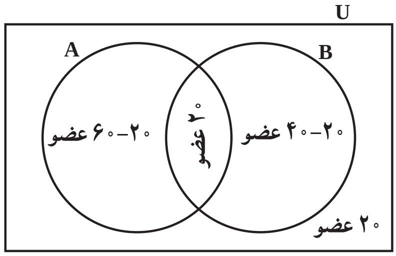
روش دوم : استفاده از نمودار ون

۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به طوری که $n(U)=۱۰۰$ ، $n(A)=۶۰$ ، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$ مطلوب است محاسبه عبارت‌های زیر :

در نمودار ون، دو مجموعه A و B سطح درون U را به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم می‌کنند. اگر از ناحیه مربوط به $A\cap B$ شروع کنیم و عدد مربوط به آن را که ۲۰ می‌باشد بنویسیم، نمودار زیر را خواهیم داشت که به کمک آن می‌توان جواب تمام قسمت‌های این تمرین را به دست آورد.

الف) $n(A\cup B)=۴۰+۲۰+۲۰=۸۰$

ب) $n(A\cap B')=۶۰-۲۰=۴۰$



پ) $n(A'\cap B)=۴۰-۲۰=۲۰$

ت) $n(A'\cap B')=۲۰$

روش دوم : استفاده از فرمول

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است (الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

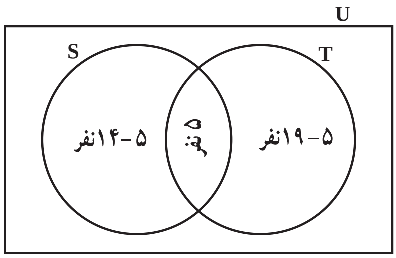
الف) $n(S-T)=n(S)-n(S\cap T)=۱۴-۵=۹$

ب) $n(S\cup T)=n(S)+n(T)-n(S\cap T)$

$=۱۴+۱۹-۵$

$=۲۸$

$n[(S\cup T)']=۳۱-۲۸=۳$



۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۷۵ نفر شان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدّت، از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته :

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

در نمودار ون با شروع از قسمت $(A\cap B)$ و نوشتن تعداد عضوهای هر قسمت، نمودار زیر به دست می‌آید که به کمک آن می‌توان به تمام قسمت‌های تمرین پاسخ داد.

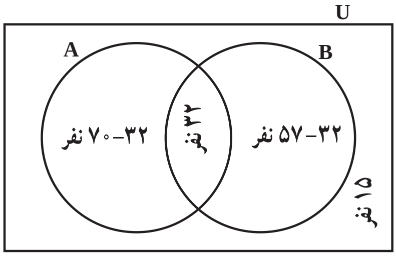
الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=۷۰+۵۷-۳۲=۹۵$$

ب) $n(A-B)=۷۰-۳۲=۳۸$

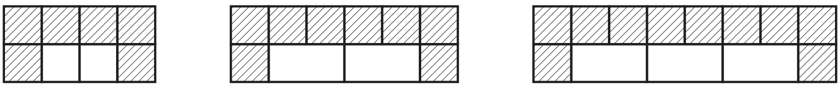
پ) $n(A-B)+n(B-A)=(۷۰-۳۲)+(۵۷-۳۲)=۳۸+۲۵=۶۳$

ت) $n\left[(A\cup B)'\right]=n(U)-n(A\cup B)=۱۱۰-۹۵=۱۵$



حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۲۰

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



۱۰ کاشی تیره، ۳ کاشی سفید — ۸ کاشی تیره ، ۲ کاشی سفید — ۶کاشی تیره ، ۱ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیرهٔ آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره را در هر مرحله به صورت یک دنباله تا جملهٔ هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو، شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

الف) ۱۲ کاشی تیره

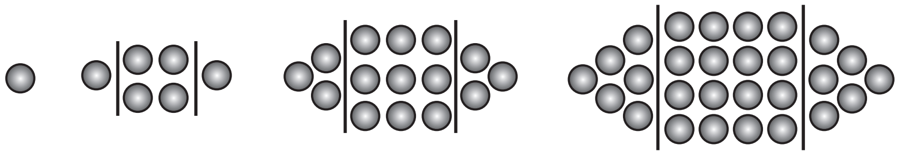
ب) ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و ۱۸

پ) $t_n=۲n+۴$

ت) $t_{۱۰۰}=۲(۱۰۰)+۴=۲۰۴$

ث) $t_۵=۵۰\rightarrow ۲n+۴=۵۰\rightarrow ۲n=۴۶\rightarrow n=۲۳$

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



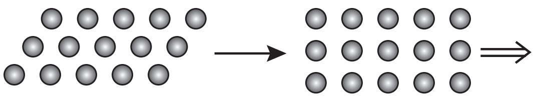
الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

الف) ...,۶۶,۴۵,۲۸,۱۵,۶,۱

ب) مثلاً شکل (۳) را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد.



$t_{۳} = ۳(۳+۲)$

$t_{۴} = ۴(۴+۳)$

$t_{۵} = ۵(۵+۴)$

. . . .

. . . .

. . . .

با ادامه این روند، خواهیم داشت :

$$t_n = n[n+(n-۱)]$$

$$t_n = n(۲n-۱)$$

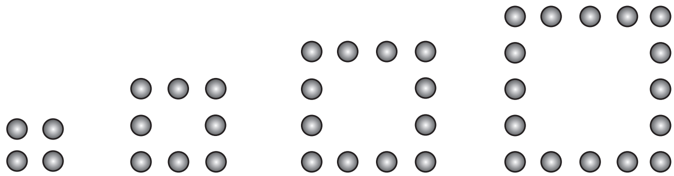
$$\boxed{t_n = ۲n^{۲} - n}$$

روش دوم ب : هر شکل مجموع یک عدد مربعی و دو برابر عدد مثلثی ماقبل آن است.

پ) $t_{۱۰} = ۲(۱۰)^{۲} - ۱۰ = ۱۹۰$

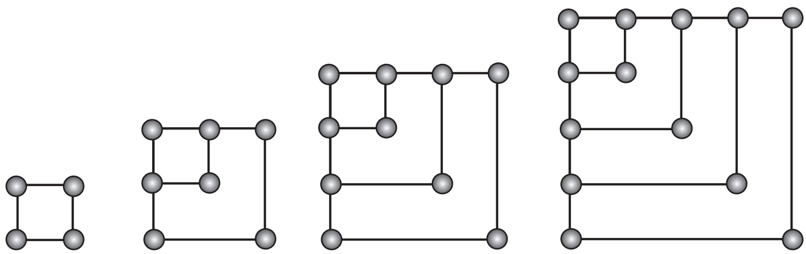
۳ جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جملهٔ اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = ۴n$



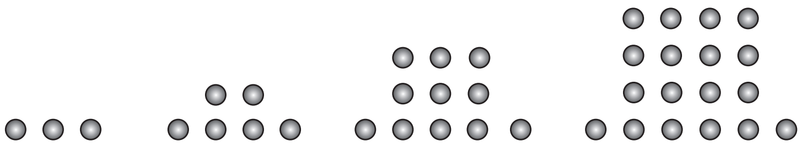
۴ ۸ ۱۲ ۱۶

ب) $b_n = ۳n + ۱$



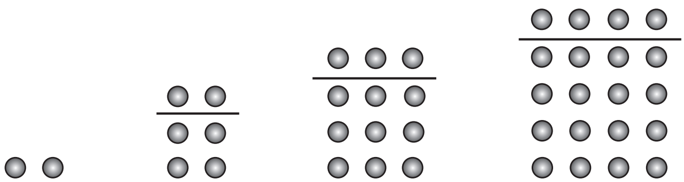
۴ ۷ ۱۰ ۱۳

پ) $c_n = n^۲ + ۲$



۳ ۶ ۱۱ ۱۸

ت) $d_n = n^۲ + n$



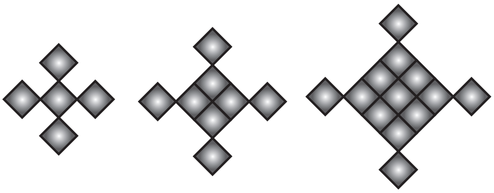
۲ ۶ ۱۲ ۲۰

توجه : برای هر قسمت می‌توان الگوهای هندسی مختلفی ارائه کرد که موارد بالا به عنوان نمونه ارائه شده‌اند.

۴ برای دنباله‌های درجهٔ دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن، جملهٔ عمومی هر دنباله را بیابید.

الف) ۵,۸,۱۳,۲۰,۲۹,... ⇒ (۱+۴) , (۴+۴) , (۹+۴) , (۱۶+۴) ,...

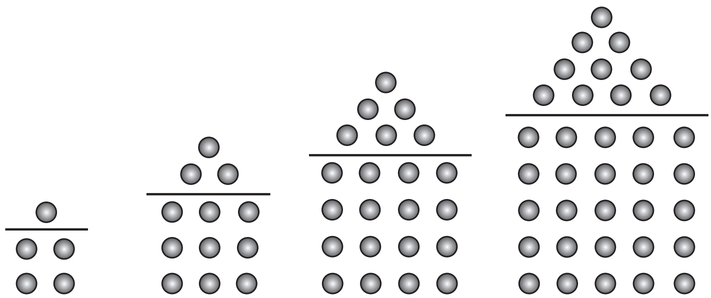
در هر دو قسمت اگر هر جملهٔ دنباله را به‌صورت مجموع یک عدد مربع کامل با عددی دیگر بنویسیم، جملهٔ عمومی آن را می‌توانیم راحت‌تر بیابیم.



$(۱)^۲+۴$ $\quad ۲^۲+۴ \quad ۳^۲+۴$ .... $\Rightarrow \quad t_n+n^۲+۴$

ب) ۵,۱۲,۲۲,۳۵,۵۱,...

⇒ (۴+۱) , (۹+۳) , (۱۶+۶) , (۲۵+۱۰) , ... (مجموع یک عدد مربعی و یک عدد مثلثی)



$(۱+۱)^۲+۱ \quad (۳+۱)^۲+۳ \quad (۳+۱)^۲+۶ \quad (۴+۱)^۲+۱۰ \Longrightarrow t_n = (n+۱)^۲ + \frac{n(n+۱)}{۲}$

$$= (n+۱)\left[(n+۱)+\frac{n}{۲}\right]$$

$$t_n = \frac{(n+۱)(۳n+۲)}{۲}$$

حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۲۴

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) ۳,۱۰,۱۷,۲۴,... $\quad t_{۲۱} = t_۱ + ۲۰d = ۳ + ۲۰(۷) = ۱۴۳$

ب) ...,۱,۲,۴,۸ دنبالهٔ حسابی نیست

پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \ldots \qquad t_{21} = t_1 + 20d = \sqrt{3} + 20(\sqrt{3}) = 21\sqrt{3}$

ت) $10, 7, 4, 1, \ldots \qquad t_{21} = t_1 + 20d = 10 + 20(-3) = -50$

ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \ldots \qquad t_{21} = t_1 + 20d = \frac{2}{5} + 20(\frac{1}{5}) = 4/4$

ج) ....,۲,۲,۲,۲,۲ دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d = 0$ می‌باشد $\Rightarrow t_{21} = 2$

۲ در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به‌دست آوردن جملهٔ اوّل و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$\begin{cases} t_3 = 20 \\ t_7 = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 20 \\ t_1 + 6d = 56 \end{cases} \xRightarrow{\text{تفاضل}} 4d = 36 \rightarrow \boxed{d = 9}, \boxed{t_1 = 2}$$

دنباله $2, 11, \underbrace{20}_{t_3}, 29, 38, 47, \underbrace{56}_{t_7}, 65, \ldots$

۳ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اوّل ۳ و مجموع سه جملهٔ بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

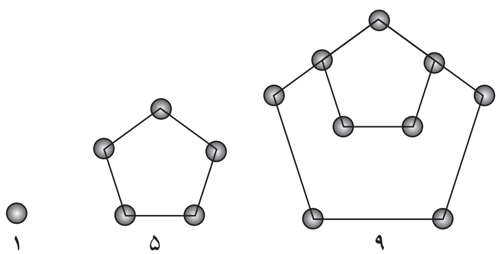
$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3 \\ (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d_1) + (t_1 + 5d) = 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t_1 + 3d = 3 \\ 3t_1 + 12d = 39 \end{cases} \xRightarrow{\text{تفاضل}} 9d = 36 \Rightarrow \boxed{d = 4}, \boxed{t_1 = -3}$$

دنباله: $-3, 1, 5, 9, 13, 17$

۴ الف) دو جملهٔ بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.

ب) جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید.



۱ ۵ ۹

پ) جملهٔ چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

الف) $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ دنبالهٔ حاصل یک دنبالهٔ حسابی است

ب) $t_n = t_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(4) \Rightarrow t_n = 4n - 3$

پ) $t_n = 397 \Rightarrow 4n - 3 = 397 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100$

۵ الف) واسطهٔ حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ب) واسطهٔ حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) دنبالهٔ حسابی $5, \boxed{x}, 11 \Rightarrow t_3 = 11$

$$t_1 + 2d = 11$$

$$5 + 2d = 11 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow x = 8$$

ب) دنبالهٔ حسابی $20, \boxed{x}, 30 \Rightarrow x = 25$

پ) واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و c برابر است با $\frac{a+c}{2}$.

۶ مسئلهٔ زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند و یک سومِ مجموع سه سهم بزرگ‌تر مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».

سهم‌ها : $(x-2d), (x-d), x, (x+d), (x+2d) \xrightarrow{\text{مجموع برابر } 100} 5x = 100 \rightarrow x = 20$

$$\frac{1}{3}[x + (x+d) + (x+2d)] = (x-2d) + (x-d) \longrightarrow x + d = 2x - 3d$$

$\Rightarrow 4d = x \xrightarrow{x=20} d = 5 \Rightarrow$ سهم‌ها $10, 15, 20, 25, 30$

حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۲۷

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدرنسبت آنها را بنویسید.

الف) $7, 28, 112, 448, \ldots$ دنبالهٔ هندسی است $r = 4$

ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \ldots$ $\qquad \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \neq \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow$ دنباله هندسی نیست

پ) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \ldots$ دنبالهٔ هندسی است $r = \frac{-1}{2}$

ت) $5, 5, 5, 5, \ldots$ دنبالهٔ هندسی است $r = 1$

۲ چند دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{۴}{۵}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

به هر تعداد دلخواه می‌توانیم دنبالهٔ هندسی با قدرت نسبت $\frac{۴}{۵}$ بنویسیم. هر عدد حقیقی غیر صفر را می‌توان به عنوان جملهٔ اوّل در نظر گرفت به عنوان مثال :

$$۱\,,\frac{۴}{۵}\,,\frac{۱۶}{۲۵}\,,\frac{۶۴}{۱۲۵}\,,\ldots$$

$$-۱\,,\frac{-۴}{۵}\,,\frac{-۱۶}{۲۵}\,,\frac{-۶۴}{۱۲۵}\,,\ldots$$

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

الف) نادرست است؛ به عنوان مثال، دنبالهٔ زیر نمونه‌ای است از دنباله‌ای که نه حسابی است و نه هندسی.

$$۱\,,\frac{۱}{۲}\,,\frac{۱}{۳}\,,\frac{۱}{۴}\,,\frac{۱}{۵},\ldots$$

ب) نادرست است؛ به عنوان مثال، دنبالهٔ ثابت زیر هم دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت $d=۰$ محسوب می‌شود و هم دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $r=۱$

$$۹,۹,۹\,,۹,\ldots$$

در واقع هر دنبالهٔ ثابت غیرصفر، دنباله‌ای است که هم حسابی و هم هندسی محسوب می‌شود.

۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخهٔ دست دوم در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از سه سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

الف) توجه داریم که چون $t_۱=۵۰۰۰۰۰$ لذا برای یافتن قیمت دوچرخه بعد از گذشت سه سال باید قیمت دوچرخه در آغاز سال چهارم یعنی $t_۴$ را محاسبه کنیم.

$$t_۴=t_۱r^۳=۵۰۰۰۰۰\left(\frac{۸۰}{۱۰۰}\right)^۳=۵۰۰۰۰۰\left(\frac{۶۴}{۱۲۵}\right)=۲۵۶۰۰۰$$

ب) $t_{n+۱}=t_۱r^n=۵۰۰۰۰۰(۰/۸)^n$

روش دوم : می‌توانیم قیمت دوچرخه پس از یک سال را $t_۱$ در نظر بگیریم.

$$t_۱ = ۴۰۰۰۰۰$$

الف) $t_۳ = t_۱ r^۲ = ۴۰۰۰۰۰(\frac{۴}{۵})^۲ = ۴۰۰۰۰۰(\frac{۱۶}{۲۵}) = ۲۵۶۰۰۰$

ب) $t_n = t_۱ r^{n-۱} = ۴۰۰۰۰۰(۰/۸)^{n-۱}$

۵ حاصل ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی مقابل را محاسبه کنید.

$$۲,۴,۸,...$$

$$۲^۱ \times ۲^۲ \times ۲^۳ \times ... \times ۲۰^{۲۰} = ۲^{۱+۲+۳+...+۲۰} = ۲^{\frac{۲۰(۲۰+۱)}{۲}} = ۲^{۲۱۰}$$

۶ جملات سوم و ششم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_۶ = ۹۶ \\ t_۳ = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۶}{t_۳} = \frac{۹۶}{۱۲} \Rightarrow \frac{t_۱ r^۵}{t_۱ r^۲} = ۸ \Rightarrow r^۳ = ۸ \Rightarrow r = ۲$$

$$t_۳ = ۱۲ \Rightarrow t_۱ r^۲ = ۱۲ \Rightarrow t_۱(۲)^۲ = ۱۲ \Rightarrow t_۱ = ۳$$

دنباله : $۳,۶,\underbrace{۱۲}_{t_۳},۲۴,۴۸,\underbrace{۹۶}_{t_۶},۱۹۲,...$

۷ بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد **۲۷۷۵۹** نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهندهٔ حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور به همین سرعت کاهش یابند، الف) پیش بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

ب) اعداد حاصل، چه دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

حلّ الف)

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۸	۱۲۸۳۲	۱۲۱۹۱

حلّ ب) دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $r = ۰/۹۵$ است.

فصل ۲

مثلثات

علم مثلثات متداول امروز، مبتنی بر جیب و ظل است. جیب را به زبان فرانسوی سینوس (sinus) و ظل را تانژانت (Tangente) گویند که اساس آن از علمای اسلام است.

پیش از اسلام یونانیان برای حلّ مسائل نجومی که احتیاج شدید به مثلثات داشتند، شکل دیگری معروف به شکل «قطّاع» را به‌کار می‌بردند که هم در مسطّحات به‌کار می‌آید هم در کره و کتابی که در این زمینه نوشته شده است کتاب اُکَر منلائوس است. منلائوس (Menelaus) اهل اسکندریه و از ریاضی‌دانان نامور یونان است که قبل از میلاد مسیح می‌زیست.

برگرفته شده از مقالهٔ زیر :

بنای مسجد مدینه و قواعد ریاضی مستنبط از آن، که توسط علّامهٔ حسن‌زاده آملی نوشته شده است.[۱]

نگاه کلی به فصل

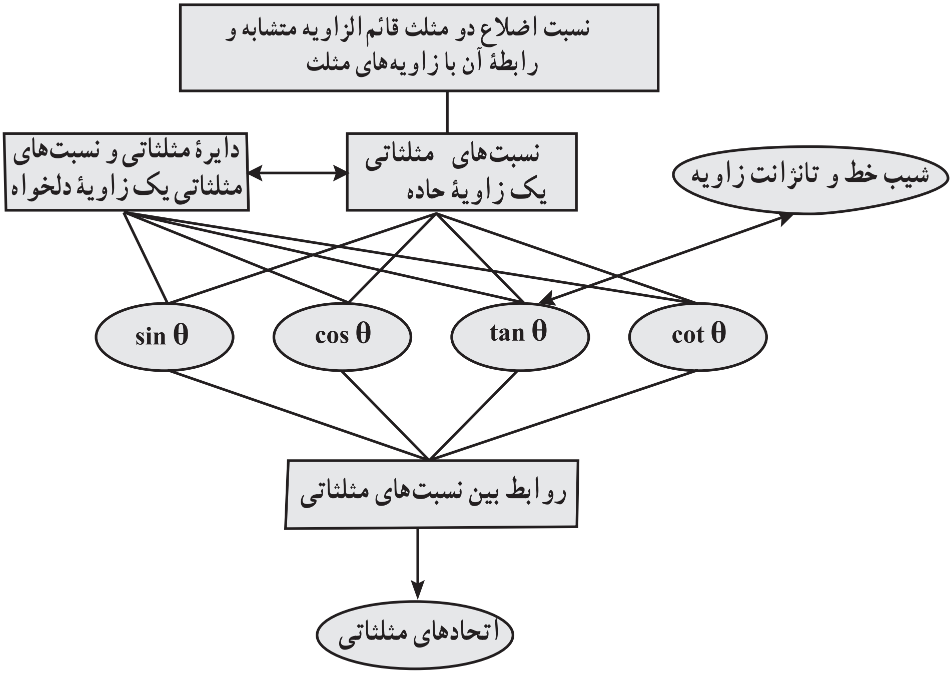
در این فصل، دانش‌آموزان برای اولین بار با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی آشنا می‌شوند. در سال‌های گذشته دانش‌آموزان با مفهوم تشابه و نسبت بین اضلاع، مفاهیم هندسی مثلث، زاویه، مثلث قائم‌الزاویه، رابطهٔ فیثاغورس و همچنین شیب خط آشنا شده‌اند که در این فصل برای درک مفاهیم جدید به آنها نیاز دارند.

در درس اوّل، دانش‌آموزان با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حاده و محاسبهٔ آنها به کمک مثلث‌های قائم‌الزاویه آشنا می‌شوند. محاسبهٔ تقریبی نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با استفاده از رسم آن به کمک خط‌کش و نقّاله و تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی دیگر از مفاهیم این درس است. در درس دوم، دانش‌آموزان با دایرهٔ مثلثاتی و نحوهٔ محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ دلخواه بین ۳۶۰- تا ۳۶۰ درجه روی این دایره آشنا می‌شوند. در ادامه، رابطهٔ بین شیب خط که در سال نهم با آن آشنا شده‌اند و تانژانت زاویهٔ بین خط و جهت مثبت محور طول‌ها آموزش داده می‌شود.

در درس سوم این فصل، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی معرفی شده است و دانش‌آموزان با کسب مهارت در استفاده از این روابط به اثبات اتحادهای مثلثاتی و یافتن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با داشتن یکی از نسبت‌های آن اقدام می‌کنند.

۱ــ حسن حسن‌زاده آملی، بنای مسجد مدینه و قواعد ریاضی مستنبط از آن، وقف میراث جاویدان، شماره ۱۵ و ۱۶ (۱۳۷۵) ۱۶ ــ۷.

نقشهٔ مفهومی


نسبت اضلاع دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه و رابطهٔ آن با زاویه‌های مثلث
دایرهٔ مثلثاتی و نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ دلخواه
نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ حاده
شیب خط و تانژانت زاویه
sin θ
cos θ
tan θ
cot θ
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی
اتحادهای مثلثاتی

درس اوّل

نسبت‌های مثلثاتی

اهداف

❑ آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه، از طریق محاسبهٔ مستقیم.

❑ محاسبهٔ تقریبی نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با استفاده از رسم آن به کمک خط‌کش و نقّاله و تشکیل مثلث قائم‌الزاویه.

❑ ایجاد مهارت در استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در حلّ مسئلهٔ مربوط در زندگی روزمرّه و کار با مقادیر تقریبی.

❑ آشنایی با استفاده از ماشین حساب در محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه.

❑ آشنایی با روش محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° و ۶۰°.

❑ درک این مفهوم که در مثلث‌های متشابه قائم‌الزاویه نسبت اضلاع ثابت است.

ابزارهای مورد نیاز

خط‌کش و نقّاله و ماشین حساب

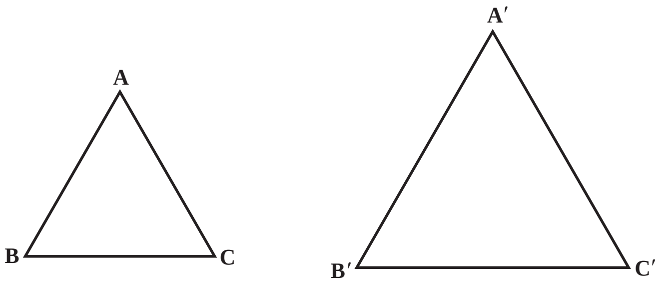
روش تدریس

فصل با یک پیش سازمان‌دهنده شروع می‌شود که اهمیت مثلثات را برای دانش‌آموزان یادآور می‌شود. در اینجا نکتهٔ بسیار مهم این است که چرا باید مثلثات بخوانیم و قبل از هر چیز، لازم است اهمیت موضوع برای دانش‌آموزان به‌خوبی بیان شود. کاربردهایی که در این درس به آن اشاره شده است در علوم مهندسی،

عمران، نجوم و یادآوری کاربردهای دیگر، می‌تواند برای مهم جلوه دادن اهمیت موضوع بیان شود. به‌عنوان یک مسئله مهم می‌توان به جهت قبله و زاویه مربوطه پرداخته شود که در آن اهمیت زاویهٔ نسبت‌های مثلثاتی به‌خوبی قابل مشاهده است.

پس از بیان اهمیت موضوع و درک این مطلب که چرا به مثلثات نیاز داریم، مسئلهٔ اصلی چگونگی ورود به این موضوع است. آنچه دانش‌آموزان تا سال نهم با آن آشنا هستند، مفهوم زاویه و تشابه است که در سال نهم با مفهوم تشابه دو n ضلعی و در حالت خاص، تشابه دو مثلث آشنا شده‌اند. از آنجا که این کتاب مشترک بین دانش‌آموزان علوم ریاضی و تجربی است و دانش‌آموزان پایهٔ دهم علوم تجربی کتابی مربوط به هندسه ندارند، لذا سعی شده است که از مطالب اضافی صرف‌نظر گردد و با حفظ رابطهٔ طولی با مطالب سال‌های قبل و با توجه به اطلاعات علمی دانش‌آموزان این پایه، مطالب به‌صورتی کاملاً ساده و قابل فهم برای هر دو گروه از دانش‌آموزان بیان شود. موضوع مهم در این قسمت این است که دانش‌آموزان رابطهٔ تالس را نمی‌دانند و نباید در این فصل به آن پرداخته شود و تنها از تشابه که در سال نهم با آن آشنا شده‌اند استفاده شود. بنابراین، در اینجا سعی بر این است که با استفاده از تشابه، نسبت‌های مورد نیاز بین اضلاع دو مثلث داده شده را به‌دست آوریم بدون اینکه از رابطهٔ تالس نامی بیاوریم. یکی از مواردی که دانش‌آموزان در مورد تشابه می‌دانند این است که «دو مثلث متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز باهم برابرند.»

با توجه به این نکته برای دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ در شکل زیر داریم :



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \quad \text{و} \quad \hat{A}=\hat{A'},\ \hat{B}=\hat{B'},\ \hat{C}=\hat{C'}$$

اکنون به سادگی می‌توان دید که اگر به‌عنوان مثال : $\hat{A}=\hat{A'}$ و $\hat{B}=\hat{B'}$، آن‌گاه $\hat{C}=\hat{C'}$؛ زیرا

$$\hat{C}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{B})$$
$$=۱۸۰-(\hat{A'}+\hat{B'})=\hat{C'}$$

بنابراین، هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر با هم برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث بنا به حالت سه زاویه برابر با هم متشابه‌اند. یکی از کاربردهای مهم این مطلب در مثلث‌های قائم‌الزاویه است؛ یعنی اگر ΔABC و $\Delta A'B'C'$ قائم‌الزاویه باشند و $\hat{B} = \hat{B'} = 90^\circ$، در این صورت اگر $\hat{A} = \hat{A'}$، آن‌گاه $\hat{C} = \hat{C'}$ و از این‌رو، دو مثلث با هم متشابه‌اند.

هدف فعالیت صفحهٔ ۳۵

۱ استفاده از نکته بالا در پیدا کردن موارد خواسته شده است. به‌عبارت دیگر چون $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ قائم‌الزاویه‌اند و $\hat{A} = \hat{A'}$ پس دو مثلث متشابه‌اند و برابری نسبت اضلاع نظیر به‌صورت زیر است:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۲ هدف این فعالیت، استفاده از روابط موجود در فعالیت ۱ و نوشتن تساوی نسبت‌ها در یک مثلث است. به‌عبارت دیگر، از اینکه $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ می توان نتیجه گرفت $AC.A'B' = AB.A'C'$ (زیرا اندازهٔ اضلاع ناصفر هستند). در نتیجه به سادگی چون اندازه‌ها غیر صفر هستند، داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

یا اینکه می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$ یا $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$.

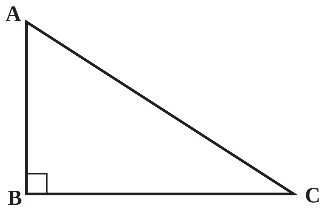
هدف این تساوی‌ها با این ترتیب گفته شده، تعریف نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت است. بنابراین، هدف فعالیت ۲ معرفی مفهوم تانژانت است.

هدف کار در کلاس نیز تعمیق و تثبیت فعالیت بالاست و در این قسمت ثابت می‌شود که نسبت‌های اندازه‌گیری شده (در مثلث قائم‌الزاویه) همگی ثابت هستند و این نسبت را تانژانت می‌نامیم.

قابل توجه است که با هدایت فعالیت ۲ می‌توانستیم ابتدا سینوس یا کسینوس را تعریف کنیم و اگر چه از نظر تاریخی تانژانت زودتر از بقیه نسبت‌ها کاربرد داشته است، ولی انتخاب تانژانت کاملاً سلیقه‌ای بوده است و آنچه اهمیت دارد این است که برای تعریف سینوس و کسینوس می‌بایست کار در کلاس ۲ به‌کار گرفته شود. با توجه به اینکه در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$،

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ } A} = \frac{BC}{AB}$$

می‌توان کتانژانت را هم تعریف کرد و از این رو $\frac{AB}{BC} = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{ضلع مقابل به زاویهٔ A}} = \cot A$.



به سادگی می‌توان دید،

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{\frac{BC}{AB}} = \frac{۱}{\tan A}$$

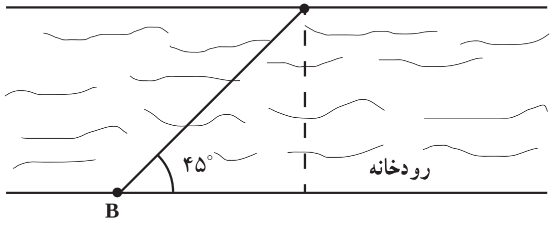
یا به‌طور معادل $\tan A . \cot A = ۱$.

توضیح این مطلب که در چه مواقعی $\tan A = ۰$ است، بسیار مهم است و از دبیران محترم تقاضا می‌شود که تا معرفی نسبت‌های مثلثاتی و حلّ مثال صفحه ۷۰ شکیبا باشند.

توصیه‌های آموزشی

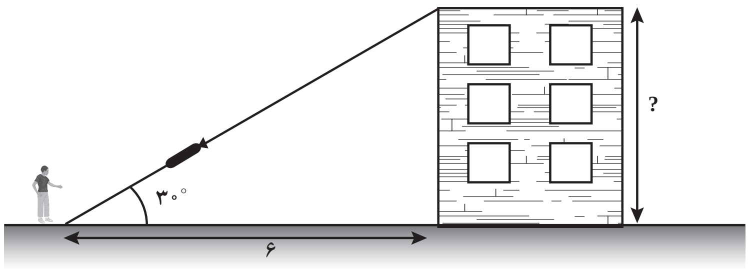
پیشنهاد می‌شود قبل از انجام فعالیت صفحهٔ ۳۱، کاربردهایی از تانژانت ارائه شود. مطالبی که در ابتدای این فصل در صفحهٔ تصویر عنوانی در مورد بنای تاریخی مسجد مدینه آمده است یا هر بنای تاریخی دیگر می‌تواند جالب باشد. همچنین توضیحی برای حلّ مسئله زیر نیز می‌تواند جالب باشد. طنابی به‌صورت زیر از یک طرف رودخانه به طرف دیگر طوری متصل شده است که طناب AB با سطح زمین زاویهٔ ۴۵° تشکیل داده است.

چگونه می‌توان عرض رودخانه را محاسبه کرد؟



یا مسئلهٔ زیر :

فاصلهٔ علی تا پای یک ساختمان ۶ متر است. او با استفاده از یک دستگاه لیزر، با زاویهٔ ۳۰ درجه نوک ساختمان را مورد هدف قرار داده است، چگونه می‌توان ارتفاع ساختمان را اندازه‌گیری کرد؟

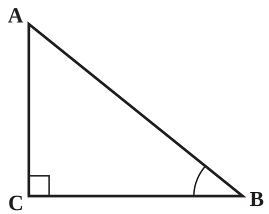


یکی دیگر از مسائلی که در اینجا می‌توان به آن اشاره کرد مسئلهٔ محل فرود هواپیماست که با استفاده از اندازه‌گیری تانژانت زاویه هواپیما با افق قابل حل است.

هدف فعالیت صفحهٔ ۳۱

۱ هدف، اندازه‌گیری تانژانت و کتانژانت زوایای داده شده به‌طور مستقیم و با اندازه‌گیری طول اضلاع است. نکتهٔ قابل توجه اینکه، چون هنوز روابطی برای اندازه‌گیری تانژانت و کتانژانت بیان نشده است، طول اضلاع همهٔ مثلث‌ها واقعی‌اند و به‌عنوان یک فعالیت می‌توان مسئله زیر را هم اضافه کرد.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC در شکل زیر با اندازه‌گیری طول اضلاع مربوطه، تانژانت و کتانژانت زاویه B را به‌دست آورید.

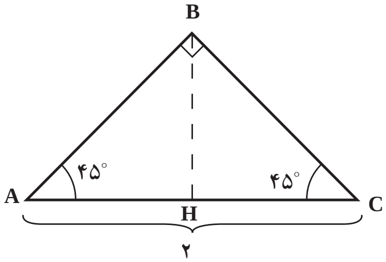


در فعالیت ۲ هدف، پیدا کردن تانژانت و کتانژانت زوایای °۳۰، °۶۰ و °۴۵ است. نکتهٔ قابل توجه اینکه، شما می‌توانید از یک مثلث قائم‌الزاویه برای حلّ این مسئله استفاده کنید، ولی کارکردن با مثلث متساوی‌الاضلاع هم برخی از ویژگی‌های این مثلث را یادآوری می‌کند و هم دانش‌آموز با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، خود، طول اضلاع لازم را به‌دست می‌آورد.

برای حلّ قسمت (پ) از فعالیت ۲ از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین کمک گرفته می‌شود، ولی دانش‌آموزان در مثال حل‌شده صفحهٔ ۳۲ با استفاده از روابط موجود در یک مربع، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵° را محاسبه خواهند کرد. برای حلّ قسمت (پ) مطابق زیر عمل می کنیم :

ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، به‌صورت زیر با وتری به طول ۲ واحد رسم می‌کنیم، از آنجایی که ارتفاع BH همان میانه ضلع ACاست، پس AH=۱ و چون مثلث ABH، متساوی‌الساقین است، پس AH=BH=۱. اکنون با استفاده از تعریف تانژانت داریم :

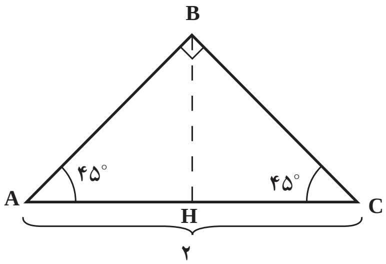
$$\tan ۴۵^\circ = \tan A = \frac{BH}{AH} = \frac{۱}{۱} = ۱$$



اشتباهات رایج

یکی از بدفهمی‌های رایج در بین دانش‌آموزان این مقطع، این است که دانش‌آموز، تعاریف را به‌خوبی درک نکرده است. به مثال زیر توجه کنید.

معلم : با توجه به شکل، تانژانت و کتانژانت زاویه ۴۵° را محاسبه کنید.



راه حلّ محمدمهدی :

ابتدا ارتفاع BH را رسم کرده و چون BH میانه $\overset{\Delta}{ABC}$ نیز هست پس، AH=BH و از این‌رو :

$$\tan ۴۵^\circ = \tan A = \frac{BH}{AH} = ۱$$

راه حلّ علی :

$$\tan ۴۵^\circ = \tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A} = \frac{BC}{AC}$$

اکنون چون ارتفاع BH میانه است پس AH=BH و از این رو :

$$BC^۲ = AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ = ۲AH^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۲}AH$$

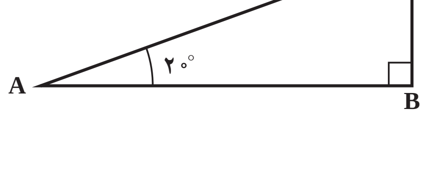
$$\Rightarrow \tan ۴۵^\circ = \tan A = \frac{\sqrt{۲}AH}{AC} = \frac{\sqrt{۲}AH}{۲AH} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}.$$

به سادگی می‌توان دید پاسخ علی به این دلیل غلط است که مفهوم ضلع مقابل و ضلع مجاور به زاویهٔ A را درک نکرده است.

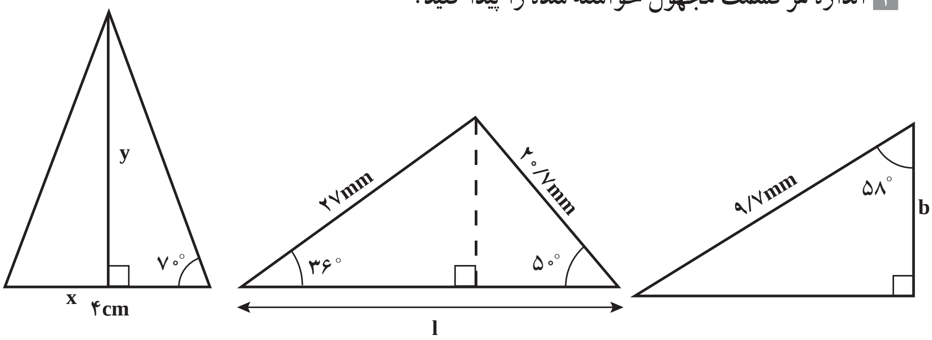
در ادامهٔ مطالب صفحهٔ ۳۱ مفاهیم سینوس و کسینوس تعریف شده‌اند و همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، در این قسمت باید فعالیت صفحهٔ ۳۰ تکرار شود. در ادامه نسبت‌های مثلثاتی تعریف می‌شوند.

در ابتدای صفحهٔ ۳۲ یک مثال حل شده داریم که نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵° به‌دست آمده است و در کار در کلاس بعدی، از دانش‌آموز خواسته شده است تا نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° را به‌دست آورند. نکتهٔ مهم این است که این کار در کلاس دقیقاً باید همانند فعالیت حل شود و از پر کردن جدول بدون کاروَرزی لازم اجتناب شود. حفظ کردن اعداد جدول وقتی ارزشمند است که دانش‌آموز خود این اعداد را به‌دست آورد. حلّ مثال‌های زیر می‌توانند مفید باشند :

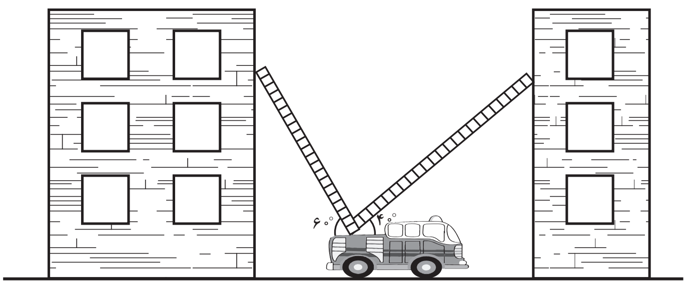
۱ یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه چنان رسم کنید که $\hat{A} = ۲۰^\circ$. با محاسبهٔ طول اضلاع مثلث نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۰° را (با استفاده از ماشین حساب) به‌دست آورید.



۲ اندازهٔ هر قسمت مجهول خواسته شده را پیدا کنید.



۳ دو نردبان ۱۰ متری به‌صورت زیر به دو ساختمان مطابق شکل، تکیه داده‌اند. این دو ساختمان با هم چقدر فاصله دارند؟

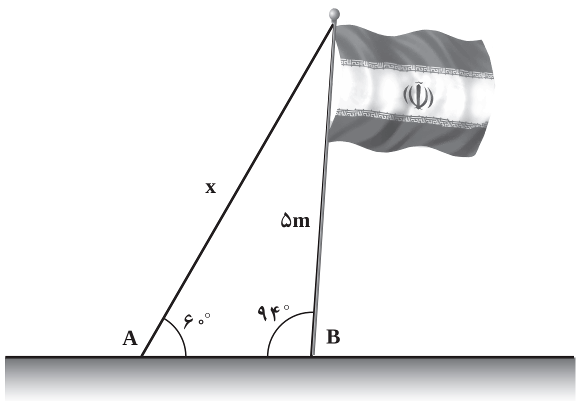


۴ زاویهٔ میلهٔ پنج متری پرچم جمهوری اسلامی ایران با زمین °۹۴ است. طنابی به بالای میله بسته شده و آن را در نقطهٔ A به زمین متصل می‌کند.

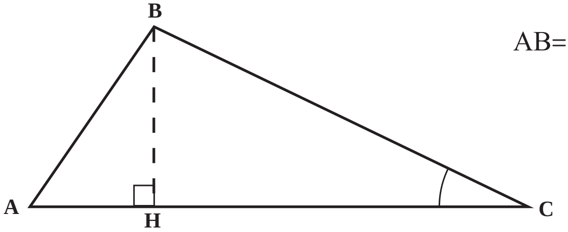
الف) طناب با زمین زاویهٔ °۶۰ می‌سازد. طول آن را حساب کنید.

ب) فاصلهٔ بین A و B را پیدا کنید.

ج) اگر پرچم را به زمین عمود کنیم طول طناب چقدر خواهد شد؟



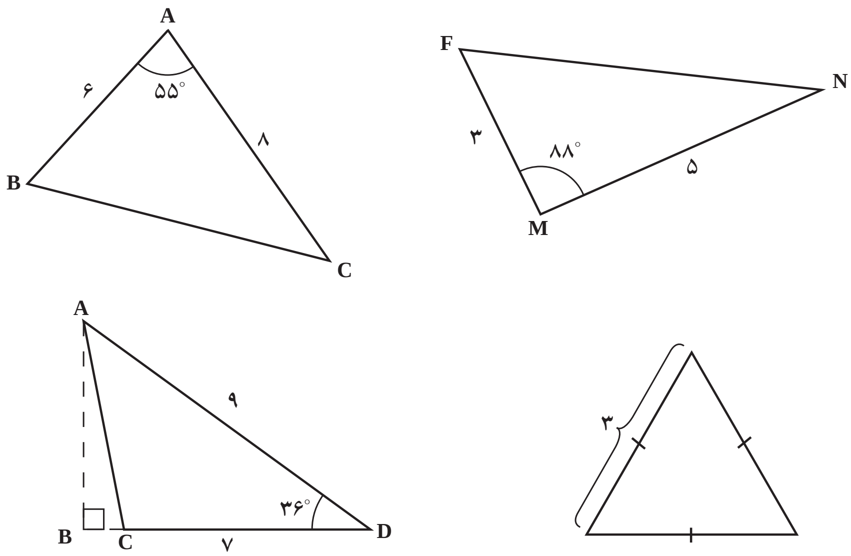
۵ در شکل زیر BC=۲BH و AB=۲AH



اندازهٔ زاویه‌های A، B و C را به‌دست آورید.

هدف مثال‌های صفحهٔ ۳۳ در راستای تعمیق و تثبیت مفاهیم نسبت‌های مثلثاتی و استفاده از آنها در حلّ مسائل واقعی است. یکی از این کاربردها، پیدا کردن مساحت یک مثلث دلخواه با داشتن دو ضلع از یک مثلث و اندازه زاویهٔ بین آنهاست که این مطلب در کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۳۴ نشان داده شده است. شما می‌توانید فعالیت‌های زیر را نیز اضافه کنید:

۱ مساحت هر مثلث را به‌دست آورید (تا ۲ رقم اعشار).



درس دوم

دایرهٔ مثلثاتی

اهداف

- ❑ آشنایی با دایرهٔ مثلثاتی.
- ❑ آشنایی با زاویه‌های مثبت و منفی در بازهٔ -360° تا 360°.
- ❑ محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی زاویه‌های منفرجه به کمک دایرهٔ مثلثاتی.
- ❑ محاسبهٔ سایر نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با داشتن اندازهٔ سینوس یا کسینوس آن زاویه.
- ❑ ایجاد مهارت در استفاده از دایرهٔ مثلثاتی در تعیین محل یک زاویهٔ مشخص در نواحی چهارگانه.
- ❑ آشنایی با رابطهٔ بین شیب‌خط با تانژانت زاویه.

این درس بدون یک مسئلهٔ کاربردی شروع شده است، ولی می‌توان با مثال‌هایی مثل چرخش زمین، چرخ و فلک یا چرخش هستهٔ اتم ذهن دانش‌آموز را برای لزوم آشنایی با زاویه‌های علامت‌دار و زاویه‌های بیش از ۱۸۰ درجه آماده کرد.

توصیه‌های آموزشی

در این قسمت می‌توان یک زاویهٔ حادّهٔ دلخواه رسم کرد و بعد با ثابت نگه‌داشتن یک ضلع و چرخش ضلع دیگر زاویهٔ حول آن، دایره‌ای ایجاد کرد که ابتدا لزومی ندارد شعاع آن یک باشد. بعد به تعریف کتاب مراجعه کنید و به شکل استاندارد برای این دایره، شعاع یک را تعریف نمایید.

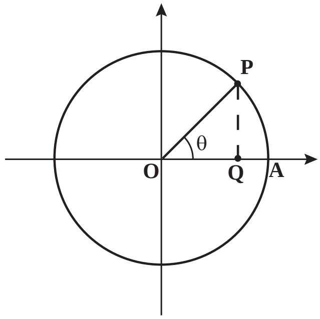
بعد از تعریف یک زاویه با اندازه‌های مثبت و منفی، در فعالیت، سؤال‌هایی برای درک بهتر و ایجاد مهارت آورده شده است.

اشتباهات رایج

در ابتدای این درس، دایره مثلثاتی معرفی می‌شود. اکنون فرض کنید $P(x\,,y)$ نقطه‌ای دلخواه، غیر از مبدأ روی این دایره دلخواه انتخاب شود و زاویهٔ AOP مساوی θ باشد. به سادگی می‌توان دید :

$$\sin\theta=\frac{PQ}{OP}=PQ$$

$$\cos\theta=\frac{OQ}{OP}=OQ$$



از آنجایی که اندازهٔ PQ و OQ به‌ترتیب با y و x برابرند؛ بنابراین داریم :

$x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$

و از این‌رو $P(x\,,y)=(\cos\theta\,,\sin\theta)$، بنابراین، هر نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی را می‌توان با $\cos\theta$ و $\sin\theta$ متناظر کرد.

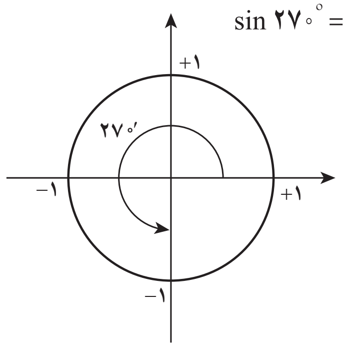
هدف فعالیت، مهم جلوه کردن این موضوع است و کار در کلاس در راستای همین موضوع طراحی شده است. در کار در کلاس ۲ توضیح داده می‌شود : وقتی که می‌گوییم زاویهٔ α در ناحیهٔ مثلثاتی اوّل، دوم، سوم یا چهارم قرار دارد، در واقع انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α در یکی از نواحی بالا قرار دارد.

هدف از مثال صفحهٔ ۳۷، معرفی نسبت‌های مثلثاتی °۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰، °۳۶۰ است. دقت کنید که در مواردی مثل °cot ۰ که حاصل کسر $\frac{\text{عدد}}{0}$ تعریف نشده است، نسبت مثلثاتی مربوطه تعریف نشده است. بنابراین، با حل کار در کلاس صفحهٔ ۳۸ جدول به‌صورت زیر کامل می‌شود :

مقدار	°۰	°۹۰	°۱۸۰	°۲۷۰	°۳۶۰
$\sin\theta$	۰	۱	۰	۱ –	۰
$\cos\theta$	۱	۰	۱ –	۰	۱
$\tan\theta$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

به‌عنوان مثال، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۷۰° به‌صورت زیر محاسبه شده‌اند :

$\sin ۲۷۰^{\circ} = y = -۱$ و $\cos ۲۷۰^{\circ} = x = ۰$



بنابراین :

تعریف نشده $= \frac{-۱}{۰} = \frac{\sin ۲۷۰}{\cos ۲۷۰} = \tan ۲۷۰^{\circ}$ و $\cot ۲۷۰^{\circ} = \frac{\cos ۲۷۰}{\sin ۲۷۰} = \frac{۰}{-۱} = ۰$.

هدف فعالیت صفحهٔ ۳۸

اگر زاویهٔ θ به غیر از ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰° باشد، آن‌گاه علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ در چهار ربع به‌صورت زیر است :

مقدار	ربع اوّل	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin \theta$	+	+	−	−
$\cos \theta$	+	−	−	+
$\tan \theta$	+	−	+	−
$\cot \theta$	+	−	+	−

هدف از مثال صفحهٔ ۳۸ این است که اگر یکی از نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ و ناحیه‌ای که θ در آن قرار دارد را بدانیم، آن‌گاه می‌توانیم سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنیم. به‌عنوان مثال، اگر $\sin \theta = \frac{۲}{۷}$ ، آن‌گاه چون علامت $\sin \theta$ مثبت است پس با توجه به جدول بالا θ در ربع اوّل یا دوم قرار دارد، بسته به اینکه θ در کدام ربع باشد، علامت سایر نسبت‌های مثلثاتی فرق خواهند کرد. اگر در مثال حل‌شدهٔ کتاب θ در ربع اوّل قرار گیرد، آن‌گاه نسبت‌های مثلثاتی θ به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند :

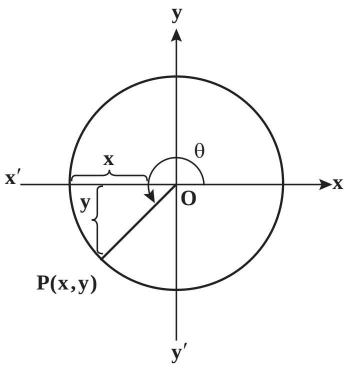
$$\sin \theta = \frac{۲}{۷} = y \Rightarrow y = \frac{۲}{۷}$$

از طرفی می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی $x^۲+y^۲=۱$ پس $x^۲=۱-\frac{۴}{۴۹}=\frac{۴۵}{۴۹}$ یعنی $x=\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}$؛ زیرا در ناحیهٔ اوّل $x>۰$. پس $\cos\theta=x=\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}$ و در نتیجه داریم :

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{۲}{۷}}{\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}}=\frac{۲}{۳\sqrt{۵}} \quad \text{و} \quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}}{\frac{۲}{۷}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

حلّ فعالیت ۱ صفحهٔ ۳۹

۱ فرض کنیم نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری که $\cos\theta=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد؛ بنابراین، چون $x^۲+y^۲=۱$، پس $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+y^۲=۱$ و از این‌رو $\frac{۱}{۲}+y^۲=۱$ و در نتیجه $y^۲=\frac{۱}{۲}$. چون در ناحیهٔ سوم y منفی است، پس $y=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و از این‌رو $\sin\theta=y=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$.



الف) مختصات نقطهٔ P برابر است با : $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{-\sqrt{۲}}{۲})$.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ به‌صورت زیر قابل محاسبه است :

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱ \quad \text{و} \quad \cot\theta=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱$$

۲ اگر $\cos\alpha = \frac{-۲}{۵}$ ، آن‌گاه چون کسینوس زاویهٔ α منفی است، طبق جدول علامت نواحی مثلثاتی α می‌تواند در ربع دوم یا سوم قرار بگیرد.

۳ زاویه‌ای که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت است یک زاویه در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی است، پس مسئله یک مسئلهٔ باز پاسخ است و جواب‌های متعددی دارد.

حل مسائل زیر در این قسمت پیشنهاد می‌شود :

- اگر $\sin\alpha = \frac{-۲}{۳}$ ، انتهای کمان روبه‌روی زاویهٔ α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟
- اگر $\tan^{۳}\alpha = \frac{۲}{۳}$ آن‌گاه α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟
- بیشترین و کمترین مقدار عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

$$۳+۲\sin\theta \qquad\qquad ۱-۲\cos\theta$$

۴ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم‌علامت باشند θ در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه

دانش‌آموزان در سال گذشته با مفهوم شیب خط و علامت آن آشنا شده‌اند. هدف فعالیت صفحهٔ ۴۰ این است که نشان دهد اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه $\tan\alpha$= شیب خط.

نکتهٔ مهم در این فعالیت این است که اندازهٔ زاویهٔ مورد نظر ممکن است بیشتر از ۹۰° باشد و از این رو، باید علامت تانژانت نیز در نظر گرفته شود؛ زیرا در ناحیهٔ دوم مثلثاتی علامت تانژانت منفی است.

فعالیت کمکی ۱

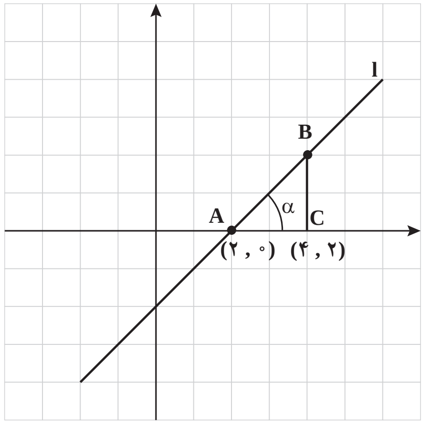
الف) معادله خط را به‌دست آورید.

حل

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{۲-۰}{۴-۰} = ۱$$

اکنون

$$y-۰ = ۱(x-۲) \Rightarrow y = x-۲$$



ب) تانژانت زاویهٔ α را پیدا کنید. (اندازهٔ زاویه α مهم نیست).

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۲}{۲} = ۱ = \text{شیب خط}$$

ج) معادلهٔ خط را با توجه به اینکه شیب خط با تانژانت زاویهٔ α برابر است، به‌دست آورید.

$m=\tan\alpha$ و $y-y_۰=m(x-x_۰)$

از این رو :
$$y = ۰ + ۱(x-۲) = x-۲$$

که همان نتیجهٔ قسمت (الف) به‌دست می‌آید.

حلّ کار در کلاس صفحهٔ ۴۰

فعالیت بالا را برای خط‌های زیر تکرار کنید :

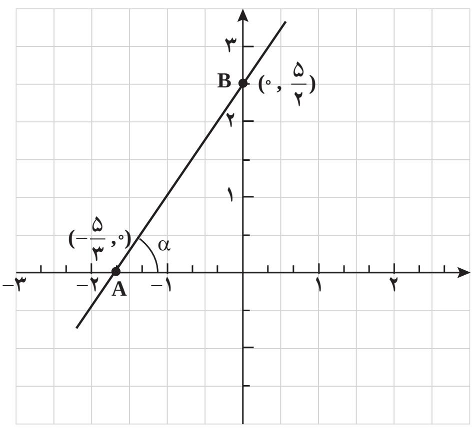
ابتدا نقاط کمکی روی خط به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

الف) $۲y - ۳x = ۵$

$$x = ۰ \Rightarrow ۲y = ۵ \rightarrow y = \frac{۵}{۲}$$

$$y = ۰ \Rightarrow -۳x = ۵ \rightarrow x = \frac{-۵}{۳}$$

پس نقاط $(۰ , \frac{۵}{۲})$ و $(\frac{-۵}{۳},۰)$ روی خط قرار دارند.



بنابراین، شیب خط برابر است با :

$$m=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{\frac{۵}{۲}-۰}{۰+\frac{۵}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۳}{۲}=m \text{ شیب خط}$$

ب) x+y=۲

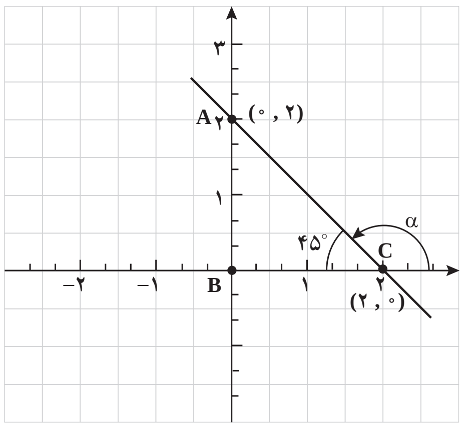
بنابراین، معادله خط برابر است با :

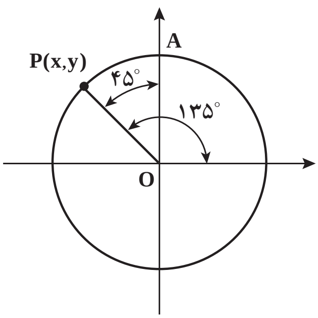
$$y=\frac{۳}{۲}(x+\frac{۵}{۳})$$

و از این‌رو : ۲y=۳x +۵ یا ۲y– ۳x=۵

به سادگی می‌توان دید نقاط کمکی روی این خط (۲و۰) و (۰و۲) هستند. پس شیب خط برابر است با :

$$m=\frac{۲-۰}{۰-۲}=-۱$$





از طرفی زاویه‌ای که α با جهت مثبت محور xها می‌سازد یک زاویهٔ منفرجه است. چون $\alpha=۱۳۵^\circ$ در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارد، علامت آن منفی است. اکنون مختصات نقطهٔ p(x,y) را روی دایرهٔ مثلثاتی به‌دست می‌آوریم.

ابتدا چون زاویهٔ $OAP=۴۵^\circ$ سپس چون $x=y$ و اینکه $x^۲+y^۲=۱$، نتیجه می‌گیریم.

$$۲x^۲=۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad y=\frac{+۱}{\sqrt{۲}}=\frac{+\sqrt{۲}}{۲}$$

از این رو :

$$\tan\alpha=\frac{\sin ۱۳۵}{\cos ۱۳۵}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}}{۲}}=-۱$$

در نتیجه $-۱=\tan\alpha=$ شیب خط.

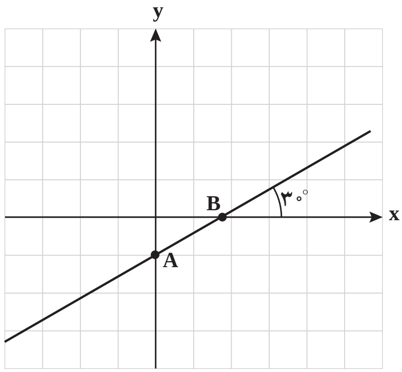
۲ معادلهٔ خطی که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۳۰° است و از نقطهٔ $(۰ و ۱)$ می‌گذرد.

حل. چون زاویه α با جهت مثبت محور x مد نظر است، پس

$$\text{شیب خط}=\tan ۳۰=\frac{۱/۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

و از این رو :

$$y-۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۱) \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



دقت کنید اگر در حلّ این تمرین جهت مثبت محور xها در نظر گرفته نشود، آن‌گاه نمودار خط به‌صورت زیر است و چون زاویهٔ α در ناحیه دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد، پس

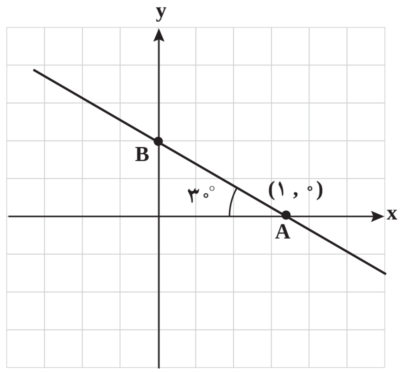
$$\text{شیب خط} = -\tan ۳۰ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

و از این رو، معادلهٔ خط برابر است با :

$$y - ۰ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}(x-۱) = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پس

$$y = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۴۰

۸ به سادگی با استفاده از خطوط موازی می‌توان نتیجه گرفت زاویهٔ خط را با جهت مثبت محور xها برابر با °۶۰ است و شیب خط $= \sqrt{۳} = \tan ۶۰$. اکنون چون (۳-,۰) یک نقطهٔ کمکی است، پس داریم :

معادله خط $y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۳ = \sqrt{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۳$

درس سوم

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

اهداف

❑ آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

❑ کسب مهارت در محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مانند α با استفاده از روابط مثلثاتی و داشتن یکی از نسبت‌های مثلثاتی

❑ توانایی استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی در تعیین درستی یا نادرستی یک رابطه مثلثاتی.

روش تدریس

دانش‌آموزان در سال گذشته با چند اتحاد جبری و تعریف کلّی اتحاد آشنا شده‌اند می‌توان درس را با یادآوری مفهوم اتحاد جبری آغاز کرد.

با انجام فعّالیت اوّل، دانش‌آموزان به سمت کشف رابطه $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ هدایت می‌شوند.

در ادامهٔ درس، دانش‌آموزان مهارت استفاده از این رابطه را در محاسبهٔ سایر نسبت‌های مثلثاتی کسب کرده و آن را با انجام کار در کلاس و مثال مربوط به آن فرا می‌گیرند. همچنین، با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$، می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$\tan^۲\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \quad \text{و} \quad \cot^۲\alpha+۱=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

اشتباهات رایج

دانش‌آموزان بدون توجه به زاویهٔ α در رابطهٔ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ رابطه‌ای مانند $\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ$ را نیز برابر یک در نظر می‌گیرند.

توصیه‌های آموزشی

می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا رابطهٔ مورد نظر را روی دایرهٔ مثلثاتی به ازای هر زاویهٔ دلخواه نیز اثبات کنند.

این درس با یک فعالیت آغاز می‌شود که این فعالیت یادآوری نسبت‌های مثلثاتی است و در ادامه، روابط بین نسبت‌های مثلثاتی را مورد بحث قرار می‌دهد. در ابتدا درستی رابطهٔ مهمّ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال حل شدهٔ صفحهٔ ۴۳ تکراری است و در درس قبل مورد بحث قرار گرفت، با این تفاوت که در حلّ این مسئله فقط از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی استفاده شده است و دیگر مستقیماً با دایرهٔ مثلثاتی سروکار نداریم و در کار در کلاس دو رابطهٔ مهمّ دیگر به‌دست می‌آیند. سرانجام رابطهٔ ۳ مشابه فعالیت ۱، صفحهٔ ۳۹ است، ولی در اینجا باید از رابطه‌های ۱ و ۲، صفحهٔ ۴۳ استفاده کنیم. بنابراین، برای حلّ این مسئله داریم :

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=1+\left(\frac{-3}{4}\right)^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16} \quad \text{طبق رابطهٔ ۱، صفحهٔ ۴۳}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$$

از طرفی $90^\circ\le\alpha\le180^\circ$ بیان می‌کند که α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی قرار دارد و چون در این ناحیه، کسینوس منفی است، پس $\cos\alpha=\frac{-4}{5}$. اکنون می‌دانیم $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ پس

$$\sin^2\alpha+\left(\frac{-4}{5}\right)^2=1\rightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{3}{5}$$

اکنون چون α در ناحیهٔ دوم است و سینوس در ناحیهٔ دوم مثبت است، پس $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$. سرانجام

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{-۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{-۴}{۳}$$

یا

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{\frac{-۳}{۴}} = \frac{-۴}{۳}$$

در ادامه قرارداد می‌کنیم که هر تساوی درست مثلثاتی را که عبارت‌های تعریف شده با معنا هستند را یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم. به عبارت دیگر، یک اتحاد، گزاره‌ای است که دو مقدار با هم مساوی باشند، به ازای همهٔ مقادیر متغیرها که عبارات را معنادار می‌کنند.

به عنوان مثال، عبارت‌های زیر، اتحادند.

الف) $۳+\sin\theta = \sin\theta + ۳$ ب) $\cos\theta + \theta = \theta + \cos\theta$

ج) $\sin\theta \times \frac{۱}{\sin\theta} = ۱ \quad (\sin\theta \neq ۰)$ د) $۱+\cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta} \quad (\sin\theta \neq ۰)$

مثال. عبارت $\frac{۱-\cos^۲\theta}{\sin\theta}$ را تا حدّ امکان ساده کنید.

حل. طبق اتحاد مثلثاتی $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ داریم: $۱-\cos^۲\theta=\sin^۲\theta$ و از این رو:

$$\frac{۱-\cos^۲\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\sin\theta} \overset{(\sin\theta\neq۰)}{=\!=\!=} \sin\theta$$

مثال. بررسی کنید که آیا $\frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta} = \cos^۲\theta$ یک اتحاد است؟

حل.

$$\text{طرف چپ} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\sin\theta.\cos^۲\theta}{\sin\theta} \overset{\sin\theta\neq۰}{=\!=\!=} \cos^۲\theta = \text{طرف راست}$$

توصیه‌های آموزشی

یک تمرین خوب برای حلّ مسائل این قسمت از کتاب، بررسی این نکته است که آیا رابطهٔ داده شده یک اتحاد است یا نه و اگر نیست چرا؟ اگرچه در کتاب روابطی داده شده‌اند (مثل کار در کلاس (پ) صفحهٔ ۴۵) که در آنها از دانش‌آموز پرسیده می‌شود، کدام رابطه یک اتحاد است؟ اما در حالت کلی، بررسی روابطی که اتحاد نیستند کار دشواری است. به عبارت دیگر، برای آنکه ثابت کنیم یک رابطه اتحاد نیست، باید مثال نقض ارائه کنیم و گاهی اوقات، پیدا کردن یک مثال نقض، بسیار دور از ذهن است. بنابراین، برای عمق بخشیدن به مطالب این بخش، مسائلی باید در این زمینه مطرح شوند و از دانش‌آموزان خواسته شود تا مثال نقض ارائه کنند.

مثال. نشان دهید $\sin\alpha+\cos\alpha=۱$ یک اتحاد مثلثاتی نیست.

حل. اگرچه این عبارت برای برخی از زوایا مثل $\alpha=۰$ و $\alpha=۹۰^\circ$ درست است، ولی یک اتحاد نیست؛ زیرا اگر $\alpha=۳۰^\circ$، آن‌گاه

$$\sin ۳۰+\cos ۳۰=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}\neq ۱۰$$

مثال. نشان دهید $۲-\sin^۲\theta=۲\cos\theta$ یک اتحاد نیست.

حل. اگرچه به ازای $\theta=۰^\circ$، رابطه درست است، ولی برای $\theta=۹۰^\circ$ داریم :

$$۲-۱^۲=۲\times ۰ \Longrightarrow ۱=۰$$

که یک تناقض است.

مثال. بررسی کنیدکه آیا $\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\cot^۲\theta=۱$ $(\sin\theta\neq ۰)$

حل.

$$\text{طرف چپ}=\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}-\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{۱-\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}$$

$$=\frac{\sin^۲\theta}{\sin^۲\theta}=۱=\text{طرف راست}$$

پس این عبارت، یک اتحاد است.

حلّ تمرین صفحهٔ ۴۶ قسمت (ث)

طرف چپ $= \dfrac{۱}{\cos x} - \tan x = \dfrac{۱}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{۱-\sin x}{\cos x}$

اکنون چون $۱-\sin^۲ x=(۱-\sin x)(۱+\sin x)=\cos^۲ x$، پس با ضرب صورت و مخرج رابطه در $۱+\sin x$ داریم :

طرف راست $= \dfrac{\cos x}{۱+\sin x} \xlongequal{\cos x\neq ۰} \dfrac{\cos^۲ x}{\cos x(۱+\sin x)} = \dfrac{۱-\sin^۲ x}{\cos x(۱+\sin x)} = \dfrac{۱-\sin x}{\cos x}\times\dfrac{۱+\sin x}{۱+\sin x}$

حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۴۵ قسمت (ت)

طرف سمت چپ: $۱-\dfrac{\cos^۲ x}{۱+\sin x} \xlongequal{\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x} ۱-\dfrac{۱-\sin^۲ x}{۱+\sin x} \xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} ۱-\dfrac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱+\sin x}$

طرف راست $= \sin x = \cancel{۱}-(\cancel{۱}-\sin x) \xlongequal{۱+\sin\neq ۰}$

مثال. بررسی کنید که آیا $\dfrac{۱}{\sin\beta}-\sin\beta=\cot\beta\cos\beta$ یک اتحاد است.

حل.

طرف چپ: $\dfrac{۱}{\sin\beta}-\sin\beta \xlongequal{\text{مخرج مشترک}} \dfrac{۱-\sin^۲\beta}{\sin\beta} \xlongequal{\sin^۲\beta+\cos^۲\beta=۱} \dfrac{\cos^۲\beta}{\sin\beta}$

طرف راست $= \cot\beta\times\cos\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\times\cos\beta =$

پس این عبارت یک اتحاد است.

دو خطای رایج

۱ با توجه به اینکه در این قسمت، دانش‌آموزان گاهی در اثبات درستی یک رابطه، اغلب نیاز به کمی ذکاوت و در مسائل پیچیده‌تر نیاز به مقداری خلاقیت دارند، ممکن است تشخیص ندهند از کدام طرف تساوی باید حل را شروع کنند؛ چون اغلب درمسائل قسمت‌های دیگر، یک طرف تساوی داده شده و طرف دیگر تساوی از دانش‌آموز خواسته می‌شود و این سردرگمی که این تساوی کامل است و چطور نیاز به حل دارد برای برخی از دانش‌آموزان باقی می‌ماند.

۲ نشان دهید $(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}=\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta$ یک اتحاد نیست.

حل. بسیار رایج است که دانش‌آموزان معمولاً $(a+b)^{۲}$ را با $a^{۲}+b^{۲}$ اشتباه می گیرند.

برای اینکه نشان دهیم گزاره بالا یک اتحاد نیست باید θ را طوری انتخاب کنیم که سینوس و کسینوس آن صفر نباشند؛ مثلاً فرض کنیم $\theta=۳۰^{\circ}$، پس داریم :

$$\text{طرف چپ}=(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}=(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{طرف راست}=\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=۱\neq ۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس گزارهٔ بالا یک اتحاد نیست.

توصیه‌های آموزشی

بهتر است اولین ارزشیابی این قسمت، چند سؤال جدید و حل نشده باشد، ولی برای حل به دانش‌آموزان اجازه استفاده از کتاب و رجوع به فرمول‌های مربوطه داده شود.

مسائل کمکی

۱ عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید

ج) $(\cot\alpha+\frac{۱}{\sin\alpha})(\cot\alpha-\frac{۱}{\sin\alpha})$ ب) $\cos\theta\,(۱+\tan^{۲}\theta)$ الف) $\frac{\cos\theta}{۱-\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}$

اتحاد مزدوج ضرب مخرج مشترک

۲ بررسی کنید که آیا گزاره‌های زیر، اتحادند.

الف) $\frac{۱}{\sin x}-\sin x=\frac{\cos^{۲}x}{\sin x}$ $\frac{۱-\sin^{۲}n}{\sin x}=\frac{\cos^{۲}n}{\sin x}$

ب) $(\frac{۱}{\cos\beta}+\tan\beta)^{۲}=\frac{۱+\sin\beta}{۱-\sin\beta}$

$$(\frac{۱+\cos\beta\tan\beta}{\cos\beta})^{۲}=(\frac{۱+\sin\beta}{\cos\beta})^{۲}=\frac{۱+\sin^{۲}\beta+۲\sin\beta}{\cos^{۲}\beta}=\frac{۱+\sin^{۲}\beta+۲\sin\beta}{(۱-\sin\beta)(۱+\sin\beta)}$$

پ) $\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha=\dfrac{\tan\alpha-\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$

$$\frac{\tan\alpha-\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\dfrac{\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha}{\cancel{\sin\alpha\cos\alpha}}}{\dfrac{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}{\cancel{\sin\alpha\cos\alpha}}}=\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha$$

ت) $\dfrac{۱}{\cos\theta}=\sqrt{۱+\tan^{۲}\theta}\ \ (۰\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{۲})$

ث) $\tan\theta.\sin\theta=\dfrac{۱}{\cos\theta}-\cos\theta$

ج) $\tan^{۲}\theta\ .\ \sin^{۲}\theta=\tan^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta$

چ) $(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}+(\sin\theta-\cos\theta)^{۲}=۲$

ح) $\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta=۱-۲\sin^{۲}\theta$

خ) $\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta=۲\cos^{۲}\theta-۱$

فصل ۳

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

نگاه کلی به فصل

هدف‌های این فصل را می‌توان به اختصار چنین بیان کرد :

● همان‌گونه که توان اعداد را در آغاز برای توان‌های طبیعی عددهای ۲ و ۳ تعریف می‌کنیم و سپس این مفهوم را برای توان n ام تعمیم می‌دهیم؛ ریشهٔ عددها در سال سوم برای عددهای ۲ و ۳ تعریف شده است و لذا آن را به سایر عددهای طبیعی، ریشهٔ چهارم، ریشهٔ پنجم، ... و به‌طورکلی ریشهٔ nام باید تعمیم داد. یادآوری می‌شود که فرایند تعمیم یکی ازروش‌های اساسی توسعه و تکامل ریاضیات در همهٔ شاخه‌های آن است.

● در این فصل، مفهوم توان رابه توان‌های کسری نیز گسترش می‌دهیم. البته هدف نهایی تعریف توان حقیقی اعداد است، لکن به دلایل فنی در سطح فعلی به توان‌های حقیقی نپرداخته‌ایم. مفهوم توان حقیقی پیش‌نیاز تعریف تابع نهایی است.

توابع نهایی نیز در بررسی پدیده‌هایی که مشمول رشد و زوال هستند به‌طور طبیعی وارد بحث می‌شوند. پدیده‌های طبیعی غالباً دچار تغییرات‌اند و این تغییرات یا در قالب رشد صورت می‌پذیرد، یا از الگوی زوال پیروی می‌کند. وقتی یک جامعه باکتری در محیطی مناسب قرار گیرد، به شدّت رشد می کند، همچنین اگر مقداری مواد رادیو اکتیو را در نظر بگیریم، این مقدار ثابت نمی‌ماند و دستخوش زوال شده وبه مواد سبک‌تر تجزیه می گردد.

گرچه توان حقیقی برای اعداد گنگ به دلایل آموزشی گفته نمی‌شود، لکن باید در نظر داشت که در عمل وقتی با یک عدد گنگ سر و کار داریم، آن را با یک تقریب مناسب گویا کرده و با عدد تقریب‌شده گویا کار می‌کنیم؛ لذا اگر پرسش شود که مثلاً $۳^{\sqrt{۲}}$ چه عددی است، هرگاه $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ در نظر بگیریم، این توان به‌آسانی به توان گویا تبدیل می‌شود :

$$۳^{\sqrt{۲}} = ۳^{۱/۴} = ۳^{\frac{۱۴}{۱۵}} = ۳^{\frac{۷}{۵}} = \sqrt[۵]{۳^{۷}}$$

اعداد گنگ فقط در محاسبات ریاضیات محض مطرح‌اند، هر عدد گنگ، تا هررقم اعشار که بسط داده شود، در واقع با یک عدد گویا تقریب می‌گردد.

دانش‌آموزان پس از مطالعه و کار روی این فصل باید بتوانند :

● مفهوم ریشه را برای هر عدد طبیعی مانند ۴> ۶،۵ و در نهایت مفهوم کلی آن را برای n به درستی تعریف کنند.

● رابطه ریشه و توان را به‌عنوان دوعمل معکوس، شناخته و هر رابطه ریشه‌ای را به یک رابطه توانی و رابطه توانی را به یک تساوی ریشه‌ای تبدیل کنند.

● از ماشین‌حساب برای محاسبهٔ ریشه و توان‌ها استفاده کنند.

● دریابند که عددهای مثبت دارای دو ریشهٔ قرینه برای فرجه‌های زوج بوده، لکن ریشهٔ فرد ندارند.

● توان گویا را برای هر عدد مثبت برحسب ریشه تعریف کنند.

● قواعد سادهٔ ریشه‌گیری را بیان کنند :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$$

● قواعد سادهٔ توان‌های گویا را بیان کنند.

$a^r a^s=a^{r+s}$ $\qquad$ $(a^r)^s=a^{rs}$

● با ضرب و جمع عبارت‌های جبری به‌راحتی کار کنند و اتحادها را به‌عنوان تساوی‌های بین عبارت‌های جبری، که همواره برقرارند، بشناسند.

● اتحادهای مکعب مجموع (تفاضل) را بیان کنند.

● تجزیهٔ عبارت‌های a^n+b^n و a^n-b^n را به حاصل‌ضرب دو عامل انجام دهند.

● برخی مخرج‌های گنگ عبارت‌های جبری را با ضرب در عبارت مناسب گویا کنند.

● از اتحادها برای محاسبهٔ ذهنی برخی ضرب‌های عددی استفاده کنند؛ مانند :

$$۱۱\times۱۳=(۱۲-۱)(۱۲+۱)=۱۴۳$$

$$۱۴\times۱۶=(۱۵-۱)(۱۵+۱)=۲۲۴$$

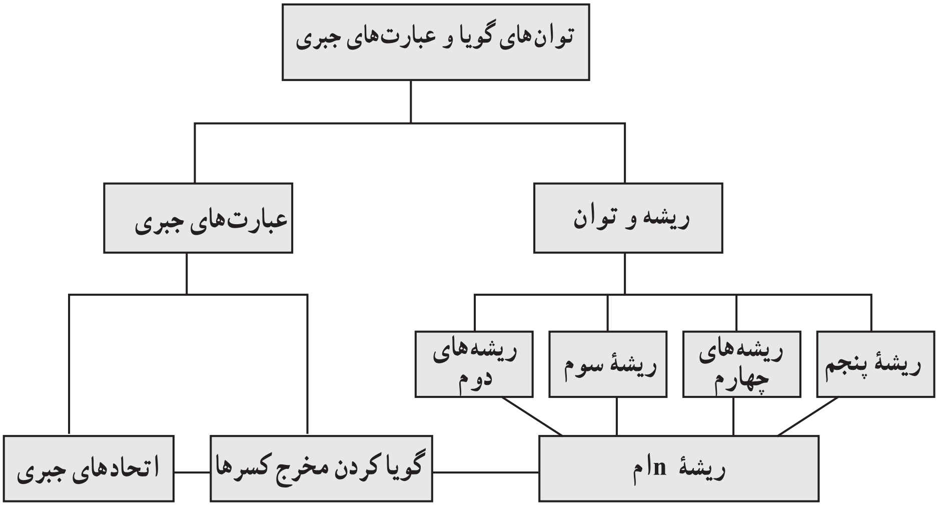
● دریابند که توان‌های عددهای بزرگ‌تر از واحد به سرعت افزایش می‌یابد.

درحالی‌که توان‌های عددهای کوچک‌تر از واحد به سرعت کاهش می‌یابد.

مثلاً به محاسبه $(۰/۹۸)^n$ و $(۱/۰۲)^n$ بپردازند.

(برای مقادیر n)؛ به زبان فنی‌تر تابع $a^x(a>۱)$ صعودی و تابع $a^x(a<۱)$ نزولی است، لکن نامی از تابع برده نشود.

نقشهٔ مفهومی


توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
عبارت‌های جبری
ریشه و توان
ریشه‌های دوم
ریشهٔ سوم
ریشه‌های چهارم
ریشهٔ پنجم
اتحادهای جبری
گویا کردن مخرج کسرها
ریشهٔ nام

درس اوّل

ریشه و توان

روش تدریس

هدف فعالیت، تعمیق مفهوم ریشه و توان و مرور آن از سال نهم است. فعالیت این ایده را مطرح می‌سازد که ریشه و توان مفاهیم معکوس یکدیگرند و این فرایند با مفهوم ریشه‌گیری در سطوح بالاتر علمی هماهنگی و انطباق دارد. وقتی $-۲۷=(-۳)^۳$ یعنی ۲۷− توان سوم ۳− است، با ریشه‌گیری سوم از ۲۷− به عدد ۳− برمی گردیم.

$$\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$$

در جدول این مفهوم به‌عنوان فعالیت شمارهٔ ۲ تمرین شده است. در جایی عدد داده شده است و ریشهٔ سوم آن را دانش‌آموزان در زیر آن عدد می‌نویسند و در جاهایی ریشهٔ سوم داده شده است و عدد را از راه توان رساندن به‌دست می‌آورند. برای محاسبهٔ ریشهٔ سوم برخی اعداد، ریشهٔ سوم تقریبی که دانش‌آموز به دست می‌آورد کفایت می کند :

$\sqrt[۳]{۲۰}\simeq ۲/۷$ $\sqrt[۳]{۲۰}\simeq ۲/۶$

و یا $\sqrt[۳]{۲۰۰۰}\simeq ۱۳$ $\sqrt[۳]{۲۰۰۰}\simeq ۱/۲۵$

باید توجه داشت وقتی مقدار تقریبی یک محاسبه مورد نظر است، هم تقریب کاهشی و هم تقریب افزایشی **مورد قبول** می‌باشد؛ زیرا نوع تقریب مشخص نشده است.

○ در ادامهٔ هدف کار در کلاس، که به شکل گفتمان مطرح شده است، این واقعیت است که ما در ریاضیات، وقتی ریشهٔ دقیق یک عدد مورد نظرمان است، به ناچار باید از نماد رادیکال استفاده کنیم.

$\sqrt[۳]{۲۵}$ یعنی مقدار دقیق ریشهٔ سوم ۲۵ و آن عددی است که وقتی به توان ۳ برسد برابر ۲۵ است. اما در عمل با مقدارهای تقریبی آن کار می‌کنیم.

در ادامه ریشهٔ چهارم تعریف شده است دانش‌آموزان با تکمیل تعریف، باید به مفهوم‌سازی بپردازند : هر عدد مثبت دو ریشه چهارم دارد که قرینهٔ یکدیگرند. عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند. در ادامه به‌عنوان تمرین کلاسی از دانش‌آموزان خواسته شده تا ضمن تکمیل جدول‌های

صفحهٔ ۵۱ به محاسبهٔ ریشه‌های چهارم و پنجم بپردازند.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	۳۱۲۵
ریشه‌های چهارم	۲–و۲	۵–و۵	۱۰–و۱۰	$۵\sqrt[۴]{۵}$ و $-۵\sqrt[۴]{۵}$

عدد	-۳۲	۱۵۶۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	$-۱۰^{۵}$	۱۹
ریشهٔ پنجم	-۲	۵	۲/۵	-۳	-۱	-۱۰	۱/۵

تنها عددهایی که ریشهٔ پنجم آنها با خودشان برابر است ۱، ۱– و ۰ هستند. محاسبه کنید :

$$\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲ \qquad \sqrt[۵]{\frac{۱}{۱۰۰,۰۰۰}} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۳۲} = -۰/۲ \qquad \sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}} = \frac{۱}{۲}$$

هر عدد مثبت یا منفی یک ریشهٔ پنجم دارد. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشهٔ پنجم آن منفی است.

روش : باید دانش‌آموزان را یاری کرد که خودشان کادر را تکمیل کنند. می‌توانند با مشاورهٔ همدیگر پرسش‌ها را پاسخ دهند.

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۵۱

۱

$-۶ < -\sqrt{۳۵} < -۵ \qquad ۴ < \sqrt{۲۰} < ۵ \qquad \sqrt{۱۶} = ۴$

$۲ < \sqrt[۳]{۲۰} < ۳ \qquad \sqrt[۳]{-۸} = -۲ \qquad ۸ < \sqrt{۷۵} < ۹$

$\sqrt[۴]{۱۶} = ۲ \qquad ۶ < \sqrt[۳]{۲۵۰} < ۷ \qquad -۵ < \sqrt[۳]{-۹۰} < -۴$

$۷ < \sqrt[۴]{۴۰۰} < ۸ \qquad -۴ < -\sqrt[۴]{۱۲۰} < -۳ \qquad -۳ < -\sqrt[۴]{۲۰} < -۲$

$۳ < \sqrt[۵]{۴۰۰} < ۴ \qquad \sqrt[۵]{-۳۲} = -۲ \qquad \sqrt[۵]{۱} = ۱$

درس دوم

ریشهٔ n ام

روش تدریس

هدف، تعمیم کلی مفهوم ریشه است. در ریاضیات وقتی فرایند یا عملی را برای اعداد ...و ۴ و ۳ و ۲ تعریف می‌کنیم، معمولاً برای همهٔ اعداد طبیعی آن را گسترش می‌دهیم؛ لذا ناچاریم با متغیر n کار کنیم.

کار تدریس ضمن یک فعالیت آموزشی شروع می‌شود. ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ در جدول آمده و از دانش‌آموزان خواسته می‌شود جدول را کامل کنند.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	...
$\sqrt{۶۴}=۸$ $-\sqrt{۶۴}=-۸$	$\sqrt[۳]{۶۴}$	$\sqrt[۴]{۶۴}$ و $-\sqrt[۴]{۶۴}$	$\sqrt[۵]{۶۴}$	$\sqrt[۶]{۶۴}$ و $-\sqrt[۶]{۶۴}$	...

داریم : $۲=\sqrt[۶]{۶۴}$ و $-۲=-\sqrt[۶]{۶۴}$

از دانش‌آموزان خواسته شود که با ذکر ریشهٔ هفتم و هشتم ۶۴، به عنوان عددهایی که وقتی به توان هفت یا هشت می‌رسند، برابر ۶۴ شوند مفهوم ریشه را تعمیم دهند. بعد به‌جای هفت و هشت با n سخن بگویند! مانند ریشه‌های دوم و چهارم متوجه باشند که اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند. و جدول بعدی را کامل کنند.

تعریف کلی مفهوم در ذیل صفحهٔ ۵۴ آمده است. در صفحهٔ ۵۵ با تکمیل جدول مفهوم‌سازی تعمیق می‌گردد. برخی موارد آن، جهت راهنمایی نوشته شده‌اند. درس ضمن کار در کلاس (تمرین‌های کلاسی) ادامه می‌یابد.

در فعالیت بعدی (صفحهٔ ۵۵) برخی قواعد ریشه ذکر شده‌اند. الهام‌بخش آن قواعدی است که برای ریشه‌های دوم و سوم از سال قبل آموخته‌اند.

ـ با ساختن مثال‌های عددی به قاعده برسند.

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

ـ هدف فعالیت بعدی (صفحهٔ ۵۷) آن است که از راه تجربی دریابند که تساوی

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

برای وقتی که n زوج است، همواره برقرار نیست

$$\sqrt[۴]{(-۲)^۴}\neq -۲$$

و رسیدن به این نکته است که

$$\sqrt[n]{a^n}=|a| \qquad (\text{n زوج})$$

$$\sqrt[n]{a^n}=a \qquad (\text{n فرد})$$

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۵۸

۱ $\sqrt{۰/۲۵}=\sqrt[۳]{۰/۱۲۵}$ $\qquad (۰/۵)^۲>(۰/۵)^۳$

اگر $۰<a<۱$، $\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}$ $\qquad a^۲>a^۳$

۳ هرگاه $\sqrt[n]{a}=b$، طبق تعریف ریشه $b^n=a$؛ در نتیجه $(\sqrt[n]{a})^a=a$.

۵

$$\sqrt[۵]{۲^{-۵}}=۲^{\frac{-۵}{۵}}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt[۷]{\frac{۱}{۱۲۸}}=\sqrt[۷]{\frac{۱}{۲^۷}}=(\frac{۱}{۲^۷})^{\frac{۱}{۷}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt[۴]{۳^{-۴}}=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$$

۶ n=۳ برقرار است. n=۴ ، a و b را مثبت بگیرید. برقرار است.

ب) n=۴ ، a و b را منفی بگیرید $\sqrt[۴]{\frac{-۲}{-۳۲}}$ با معنا است و برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد، حال آنکه $\sqrt[۴]{-۲}$ و $\sqrt[۴]{-۳۲}$ بی‌معنا هستند.

درس سوم

توان‌های گویا

روش تدریس

درس با یک فعالیت که ضمن گفتمان دو نفر انجام می‌شود، شروع می‌شود. این پرسش مطرح می‌شود که توان $\frac{۱}{۲}$ عدد ۲ (پس از نیم ساعت کشت) چه عددی می‌تواند باشد. نتیجه می‌شود که هرگاه قرار دهیم $b = ۲^{\frac{۱}{۲}}$ ، باید $b = \sqrt{۲}$ باشد.

پس از آن برای هر عدد، توان کسری تعریف می‌شود :

هرگاه $a > ۰$ و n عددی طبیعی باشد، $a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$

توجه داشته باشید که در این سطح باید همواره a مثبت فرض شود. ما در اینجا توان کسری عددهای منفی را تعریف نمی‌کنیم؛ گرچه در ریاضیات عالی چنین امری ممکن می‌باشد.

تعمیم : وقتی کسر، یک کسر دلخواه مانند $\frac{m}{n}$ باشد.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

لذا توان کسری در حالت کلی تعریف شده است.

درس با فعالیت‌های کلاسی ادامه می‌یابد.

به دانش‌آموزان فرصت داده می‌شود تا این فعالیت‌ها را به کمک یکدیگر حل کنند. دبیر برای نمونه برخی را پاسخ می‌دهد تا مطمئن شود دانش‌آموزان موضوع درس را آموخته‌اند.

در همین صفحه (صفحهٔ ۶۰) قواعد توان، برای توان‌های گویا، ذکر شده‌اند که عیناً همانند این قواعد برای توان‌های طبیعی‌اند.

$$(ab)^r = a^r b^r \quad , \quad a^r \times a^s = a^{r+s} \quad , \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

به دانش‌آموزان فرصت داده شود تمرین‌های کلاسی صفحهٔ ۶۱ را مانند نمونه‌ها حل کنند.

هدف فعالیت این صفحه که به‌صورت گفتمان است، هدایت دانش‌آموزان به اینکه تساوی $\sqrt[n]{a^n} = a$ همواره برقرار نیست و اینکه وقتی n زوج است:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۶۳

۱

$$۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵} \qquad ۱۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۶}$$

$$(۴^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۲}{۳}} = ۴^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۴} \qquad ۴^{\frac{۳}{۷}} = \sqrt[۷]{۴^۳}$$

$$۴^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۱۶} \qquad ۵^{\frac{۲}{۷}} = \sqrt[۷]{۲۵}$$

$$۳۲^{-\frac{۱}{۵}} = \frac{۱}{۳۲^{\frac{۱}{۵}}} = \frac{۱}{۲} \qquad ۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۲}{۳}} = ۳^{\frac{۲}{۶}} = \sqrt[۳]{۳}$$

$$۱۷^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۱۷^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۷}} \qquad ۳۲^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۳۲^۲}$$

۲ $\sqrt[۷]{a} = a^{\frac{۱}{۷}}$ $\qquad \sqrt[۵]{a^۴} = a^{\frac{۴}{۵}}$ $\qquad \sqrt[n]{a^۲} = a^{\frac{۲}{n}}$

۳ تساوی زیر برقرار است:

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = a^{\frac{km}{kn}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

۴ هدف رسیدن به این قاعده از راه آزمون‌های عددی است. (s و r گویا و a مثبت) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

۵

$$\sqrt{\sqrt{۸۱}} = \sqrt[۴]{۸۱} = ۳ \qquad \sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}} = \sqrt[۶]{۶۴} = ۲ \qquad \sqrt[۳]{\sqrt{۵}} = \sqrt[۶]{۵}$$

درس چهارم

عبارت‌های جبری

روش تدریس

هدف، تعمیم درس مشابه از کلاس نهم است. ابتدا مفهوم اتحاد و عبارت جبری را یادآوری کنید. دانش‌آموزان را وادار کنید که اتحادهایی را که یاد گرفته‌اند مرور کرده و به **زبان فارسی** نیز بیان کنند :

(۱) $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(۲) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

ضمن فعالیت کلاسی، این اتحادها را تعمیم دهید :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (\qquad\qquad)(a+b)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

b را به b− تبدیل می‌کنند :

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

توجه کنند که جملات یک در میان با علامت مثبت و منفی ظاهر می‌شوند. به دانش‌آموزان گفته می‌شود که ضرب دو جمله‌ای در چند جمله‌ای (یا چندجمله‌ای در چندجمله‌ای) جمله به جمله انجام می‌شود؛ هر جملهٔ اوّلی در همه جملات دیگری :

تمرین کنند :

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1})=\ldots$$

ــ جملات قرینه حذف شده و به‌دست می‌آید :

$$= a^n+b^n$$

مشابهاً

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}) = a^n-b^n$$

با مثال‌های عددی (مقدار مشخص برای n) کار ادامه می‌یابد. می‌توانید در همین مرحله مفاهیم تجزیه و عامل (شمارنده) را توضیح دهید. وقتی یک اتحاد را از طرف دوم، شکل مختصر آن بنویسیم؛ مانند :

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$$

گوییم عبارت سمت چپ به حاصل‌ضرب دو عامل سمت راست تجزیه شده است. هریک از این دو پرانتز را یک **عامل** (شمارنده) a^n-b^n می‌نامیم. عیناً مانند تجزیهٔ اعداد طبیعی به شمارنده‌ها. البته ممکن است عبارتی تجزیه نشود، مگر به حاصل‌ضرب خودش در عدد ۱

$$x^2+y^2=(x^2+y^2)\times 1 \qquad 17=17\times 1$$

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

برخی عبارت‌ها عیناً مانند اتحادها نیستند، لکن با اندک تأمل و تفکری می‌توان از اتحادها برای تجزیهٔ آنها استفاده کرد؛ مانند مثال‌های **۱** و **۲** ص**۶۴**. واژهٔ مضرب در عبارت‌های جبری همانند مضرب در حساب اعداد است. وقتی عبارتی را به عبارت‌های با درجه کوچک‌تر تجزیه می‌کنیم، گوییم آن عبارت **مضرب** عبارت‌های به‌دست آمده می‌باشد.

دانش‌آموزان را وادار کنید که عبارت‌سازی کنند. مانند آنکه سه عبارت بسازند که مضرب $a+b$ و یا مضرب $a-b$ باشند.

تعریف عبارت گویا در صفحهٔ ۶۶ آمده است. عبارت‌های الف و ب این صفحه گویا و ب و ت گنگ هستند.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

مخرج کسر، با ضرب صورت و مخرج در عبارت مناسب، گویا شده است.

$$\frac{2}{\sqrt{x}+1}=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

پس مخرج مشترک سه کسر $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ و $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ و $\frac{3}{x-1}$ عبارت $x-1$ است.

تمرین‌های صفحهٔ ۶۷ برای آشنایی و ممارست دانش‌آموزان در گویا کردن مخرج‌ها می‌باشند که با راهنمایی دبیران محترم، در صورت لزوم، انجام می‌دهند.

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۶۷

۱

$$x^6-y^6=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$$

$$= (x-y)(x^۲+xy+y^۲)(x+y)(x^۲-xy+y^۲)$$

$x^۲+y^۲$ تجزیه نمی‌شود.

۲

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}} = \frac{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^۲}}{(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y})(\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^۲})}$$

$$= \frac{\alpha}{x-y}$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{۸}} = \frac{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{۸x}+\sqrt[۳]{۶۴}}{(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{۸})(\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{۸x}+\sqrt[۳]{۶۴})} = \frac{\alpha}{x-۸}$$

(ت)

$$\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}-\frac{۵x}{x-۱} = \frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}+\frac{۲(\sqrt{x}-۱)}{x-۱}-\frac{۵x}{x-۱}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+۱+۲\sqrt{x}-۲-۵x}{x-۱} = \frac{۳\sqrt{x}-۵x-۱}{x-۱}$$

$۱۰۵^۲=۱۰۰^۲+۱۰۰۰+۲۵$ (ذهنی)

$=۱۱۰۲۵$

$۹۹^۲=(۱۰۰-۱)^۲=۱۰,۰۰۰-۲۰۰+۱$ (ذهنی)

$=۹۸۰۱$

$$\frac{۱}{x-۱}+\frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}+\frac{\sqrt[۴]{x^۳}+\sqrt[۴]{x^۲}+\sqrt[۴]{x}+۱}{x-۱}+\frac{\sqrt[۸]{x^۷}+\sqrt[۸]{x^۶}+\sqrt[۸]{x^۵}+\sqrt[۸]{x^۴}+\sqrt[۸]{x^۳}+\sqrt[۸]{x^۲}+\sqrt[۸]{x}+۱}{x-۱}$$

الگوها :

$$x-۱ = (\sqrt[۴]{x}-۱)(\sqrt[۴]{x^۳}+\sqrt[۴]{x^۲}+\sqrt[۴]{x}+۱)$$

$$a^۴+b^۴=(a-b)(a^۳+a^۲b+ab^۲+b)$$

$$a^۸-b^۸=(a-b)(a^۷+a^۶b+a^۵b^۲+a^۴b^۳+a^۳b^۴+a^۲b^۵+ab^۶+b^۷)$$

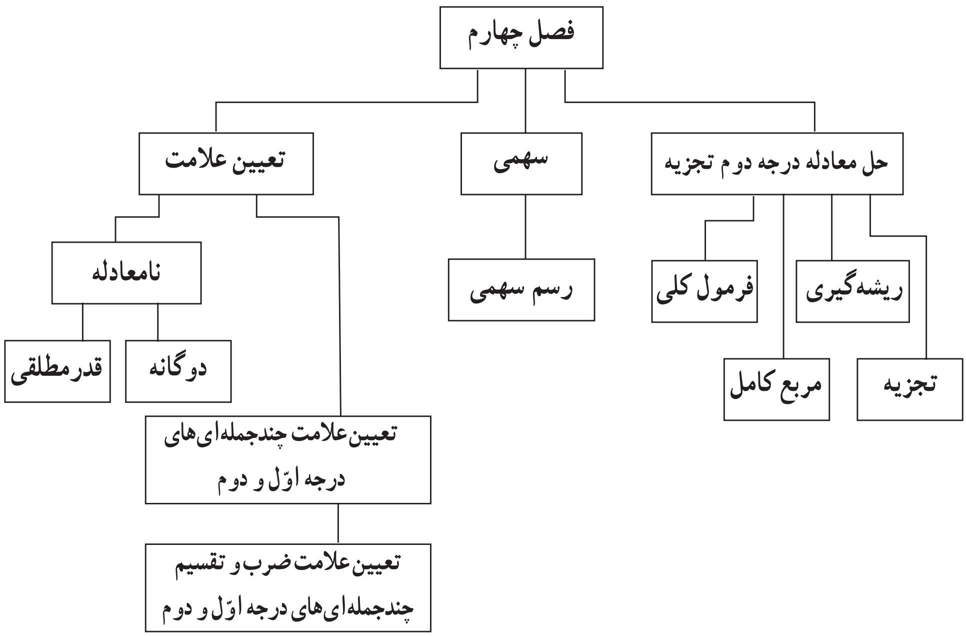
فصل ۴

معادله‌ها و نامعادله‌ها

نگاه کلی به فصل

این فصل، شامل سه درس است. ابتدا مفهوم معادلهٔ درجه دوم را بیان می‌کند و سپس روش‌های حلّ معادلهٔ درجه دوم را به چهار روش (تجزیه، ریشه‌گیری، مربع کامل، فرمول کلی) بررسی کرده است و در درس دوم روش رسم سهمی را ارائه می‌کند. در درس سوم تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها از درجهٔ ۱ و ۲ را آموزش می‌دهد. در روند یادگیری این درس دانش‌آموز باید با حلّ معادلهٔ درجه دوم و درجه اوّل کاملاً آشنایی داشته باشد و در ادامه حلّ نامعادلات پرداخته می‌شود. سال گذشته با مفهوم نامعادله آشنا شده است. در ادامه به حلّ نامعادلات دوگانه و قدر مطلقی پرداخته می‌شود.

نقشهٔ مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

جبر از شاخه‌های اصلی علم ریاضیات است که تاریخی بیش از ۳۰۰۰ سال دارد. این علم در طول تاریخ سؤالات بسیار داشته و در حال حاضر شامل شاخه‌های زیادی است.

این علم به بیش از ۳۰۰۰ سال پیش در مصر و بابل برمی‌گردد و در آنجا در مورد حلّ برخی از معادلات خطی بحث شده است. در هند و یونان باستان نیز، حدود یک قرن پیش از میلاد از روش‌های هندسی برای حل برخی از معادلات جبری استفاده می‌کردند. در قرن اوّل میلادی نیز بحث در مورد برخی از معادلات جبری در آثار «دیوفانتوس» یونانی و «برهماگوپتای» هندی دیده می‌شود.

کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی اوّلین اثر کلاسیک در جبر می‌باشد که کلمهٔ جبر یا Algebra از آن آمده است. «خیام» دیگر ریاضی‌دان مشهور ایرانی است که در آثار خود جبر را از حساب تمیز داد. گامی بزرگ را در تجربه و پیشرفت این علم برداشت. در قرن ۱۶ میلادی روش حلّ معادلات درجه سوم توسط «دل مرو» و معادلات درجه چهارم توسط «فراری» کشف گردید.

«اواریست گالوا» ریاضی‌دان فرانسوی که در بیست سالگی در جریان انقلاب فرانسه در یکی از جنگ‌ها کشته شد، بیشترین سهم را در پیشرفت و تجربهٔ این علم داشت که نوشته‌های او سال‌ها پیش از مرگش، پس از مطالعه و بررسی توسط دیگر ریاضی‌دانان موجب تحوّل عظیم در این علم گردید.

معادلات همراه با اعداد، از اوّلین دستاوردهای ریاضی شدند. آنها در قدیمی‌ترین اسناد ریاضی مکتوب، فی‌المثل،در متون میخی بابلی‌های باستان که به هزارهٔ قبل از میلاد برمی‌گردند، پاپیروس‌های مصری باستان که به امپراطوری میانه در حدود ۱۸۰۰ ق.م. بازگشت دارند، آمده‌اند.

بنا به ساختار جامعهٔ بابلی مسائل مربوط به تقسیم ارث از اهمیت بسیار برخوردار بودند. اوّلین پسر همواره سهم بیشتری را دریافت می‌کرد، دومی بیشتر از سومی و به همین ترتیب. درحالی‌که مسائل مطرح در بابل، مجهول نسبتاً واضح توصیف شده است. در پاپیروس‌های مصری با علامت «h» نمایش داده شده است.

علامت برابری «=» که امروزه متداول است، توسط «روبرت رکورد» پزشک دربار سلطنتی مطرح شد. اما زمان قابل ملاحظه‌ای طول نکشید تا این علامت مقبولیت عام یافت.

استفاده از ابزار فناورانه

دانش‌آموزان می‌توانند برای به‌دست آوردن جواب‌هایی که به‌صورت اعشاری از معادلهٔ درجه دوم به‌دست می‌آیند از ماشین‌حساب استفاده کنند. برای رسم منحنی سهمی انواع نرم‌افزارها وجود دارند که با وارد کردن معادله می‌توان نمودار را رسم کرد و می‌توان اشکال مختلف سهمی را مشاهده کرد. نرم‌افزاری مانند FXDraw و ...، با چنین نرم‌افزارهایی می‌توان فعالیت‌ها، کاردرکلاس، تمرینات را شبیه‌سازی کرد تا دانش‌آموزان درک بهتری نسبت به مفاهیم معادلات و نامعادلات پیدا کنند.

معرّفی منابع برای معلمان

۱ جبر و مقابله / محمّدبن موسی خوارزمی ترجمه حسین خدیوجم / انتشارات اطلاعات
۲ نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میرشهرام صدر / انتشارات مدرسه
۳ عبارت‌ها و معادله‌های جبری / علی حسن‌زاده ماکویی / انتشارات مدرسه
۴ تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $16x(x-2) = 8x-25$

ب) $(2x-3)^2+1 = 10$

ج) $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$

۲ دو برابر یک عدد مثبت، از ثلث مربع آن، ۹ واحد کمتر است؛ این عدد را به‌دست آورید.

۳ مجموع سنّ پدر و پسری ۵۰ سال و حاصل‌ضرب سنّ آنها ۳۳۶ است. سنّ هرکدام را به‌دست آورید.

۴ اگر معادلهٔ $x^2+(a-1)x+1 = 0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، a را یافته و سپس ریشه‌های مضاعف را تعیین کنید.

۵ یک رشته سیم به طول ۸ متر در اختیار داریم. می‌خواهیم آن را به دو قسمت تقسیم کنیم و سپس با هرکدام یک مربع بسازیم. اگر مجموع مساحت این مربع‌ها، ۲۰ مترمربع باشد، طول هرکدام را به‌دست آورید.

۶ معادلهٔ زیر، رابطهٔ بین سنّ یک زن (A) و فشارخون سیستولیک نرمال آن، P (میلی‌متر جیوه) است :

$$P= 0/01A^2 + 0/05A + 107$$

الف) فشارخون نرمال را برای یک زن ۶۰ساله به‌دست آورید.

ب) اگر فشارخون نرمال یک زن، ۱۳۰ میلی‌لیتر جیوه باشد، سنّ تقریبی او را به‌دست آورید.

۷ نمودار هریک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=1-x^2$

ب) $y=-x^2+4x+1$

ج) $y=1+4x-2x^2$

۸ نمودار چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$، محور تقارنی به معادلهٔ $x=4$ دارد. اگر خط $y=1$ این سهمی را در دو نقطه قطع کند و یکی از این نقاط، نقطهٔ $A(-2,1)$ باشد، نقطهٔ دیگر برخورد را تعیین کنید.

۹ یک موشک از روی زمین با معادلهٔ $y=-2x^2+200x$ به هوا پرتاب می‌شود، که در آن، x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع آن در لحظات مختلف است.

الف) بیشترین ارتفاع موشک چقدر است؟ در این لحظه، مسافت افقی طی شده را نیز به‌دست آورید.

ب) بُرد این موشک را به‌دست آورید.

ج) نمودار حرکت این سهمی را در یک دستگاه مختصات، رسم کنید و جواب‌های به‌دست آمده در قسمت‌های قبل را روی آن نشان دهید.

۱۰ شکل‌های زیر، نمودار چند سهمی با معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد. برای ضریب x^2ی آنها کدام‌یک از اعداد زیر را پیشنهاد می‌کنید.

$a=-2\ ,\ a=-1\ ,\ a=1\ ,\ a=2$

۱۱ هریک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب به‌دست آمده را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.

الف) $-1 \le 2x-5 \le 7$

ب) $\frac{x}{3}-1 \le \frac{2}{3}x+1 < x$

ج) $(2-x)(x^2-9) \ge 0$

د) $\frac{x^3-1}{x^2+x-6} < 0$

هـ) $|x-۲| \leq ۳$

و) $|۲x+۵| > ۱$

ز) $|۳x+۱|+۲ < ۱$

۱۲ بازه‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی رسم کنید و سپس برای هرکدام یک نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسید که مجموعهٔ جواب آن، این بازه باشد.

الف) [۴و۰]

ب) $(-\infty,-۳)\cup(۵,+\infty)$

۱۳ اگر عبارت $y=(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱$ برای هر مقدار x، منفی باشد، حدود مقادیر a را به‌دست آورید.

۱۴ در بررسی رابطهٔ بین ساعت خواب در شبانه‌روز و نرخ مرگ در سال (برابر هر یک‌صد هزار نفر انسان بالغ) اطلاعات زیر به‌دست آمده است:

y (نرخ مرگ در سال)	x (ساعت خواب)
۱۶۸۲	۴
۶۲۸	۷
۹۶۸	۹

می‌توانیم این اطلاعات را به‌صورت معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ مدل‌سازی کنیم و سهمی زیر را به‌دست آوریم:

$$y=۱۰۴/۵x^۲-۱۵۰۱/۵x+۶۰۱۶$$

الف) نرخ مرگ در سال را برای افراد بالغی که در شبانه‌روز، ۶ ساعت می‌خوابند، به‌دست آورید.

ب) پایین‌ترین میزان نرخ مرگ در سال، به ازای چند ساعت خواب در شبانه‌روز، به‌دست می‌آید.

درس اوّل

معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حلّ آن

اهداف

- ❑ معادلهٔ درجه دوم را به‌خوبی تشخیص دهد.
- ❑ به راحتی بتواند فاکتورگیری از عوامل مشترک را انجام دهد.
- ❑ از تجزیهٔ عبارت‌های درجه دوم با استفاده از اتحادهای مزدوج و جمله مشترک برای حلّ معادلهٔ درجه دوم استفاده نماید.
- ❑ ویژگی حاصل‌ضرب صفر را به‌خوبی درک کند و بتواند در مواقع لزوم به‌کار برد.
- ❑ درک دقیق و کاربردی از ریشه‌گیری داشته باشد.
- ❑ در صورت امکان بتواند یک عبارت را مربع کامل نماید.
- ❑ بتواند هر معادلهٔ درجه دوم دلخواه را از فرمول کلّی حل کند.
- ❑ حالت‌های مختلف جواب‌های یک معادلهٔ درجه دوم را برحسب علامت Δ، تشخیص دهد.
- ❑ با کاربرد این معادله در عصر حاضر آشنا شود.

روش تدریس

در آغاز این درس، یک مسئله مطرح می‌شود که طی آن، دانش‌آموز با معادلهٔ درجه دوم آشنا می‌شود. سؤالی که در ابتدای درس مطرح می‌شود که آیا می‌توان مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی غیر از ۳ و ۴ و ۵ باشند؟ شما می‌توانید با همین موضوع درس را شروع کرده و دانش‌آموزان را به چالش بکشید، سپس معادلهٔ $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$ را پای تخته نوشته و از آنها بخواهید آن را ساده کنند. سپس معادلهٔ $x^2-2x-3=0$ که به‌دست آمد، معادلهٔ درجه دوم را تعریف کرده و از آنها بخواهید چند معادلهٔ درجه دوم دیگر مثال بزنند و در دفترهایشان بنویسند. فعالیت صفحهٔ ۷۱ را می‌توانید به عهدهٔ دانش‌آموزان

بگذارید. ویژگی حاصل‌ضرب صفر را کامل توضیح داده و چند مثال برایشان بیاورید. فاکتورگیری را نیز می‌توانید با تمرین‌هایی مثل کار در کلاس صفحهٔ ۷۱، قسمت ب در دانش‌آموزان تقویت کنید. مفهوم ریشه‌گیری از عبارات درجه دوم در صفحهٔ ۷۲ را سعی کنید با چند مثال جبری و در صورت امکان مثال‌های کاربردی برای دانش‌آموزان توضیح کامل دهید.

این مفهوم باید با تأکید زیاد، تدریس شود که یکی از نقاط ضعف دانش‌آموزان پایه‌های بالاتر است.

در قسمت «حلّ معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل» باید دانش‌آموزان این توانایی را پیدا کنند که عباراتی مانند $x^۲+ax$ را به صورت $x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴}$ یا همان $(x+\frac{a}{۲})^۲$ دربیاورند.

مثال‌هایی مانند مثال صفحهٔ ۷۳ این مهارت را در آنها تقویت می‌کند. سپس ریشه‌گیری را در انتهای پاسخ خود به‌صورت کامل انجام دهند و پاسخ را به‌دست آورند. کار در کلاس صفحهٔ ۷۴ نیز می‌تواند یاری‌رسان شما در تفهیم این موضوع به شاگردانتان باشد. حلّ معادلهٔ درجه دوم به روش فرمول کلی که در صفحهٔ ۷۴ بحث آن شروع شده باید به‌عنوان آخرین راه حل به دانش‌آموز ارائه شود. چرا که در بسیاری از مسائل استفاده از تجزیه، مربع کامل و همچنین ریشه‌گیری، سرعت حل را بالا می‌برد. اما دانش‌آموزان باید روش کلّی را نیز به خوبی و با درک فرایند آن به‌طور کامل فراگیرند، تا بتوانند در موقع لزوم از آن استفاده نمایند.

در ادامه تأکید می‌شود که حتماً روی علامت‌های Δ بحث کنید و حالت‌های مختلف حلّ معادله را در حالت‌هایی که دلتا منفی، صفر یا مثبت باشد، بررسی کنید و مثال بزنید. در این زمینه می‌توانند فعالیت صفحهٔ ۷۴ و کار در کلاس شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۷۵ را کامل کنند.

کار در کلاس شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۷۵ و مثال‌هایی شبیه آن می‌توانند به عنوان تمرین این قسمت در کلاس حل شوند. مثال صفحهٔ ۷۶، یک نمونه از مثال‌های کاربردی و جذّاب از معادلات درجهٔ دوم‌اند و می‌توانند برای تنوّع دادن به تدریس به‌کار روند.

برای تمرین‌های صفحه‌های ۷۶ و ۷۷ وقت کافی بدهیم تا دانش‌آموزان با حلّ تمرین‌های ۶ تا ۱۱ به کاربرد این درس مسلّط شوند.

درس دوم

سهمی

اهداف

- ❑ شکل کلی سهمی را با استفاده از ضریب a، قبل از رسم بداند.
- ❑ سهمی را با استفاده از مربع کامل کردن و نقطه‌یابی رسم کند.
- ❑ مختصات رأس سهمی را قبل از رسم بنویسد.
- ❑ معادلهٔ محور تقارن را قبل از رسم بنویسد و آن را رسم کند.
- ❑ سهمی را با استفاده از ضرایب آن و نقطه‌یابی رسم کند.
- ❑ اهمیت رأس سهمی را به‌عنوان نقطه‌ای که می‌توان از آن ماکزیمم یا مینیمم عبارتی را تعیین کرد، درک کرده و از آن استفاده کند.

روش تدریس

در ابتدای درس سهمی، بهتر است با خلاصه‌ای دربارهٔ تاریخچه و کاربردهای سهمی شروع شود : «اسحاق نیوتن از سهمی برای محاسبهٔ مدار شهاب‌سنگ‌ها استفاده می کرد. گالیله نشان داد که وقتی جسمی را در هوا پرتاب می‌کنیم، مسیر حرکت آن سهموی است. نیوتن و گرگوری نشان دادند که هنگامی‌که نور به‌صورت موازی به یک آینه سهموی تابانده شود، پس از انعکاس در کانون آن جمع می‌شود. پاسکال سهمی را تصویر یک دایره در نظر گرفت. اقتصادی‌ترین شکل پل کمانی، در اغلب شرایط سهمی است.» همچنین می‌توانید از جلسهٔ قبل به دانش‌آموزان بگویید که یک مخروط کاغذی درست کنند و همراه خودشان بیاورند. و بعد سر کلاس حدس بزنند که در صورت تقاطع یک صفحه با مخروط چه شکلی به‌وجود می‌آید. از مثال های کاربردی مانند مسیر پرش یک اسکی‌باز، یا مسیر حرکت توپ بسکتبال نیز می‌توانید برای

توضیح شکل سهمی و آشنایی دانش‌آموزان با آن استفاده کنید. تقدّم و تأخّر این مقدمات سلیقه‌ای است.

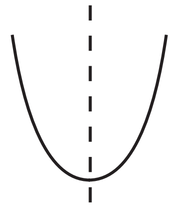
در آغاز درس در صفحهٔ ۷۸ فعالیتی آورده شده است که معادلهٔ $y=x^۲-۴$ و نمودار آن را بررسی می‌کند. پنج نقطه که طول‌های کوچکی دارند در نظر گرفته و در معادله قرار داده و عرض آنها را به‌دست آورید. سپس نقاط را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و به‌هم وصل کنید. در همین فعالیت، مفهوم رأس سهمی و محور تقارن آن را برای شاگردان توضیح دهید و تذکر دهید که می‌توانند با حداقل سه نقطه، سهمی را رسم کنند.

ارتباط بین نمودار سهمی و معادلهٔ سهمی در صفحهٔ ۷۹ توضیح داده شده است. همچنین ارتباط بین ضریب $x^۲$ یعنی a با شکل سهمی نیز در همان صفحه آورده شده است.

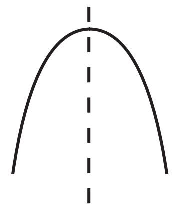
$y=ax^۲+bx+c \longrightarrow$

$\longrightarrow a>۰ \longrightarrow$ رأس سهمی : پایین‌ترین نقطه

$\longrightarrow a<۰ \longrightarrow$ رأس سهمی : بالاترین نقطه



$a>۰$



$a<۰$

توصیه می‌شود : فعالیت صفحهٔ ۷۹، یا مثالی شبیه آن حتماً حل نمایید و حداقل دو سهمی با استفاده از مربع کامل کردن رسم کنید.

«شکل کلی ضابطهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-h)^۲+k$ ، $(a\neq ۰)$ است که رأسی به مختصات (h,k) و محور تقارنی با معادلهٔ $x=h$ دارد.»

این تعریف در صفحهٔ ۸۰ آمده که بهتر است در کار درکلاس پس از آن، **مختصات رئوس را خود دانش‌آموزان به‌دست آورده و سهمی را رسم نمایند. فعالیت صفحهٔ ۱۲** از نظر مفهومی بسیار مهم بوده و بهتر است دانش‌آموزان سعی کنند معادلهٔ کلی سهمی را که به‌صورت $y=ax^2+bx+c$ می‌باشد، مربع کامل کنند و به تساوی زیر برسند :

$$y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

سپس با استفاده از شکل کلی $y=(x-h)^2+k$ و رأس سهمی به‌صورت (h,k)، نشان دهند که :

$$-h=\frac{b}{2a}\rightarrow h=-\frac{b}{2a}\ ,\ k=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

پس رأس هر سهمی به‌صورت $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ می‌باشد و معادلهٔ محور تقارن که در شکل کلی به صورت $x=h$ است، به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ درمی‌آید.

پس از این فعالیت، دانش‌آموز باید این توانایی را داشته باشد که مثال‌هایی شبیه مثال صفحهٔ ۸۰ را حل کند و با داشتن معادلهٔ سهمی و قبل از رسم آن، **مختصات رأس سهمی و معادلهٔ محور تقارن سهمی** را نوشته و سپس سهمی را رسم نماید.

فعالیت صفحهٔ ۸۱، قسمتی از درس را بازگو می‌کند و بر این موضوع تأکید می‌کند که ضرایب x^2 اگر بزرگ‌تر از واحد باشند، دهانهٔ سهمی بسته‌تر و اگر کمتر از واحد باشند، دهانهٔ سهمی بازتر خواهد شد. این موضوع حتماً برای دانش‌آموزان شفاف شود. تمرین‌های صفحهٔ ۸۱ و صفحهٔ ۸۲ را برای جلسهٔ آتی در نظر بگیرید.

درس سوم

تعیین علامت

اهداف

❑ چند جمله‌ای‌های درجه اوّل و دوم را تعیین علامت نماید و مشخص کند در چه بازه‌ای مثبت، در چه بازه‌ای منفی و به ازای کدام مقادیر متغیر، صفر است.

❑ عبارت‌های شامل چند جمله‌ای‌های درجه اوّل و دوم را تعیین علامت نماید و مشخص کند در چه بازه‌ای مثبت، در چه بازه‌ای منفی و به ازای کدام مقادیر متغیر، صفر است.

❑ نامعادلهٔ دوگانه را با عبارت خواص جمع و ضرب حل کرده و مجموعه جواب را به‌صورت بازه و روی محور اعداد حقیقی مشخص کند.

❑ نامعادلهٔ با عبارات درجهٔ ۲ را با دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کند و مجموعهٔ جواب را به‌صورت بازه و روی محور اعداد حقیقی مشخص کند.

❑ مفهوم نامعادلهٔ قدرمطلقی (درجهٔ اول) را به‌صورت هندسی بداند و بتواند با خواص جبری، مجموعهٔ جواب را به‌دست آورد.

❑ با مسائل کاربردی که شامل تعیین علامت چند جمله‌ای‌های درجهٔ دوم است، آشنا شود.

تعیین علامت عبارات جبری در این کتاب به دو قسمت چند جمله‌ای درجه اوّل و چند جمله‌ای درجه دوم تقسیم می‌شود که یکی از اساسی‌ترین قسمت‌های ریاضی پایه است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حلّ نامعادلات وپیدا کردن دامنه و برد توابع است.

بخش اوّل : تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اوّل

تعیین علامت در آغاز درس با مثالی کاربردی شروع می‌شود که در آن می‌خواهد عبارت $5x-200$ را تعیین علامت نماید. اگر تعداد کالای تولید شده را x فرض کنیم، سود حاصل برای شرکت تولیدی مفروض، از این عبارت به‌دست می‌آید.

برای تفهیم این موضوع ابتدا چند مقدار دلخواه برای x را درنظر گرفته و در عبارت p(x) قرار داده و جدولی برای آن می‌کشیم. عدد ۴۰ را نیز در آن قرار داده و دو عدد قبل و دو عدد بعد از آن را می‌نویسیم مشخص است که برای اعداد بزرگ‌تر از ۴۰، مقادیر، علامت مثبت و برای اعداد کوچک‌تر از ۴۰، مقادیر، علامت منفی اختیار خواهند کرد و به ازای عدد ۴۰ مقدار p(x) برابر صفر خواهد بود.

می‌توان برای دانش‌آموزان به این صورت استنباط نمود که اگر این شرکت دقیقاً ۴۰ کالا تولید نماید، هیچ سودی به‌دست نمی‌آورد و اگر بیشتر از ۴۰ کالا تولید کند به سوددهی می‌رسد و چنان که کمتر از ۴۰ کالا تولید نماید، این شرکت متضرّر خواهد شد. از جدول تعیین علامت صفحه ۸۳ نیز می‌توان در پایان این مثال بهره برد.

همان‌طور که مشخص است این مثال، نمایانگر عینی از کاربرد تعیین علامت در مسائل اقتصادی است که می‌توان شبیه آن تمرینی طرح کرد که توسط دانش‌آموزان حل شود. در فعالیت صفحهٔ ۱۵ نمودار دو خط $y=2x-6$ و $y=-2x+6$ رسم شده است و با استفاده از آن، y، تعیین علامت شده است. در این فعّالیت سعی شده دانش‌آموز با رویکردی هندسی به تعیین علامت فکر کند. در حالت کلی دو جمله‌ای درجه اوّل را به‌حالت عمومی $y=ax+b$ که در آن $a\neq 0$ نمایش می‌دهیم و هدف از تعیین علامت دو جمله‌ای این است که مقادیری حقیقی برای x بیابیم که به ازای آنها دو جمله‌ای، + یا − یا به ازای یک مقدار x برابر با ۰ شود که به کمک جدول زیر که جدول تعیین علامت نامیده می‌شود این کار را انجام می‌دهیم؛

$$y=ax+b \rightarrow ax+b=0 \rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$y=ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

در ادامه در صفحهٔ ۸۴ مثال ساده‌ای نیز آورده شده که با رویکرد صرفاً جبری و با استفاده از جدول فوق نوشته شده است. تعیین علامت عبارت‌های شامل عامل‌های درجه اوّل در مثال صفحهٔ ۸۵ نوشته

شده که در آن، هدف تعیین علامت عبارت (x−۳)(۱−۲x)=A است، ابتدا به‌صورت جداگانه هر عبارت را تعیین علامت می‌کنیم و سپس اطلاعات این دو جدول را در یک جدول می‌نویسیم و علامت عبارت A را نیز از حاصل‌ضرب علامت‌های سطر اوّل و دوم به‌دست می‌آوریم. توصیه می‌شود تمرین‌های مشابه این مثال سرکلاس حل شود. کار در کلاس صفحهٔ ۸۵ شامل چهار قسمت می‌باشد که قسمت الف مشابه مثال صفحهٔ ۸۵ است. قسمت ب یک عبارت پرانتزی با درجه دوم است که حتماً باید برای دانش‌آموزان توضیح دهید که عبارات جبری با درجهٔ زوج همراه علامت + دارند و فقط در ریشهٔ عبارت داخل پرانتز، صفر می‌باشند. قسمت ج نیز حاصل‌ضرب $x^۳$ در یک عبارت درجه اوّل است که همانند قبل این موضوع برای شاگردان شفاف شود که عبارات با درجهٔ فرد، دارای علامتی همانند عبارات با درجهٔ ۱ می‌باشند. در نهایت در قسمت د، حاصل تقسیم دو عبارت درجهٔ ۱ است که مفهوم «تعریف نشده» در حاصل تعیین علامت کسر در این مثال مشخص می‌گردد.

بخش دوم : تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم

شکل کلی چند جمله‌ای‌های درجه دوم به‌صورت $p(x) = ax^۲+bx+c$ است که در آن a، b، c اعداد حقیقی بوده و $a\neq ۰$، با توجه به توضیحات همین فصل داریم :

$$P(x) = ax^۲ + bx + c = a(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$$

$$a\left[(x + \frac{b}{۲a})^۲ - \frac{\Delta}{۴a^۲} \right]$$

که با توجه به علامت Δ، تعداد ریشه‌های $p(x)=۰$ متفاوت خواهد بود.

حالت اوّل : $\Delta > ۰$

$$P(x) = a\left[(x + \frac{b}{۲a})^۲ - \frac{\Delta}{۴a^۲} \right] = a\left[(x + \frac{b}{۲a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{۲a})(x + \frac{b}{۲a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{۲a}) \right]$$

$$= a\left[(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a})(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}) \right]$$

که با فرض $x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ داریم :

$$P(x) = a(x - x_۱)(x - x_۲)$$

حال فرض می‌کنیم $x_1 < x_2$ در این‌صورت علامت P(x) برای مقادیر مختلف x، طبق جدول زیر تعیین می‌شود:

x		x_1		x_2	
P(x)	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

زیرا:

۱ اگر $x < x_1$ باشد؛ چون $x_1 < x_2$ بنابراین $x < x_2$ نیز می‌باشد، پس:

P(x) هم‌علامت a خواهد بود. $P(x) = a(\underbrace{x - x_1}_{<0})(\underbrace{x - x_2}_{<0}) \to$

۲ اگر $x_1 < x < x_2$ باشد: P(x) علامتی مخالف علامت a $\to P(x) = a(\underbrace{x - x_1}_{>0})(\underbrace{x - x_2}_{<0})$ خواهد داشت.

۳ اگر $x > x_2$، چون $x_1 < x_2$ بنابراین $x > x_1$ نیز می‌باشد، پس:

P(x) هم‌علامت a خواهد بود. $P(x) = a(\underbrace{x - x_1}_{>0})(\underbrace{x - x_2}_{>0}) \to$

حالت دوم: $\Delta = 0$: در این حالت خواهیم داشت:

$$P(x) = a(x_1 + \frac{b}{2a})(x_2 + \frac{b}{2a}) = 0 \to x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

در این حالت دو ریشه با مقادیر مساوی یا اصطلاحاً یک ریشهٔ مضاعف داریم. بنابراین، جدول تعیین علامت P(x) به‌صورت زیر خواهد بود:

x		$x_1=x_2$	
P(x)	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

حالت سوم: $\Delta < 0$: در این حالت، معادلهٔ $P(x) = 0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و از آنجایی که داریم:

$$P(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

و $\Delta < 0$، پس عبارت داخل کروشه همواره + خواهد بود و علامت P(x) همان علامت a است.

این مفهوم برای حلّ مسائلی که تعیین پارامترها و حدود آنها را می‌خواهند و شرط P(x) همواره + یا همواره− را دارند به‌کار می‌رود. توجه دانش‌آموزان به این نکته حتماً جلب شود که دو حالت داریم :

۱) $P(x) > 0 \rightarrow \Delta < 0 \ , a > 0$

۲) $P(x) < 0 \rightarrow \Delta < 0 \ , a < 0$

مثال صفحهٔ ۸۷ نیز پس از به‌دست آوردن ریشه‌های معادلهٔ داده شده در حالت $\Delta > 0$، عبارت A را تعیین علامت می‌نماید.

مثال و کار در کلاس صفحهٔ ۸۷ نیز مثال‌هایی برای تعیین علامت، عباراتی شامل عوامل درجه اول و درجه دوم می‌باشند که کلّ این مسائل و مسائلی شبیه آن توصیه می‌گردد.

نامعادله

نامعادله به‌عنوان آخرین مبحث این فصل قرار گرفته است و از آنجایی که دانش‌آموزان در سال نهم با مفهوم نامعادله آشنا شده‌اند، ابتدا نحوهٔ خواندن نامعادلات را یادآوری کرده است. سپس خاصیت جمع و خاصیت ضرب در نامعادلات توضیح داده شده است. مثال صفحهٔ ۸۹ یک مثال ساده از نامعادله با عبارات درجه اوّل می‌باشد که با استفاده از خواص جمع و ضرب حل شده و مجموعه جواب این نامعادله به‌صورت مجموعه و بازه و نمایش هندسی نشان داده شده است.

صفحهٔ ۸۹ این فصل با بحث «نامعادلهٔ دوگانه» آغاز می‌شود که یک عبارت جبری به‌صورت مثال آورده شده و در دو نامعادلهٔ جداگانه بین دو عدد قرار داده شده، برای حل، دو راه پیشنهاد داده شده است : راه اوّل : دو نامعادله حل شود و بین جواب‌ها اشتراک گرفته شود. راه دوم : ترکیب دو نامعادله باهم است که به‌صورت یک نامساوی دوگانه نوشته می‌شود و سپس با استفاده از خواص جمع و ضرب، حدود x تعیین می‌شود. همچنین این نکته هم گفته شده که نامعادلهٔ دوگانه را به‌صورت دستگاه نامعادلات نیز می‌توان نشان داد.

کار در کلاس صفحهٔ ۹۰ نیز مثالی برای نامعادلهٔ دوگانه می‌باشد که حلّ آن توصیه می‌گردد. فعالیت صفحه ۹۰ یک چندجمله‌ای درجه دوم مثال زده و نمودار آن را رسم نموده است. سپس با استفاده از نمودار مفهوم منفی بودن را ارائه می‌کند و با جدول تعیین علامت نیز بر این موضوع تأکید می‌نماید. کار در کلاس صفحهٔ ۹۰ نیز چند مثال در همین رابطه آورده که به دو روش هندسی و با جدول تعیین علامت، نامعادله با چندجمله‌ای درجه دوم را حل کرده است. در مثال صفحهٔ ۹۰ یک چندجمله‌ای درجه دوم با پارامتر مجهول به عنوان ضریب x ارائه داده که حدود این پارامتر را با شرط همواره مثبت بودن چندجمله‌ای خواسته و با شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ و حلّ نامعادله $m^2-4<0$، با استفاده از جدول تعیین علامت، آن را حل

نموده است. مثال صفحهٔ ۹۱ یک نامعادله به‌صورت $\frac{x^۲ - ۹}{۲x + ۱} \geq ۰$ آورده که ترکیبی با عوامل درجه اوّل و دوم می‌باشد و با استفاده از جدول تعیین علامت، عبارت $\frac{x^۲ - ۹}{۲x + ۱}$ را تعیین علامت نموده است، و در سطر آخر هرجا که کسر بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، در مجموعه جواب نامعادله قرار داده است.

حلّ نامعادلات قدر مطلقی، پس از این مثال به عنوان آخرین مبحث این فصل در صفحهٔ ۹۱ آورده شده که در ابتدا به مفهوم نامعادلهٔ قدر مطلقی با یک نامعادلهٔ ساده به صورت $|x| \leq ۳$ اشاره شده و اعدادی که در این نامعادله صدق می‌کنند، روی محور نشان داده شده است و به‌صورت بازه نیز با جای خالی داده شده است. همچنین نامعادلهٔ $|x| \geq ۳$ نیز به همین اشکال آورده شده است. سپس در ادامهٔ نامعادلات قدر مطلقی به‌صورت نامعادله‌های دوگانه و مجموعه جواب ذکر شده‌اند و در نهایت به‌صورت یک قاعدهٔ کلّی گفته شده است. مثال صفحهٔ ۹۲ نیز با استفاده از همین قاعده دو نامعادله را مثال زده و به‌صورت نامعادلهٔ دوگانه مجموعه جواب را به‌صورت بازه و همچنین روی محور اعداد حقیقی نشان داده است. دقت کنید که قسمت اوّل به روش هندسی نیز حل شده است. کار در کلاس صفحهٔ ۹۳ نیز دارای چهار قسمت است که قسمت‌های الف و ب سؤال ۱ همانند مثال قبل از قاعده مذکور حل می‌شوند و سؤال ۲ و ۳، سؤالات جالبی هستند که در واقع پاسخ آورده شده و صورت سؤال را خواسته است و حلّ این دو قسمت به روش هندسی توصیه می‌شود. تمرین‌های صفحهٔ ۹۳ نیز جهت تمرین بیشتر این مفهوم به‌صورت غیرتکراری از مفاهیم مختلف حل می‌شوند که حل تمامی آنها در کلاس درس لازم است.

حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۷۶

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

حل : دو عدد فرد متوالی را $۲k+۱$ و $۲k+۳$ می‌گیریم. پس :

$$(۲k + ۱)^۲ + (۲k + ۳)^۲ = ۲۹۰ \Rightarrow ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۴k^۲ + ۱۲k + ۹ = ۲۹۰ \Rightarrow$$
$$۸k^۲ + ۱۶k - ۲۸۰ = ۰$$

و با ساده کردن به معادلهٔ $k^۲ + ۲k - ۳۵ = ۰$ می‌رسیم. اکنون این معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم :

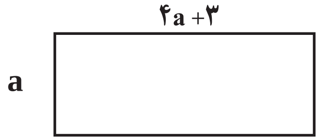
$$k^۲ + ۲k - ۳۵ = ۰ \Rightarrow (k + ۷)(k - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k + ۷ = ۰ \Rightarrow k = -۷ \\ k - ۵ = ۰ \Rightarrow k = ۵ \end{cases}$$

اگر $k = ۵$ باشد، دو عدد فرد متوالی، عبارت‌اند از ۱۱ و ۱۳. همچنین اگر $k = -۷$ باشد، این دو عدد فرد متوالی، عبارت‌اند از ۱۱- و ۱۳-.

۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل : مساحت این مستطیل، ۴۵ سانتی‌متر مربع است، پس :

$$a(۴a+۳)=۴۵ \Rightarrow ۴a^{۲}+۳a-۴۵=۰ \Rightarrow$$
$$\Delta=b^{۲}-۴ac=۹-۴(۴)(-۴۵)=۹+۷۲۰=۷۲۹$$



پس معادلهٔ فوق دو ریشه دارد و این دو ریشه عبارت‌اند از :

$$a=\frac{-۳\pm\sqrt{۷۲۹}}{۸}=\frac{-۳\pm ۲۷}{۸}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-۳+۲۷}{۸}=\frac{۲۴}{۸}=۳\\ a=\frac{-۳-۲۷}{۸}=\frac{-۳۰}{۸}=\frac{-۱۵}{۴}\end{cases}$$

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر چهار سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سنّ آنها ۶۰ شود، سنّ هرکدام چقدر است؟

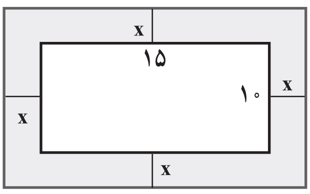
حل : اگر سنّ این دو برادر را با a و b نشان دهیم، سپس $a-b=۴$. از سوی دیگر، بعد از چهار سال رابطهٔ $(a+۴)(b+۴)=۶۰$ برقرار است. بنابراین، با جایگذاری $a=b+۴$ در این رابطه داریم :

$$(a+۴)(b+۴)=۶۰\Rightarrow(b+۴+۴)(b+۴)=۶۰\Rightarrow$$
$$(b+۸)(b+۴)=۶۰\Rightarrow b^{۲}+۱۲b+۳۲=۶۰$$

که با ساده کردن به معادلهٔ $b^{۲}+۱۲b-۲۸=۰$ می‌رسیم. این معادله را به روش تجزیه حل می‌کنیم :

$$b^{۲}+۱۲b-۲۸=۰\Rightarrow(b+۱۴)(b-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}b+۱۴=۰\Rightarrow b=-۱۴\\ b-۲=۰\Rightarrow b=۲\end{cases}$$

و با توجه به اینکه سنّ انسان منفی نمی‌تواند باشد، جواب $b=-۱۴$ رد می‌شود و $b=۲$ سنّ برادر کوچک‌تر و سنّ برادر بزرگ‌تر، $a=۶$ است.



۹ یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد،ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

حل : مساحت مستطیل بزرگ (قاب عکس به همراه عکس) ۴۵۰ سانتی‌متر مربع است، پس :

$$(15+2x)(10+2x) = 450 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 450 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 25x - 225 = 0$$

و این معادله را به روش کلی حل می‌کنیم :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (25)^2 - 4(2)(-225) = 625 + 1800 = 2425$$

پس معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد و داریم :

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{2425}}{4} \cong \frac{-25 \pm 49/24}{4}$$

و با توجه به اینکه x یک عدد مثبت است، جواب زیر به‌دست می‌آید :

$$x \cong \frac{-25 + 49/24}{4} = 6/06$$

۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

حل : اگر تعداد تیم‌ها، n باشد، تیم اوّل، با ۱−n تیم بازی می‌کند. تیم دوم باید با ۲−n تیم (همهٔ تیم‌ها به جز تیم اوّل) بازی کرده و به همین ترتیب، تیم سوم با ۳ − n تیم و ... و تیم ۱ − nام فقط با یک تیم بازی می‌کند، پس تعداد بازی‌های انجام شده عبارت است از : $(n-1)+(n-2)+...+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$

و این عدد باید N باشد، پس $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

اگر ۴۵ بازی در لیگ انجام شده باشد، داریم :

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \Rightarrow n(n-1) = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0$$

پس $(n-10)(n+9) = 0$ که جواب‌های $n = 10$ و $n = -9$ به‌دست می‌آید که تنها $n = 10$ قابل قبول است.

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر[1]، که برحسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطه $P=۰/۰۰۶s^{۲}-۰/۰۲s+۱۲۰$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سنّ s است. سنّ شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

حل : در رابطهٔ $P=۰/۰۰۶s^{۲}-۰/۰۲s+۱۲۰$ قرار می‌دهیم $P=۱۲۵$ و معادله را حل می‌کنیم.

$$۰/۰۰۶s^{۲}-۰/۰۲s+۱۲۰=۱۲۵ \Rightarrow ۰/۰۰۶s^{۲}-۰/۰۲s-۵=۰$$

و این معادله را با روش کلی حل می‌کنیم و جواب‌های $x=۳۰/۵۸$ و $x=-۲۷/۲۴$ را به‌دست می‌آوریم.

که تنها جواب $x=۳۰/۵۸$ قابل قبول است.

حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۸۱

۲ **حل** : دو نقطهٔ $(-۲،۵)$ و $(۰،۵)$ عرض یکسان دارند، پس نقطهٔ میانی آنها، یعنی $(-۱,۵)=(\frac{۰-۲}{۲},\frac{۵+۵}{۲})$ روی خط تقارن قرار دارد، پس معادلهٔ خط تقارن، $x=-۱$ است.

۳ **حل** : محور yها در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع شده است، پس از نقطهٔ $(۰،۲)$ می‌گذرد، همچنین محور xها را در نقاط $(-۱،۰)$ و $(۲،۰)$ قطع کرده است، پس این سه نقطه را در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}(۰,۲)\Rightarrow ۲=a(\cancel{۰})+b(\cancel{۰})+c\Rightarrow \boxed{c=۲}\\ (-۱,۰)\Rightarrow ۰=a(۱)+b(-۱)+c\Rightarrow a-b=-۲\Rightarrow \begin{cases}۲a-۲b=-۴\\ ۴a+۲b=-۲\end{cases}\overset{\oplus}{\Rightarrow}\\ (۲,۰)\Rightarrow ۰=a(۴)+b(۲)+c\Rightarrow ۴a+۲b=-۲\end{cases}$$

$$۶a=-۶\Rightarrow \boxed{a=-۱}\ ,\ \ a-b=-۲\Rightarrow -۱-b=-۲\Rightarrow \boxed{b=۱}$$

پس معادلهٔ سهمی عبارت است از : $y=-x^{۲}+x+۲$

۱ــ منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.

۴ **حل** : دو سهمی $y=-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲$ و $y=-۲x^{۲}+۳x+۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. همچنین برای یافتن نقطهٔ فرود و برخورد با زمین، قرار می‌دهیم $y=۰$ و معادلهٔ به‌دست آمده را حل می‌کنیم و تنها جواب‌های مثبت را قبول می‌کنیم.

$$y=-\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲$$

$$(\text{رأس})\ x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{۲(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow \text{رأس}=(\frac{۳}{۲},\frac{۲۵}{۸})$$

$$y=۰\Rightarrow -\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{۳}{۲}x+۲=۰\overset{\times ۲}{\Rightarrow}-x^{۲}+۳x+۴=۰\Rightarrow x^{۲}-۳x-۴=۰\Rightarrow$$

$$(x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۴\ ,\ \ x=-۱$$

$\Rightarrow$

x	۰	$\frac{۳}{۲}$	۳	۴
y	۲	$\frac{۲۵}{۸}$	۲	۰

$$y=-۲x^{۲}+۳x+۲$$

$$(\text{رأس})\ x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳}{۲(-۲)}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow y=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow \text{رأس}=(\frac{۳}{۴},\frac{۲۵}{۸})$$

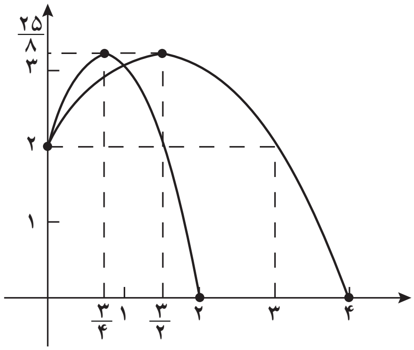
$$y=۰-۲x^{۲}+۳x+۲=۰\Rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=۹=۱۶=۲۵\Rightarrow x=\frac{-۳\pm ۵}{-۴}=۲$$

یا $-\frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$

x	۰	$\frac{۳}{۴}$	۲
y	۲	$\frac{۲۵}{۸}$	۰

و نمودار این دو سهمی در زیر رسم شده است.



حلّ تمرین‌های صفحهٔ ۸۱

۲ **حل** : قرار دهید $x^2+3x+k>0$. برای اینکه یک چندجمله‌ای درجه دوم همیشه مثبت باشد، باید $\Delta<0$. پس $9-4k<0$، بنابراین $k>\frac{9}{4}$.

۳ **حل** : قرار دهید $mx^2-mx-1<0$ ، پس $\Delta<0$ و ضریب x^2، یعنی m نیز باید منفی باشد، پس :

$$\begin{cases}\Delta<0\Rightarrow m^2+4m<0\Rightarrow m(m+4)<0\Rightarrow \\ m<0\end{cases}$$

m		-4		0	
m^2+4m	+	0	○	0	+

پس مجموعه جواب، اشتراک جواب‌های $-4<m<0$ و $m<0$ است که $-4<m<0$ است.

۴ **حل** : قرار دهید : $-5t^2+18t+13>13$ و این نامعادله را حل کنید.

۵ **حل** : قرار دهید $\frac{15}{8}x^2-30x+200<110$ و این نامعادله را حل کنید. جواب‌های این نامعادله عبارت‌اند از : $x<4$ و $x>12$ که تنها $x<4$ قابل قبول است؛ زیرا پس از یک کار سنگین بدنی تا ۴ دقیقه ممکن است ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر باشد و نه بعد از دوازده دقیقه.

فصل ۵

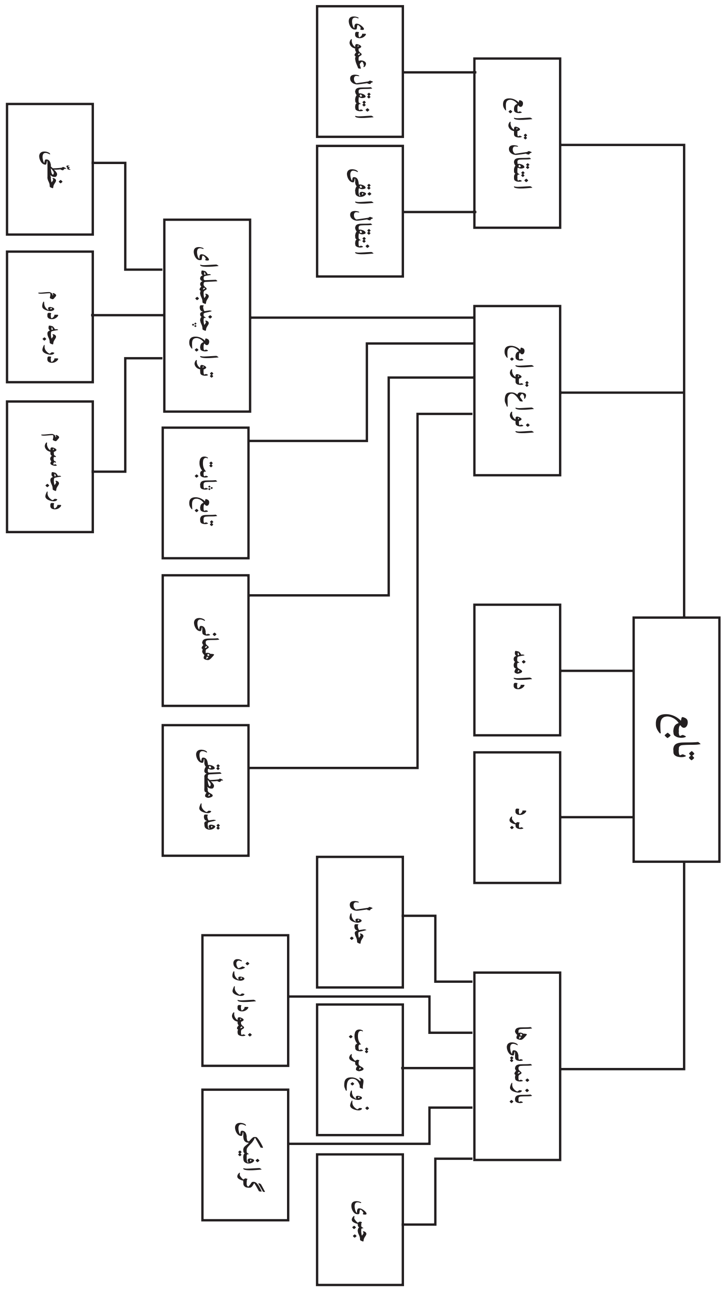
تابع

نگاه کلّی به فصل

فصل ۵ از سه درس تشکیل شده است. درس اوّل به مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن اختصاص دارد. درس دوم به دامنه و برد توابع می‌پردازد و در درس سوم انواع توابع مورد بررسی قرار می‌گیرند. معرفی ایده‌های مجرد بدون فراهم نمودن زمینه‌ای طبیعی و مناسب برای آنها و نیز بدون تکیه بر دانش و تجربهٔ قبلی دانش‌آموزان بر دشواری‌های یادگیری می‌افزاید و گاهی دسترسی فراگیران را به این ایده‌ها ناممکن می‌سازد و علاوه بر این، باعث بروز پدیده‌ای به نام مقاومت در برابر یادگیری در دانش‌آموزان می‌شود. رویکرد منطقی تعریف تابع با زوج مرتب در مدرسه شروع مناسبی نمی‌باشد و بسیاری از دانش‌آموزان را به‌جای تفکّر و مشاهدهٔ دقیق و کشف رمزها و نظام‌های نهفته در پدیده‌های پیرامونی، به حفظ کردن طوطی‌وار و اعمال مکانیکی وادار می‌کند. دانش‌آموز پی‌نمی‌برد که تعاریف از کجا سرچشمه می‌گیرند و ارائهٔ چنین تعریفی را شبیه شعبده‌بازی می‌پندارد. نمی‌توان از دانش‌آموزان انتظار داشت که مفهومی مجرّد مانند تابع را به یکباره و پس از یک معرفی صریح و بدون فراهم کردن پیش‌نیازهای لازم درک کنند. در این فصل سعی شده است هنگام آموزش تابع موارد زیر مدّنظر قرار گیرد:

- انجام فعالیت توسط دانش‌آموزان برای کسب مفهوم.
- فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری متنوع.
- تکیه بر دانش قبلی دانش‌آموزان.
- حرکت از شهود به تجرید.
- ایجاد یک جریان استقرایی و فراهم کردن فرصت کشف.
- استفاده از سطح تجرید مناسب با دانش‌آموزان.
- توانایی نشان دادن ارتباطات بین مفاهیم ارائه شده.
- پرهیز از تکیهٔ صرف بر دانش رویه‌ای.
- استفاده از مثال‌های واقعی مبتنی بر تجربیات عینی دانش‌آموزان.
- طرح مسائل مرتبط با بدفهمی‌های دانش‌آموزان.
- فراهم کردن فرصت‌های طرح مسئله برای دانش‌آموزان.
- توانایی برقراری ارتباط و سازگاری بین بازنمایی‌های متفاوت از تابع.

نقشهٔ مفهومی


تابع
دامنه
برد
انتقال توابع
انتقال عمودی
انتقال افقی
انواع توابع
توابع چندجمله‌ای
خطی
درجه دوم
درجه سوم
تابع ثابت
همانی
قدر مطلق
بازنمایی‌ها
جدول
نمودار ون
زوج مرتب
گرافیکی
جبری

تصویر عنوانی

تصویر عنوانی فصل پنج به ارائهٔ نمودارهایی مبتنی بر اسناد رسمی در رابطه با کاهش نرخ رشد جمعیت و پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در چهار وضعیت مختلف اختصاص دارد. تصویر عنوانی فوق، مثالی از برقراری ارتباط بین ریاضیات و دنیای واقعی است. در حقیقت نمودارها یکی از انواع بازنمایی‌های مربوط به تابع را نشان می‌دهند. اگرچه درک کامل و تفسیر این نمودارها پس از آموزش‌های لازم امکان‌پذیر است، با این حال، در اوّلین برخورد نیز نمودارها به کمک توضیحات معلمان تا حدّی گویا هستند. همچنین تصویر عنوانی فوق سعی در فرهنگ‌سازی و طرح یکی از مسائل و مشکلات کشور را دارد. در رابطه با اهمیت فرهنگی موضوع بهترین کار آشنایی با دیدگاه‌ها و نظرات رهبر معظّم انقلاب در این زمینه است[1] :

مسئلهٔ جمعیت که به جد هم مورد بحث و اختلاف نظر در جامعه است، مسئلهٔ بسیار مهمی است. بلاشک از نظر سیاست کلّی کشور، کشور باید برود به سمت افزایش جمعیت، البته به نحو معقول و معتدل. همهٔ اشکالات و ایرادهایی که وارد می‌شود ــ که بعضی از اشکالاتی را هم که مطرح می‌کنند ما دیده‌ایم ــ قابل برطرف شدن و قابل پاسخ دادن است.

فرهنگ‌سازی در مسئلهٔ جمعیت، مثل خیلی از مسائل دیگر اجتماعی، حرف اوّل را می‌زند؛ باید فرهنگ‌سازی بشود که متأسفانه امروز این فرهنگ‌سازی نیست.

من معتقدم که کشور ما با امکاناتی که داریم، می‌تواند صد و پنجاه میلیون نفر جمعیت داشته باشد. من معتقد به کثرت جمعیّتم. هر اقدام و تدبیری که می‌خواهد برای متوقف کردن رشد جمعیت انجام بگیرد، بعد از صد و پنجاه میلیون انجام بگیرد!

آنچه که متخصصین و کارشناسان، با نگاه‌های علمی، با دقّت علمی بررسی کرده‌اند، ما را به این نتیجه می‌رساند که با این روند کنونی، کشور در آینده دچار مشکل فراوان خواهد شد؛ کشور دچار پیری عمومی خواهد شد. این تهدید نسل، چیز بدی است. البته شنیدم در مجلس طرحی در حال بررسی است؛ منتها آن‌طور که برای ما نقل کردند، آن طرح جواب نمی‌دهد؛ این مقداری که در این طرح دیده شده، جوابگو نیست. مسئولین و علاقه‌مندان و آشنایان با مقتضیات این کار در مجلس، باید توجه کنند و درست انجام دهند.

۱ــ این دیدگاه‌ها برگرفته از منبع حاضر است :
http://farsi.khamenei.ir/newspart-index?tid=۲۶۳۰&p=۲

دانستنی‌هایی برای معلم

مفهوم تابع به درستی به عنوان یکی از مهم‌ترین مفاهیم در سراسر ریاضیات درنظر گرفته می شود. توابع در سرتاسر برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه نیز حضور دارند و به تعبیر NCTM یک ایدهٔ متحدکنندهٔ مهم در ریاضیات‌اند. در حساب، توابع به عنوان اعمال روی اعداد ظاهر می‌شوند؛ مثلاً عمل جمع که یک زوج از اعداد را به مجموع آنها نسبت می‌دهد، در جبر، توابع رابطه‌هایی بین متغیرهایی‌اند که اعداد را نمایش می‌دهند. در هندسه، توابع مجموعه‌های نقاط را به تصاویرشان تحت حرکاتی از قبیل انتقال و دوران نسبت می‌دهند و در احتمال توابع، حوادث را به احتمال وقوع آنها نسبت می‌دهند (NCTM ۱۹۸۹). کلاین (۱۹۴۵ــ ۱۹۰۸) عقیده داشت که تابع باید یک مفهوم پایه در ریاضیات مدرسه باشد.

مفهوم تابع و مثال‌هایی خاص از آن را از هزاران سال قبل می‌توان دنبال کرد. به‌طور مثال، شمردن، چهار عمل اصلی (که توابعی از دو متغیرند)، ریشه‌های دوم، مکعب‌ها و ریشه‌های سوم و موارد زیادی از این دست، همگی دربردارندهٔ مفهوم تابع‌اند. اگرچه سیر تکامل تابع به ۴۰۰۰ سال قبل برمی‌گردد. اما ریاضی‌دان‌ها تنها طیّ ۵۰۰ سال گذشته تلاش‌های خود را برای ارائهٔ یک تعریف دقیق از تابع آغاز کرده‌اند. هم‌زمان با تغییر دیدگاه‌های ریاضی‌دانان از ایده‌های هندسی به ایده‌های جبری نماد تابع نیز دستخوش دگرگونی شد.

در سال ۱۷۱۸ برنولی اوّلین تعریف رسمی از تابع را ارائه کرد. برنولی یک تابع از یک متغیر را یک کمیّت ترکیب شده به هر شیوهٔ دلخواه از این متغیر و تعدادی ثابت می‌داند. اگرچه وی توضیح نمی‌دهد «به هر شیوهٔ دلخواه» به چه معنی است. اویلر در سال ۱۷۴۸ تعریف زیر را ارائه کرد. یک تابع از یک کمیّت متغیّر، عبارتی تحلیلی ترکیب شده به شکل دلخواه از آن کمیّت متغیّر و اعداد یا کمیّت‌های ثابت است. اویلر اولین کسی است که نماد $f(x)$ را به‌کار برد. تعریف اویلر تلاشی برای استفاده از جبر در جهت نمایش موضوعات هندسی بود. مشاهدات اویلر به یک دیدگاه وسیع‌تر از تابع منجر شد.

تعریف اویلر شبیه تعریف برنولی است. اضافه شدن اصطلاح «عبارت تحلیلی» با اهمیت است؛ زیرا اندیشه را از هندسه به جبر تغییر می‌دهد، گرچه اویلر به صراحت عبارت تحلیلی را تعریف نمی‌کند، ولی ازنظر وی، عبارت تحلیلی قابل قبول شامل چهار عمل جبری، ریشه‌ها، نماها، لگاریتم‌ها، توابع مثلثاتی، مشتق‌ها و انتگرال‌هاست.

به هرحال، روشن است که اویلر عبارت زیر را به‌عنوان دو تابع و نه یک تابع درنظر می‌گرفته است.

$$f(x)=\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

در سال ۱۸۲۹ دیریکله مثالی از یک تابع ارائه کرد که در آن، یک مقدار به همهٔ اعداد گویا و مقداری دیگر به‌همهٔ اعداد گنگ نسبت داده می‌شد. این اوّلین مثال صریح از یک تابع بود که نه قابل نمایش به وسیلهٔ یک عبارت تحلیلی بود و نه یک منحنی قابل رسم بدون ابزار بود. این اوّلین مثال از یک تابع همه‌جا ناپیوسته بود. ریاضی‌دان‌ها مقارن با پایان قرن نوزدهم، برای صورت‌بندی همهٔ ریاضیات با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها تلاشی به کار بردند. دیریکله (۱۸۵۹ ــ ۱۸۰۵) در سال ۱۸۳۷ چارچوب تعریف یک تابع را برحسب یک تناظر قراردادی بین متغیرهایی که با مجموعه‌های عددی نمایش داده شده‌اند، پی‌ریزی کرد. کلینر (۱۹۸۹) به نقل از لوزین، تعریف دیریکله را چنین ذکر می‌کند : y تابعی از متغیر x تعریف شده روی بازهٔ $a< x < b$ است، هرگاه به هر مقدار متغیّر x از این بازه یک مقدار معیّن از متغیر y نظیر شود. دیریکله اوّلین کسی بود که به‌صورت جدّی مفهوم تابع را به‌عنوان یک تناظر دلخواه درنظر گرفت.

در سال ۱۹۳۹ یک گروه از ریاضی‌دانان با نام مستعار بورباکی تابع را به شیوهٔ زیر تعریف کردند : فرض کنید که E و F دو مجموعه باشند که ممکن است مجزا یا غیرمجزا باشند. یک رابطه بین یک متغیّر x از E و یک متغیّر y از F یک رابطه تابع گونه در y نامیده می‌شود. هرگاه برای هر x در E، یک y یکتا در F وجود داشته باشد که در رابطهٔ داده شده با x باشد. بورباکی بعداً همچنین تعریف تابع را به عنوان یک زیرمجموعه خاص از حاصل‌ضرب دکارتی E و F داد. تعریف بورباکی اولین تعریف تابع به‌عنوان یک مجموعه از زوج‌های مرتب است. این دوره را می‌توان حضور یک دیدگاه جدید، یعنی مفهوم منطقی (مجرّد، ترکیبی، اصل موضوعی) جدید از تابع در برابر مفهوم جبری (محسوس، تحلیلی و ساختنی) قبلی از تابع تلقی کرد (کلینر ۱۹۸۹). در حقیقت مفهوم تابع یکی از خصیصه‌های متمایز کننده ریاضیات «مدرن» در برابر ریاضیات کلاسیک است (کلینر ۱۹۸۹).

درس اوّل

مفهوم تابع

اهداف

- ❑ آشنایی با مفهوم تابع
- ❑ درک بازنمایی‌های مختلف تابع
- ❑ ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف تابع و تبدیل آنها به یکدیگر

روش تدریس

در آموزش مفهوم تابع دو موضوع پایه‌ای و اساسی به حساب می‌آیند و برخی موضوعات دیگر می‌توانند قراردادی باشند. اوّلین موضوع اساسی نحوهٔ تناظر و ارتباط بین مجموعه‌هایی است که تابع به کمک آنها تعریف می‌شود. به عبارت دیگر «یکتایی» تناظر یک شرط اساسی برای تابع بودن رابطه‌هاست و در فعالیت‌های طراحی شده در ابتدای درس به این موضوع پرداخته شده است. نکتهٔ مهمّ دیگر این است که اعضای مجموعه‌ها «آزاد» و «دلخواه» هستند و لزوماً به اعداد محدود نمی‌شوند. در ادامه دانش‌آموزان با مقایسهٔ روابطی که تابع نیستند به تمایز و تفاوت‌های آنها پی‌می‌برند. باید توجه داشت که معلمان محترم نقش هدایت کننده و راهنما را دارند و باید با استفاده از موقعیت‌هایی که در درس فراهم شده‌اند (یا مشابه آنها) فرصت‌های یادگیری را برای دانش‌آموزان فراهم نمایند. ارائهٔ بحث و گفت‌وگوهای کلاسی بسیار مفید و ارزشمند خواهد بود. به‌طور طبیعی در حین اجرای فعالیت‌ها پاسخ‌های متفاوتی از سوی دانش‌آموزان (درست یا نادرست) ارائه می‌شود.

بررسی این پاسخ‌ها و قضاوت در مورد آنها به کمک دانش‌آموزان و اصلاح و پالایش ایده‌های مطرح شده به درک بهتر مفهوم توسط دانش‌آموزان کمک می‌نماید. در این درس، دانش‌آموزان با بازنمایی‌های مختلف تابع شامل «نمودار ون»، «زوج مرتبی»، «جدول»، و نمایش «هندسی» یا «گرافیکی» تابع آشنا می‌شوند. باید

به دانش‌آموزان کمک کرد تا برای توابع مشخص و معیّن انواع بازنمایی‌های آن را ارائه نمایند و با مقایسهٔ آنها به جوهر «مفهوم تابع» پی‌ببرند. در این درس، فرصت‌هایی فراهم شده است تا دانش‌آموزان خود به ارائهٔ مثال از تابع بپردازند، اصلاح و ویرایش تکمیل مثال‌ها با مشارکت دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.

توصیه‌های آموزشی

اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، در کتاب حاضر دامنهٔ تابع f برابر مجموعهٔ A در نظر گرفته می‌شود. همان طور که می‌دانید این یک موضوع قراردادی است که در حال حاضر در بیشتر کتاب‌های آموزشی در سطح دنیا رعایت می‌شود و البته در برخی متون زیر مجموعه‌ای از A را به عنوان دامنه در نظر می‌گیرند. توصیه می‌شود که دانش‌آموزان را درگیر مسائل حاشیه‌ای نکنیم و از طرح مسائل غیر ضروری در این ارتباط پرهیز نماییم؛ همچنین توصیه می‌شود که به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل دشوار و پیچیده که فاقد ارزش آموزشی‌اند اجتناب شود. درک مفهوم تابع کار آسانی نیست و قبل از اینکه این مفهوم درک شود مواجه کردن دانش‌آموزان با مسائلی تکنیکی دشوار و بی‌فایده یک اشتباه به حساب می‌آید.

اشتباهات رایج

ممکن است برخی از دانش‌آموزان برای درک مفهوم «زوج مرتب» با دشواری مواجه باشند و تفاوتی برای ترتیب مؤلفه‌ها قائل نباشند. همچنین ممکن است یکتایی مطرح شده در تعریف تابع با مفهوم «یک به یک بودن» جابه‌جا در نظر گرفته شود.

درس دوم

دامنهٔ برد تابع

اهداف

- آشنایی با مفهوم دامنه و برد
- معرفی توابع خطی
- ارائهٔ نمایش جبری توابع

روش تدریس

در اوّلین فعالیت این درس در صفحهٔ ۱۰۱ دانش‌آموزان با مفهوم دامنه و برد آشنا می‌شوند. انجام فعالیت توسط دانش‌آموزان و بررسی پاسخ‌ها و در صورت لزوم ارائهٔ نمونه‌های بیشتر به درک مفهوم دامنه و برد کمک می‌نماید. در فعالیت دوم، مفهوم برد بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرند و دانش‌آموزان پی می‌برند که اگر f تابعی از A به B باشد، برد تابع f لزوماً مجموعهٔ B نخواهد بود. در فعالیت صفحهٔ ۱۰۲ به کمک دنباله‌ها نمایش جبری یک تابع ارائه می‌شود. همچنین مفهوم دامنه و برد به‌طور عمیق‌تری مورد بررسی قرار می‌گیرد و مشخص می‌شود که توابعی با دامنه‌ها و بردهای متفاوت می‌توانند نمایش جبری یکسانی داشته باشند. علاوه بر این، به کمک فعالیت صفحهٔ ۱۰۳ توابع خطی معرفی می‌شوند.برای این کار از مفهوم آشنایی خط و معادله آن استفاده شده است. ضمن اینکه ارتباط مناسبی با دنباله‌ها نیز برقرار شده است.

نمودارهای صفحهٔ ۱۰۳ در راستای برقراری ارتباط بین ریاضیات و دنیای واقعی با تأکید بر مفهوم تابع ارائه شده‌اند. در کار در کلاس صفحهٔ ۱۰۴ برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، معیاری داده شده است.در صورت لزوم می‌توان مثال بیشتری ارائه کرد تا دانش‌آموزان با مقایسهٔ آنها بتوانند معیار را ارائه نمایند.

توصیه‌های آموزشی

مفهوم دامنه و برد از جمله مفاهیم اساسی در بحث تابع‌اند. یک تصور عام در این باره آن است که درک مفهوم صرفاً با محاسبهٔ دامنه و برد توابع پیچیده حاصل می‌شود. تجربه نشان داده است که قبل از درک این مفهوم توسط دانش‌آموزان، به آنها تمرینات مشکل و ترکیبی ارائه می‌شوند که مستلزم دانش و مهارت‌های مختلفی برای محاسبه دامنه و برد هستند. توصیه می‌شود که سطح مسائل در حدّ مسائل مطرح شده در کتاب درسی باشد.

اشتباهات رایج

از جمله اشتباهات رایج دانش‌آموزان در مورد دامنه و برد این است که اگر دو تابع دامنه‌ها و بردهای یکسانی داشته باشند، الزاماً با هم برابرند. در تمرین ۱۶ صفحهٔ ۱۰۸ به این موضوع پرداخته شده است. همچنین ممکن است برخی دانش‌آموزان تصور کنند که اگر ضابطهٔ جبری یک تابع معلوم باشد، نمایش هندسی آن یا دیگر بازنمایی‌های آن منحصر به فرد است. در تمرین ۳ صفحهٔ ۱۰۶ دانش‌آموزان پی می‌برند که تابع‌های متفاوتی (با دامنه‌ها و بردهای متفاوت) می‌توانند نمایش جبری یکسانی داشته باشند.

درس سوم

انواع توابع

اهداف

- ❑ آشنایی با توابع چند جمله‌ای
- ❑ معرفی توابع قدر مطلقی
- ❑ رسم توابع به کمک انتقال

روش تدریس

در فعالیت صفحهٔ ۱۰۹ دانش‌آموزان به کمک مفاهیم مساحت و حجم که با آنها آشنا هستند و با استفاده از نمایش جبری توابع، با توابع چند جمله‌ای آشنا می‌شوند. در صورت لزوم، مثال‌های بیشتری توسط معلمان محترم باید ارائه شود. همچنین تابع «همانی»، و تابع «ثابت» با بازنمایی‌های مختلف معرفی می‌شوند. کار درکلاس صفحهٔ ۱۱۰ کمک می‌کند تا درک دانش‌آموزان از توابع فوق کامل‌تر شود. همان‌گونه که در کتاب تأکید شده است. تفاوت‌ها و شباهت‌های توابع داده شده در هر مورد باید استفاده شود تا ایدهٔ اساسی نهفته در هر تابع (همانی و ثابت) درک شود. در کار در کلاس نیز مثال‌هایی توسط دانش‌آموزان ارائه می‌شود و معلمان محترم باید شرایطی را برای ارائه و بررسی و مقایسه مثال‌ها فراهم نمایند. در مورد کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۰ باید فرصت کافی به دانش‌آموزان داده شود تا نمودارها رسم شوند.

البته در فصل‌های قبل دانش‌آموزان با رسم نمودار $y=x^2$ آشنا شده‌اند و هدف کار در کلاس صفحه ۱۱۰ علاوه بر رسم نمودار، تأکید بر دامنه و بردهای متفاوت است. فعالیت صفحه ۱۱۱ به معرفی تابع قدر مطلق می‌پردازد. قدر مطلق یک عدد در سال‌های گذشته برای دانش‌آموزان معرفی شده است و با استفاده از این موضوع، تابع قدر مطلق ارائه شده است. باز هم توجه به دامنه و برد مورد تأکید است. توابع قطعه‌ای

(چند ضابطه‌ای) در صفحهٔ ۱۱۲ ارائه شده‌اند. در فعالیت صفحهٔ ۱۱۲ قسمتی از نمودار توابع قطعه‌ای ارائه شده است. دانش‌آموزان در این فعالیت درگیر حدس زدن، رسم کردن، استدلال، یافتن ارتباطات و مانند آن می‌شوند. به هر حال برای ادعای مطرح شده دانش‌آموزان باید از آنها دلیل خواست و بهتر است در هر مورد نیز سؤالاتی توسط معلم مطرح شود. در کار در کلاس شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۱۳، برای یافتن ضابطهٔ تابع قطعه‌ای داده شده لازم است که معادلات خطوط نشان داده شده به‌دست آید.

فعالیت صفحهٔ ۱۱۳ به رسم نمودار توابع به کمک انتقال عمودی اختصاص دارد. علاوه بر آنچه که در کتاب مطرح شده است می‌توان از دانش‌آموزان خواست که در مورد شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارهای داده شده توضیح دهند. همچنین علاوه بر نمودارهای توابع داده شده، در صورت لزوم توابع دیگری که به کمک انتقال عمودی توابع اوّلیه به‌دست می‌آیند، قابل طرح‌اند. به روش مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۴ به انتقال افقی می‌پردازد. در صورت امکان اگر نمودارها به کمک نرم‌افزارها از قبل تهیه و در کلاس نمایش داده شوند، امکان مقایسهٔ هم‌زمان تعداد بیشتری از توابع و انتقال یافته آنها برای دانش‌آموزان فراهم می‌شود. کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۵ نمونه مناسبی برای ارزشیابی به حساب می‌آید و لازم است دانش‌آموزان دلایل خود برای انتخاب هر نمودار را ارائه نمایند.

توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود که سطح مسائل در یک کلاس معمولی از آنچه که در تمرین‌های کتاب مطرح شده است فراتر نرود. همچنین بازتاب بر حلّ مسائل و تجزیه و تحلیل آنها بسیار مفیدتر از ارائهٔ تعداد زیادی مسئله اضافی و غیرضروری است.

اشتباهات رایج

برخی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان در این درس، جابه‌جایی انتقال عمودی و افقی با یکدیگر است. همچنین برخی تصور می‌کنند که هر تابع باید یک نمایش جبری داشته باشد و یا اینکه هر عبارت، یا معادله لزوماً یک تابع را مشخص می‌کند.

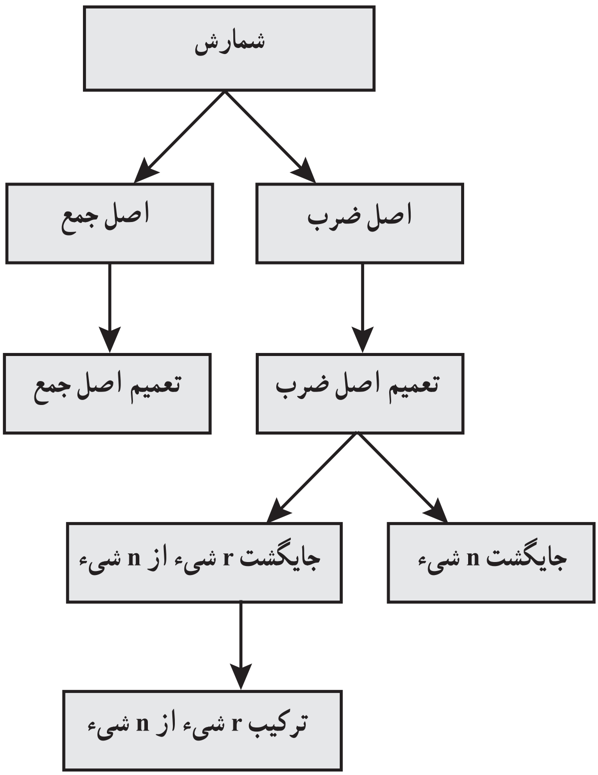
فصل ۶

شمارش، بدون شمردن

نگاه کلی به فصل

ترکیبات یکی از شاخه‌های مهم و جذّاب ریاضیات است و شمارش یکی از اصلی‌ترین موضوعات آن می‌باشد. شمارش به‌صورت یک به یک فرایندی است که دانش‌آموز در ابتدای آشنایی با ریاضیات با آن مواجه می‌شود، ولی با آشنایی فرد با مسائل پیچیده‌تر به نظر می‌رسد که شمارش یک به یک در بسیاری موارد کافی نیست و نیاز به تکنیک‌ها و مهارت‌های بیشتری از شمارش وجود دارد. فصل ۶ کتاب ریاضی پایهٔ دهم به این مبحث اختصاص یافته است. این فصل، شامل سه درس است. در درس اوّل اصول جمع و ضرب مطرح می‌شوند که از مهم‌ترین پایه‌ها برای به‌دست آوردن تکنیک‌های شمارش می‌باشند. در واقع با درک این دو اصل و بدون دانستن مفاهیم پیشرفته‌ای از ریاضیات، بسیاری سؤال‌های نه چندان سادهٔ شمارش قابل حلّ‌اند. در درس دوم با استفاده از مفهوم اصل ضرب، مفهوم جایگشت n شیء و جایگشت r شیء بیان و تشریح می‌گردد و در درس سوم مفهوم ترکیب و مسائل مربوط به آن مطرح می‌شود.

نقشهٔ مفهومی



تصویر عنوانی

مسئلهٔ معروف «چهار رنگ» می‌گوید؛ هر نقشه را می‌توان با چهار رنگ به‌گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ هم مرزی دارای رنگ یکسان نباشند که مسئلهٔ معادل آن در گراف‌ها به این صورت است که؛ هر گراف مسطح، چهار رنگ‌پذیر است. (برای کسب اطلاعات بیشتر به کتاب نظریهٔ گراف باندی ــ مورتی مراجعه شود). مطرح کردن چنین سؤالی با دانش‌آموزان صرفاً جهت وادار کردن دانش‌آموزان به تفکر و تأمل در اینکه مسائل مربوط به شمارش صرفاً با روش‌های ابتدایی که از قبل می‌شناسد حل نمی‌شوند.

توصیه‌های آموزشی

در مباحث و مسائل ترکیباتی باید توجه شود که سطح دشواری سؤال‌ها می‌تواند با کوچک‌ترین تغییر در سؤال بسیار تغییر کند، تا آنجا که بدون نیاز به دانستن مفاهیم پیشرفته در این موضوع، و فقط با دانستن چند رابطهٔ سادهٔ اوّلیه در ترکیبات، برای برخی مسائل پیچیده ترکیباتی که بعضاً در آزمون‌های المپیاد نیز مطرح شده‌اند، می‌توان حل ارائه نمود. لذا بهتر است معلم همواره سطح سختی سؤال‌ها را کنترل نماید و مسائلی طرح کند که دانش‌آموزان برای حلّ آن با چالشی مواجه شوند که با توجه به مفاهیم آموزش داده شده و با کمی تفکر قابل حل باشند و حلّ آنها برای دانش‌آموزان غیر قابل دسترس نباشد.

درس اوّل

شمارش

اهداف

- ❑ آشنایی با برخی روش‌های شمارش بدون شمردن مستقیم
- ❑ آشنایی با اصل جمع و تعمیم آن
- ❑ آشنایی با اصل ضرب و تعمیم آن
- ❑ تشخیص مسائلی که با اصل جمع یا اصل ضرب حل می‌شوند.
- ❑ به‌کارگیری اصل جمع در حلّ مسائل
- ❑ به‌کارگیری اصل ضرب در حلّ مسائل
- ❑ طرح مسائلی که با اصل جمع یا اصل ضرب حل می‌شوند.

روش تدریس

یکی از مواردی که برای شروع درس بسیار حائز اهمیت می‌باشد، ایجاد انگیزه برای یادگیری و بازگو کردن اهمیت موضوع درس در به‌کارگیری آن در مسائل مختلف است. این کار را می‌توان با گفت‌وگوی اوّلیه و مطرح کردن پرسش‌هایی نظیر آنچه در مورد پلاک ماشین‌ها در ابتدای درس آمده است انجام داد.

در ارائهٔ درس که از طریق انجام و پیگیری فعالیت صورت می‌پذیرد، باید توجه داشته باشیم یکی از مواردی که بسیار حائز اهمیت است دقت و توجه به درک مفهوم‌های اصل جمع و اصل ضرب در دانش‌آموزان می‌باشد و برای این کار پس از ارائه فعالیت و بازگو کردن مثال، به تعداد لازم، درخواست طرح سؤال‌هایی که با اصل جمع یا با اصل ضرب حل شوند محک بسیار خوبی است که می‌توان با آن درک دانش‌آموزان را نسبت به موضوع درس بسنجیم.

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۱۲۴

۱ــ الف) چون گزینهٔ موردنظر یا یک عدد، یا یک حرف است، لذا با استفاده از اصل جمع خواهیم داشت : ۱۰+۳۲=۴۲

ب) چون در رمز موردنظر هم یک حرف و هم یک عدد وجود دارد، لذا با توجه به اصل ضرب داریم ۱۰×۳۲=۳۲۰

پ) در این حالت اگر گزینهٔ اول عدد باشد، با توجه به آنچه در قسمت (ب) گفته شد ۳۲۰ حالت امکان دارد و در صورتی که حرف دوم عدد باشد نیز همین تعداد حالت وجود دارد، لذا در کل ۶۴۰ حالت وجود دارد.

ت) اگر هر دو گزینه عدد باشند، تعداد ۱۰×۱۰=۱۰۰ حالت و اگر هر دو حرف انگلیسی باشند، تعداد ۲۶×۲۶=۶۷۶ حالت وجود دارد؛ لذا در کل ۷۷۶ حالت وجود دارد. (اصل ضرب و اصل جمع)

ث) برای دو گزینهٔ اوّل با توجه به اصل ضرب ۱۰×۹=۹۰ حالت و برای دو گزینهٔ دوم نیز با توجه به اصل ضرب تعداد ۲۶×۲۵=۶۵۰ حالت امکان دارد؛ لذا با توجه به اصل ضرب در کل تعداد ۹۰×۶۵۰=۵۸۵۰۰ حالت امکان دارد.

۳ــ الف) ۲×۲×۲=۸

ب) اگر اوّلین رأس را آبی (قرمز) کنیم، رأس دوم باید قرمز (آبی) شود و لذا برای رأس سوم هیچ رنگی باقی نمی‌ماند لذا این کار امکان پذیر نیست.

پ)

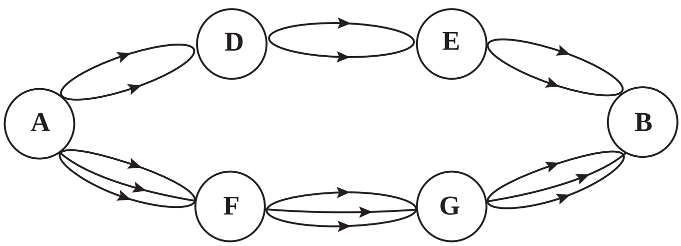
الف) ۳×۳×۳=۲۷

ب) برای رأس اوّل سه حالت، برای رأس دوم دو حالت و برای رأس سوم یک حالت امکان دارد؛ لذا در کل ۳×۲×۱=۶ حالت ممکن است.

۴ــ با توجه به اصل ضرب تعداد ۹×۹×۹×۱۳×۹×۹×۹=$۹^{۶}$×۱۳ حالت امکان‌پذیر است.

۸ــ چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت به‌طوری که از عدد ۶۰ بزرگ‌تر یا مساوی آن باشند.

۹ــ با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟



درس دوم

جایگشت

اهداف

- ❑ به‌کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت
- ❑ به‌کارگیری مفهوم جایگشت در حلّ مسائل
- ❑ آشنایی با نماد فاکتوریل
- ❑ تسلط بر محاسباتی که شامل فاکتوریل است.
- ❑ به‌کارگیری اصل ضرب برای رسیدن به مفهوم جایگشت r شیء از n شیء
- ❑ آشنایی با مفهوم جایگشت r شیء از n شیء و فرمول مربوط به آن
- ❑ تشخیص مسائلی که با به‌کارگیری جایگشت r شیء از n شیء حل می‌شوند.
- ❑ به‌کارگیری مفهوم جایگشت r شیء از n شیء در حلّ مسائل

روش تدریس

مطالب قبل از فعالیّت برای جلب توجّه دانش‌آموزان و ایجاد پیش‌زمینه‌ای در ارتباط با موضوع چینش‌های متفاوت اشیا متمایز است. با پیگیری فعالیت‌ها می‌توان مفهوم جایگشت را در ذهن دانش‌آموزان جای داد و درک آنها را از این مفهوم بالا برد. می‌توان با جلب توجّه دانش‌آموزان به این مطلب که در بحث جایگشت در واقع موضوعِ انواعِ مختلف چینش اشیا متمایز مطرح است، عدم تکراری بودن اشیا در جایگشت را توضیح داد. در معرّفی نمادِ فاکتوریل و تلاش برای تسلّط نسبی دانش‌آموزان به استفاده از این نماد بهتر است موارد مطرح شده در کار در کلاس به ترتیب بیان شوند تا از مقایسهٔ منطقی آنها دانش‌آموز نتیجه‌گیری‌های منطقی لازم را بنماید.

در معرفی مفهوم جایگشت n شیء متمایز و جایگشت r شیء از n شیء متمایز، همان‌گونه که در فعالیت‌های کتاب دیده می‌شود، سعی شده است این مفاهیم براساس اصل ضرب و با استدلال در ذهن دانش‌آموزان جای بگیرد. بدیهی است که بیان روابط آنها بدون استدلال و به‌صورت رویه‌ای، سطح مطلوبی از یادگیری را در دانش‌آموزان ایجاد نخواهد کرد، هرچند احتمالاً به دستیابی دانش‌آموزان به جواب برخی

سؤالات منجر شود. از طرفی پس از معرفی و بیان مفاهیم مذکور، از آنجا که داشتن راهکارهایی جهت حلّ مسائل الزامی است، سعی در آموزش راهکارهای مطرح شده در مثال‌ها و کار در کلاس‌های درس، می‌تواند بسیار مفید باشد.

حلّ برخی از تمرین‌ها

۲ فرض کنیم تعداد کتاب‌های موردنظر nتا باشد. بنابراین، تعداد حالت‌های چیدن کتاب‌های موردنظر برابر است با $p(n,3)$ ؛ لذا داریم :

$$p(n,3)=210 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!}=210 \Rightarrow n(n-1)(n-2)=210$$

لذا حاصل‌ضرب سه عدد متوالی برابر ۲۱۰ است.

با تجزیهٔ عدد ۲۱۰ خواهیم داشت : $210=2\times3\times5\times7=5\times6\times7$

بنابراین $n=7$

۴ بدترین حالت یعنی انتخاب مورد نظر آخرین انتخاب در بین تمام انتخاب‌های ممکن باشد. اما تعداد تمام انتخاب‌های ممکن برابراست با $p(20,3)=\frac{20!}{17!}$ ؛ لذا این تعداد مرتبه باید سه دکمه‌ها فشرده شوند.

چون هربار فشردن سه دکمه، ۲ ثانیه وقت می‌گیرد؛ لذا این عدد باید در ۲ ضرب شود (با فرض اینکه زمان تلف شده‌ای نباشد).

۵ الف) !۶ و تعداد !۴ از آنها با «گل» شروع می‌شود.

ب) $p(6,4)$

پ) دو حرف «پ» و «ر» به دو حالتِ «پر» و «رپ» می‌توانند کنار هم بیایند. فرض کنیم به حالت «پر» آمده باشند. در این صورت سه حالتِ زیر امکان دارد :

پر ، ... ، ...

... ، پر ، ...

... ، ... ، پر

که در هر کدام از حالت‌ها با ۳×۴ روش می‌توان جاهای خالی را پر کرد؛ لذا جواب برابر است با :

$2\times3\times4\times3$

ت) حروف کلمهٔ «پیرا» چهار تا هستند؛ لذا یک حرف باید اضافه شود که به دو طریق این کار می‌تواند انجام شود. از طرفی خود حروف کلمهٔ «پیرا» به !۴ حالت می‌توانند کنار هم بیایند و حرف اضافه شده هم به دو طریق می‌توانند به آنها اضافه شود (اوّل یا آخر بیاید) لذا جواب برابراست با : $4!\times2\times2$

درس سوم

ترکیب

اهداف

- ❑ به‌کارگیری اصل ضرب و جایگشت r شیء از n شیء برای رسیدن به مفهوم ترکیبی r شیء از n شیء
- ❑ تشخیص مسائلی که با استفاده از مفهوم ترکیب حل می‌شوند.
- ❑ به‌کارگیری مفهوم ترکیب در حلّ مسائل

روش تدریس

با توجه به اینکه جایگشت r شیء از n شیء به دانش‌آموزان گفته شده است، شروع درس با چند پرسش ساده که نشان‌دهندهٔ تفاوت میان مفهوم جایگشت r شیء از n شیء و مفهوم ترکیب می‌تواند بسیار مفید باشد. در فعالیت مطرح شده در ابتدای درس هم سعی شده است با تمرکز روی تفاوت این دو مفهوم به درک بهتر آنها کمک شود. برای یادگیری بهتر رابطه‌ها نیز بهتر است با روشی که در فعالیت آورده شده است، یا مشابه آن، نحوهٔ به‌دست آمدن فرمول را براساس استدلال برای دانش‌آموزان روشن ساخت. پیگیری مثال‌ها و کار در کلاس آورده شده برای جا افتادن هر چه بیشتر مفهوم و تسلط دانش‌آموزان بسیار مفید خواهد بود. فعالیت بعد به توضیح نوعی بدفهمی می‌پردازد. دانش‌آموزان را باید به اهمیّت دقّت در انتخاب روش شمارش واقف ساخت و توجه آنها را به این نکته معطوف کرد که در شمارش حالت‌ها باید دقت کنند که هر حالت یک، و دقیقاً یک‌بار شمرده شود. در فعالیّت آخرِ این درس سعی شده برخی از رابطه‌هایی که در ترکیب برقرار است را با استدلال و شمارش چندگانه به دانش‌آموزان آموزش داد.

حلّ تمرین درس ۳

۱ $\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۷}$

۳ فرض کنیم تعداد داوطلبان مورد نظر nتا باشد، لذا تعداد انتخاب‌ها برابر $\binom{n}{۲}$ می‌باشد. بنابراین داریم :

$$\binom{n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow n(n-۱)=۵۶\Rightarrow n=۸$$

۵

از آنجا که در کارهای هنری نسبت رنگ‌های ترکیبی می‌تواند خیلی متفاوت انتخاب شود، لذا تعداد رنگ‌هایی که می‌توان ساخت بسیار زیاد است.

$$۴+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}$$

۷ الف) $\binom{۱۰}{۳}$

ب) فرض کنیم دو نوع ادویه‌ای که با هم نمی‌توانند استفاده شوند A و B باشند.

روش اوّل :

$\binom{۸}{۲}=$ تعداد ادویه‌هایی که A را دارند و B را ندارند

$\binom{۸}{۲}=$ تعداد ادویه‌هایی که B را دارند و A را ندارند

$\binom{۸}{۳}=$ تعداد ادویه‌هایی که نه A را دارند و نه B را

$\Rightarrow$ جواب $=\binom{۸}{۲}+\binom{۸}{۲}+\binom{۸}{۳}=۱۱۲$

روش دوم :

$\binom{۸}{۱}=۸\Rightarrow$ تعداد ادویه‌هایی که هم A را دارند و هم B را $=$ ؛ جواب $=\binom{۱۰}{۳}-۸=۱۱۲$

پ) یک حالت هست که هر سه ادویهٔ مورد نظر با هم استفاده شده باشند، پس :

جواب $=\binom{۱۰}{۳}-۱=۱۱۹$

ت)

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۳}=۱۰+۱۰=۲۰$$

۸ پنج کتاب ریاضی مختلف و شش کتاب فیزیک مختلف داریم.

الف) به چند طریق می‌توان از بین آنها پنج کتاب انتخاب کرد به طوری‌که سه تای آنها ریاضی و دوتای آنها فیزیک باشند.

ب) به چند طریق می‌توان بسته‌ای از این کتاب‌ها برای هدیه دادن انتخاب کرد به طوری‌که بستهٔ موردنظر دقیقاً سه کتاب ریاضی باشد، یا دقیقاً دو کتاب فیزیک.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در منوی یک رستوران برای وعدهٔ ناهار هفت نوع مختلف غذای اصلی، چهار نوع مختلف پیش‌غذا و پنج نوع مختلف نوشیدنی وجود دارد. اگر فردی بخواهد یک وعدهٔ ناهار کامل همراه با پیش‌غذا و نوشیدنی سفارش دهد، به چند طریق ممکن می‌توان این کار را انجام داد؟

۲ با ارقام ۶ و ۵،۴،۳،۲،۱،۰

الف) چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد چهار رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد چهار رقمی کمتر از ۴۰۰۰ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ث) چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ج) چند عدد چهار رقمی بیشتر از ۴۰۰۰ با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۳ با رنگ سبز، قرمز و آبی به چند حالت ممکن می‌توان خانه‌های جدول زیر را رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری‌که هیچ دو خانهٔ یک رنگ کنار هم قرار نگیرند.

۴ به چند حالت ممکن می‌توان از ده تیم شرکت‌کننده در یک تورنمنت، تیم‌های اول تا پنجم را مشخص کرد؟

۵ به چند طریق می‌توان شش کتاب ریاضی مختلف و پنج کتاب فیزیک مختلف را در یک قفسه کنار هم قرار داد در صورتی‌که :

الف) هیچ محدودیتی برای کنار هم قرار گرفتن کتاب‌ها نباشد.

ب) کتاب‌های ریاضی کنار هم قرار بگیرند.

پ) کتاب‌های هم‌نوع کنار هم قرار گیرند.

ت) هیچ دو کتاب از یک نوع کنار هم قرار نگیرند.

۶ به چند حالت ممکن می‌توان نام پنج معلم و پنج دانش‌آموز را در یک لیست قرار داد به طوری‌که هیچ دو معلمی اسمشان کنار هم نباشد؟

۷ از بین پنج مرد و پنج زن داوطلب برای استخدام در یک بانک به چند طریق می‌توان
الف) سه نفر صندوق‌دار انتخاب کرد.
ب) دو مرد و یک زن را انتخاب کرد.

۸ با حروف کلمهٔ «خلیج فارس» به چند طریق می‌توان یک کلمهٔ هشت حرفی نوشت به طوری‌که
الف) چهار حرف «ف»، «ا»، «ر» و «س» کنار هم باشند.
ب) واژهٔ «فارس» بدون تغییر کنار هم قرار گیرند.

۹ به چند حالت ممکن می‌توان از بین شش زن و پنج مرد
الف) یک زوج انتخاب کرد.
ب) پنج زوج انتخاب کرد.

۱۰ از بین هفت دانش‌آموز ریاضی، شش دانش‌آموز تجربی و پنج دانش‌آموز انسانی به چند طریق می‌توان یک گروه سه نفره انتخاب کرد به طوری‌که :
الف) مهم نباشد از چه رشته‌ای باشند.
ب) فقط از یک رشته باشند.
پ) از هر رشته فقط یک نفر انتخاب شود.
ت) حداقل دو نفر از رشتهٔ ریاضی باشند.
ث) از رشتهٔ انسانی کسی انتخاب نشود.

فصل ۷

آمار و احتمال

نگاه کلی به فصل

در این فصل که شامل سه درس است به دو موضوع احتمال و آمار پرداخته شده است.

دانش‌آموزان از کلاس دوم دبستان با این دو اصطلاح آمار و احتمال آشنایی داشته، بعضی مفاهیم آماری را یاد گرفته‌اند و در مواردی همچون دسته‌بندی داده‌ها و رسم بعضی نمودارهای آماری مطالبی را یاد گرفته‌اند و نیز با احتمال تجربی در مقطع ابتدایی و احتمال ریاضی در متوسطهٔ ۱ آشنایی داشته و حتی در پایهٔ نهم از مجموعه‌ها در تعریف احتمال استفاده کرده و پیشامدهای تصادفی را تا حدودی به عنوان زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای می‌شناسند.

تا سال نهم برای محاسبهٔ احتمال رخداد یک پیشامد تصادفی از تکنیک‌های شمارشی و روش‌های ترکیبی، استفادهٔ جدّی نشده و امسال در کتاب دهم از جایگشت و تبدیل و ترکیب برای شمارش و محاسبهٔ تعداد کلّ حالت‌ها و نیز تعداد حالت‌های مطلوب استفاده خواهند کرد.

در بخش احتمال یکی از اهداف اصلی، معرفی زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای به عنوان پیشامدهای تصادفی می‌باشد.

هدف دیگر در بخش احتمالِ فصل هفتم، معرّفی جبر پیشامدها یا اعمال روی پیشامدها بوده و اینکه در ادبیات به‌کار رفته در مسائل و تمرین‌ها، چگونه باید از الفاظی چون «و» و «یا» استفاده کرد.

استفاده از تکنیک‌های شمارشی که در فصل ۶ آموزش داده شده در حلّ مسائل احتمال نیز از اهداف دیگر این درس است.

از طرفی چون فضاهای نمونه‌ای مورد بحث در این درس همگی گسسته بوده و هنوز دانش‌آموزان با فضاهای پیوسته آشنا نشده و سابقهٔ ذهنی ندارند به راحتی می‌توان اصولِ احتمال را در این فضا بیان و اثبات نموده و از آنها نیز در حلّ مسائل استفاده کرد.

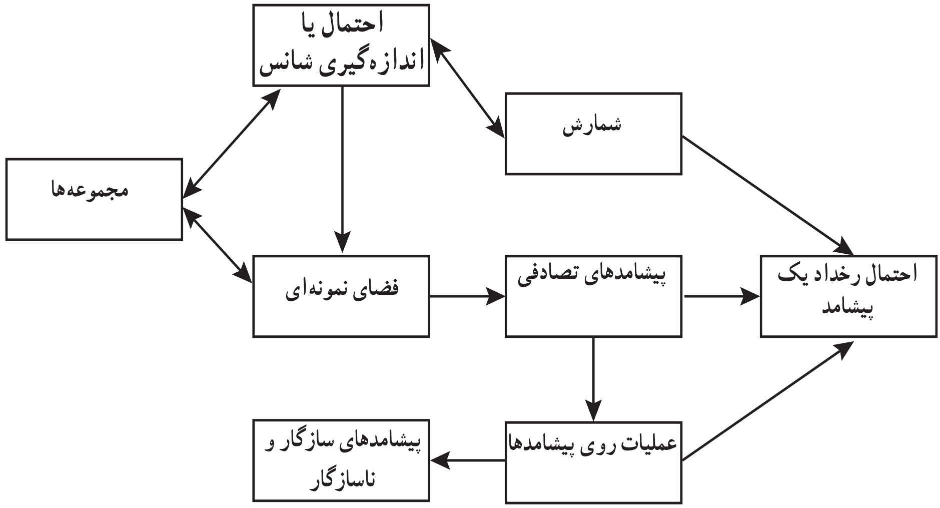
در بخش آمار و در درس دوم یعنی «مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه» به معرفی آمار و علم آمار به طوری دقیق پرداخته شده است و مواردی از کاربرد علم آمار را متذکر شده و توضیح داده‌ایم.

در این درس، اصطلاحات آماری مانند جامعه، نمونه، حجم جامعه و نمونه و غیره به صورتی دقیق تعریف و برای آنها مثال‌هایی زده شده است. هدف اصلی در این درس، اهمیت و کاربردهای علم آمار و آشنایی دانش‌آموزان با اصطلاحات آماری و بالا بردن سواد آماری آنهاست.

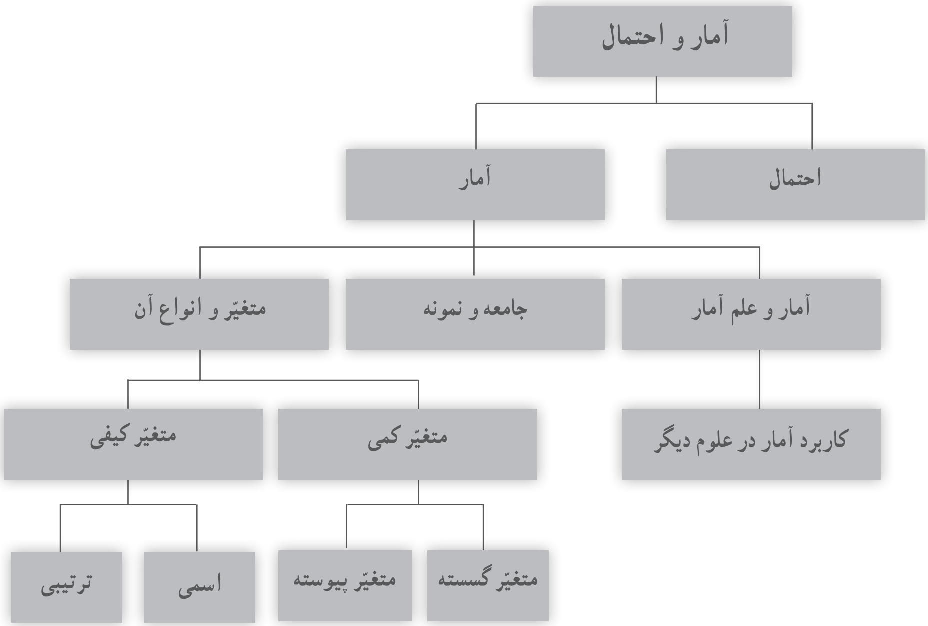
در درس سوم دانش‌آموزان با انواع متغیرها آشنا می‌شوند.

تعریف متغیر به عنوان ویژگی برای اعضای یک جامعه و دسته‌بندی کردنِ انواع متغیرها به دو دستهٔ کلّیِ متغیرهای کمّی و متغیرهای کیفی می‌تواند در فهم مطالب آماری و نحوهٔ برخورد دانش‌آموزان با مسائل آماری مؤثر باشد. درس سوم با هدف معرفی انواع متغیّرهای کمّی و نیز انواع متغیّرهای کیفی و دسته‌بندی آنها ادامه یافته است و از مثال‌های متنوعی برای درک و تمایز این متغیرها از یکدیگر استفاده می‌شود.

نقشهٔ مفهومی بخش مربوط به احتمال



نقشهٔ مفهومی بخش مربوط به آمار



دانستنی‌هایی برای معلم

نظریهٔ احتمال به شاخه‌ای از علم ریاضی گفته می‌شود که با تحلیل وقایع تصادفی که ما از چگونگی رخداد آنها مطلع نیستیم، سر و کار دارد. میزان اطمینان ما از رخداد بعضی از رویدادها به صورت یک کمّیت عددی ــ عددی بین صفر و یک ــ قابل توصیف است.

هر چقدر عدد حاصل ــ احتمال رخداد یک رویداد تصادفی ــ به صفر نزدیک‌تر باشد، اطمینان ما نسبت به رخداد آن پیشامد بیشتر است و هر چقدر به یک نزدیک باشد، اطمینان ما نسبت به رخداد آن پیشامد بیشتر است. امروزه احتمال برای علم آمار به عنوان یکی از ابزارهای قوی در تجزیه و تحلیل و تصمیم‌گیری به شمار می‌رود، وقتی صحبت از نمونه‌گیری تصادفی می‌شود، احتمال به کار می‌آید و وقتی صحبت از پیش‌بینی می‌شود باید از احتمال کمک گرفت و خلاصه رابطهٔ تنگاتنگی بین آمار و احتمال وجود دارد.

در فلسفهٔ علم پیروان نظریهٔ عدم قطعیت بسیارند و بیزگرایان توانسته‌اند در بسیاری از شئون فلسفه حرف‌هایی برای مطرح کردن داشته باشند.

منابع

۱ دانشنامهٔ ریاضی، انتشارات کانون فرهنگی آموزش، پرویز شهریاری، حمیدرضا امیری، . . .

۲ ورودی به نظریهٔ احتمال، انتشارات مدرسه، عین‌اله پاشا

۳ ورودی به نظریهٔ آمار، انتشارات مدرسه، عین‌اله پاشا

۴ آمار و احتمال مقدماتی، دکتر جواد بهبودیان، انتشارات دانشگاه امام رضا (ع)

۵ آمار مقدماتی، تألیف رونالدو وناکات، تامس اچ ووناکات، ترجمهٔ دکتر محمدرضا مشکانی، مرکز نشر.

نمونه سؤالات ارزشیابی بخش احتمال

۱ تاسی را می‌اندازیم. اگر زوج بیاید یک تاس دیگر می‌اندازیم و اگر فرد بیاید دو سکه می‌اندازیم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A که در آن اعداد رو شده در دو تاس مثل هم باشند را تشکیل دهید.

۲ تمام اعداد دو رقمی را روی کارت‌هایی (روی هر کارت یک عدد) نوشته در کیسه‌ای می‌ریزیم و یک کارت به تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد عدد روی کارت خارج شده :

الف) فرد باشد

ب) زوج باشد

ج) اوّل و کمتر از ۵۰ باشد

۳ در جعبه‌ای پنج مهرهٔ قرمز و چهار مهرهٔ آبی وجود دارد. یک مهره از این جعبه خارج کرده و بدون نگاه کردنِ به آن کنار گذاشته و سپس مهرهٔ دیگری به تصادف از جعبه، خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهرهٔ دوم آبی باشد.

۴ سه تاس را با هم می‌اندازیم مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند.

ب) مجموع سه عدد رو شده شش باشد.

ج) مجموع سه عدد رو شده بزرگ‌تر از چهار باشد.

د) هر سه عدد رو شده زوج یا هر سه فرد باشند.

هـ) حاصل‌ضرب سه عدد رو شده عددی اوّل باشد.

۵ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید :

$$p(A-B) \leq p(A)$$

۶ از بین پنج دانش‌آموز کلاس دهم ریاضی و چهار دانش‌آموز کلاس دهم تجربی یک تیم چهار نفره به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد :

الف) دانش‌آموزان ریاضی و تجربی در این تیم برابر باشند.

ب) حداقل یک دانش‌آموز ریاضی در این تیم باشد.

ج) حداکثر سه دانش‌آموزِ تجربی در این تیم باشد.

۷ نه نفر که سه نفر آنها هم‌کلاسی هستند، به تصادف در یک ردیف قرار می‌گیرند، چقدر احتمال دارد :

الف) سه نفر هم‌کلاسی کنار هم نباشند

ب) یکی از این سه نفر در اوّلِ صف، یکی در وسط و یکی در آخر صف قرار بگیرند.

۸ در هر یک از موارد زیر جامعه، نمونه و ویژگی مربوطه را مشخص کنید.

الف) معلمی می‌خواهد در مورد نمرات درس ریاضی دهم در یک مدرسه، تحقیقی را انجام دهد. گروهی از دانش‌آموزان پایهٔ دهم را انتخاب می‌کند.

ب) مدیر یک فروشگاه زنجیره‌ای می‌خواهد در مورد فروش روزانهٔ محصول جدید، تحقیقی را انجام دهد. تعداد محصولات به فروش رفته در یک روز را انتخاب می‌کند.

۹ کدام یک از متغیّرهای زیر گسسته و کدام پیوسته‌اند؟

الف) تعداد سهام فروخته شده در بازار بورس در هر روز

ب) طول عمر لامپ‌های تلویزیونی که توسط یک کارخانه تولید شوند.

ج) تعداد دانش‌آموزان پایهٔ دهم یک مدرسه

۱۰ کدام یک از متغیّرهای زیر کمّی و کدام کیفی‌اند؟

الف) نژاد افراد

ب) زمان

ج) درآمد

د) گروه خونی

۱۱ کدام یک از متغیّرهای زیر ترتیبی و کدام اسمی‌اند.

الف) سطح تحصیلات (کاردانی، کارشناسی، کارشناسی ارشد، دکتری)

ب) گروه خونی (A، O، AB، B)

ج) اقوام ایرانی

۱۲ کاربرد علم آمار را در علوم دیگر مورد بررسی قرار دهید. به عنوان مثال، علم آمار در پزشکی، علوم اجتماعی و علوم اقتصادی چه کاربردی دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، از جست‌وجو در اینترنت استفاده کنید.

۱۳ فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قد او ۱/۷۴ سانتی‌متر باشند.

الف) شاخص تودهٔ بدن این شخص را حساب کنید.

ب) با توجه به کاربرد علم آمار در پزشکی، این شخص از نظر سلامت در چه رده‌ای قرار می‌گیرد.

۱۴ جدول زیر را کامل کنید.

متغیّرهای مربوط به خودرو	متغیّر کمی	متغیّر کیفی	متغیّر گسسته	متغیّر پیوسته	متغیّر اسمی	متغیّر ترتیبی
۱ـ سرعت خودرو						
۲ـ میزان بنزین مصرفی						
۳ـ رنگ خودرو						
۴ـ قدرت موتور						
۵ـ						
۶ـ						

درس اوّل

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

اهداف

❑ یادآوری و تکمیل مفاهیم مربوط به آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی به عنوان زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای

❑ مشخص کردن پیشامدهای تصادفی در حالت‌های مختلف و یافتن تعداد اعضای آنها با ابزار ترکیبیات

❑ آشنا شدن دانش‌آموزان با جبر پیشامدها و اعمال روی پیشامدها و استفاده از آنها در حلّ مسائل

❑ طرح و حلّ مسائل پیشرفته‌تر (نسبت به سال نهم) با استفاده از جایگشت، تبدیل و ترکیب در محاسبهٔ $n(A)$ و $n(S)$.

روش تدریس

این درس با معرفی چند تعریف و اصطلاح و یادآوری آنها به عنوان مقدمه آغاز شده و اوّلین فعّالیت در صفحهٔ ۱۴۲ فعّالیت مربوط به انداختن دو تاس است که فعّالیتی بسیار غنی و جذّاب برای دانش‌آموزان است. در جدول ۶×۶ که رسم شده، الگوهای بسیاری وجود داشته است که دانش‌آموزان باید با تعریف پیشامدهایی این الگوها را مشخص کنند (هاشور بزنند یا قطر بکشند). در عین حال به‌طوری کاملاً شهودی ملاحظه خواهند کرد که مثلاً (۱ و ۲) با (۲ و ۱) چه فرقی دارد و این دو زوج مرتب خانه‌هایی مجزّا از جدول را اشغال کرده‌اند.

توصیه می‌شود وقت کافی و مناسب برای این فعّالیت اختصاص داده شود؛ زیرا در صفحات

بعدی مجدّد به این فعّالیت ارجاع خواهد شد.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۴۳ دانش‌آموزان باید جدولی ۶×۲ یا ۲×۶ رسم کنند و تمام حالت‌های ممکن را در انداختن یک تاس و یک سکه را مشاهده نمایند. توضیح اینکه در این آزمایش تصادفی به طور مثال (۵ و پ) با (پ و ۵) فرقی نمی‌کند و هر دو نشان‌دهندهٔ این حالت‌اند که سکّهٔ پشت آمده و تاس عدد ۵ را نشان می‌دهد.

بهتر است از دانش‌آموزان بخواهیم همهٔ حالت‌های ممکن درپرتاب دو سکّه و یک تاس را نیز تشکیل داده و بنویسند.

مثال ۱ در صفحهٔ ۱۴۳ شبیه به خانوادهٔ سه فرزندی است که در سال نهم مورد بررسی قرار گرفته است و دانش‌آموزان در این مثال، با پر کردن جاهای خالی، حالت‌های مورد نظر را بررسی و با مسئلهٔ ترتیب به دنیا آمدن فرزندان نیز آشنا می‌شوند.

مثال ۲ در صفحهٔ۱۴۴ برای اوّلین بار برداشت بیش از یک مهره از یک جعبه را تجربه کرده و از فرمول ترکیب برای محاسبهٔ n (S) استفاده می‌کنند.

در همین صفحهٔ ۱۴۴ اعمال روی پیشامدها (جبر پیشامدها) معرفی؛ و معادل با هر یک از آنها بیان توصیفی مربوطه نیز آمده است تا دانش‌آموزان در مسائل بتوانند تشخیص بدهند که چه زمانی باید از اجتماع، یا اشتراک یا تفاضل دو پیشامد استفاده کنند.

با توجّه به تعریف متمّم یک مجموعه در فصل اوّل، متمّم یک پیشامد در صفحهٔ ۱۴۵ تعریف و همچنین دو و سه پیشامد ناسازگار نیز معرفی شده‌اند و مثال ۳ برای درک دقیق این مفاهیم آورده شده است، توصیه می‌شود با طرح مثال‌های شبیه مثال ۳ برای آزمایش‌های تصادفی دیگر، به تبیین این مفاهیم پرداخته شود.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۴۵ و با ارجاع به فعّالیت اوّل این درس (انداختن دو تاس) و استفاده از الفاظ «و» و «یا» کاربرد **جبر پیشامدها** را در حلّ مسائل به دانش‌آموزان نشان می‌دهیم، همچنین در قسمت دوم این کار در کلاس صفحهٔ ۱۴۶ روی مفهوم پیشامدهای سازگار و ناسازگار تمرین می‌شود.

ذکر مثال ۵ در صفحهٔ ۱۴۶ تمرینی است برای استفاده از جبر پیشامدها تا سعی کنید مثال‌هایی که شبیه به این مثال در کلاس طرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید مثال‌هایی شبیه به این مثال‌ها طراحی و حل کنند.

در پاراگراف انتهایی صفحهٔ ۱۴۶ به یادآوری فرمول احتمال رخدادِ یک پیشامد پرداخته و اینکه عدد احتمالِ یک پیشامد در چه بازه‌ای تغییر کرده است و چه وقت رخداد یک پیشامد محتمل‌تر و چه وقت شانس کمتری برای رخداد آن وجود دارد.

توصیه می‌شود برای اینکه خوش‌تعریف بودنِ رابطهٔ $p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تا حدّی برای دانش‌آموزان جا بیفتد. مثال : از یک جعبه شامل مثلاً ۴ مهرهٔ رنگی قرمز و ۸ مهرهٔ آبی زده شود و ۱ مهره به تصادف از این جعبه خارج شود که احتمال آبی بودنِ این مهره $\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$ و احتمالِ قرمز بودنِ آن $\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$ است و این نکته تأکید شود که انتظار ما این است که این مهره، آبی باشد و چون تعداد مهره‌های آبی دو برابر تعداد قرمزهاست، انتظار ما این است که این احتمال دو برابر باشد و البته اعداد به دست آمده مؤید همین مطلب می‌باشند ($\frac{۱}{۳}\times ۲=\frac{۲}{۳}$) .

در فعّالیت صفحهٔ ۱۳۷ به نوعی سه اصل معروف کولموگروف البته در فضاهای گسسته و هم شانس اثبات شده و هدف اصلی، استفاده از این رابطه‌ها در حلّ مسائل می‌باشد.

در صفحهٔ ۱۴۸ کار در کلاس و مثال مطرح شده استفاده از فرمول‌های قبل را مرور کرده و حلّ این مثال، به درک و فهم دانش‌آموزان در استفاده از این اصول و جبر پیشامدها کمک می‌کند.

مثال دوم صفحهٔ ۱۴۹ شبیه مثالی در فصل ۶ است و از ابزارهای شمارشی اصل ضرب و فاکتوریل برای محاسبهٔ تعداد حالت‌های مطلوب استفاده می‌کند. توصیه می‌شود نمونهٔ این مثال برای دانش‌آموزان طرح و توسط ایشان حاصل شود.

تمرین‌های آخر این درس، همگی درحدّ مطالب داخل درس است و پس از حلّ توسط دانش‌آموزان در منزل باید توسط همکاران بازبینی شود.

حلّ تمرین‌های آخر درس اوّل از فصل ۷

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچک‌تر از یازده را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی را مشخص کنید.

$S=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟ $۲^{۵}=۳۲$

ج) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر چهار بخش‌پذیر باشد»، مشخص کنید.

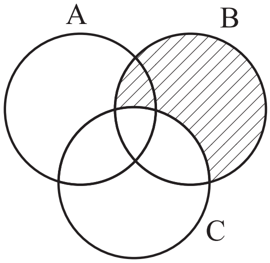
A={۴ , ۸}

۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

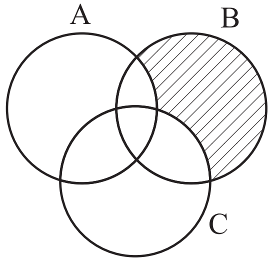
الف) پیشامدهای A , C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

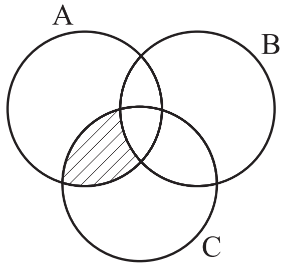
ج) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.



(ج)



(ب)



(الف)

۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می‌نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد»

S={۱ و ۲ و ... و ۸} و A={۲,۴,۶,۸}

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اوّل باشد» B={۱ , ۳ , ۵ , ۷}

ج) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد» C={۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸}

۴ خانواده‌ای سه فرزند دارد. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

S={(د , د , د) و (د , د , پ) و (د , پ , د) و ... و (پ , پ , پ)}

A=S−{(پ , پ , پ)}

۵ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید، دو سکهٔ

دیگر می‌اندازیم :

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

فضای نمونه‌ای ۱۰ عضو دارد.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید. A={(۲ و پ) و (۴ و پ) و (۶ و پ)}

ج) پیشامد آنکه «حداقل دو سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

B={(ر , ر , پ) و (ر , ر , ر) و (ر , پ , ر)}

۶ می‌خواهیم از بین سه دانش‌آموز کلاس دهم رشتهٔ ریاضی و دو دانش‌آموز دهم رشتهٔ تجربی یک تیم دو نفرهٔ تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟

ج) یک نفر از رشتهٔ ریاضی و یک نفر از رشتهٔ تجربی باشد؟

الف) $p(A)=\dfrac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\dfrac{۳}{۱۰}$

ب) $p(B)=\dfrac{\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\dfrac{۴}{۱۰}$

ج) $p(C)=\dfrac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\dfrac{۶}{۱۰}$

۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A , B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد مشتریان کارت نوع A ($p(A)=\dfrac{۳۴}{۱۰۰}$) و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

$$=\frac{۳۴}{۱۰۰}+\frac{۶۲}{۱۰۰}-\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۸۶}{۱۰۰}$$

۸ اگر هفت نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد :

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟ $p(A)=\dfrac{۷!-(۶!\times۲!)}{۷!}=\dfrac{۵}{۷}$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

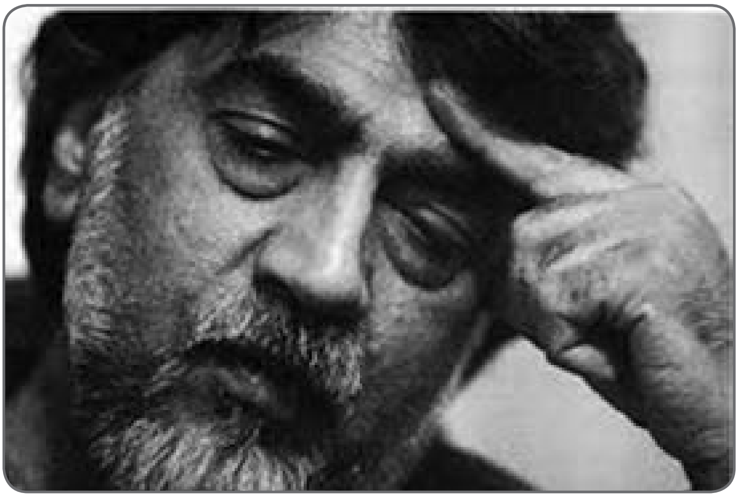
$$p(B)=\frac{۲\times ۵!}{۷!}=\frac{۱}{۲۱}$$

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A)\leq P(B)$.

$$A\subseteq B \Rightarrow n(A)\leq n(B) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)}\leq\frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow p(A)\leq p(B)$$

ما در عصر احتمال به سر می بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست
اما من
بی نام تو
حتی
یک لحظه احتمال ندارم
چشمان تو
عین الیقین من
قطعیت نگاه تو
دین من است
من از تو ناگزیرم
من
بی نام ناگزیر تو می میرم

قیصر امین‌پور



درس دوم

مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

اهداف

در این درس، به دنبال معرّفی آمار و علم آمار و بیان تفاوت‌های بین آنها هستیم. همچنین به بررسی نقش اعداد و ارقام در زندگی روزمرّهٔ یک خانواده پرداخته‌ایم. از سویی دیگر با معرفی در مفهوم جدید تحت عنوان جامعه و نمونه، مفاهیم کلیدی در علم آمار معرفی شده است.

روش تدریس

در این درس، با تأکید بر مفهوم آمار و علم آمار و بیان تفاوت‌های بین آنها به دنبال آن هستیم که تفکّر جدیدی را در علم آمار معرفی کنیم. در مثال مربوط به هواشناسی، بخش‌های علم آمار قرار داده شده است که در ادامهٔ تعریف این دو واژه، این بخش‌ها را ملاحظه می‌فرمایید. در کار در کلاس این درس، به دنبال آن هستیم که مثال‌هایی از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی را بر اساس اعداد و ارقام بیان نماییم و در ادامه با استفاده از نقشه‌های مفهومی، تأکید بسیاری روی مفهوم علم آمار داریم و همچنین پیداسازی مثال مربوط به هواشناسی روی نقشهٔ مفهومی می‌تواند مفهوم علم آمار را برای دانش‌آموز کاملاً تثبیت نماید. در تمرین‌های اوّلیهٔ این درس نیز با تأکید به تفاوت آمار و علم آمار و همچنین استفاده از پیش‌بینی در علم آمار روی پدیده‌های تصادفی، این مفهوم را کامل بیان می‌نماییم. در انتها برای تمرین هفت و هشت، با بیان کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)، کاربردهای مهمّ علم آمار بیان می‌شود. نکتهٔ لازم آن است که دانش‌آموزان برای پاسخ به

این سؤال می‌بایست این کاربرد را به دقت مطالعه کنند.

از سویی دیگر برای بیان مفهوم جامعه و نمونه به معرفی کاربرد علم آمار در پزشکی، مفهوم شاخص تودهٔ بدن پرداخته شده است که نکات جذّابی را در مورد چاقی افراد بیان می‌کند. دانش‌آموزان برای پاسخ به فعّالیت و کار در کلاس‌های آتی می‌بایست به دقت این کاربرد را مطالعه نمایند.

در ادامهٔ فعّالیت مربوط به مفهوم جامعه و نمونه، جامعه‌ای از افراد چاق و عادی مشخص شده است که شمارش افراد چاق موجود در شهر بسیار دشوار بوده، ولی این کار برای نمونهٔ انتخابی ساده است. در اینجا هدف بیان مفهوم جامعه و نمونه است و همچنین تعریف اندازه، یا حجم جامعه و نمونه و نهایت در کار در کلاس و تمرین‌های آتی این مفهوم به صورت کامل تثبیت شده است.

درس سوم

متغیّر و انواع آن

اهداف

در این درس، به دنبال مفهوم متغیّر و معرفی اقسام متغیّر هستیم. در آمار انواع متغیّرها نقش بسیار مهمّی در تحلیل‌های آماری دارند. در این درس، این مفاهیم به طور کامل تثبیت می‌شود.

روش تدریس

در فعّالیت اوّل این درس با بیان محصولات هلوی یک مزرعهٔ کشاورزی، دو ویژگی این میوه بیان می‌شود که یکی وزن و دیگری کیفیت این میوه می‌باشد و سؤالاتی در مورد کیفیت میوهٔ هلو از دانش‌آموز شده و روی این موضوع تأکید شده است که کیفیت میوهٔ هلو قابل اندازه‌گیری نیست و آن را به صورت درجه یک، درجه دو، درجه سه می‌توانیم مشخص کنیم و با دادن اعداد دلخواه «یک» برای میوه‌های بسیار مرغوب، «دو» برای میوه‌های متوسط و عدد «سه» برای میوه‌های ریز، به نوعی این ویژگی را مقداردهی می‌کنیم. گفتنی است که اعداد در اینجا صرفاً نشان‌دهندهٔ ویژگی میوهٔ هلو هستند و هر عدد دلخواهی را به صورت قراردادی می‌توانیم به این ویژگی نسبت دهیم. به عبارت بهتر اعداد برای این ویژگی به صورت کد هستند و قابل جمع و تفریق، ضرب و تقسیم نیستند.

برای پاسخ به قسمت پ این فعّالیت می‌بایست کاربرد علم آمار در مهندسی کشاورزی را به دقت مطالعه نمود.

در ادامه دانش‌آموز با مفهوم متغیّر و مقدار متغیّر آشنا می‌شود. نکتهٔ خیلی مهمی که دبیران محترم می‌بایست به آن توجّه نمایند آن است که مقدار متغیّر عددی است که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود. این عدد می‌تواند قابل اندازه‌گیری باشد، یا نمی‌تواند قابل اندازه‌گیری باشد.

به عنوان مثال، عدد ۲۰۰ گرم برای میوهٔ هلو، عددی قابل اندازه‌گیری است، ولی عدد ۱ و ۲ و ۳ که نشان‌دهندهٔ درجهٔ کیفیت میوهٔ هلو است قابل اندازه‌گیری نیست و صرفاً به صورت قراردادی این اعداد به کیفیت هلو نسبت داده می‌شود، یا می‌توان مقدار مربوط به کیفیت میوهٔ هلو را به صورت قراردادی درجه یک، درجه دو و درجه سه معرفی نمود.

این موضوع در کار در کلاس این درس مطرح شده است که تأکید زیادی روی مقدار رنگ خودرو شده است که رنگ خودرو با رنگ‌های مشکی، سفید و... در نظر گرفت که آنها را با اعداد دلخواهی مانند عدد یک برای رنگ مشکی و عدد دو برای رنگ سفید نشان داد یا همان رنگ‌ها را برای مقادیر این متغیّر نوشت.

در ادامه، این مفهوم به صورت خوبی در کار در کلاس بیان شده است. در قسمت سوم کار در کلاس با مطالعهٔ علم آمار در محیط زیست می‌توان ویژگی‌های یوزپلنگ ایرانی را بیان نمود.

در ادامهٔ این درس، با مفهوم متغیّرهای کمّی و کیفی آشنا شده و این متغیّرها با کامل کردن فعّالیت مربوط برای دانش‌آموز تثبیت می‌شود. لازم به ذکر است دانش‌آموزان می‌بایستی در قسمت «الف» این فعّالیت جدول مورد نظر را کامل کنند. خط تیره‌ای که در ردیف اوّل این جدول قرار دارد نشان‌دهندهٔ آن است که از آقای مورد نظر سؤالی در مورد تعداد فرزندان نشده است. در قسمت «ب» این فعّالیت، دانش‌آموزان باید نمودار مورد نظر را براساس متغیّرهای معرفی شده در جدول می‌بایست کامل کنند. در ادامه با مفهوم انواع متغیّرهای کمّی و کیفی آشنا شده و کار در کلاس‌ها و تمرین‌های متنوعی مطرح می‌شوند.

حلّ کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها

۱ در پیرامون خود، مثال‌هایی را از تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی بر اساس اعداد و ارقام بیاورید.

۲ مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

- جمع‌آوری اعداد و ارقام
- سازمان‌دهی و نمایش
- تحلیل و تفسیر داده
- پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

۳ با درنظر گرفتن اخبار هواشناسی مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.

- جمع‌آوری اعداد و ارقام هواشناسی
- سازمان‌دهی و نمایش آمار مربوط به دمای هوا، میزان رطوبت و بارش در ایستگاه‌های هواشناسی
- تحلیل و تفسیر آمار هواشناسی
- پیش‌بینی وضعیت هوا

۴ تفاوت آمار و علم آمار در چیست؟ آمار اعداد و ارقام است، ولی علم آمار مجموعه روش‌هایی شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازمان‌دهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری می‌باشد.

۵ مدیر کارخانه‌ای برای پیدا کردن تعداد کل لامپ‌های معیوب در یک ماه آینده، می‌خواهد یک تحقیق آماری انجام دهد. برای این منظور، تعداد لامپ‌های معیوب را در چند روز کاری به صورت زیر جمع آوری کرده است.

روزهای کاری	روز کاری اول	روز کاری دوم	روز کاری سوم	روز کاری چهارم	روز کاری‌پنجم
تعداد لامپ‌های معیوب	۵۰	۷۰	۹۰	۱۲۰	۱۸۰

کارخانهٔ لامپ‌سازی

براساس داده‌های به دست آمده، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) روند تغییر اعداد و ارقام در این تمرین نشان دهندهٔ چه چیزی است؟ افزایش تعداد لامپ‌های معیوب

ب) در این تمرین، چه چیزی به‌عنوان آمار محسوب می‌شود؟ تعداد لامپ‌های معیوب

پ) بهترین تصمیمی که مدیر کارخانه براساس «علم آمار» می‌تواند بگیرد، چیست؟

توقف یا اصلاح خط تولید لامپ‌ها ☑ ادامهٔ خط تولید لامپ‌ها ☐

۶ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار»، جمع آوری داده‌هاست. درست

ب) پیش‌بینی و تصمیم‌گیری برای آینده، نتیجهٔ استفاده از «علم آمار» است. درست

پ) «علم آمار»، همان اعداد و ارقام است. نادرست

۷ به شکل زیر توجه کنید : آیا این شکل را می‌توان به اعداد و ارقام تبدیل کرد؟ اعداد و ارقام آن چگونه‌اند؟ برای پاسخ به این سؤالات، کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر را مطالعه کنید. بله، اعداد و ارقام به صورت جدول‌های عددی‌اند که هر عدد نشان‌دهندهٔ مقدار روشنایی هر پیکسل است.

کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر (پردازش تصویر)

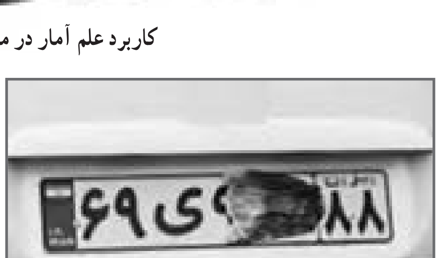
هر تصویر از تعداد زیادی مربع‌های کوچک تشکیل شده است. هر یک از این مربع‌های کوچک «پیکسل» نام دارند و به هر پیکسل می‌توان یک عدد را نسبت داد که بیانگر مقدار روشنایی آن است.

در واقع هر تصویر از یک **جدول عددی** تشکیل می‌شود که هر یک از اعداد، مقدار روشنایی هر پیکسل را نشان می‌دهند. جدول مربوط به هر تصویر را به راحتی می‌توان به دست آورد. در اینجا نکتهٔ حائز اهمیت، کاربرد «**پردازش تصویر**» است.

«پردازش تصویر» یکی از موضوعات بسیار مهم در مهندسی کامپیوتر محسوب می‌شود. رشد استفاده از پردازش تصویر در سیستم‌های «کنترل هوشمند سرعت»، «خواندن اتوماتیک پلاک خودرو در طرح های زوج و فرد»، «طرح ترافیک» و «ثبت تخلفات خودرو» در سال‌های اخیر مشهود بوده است.

با استفاده از معیارهایی که در علم آمار وجود دارد، می‌توان به بررسی کیفیت تصاویر پرداخت و تصاویر مخدوش و نامناسب را با تصاویر حقیقی‌شان مقایسه کرد.

کاربرد علم آمار در مهندسی کامپیوتر



۸ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ نامیده می‌شود. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ زرد را با عدد ۲، رنگ قرمز را با عدد ۱ و رنگ مشکی را با عدد صفر، نشان دهیم. جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید.

؟	؟	۱
۰	؟	؟
۳	۰	؟

جدول عددی

		؟
؟		
؟	؟	

شکل

اندازهٔ نمونه	نمونه	اندازهٔ جامعه	عضو جامعه	جامعه
۱۰۰۰	قطعات تولیدی انتخابی	۶۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه الف
۷۵۰	قطعات تولیدی انتخابی	۵۰۰۰	قطعات تولیدی	کارخانه ب

تمرین

۱ می‌خواهیم دربارهٔ کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کلّ قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید:

ویژگی مورد بررسی	اندازهٔ نمونه	اندازهٔ جامعه	جامعه
کیفیت محصولات تولیدی	۱۰۰	۱۰۰۰۰	محصولات تولیدی یک کارخانه

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است :

الف) اندازهٔ جامعه، کمتر از اندازهٔ نمونه است. نادرست

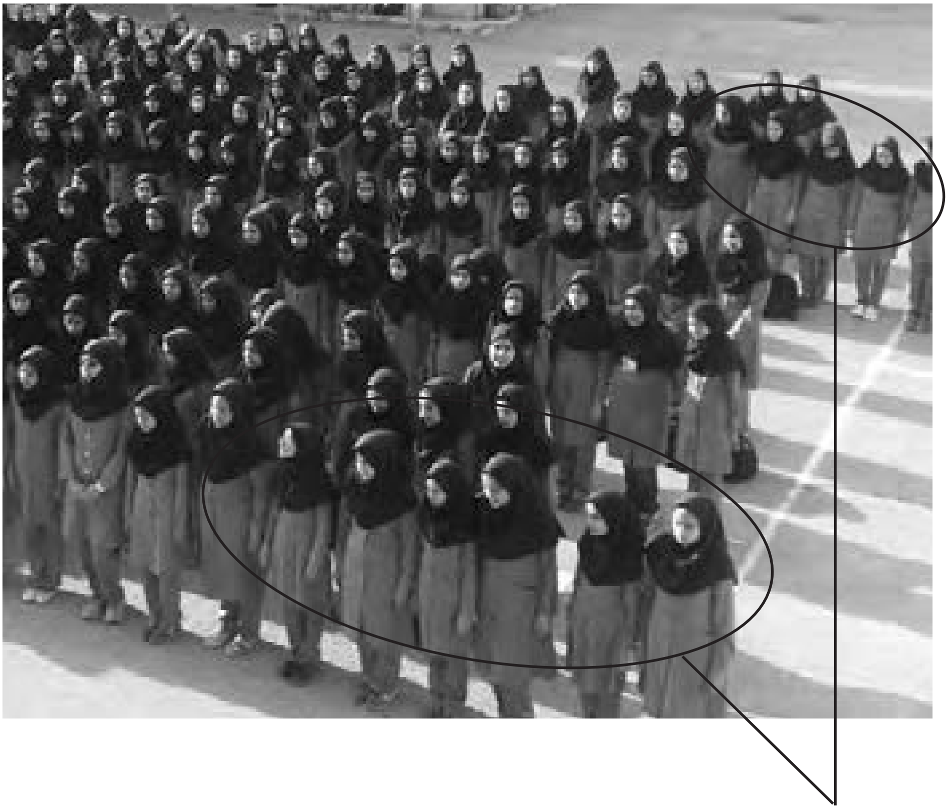
ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند. درست

پ) نمونهٔ زیر، مجموعه‌ای از جامعه است. درست

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.

هر صف افقی نشان‌دهندهٔ تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونهٔ دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.

جامعه تمامی دانش‌آموزان مدرسه که اعضای آن همهٔ دانش‌آموزان آن هستند.



دو نمونهٔ دلخواه

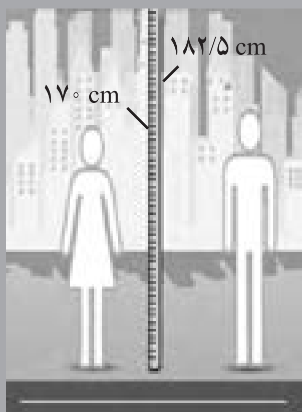
فعّالیت

در یک شهر، با افراد مختلفی روبه‌رو می‌شویم و از آنها سؤالاتی می‌کنیم. آنها به صورت زیر، به سؤالات ما پاسخ داده‌اند. به عنوان مثال :

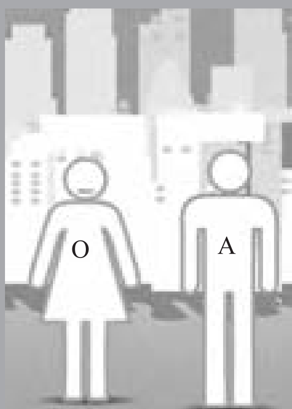
از یک آقا و خانم می‌پرسیم : «چقدر از آشپزی کردن لذت می‌برید؟»

از مادر یک خانواده می‌پرسیم :
«چند فرزند دارید؟»

از همان خانم و آقا می‌پرسیم : «قد شما چند سانتی متر است؟»



و سؤال آخر : «گروه خونی خود را بگویید؟»

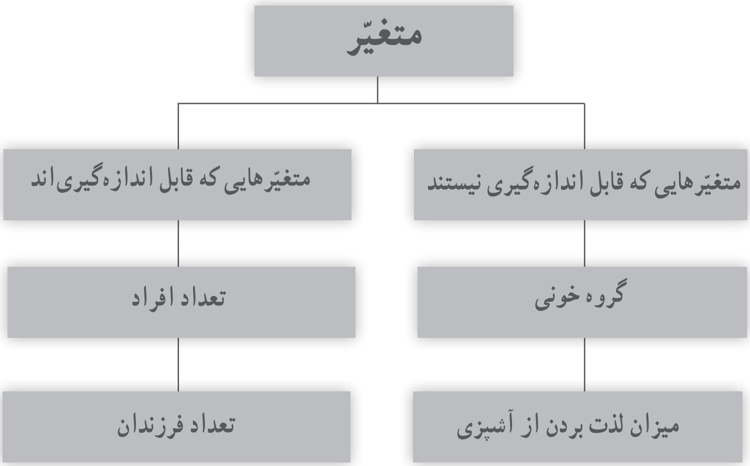


حال به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) با توجه به شکل‌های مورد نظر، پاسخ‌های افراد را در جدول زیر قرار دهید و آن را کامل کنید.

نام متغیّر		
تعداد فرزندان	–	۲
قد افراد	۱۸۲/۵	۱۷۰
گروه خونی	A	O
میزان لذت بردن از آشپزی	کم	بسیار زیاد

ب) با توجه به متغیّرهای بیان شده، کدام متغیّرها قابل اندازه‌گیری‌اند و کدام نیستند؟ به‌جای علامت سؤال، نام متغیّر مورد نظر را بنویسید.



تعریف متغیّرهای کمی

متغیّرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «**متغیّرهای کمّی**» گویند. به عنوان مثال، تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیّرهای کمی‌اند.

تعریف متغیّرهای کیفی

به متغیّرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند، «**متغیّرهای کیفی**» گویند. به عنوان مثال، گروه خونی افراد و پاسخ کار در کلاس «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیّرهای کیفی‌اند.

۱ با توجه به شکل‌ها، جملات را کامل کنید :

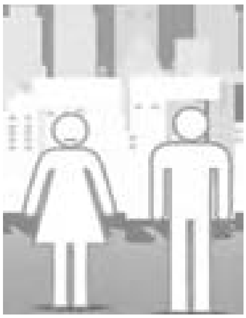
در شکل «الف»، تعداد مسافران یک قطار، یک متغیّر...کمی..... است.

در شکل «ب»، اقوام ایرانی یک متغیّر...کیفی.....است.

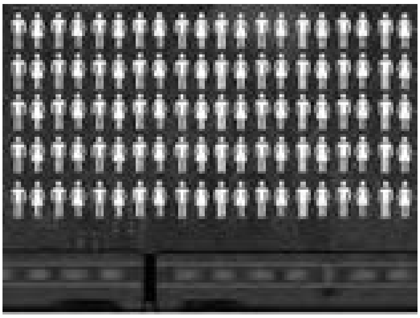
در شکل «پ»، قد فرد، یک متغیّر...کمی...است.

در شکل «ت»، جنسیت افراد یک متغیّر....کیفی...است.

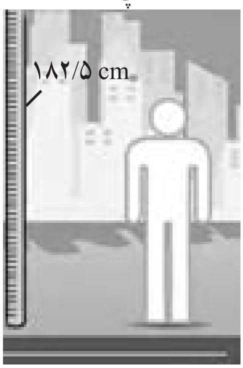
ت



الف



پ



ب

۲ نوع متغیّرهای زیر را مشخص کنید :

الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده) کمّی ☐ کیفی ☑

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. کمّی ☑ کیفی ☐

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای) کمّی ☐ کیفی ☑

۳ جدول زیر را کامل کنید.

سؤال (متغیّر)	پاسخ (مقدار متغیّر)	نوع متغیّر
موی شما چه رنگی است؟	مشکی، قهوه‌ای، طلایی، سفید، قرمز	کیفی
وزن شما چه عددی است؟	۶۰ تا ۷۰ کیلوگرم	کمی
چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می‌برید؟	بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیارکم، لذت نمی‌برم	کیفی

انواع متغیّرهای کمی

فعّالیت

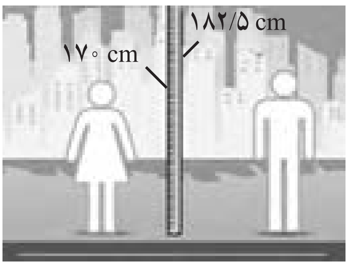
همان‌گونه که در فعّالیت قبل مطرح شد، پاسخ دو سؤال زیر، متغیرهایی از نوع کمّی‌اند.

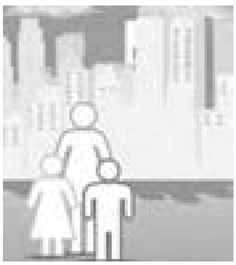
۱ از مادر یک خانواده می‌پرسیم : چند فرزند دارید؟

برخی از جواب‌های ممکن : ۰، ۱، ۲، ۳و ....

۲ قد شما چند سانتی‌متر است؟

برخی از جواب‌های ممکن : ۱۵۰ سانتی‌متر تا ۱۷۰ سانتی‌متر، ۱۵۹ سانتی‌متر، ۱۶۰/۵ سانتی‌متر و ...





۳ فرض کنید کمترین و بیشترین وزن در جامعهٔ دانش‌آموزان پایهٔ دهم کشور به‌ترتیب ۴۶ کیلوگرم و ۷۵ کیلوگرم باشد. در این صورت، وزن تمام دانش‌آموزان کشور در بازهٔ [۷۵ , ۴۶] قرار می‌گیرد.

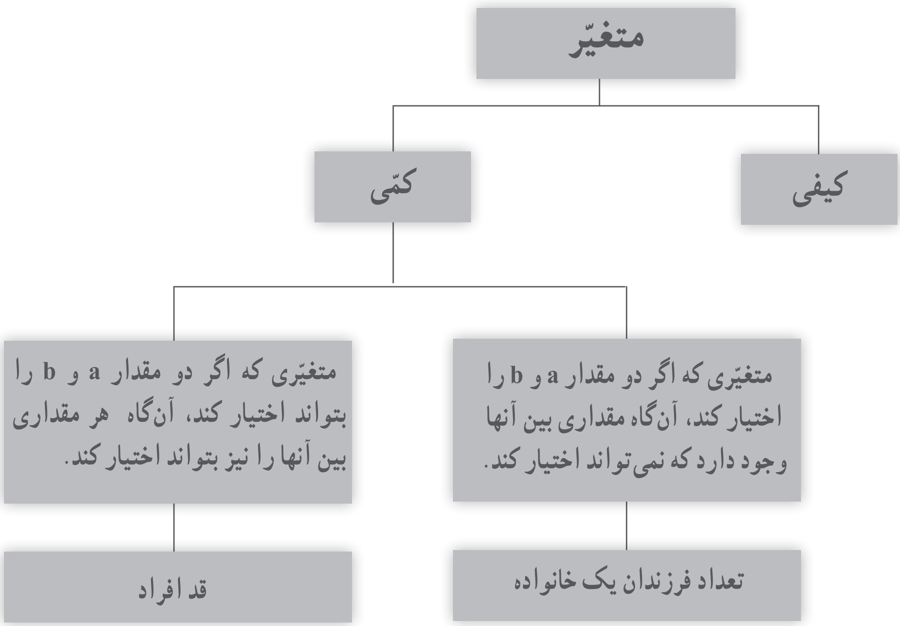
آیا هر عددی از این بازه می‌تواند وزن یک دانش‌آموز باشد؟ بله، می‌تواند قرار گیرد.

۴ فرض کنید کمترین و بیشترین تعداد فرزندان یک خانواده در کشور به‌ترتیب ۰و ۲۰ باشد. در این صورت، تعداد فرزندان هر خانواده در این کشور عددی صحیح از بازهٔ [۰,۲۰] خواهد بود. آیا هر عددی از این بازه می‌تواند نشان‌دهندهٔ تعداد فرزندان یک خانواده باشد؟ خیر، نمی‌تواند باشد.

۵ متغیّرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳و ۴ کمّی‌اند و یا کیفی؟

۶ چه تفاوتی در متغیرهای مطرح شده در قسمت‌های ۳ و ۴ وجود دارد که جواب‌های مربوط به آنها متفاوت است؟

۷ با توجه به قسمت‌های ۳و ۴ در شکل زیر به‌جای علامت سؤال، پاسخ مناسب قرار دهید.



انواع متغیّر کمّی

۱ متغیّر پیوسته ۲ متغیّر گسسته

تعریف متغیّر پیوسته

متغیّری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند اختیار کند.
به عنوان مثال، وزن یک دانش‌آموز می‌تواند ۴۶ کیلوگرم، ۴۷ کیلوگرم یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

تعریف متغیّر گسسته

متغیّر گسسته، متغیّری است که پیوسته نباشد. به‌عنوان مثال، تعداد فرزندان یک خانوادهٔ متغیّر گسسته است.

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیّرهای کمّی زیر را مشخص کنید.

الف) سرعت خودرو یک متغیّر پیوسته است. مقدار آن متغیّر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو ، یک متغیّر کمّی و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر ۱۰ است.

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیّر کمّی است و این تعداد، برابر با چهار است.

۲ انواع متغیّرهای زیر را مشخص کنید :

الف) تعداد ماهی‌های یک دریا	گسسته ☑	پیوسته ☐
ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید.	گسسته ☐	پیوسته ☑
پ) وزن افراد	گسسته ☐	پیوسته ☑
ت) تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه	گسسته ☑	پیوسته ☐

۳ در جدول زیر، پاسخ شما چه نوع متغیّری (گسسته یا پیوسته) است؟

سؤال (متغیّر)	پاسخ (مقدار متغیّر)	نوع متغیّر
قد شما چه عددی است؟	عددی بین ۱۷۲ تا ۱۸۵ سانتی‌متر	پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	۸۰/۵ کیلوگرم	پیوسته
تعداد دوستان شما چند نفر است؟	۰، ۱، ۲، ۳،.........	گسسته
وزن دوستتان چه عددی است؟	۷۰، ۷۱، ۷۲ و ..... کیلوگرم	پیوسته
شاخص تودهٔ بدن خانوادهٔ شما چه عددی است؟	۲۲، ۳۲/۵، ۳۰ و	پیوسته
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	عددی بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی‌متر	پیوسته

انواع متغیّرهای کیفی

فعالیت

۱ به سؤال‌های زیر توجه کنید :

سؤال : از یک آقا و خانم می‌پرسیم : چقدر از آشپزی کردن لذت می‌بری؟

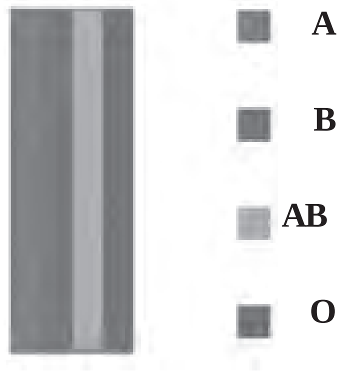
برخی از جواب‌های ممکن : خیلی زیاد، زیاد ، متوسط، کم، خیلی کم

سؤال : گروه خونی خود را بگویید.

برخی از جواب‌های ممکن : گروه خونی A، B، AB، O

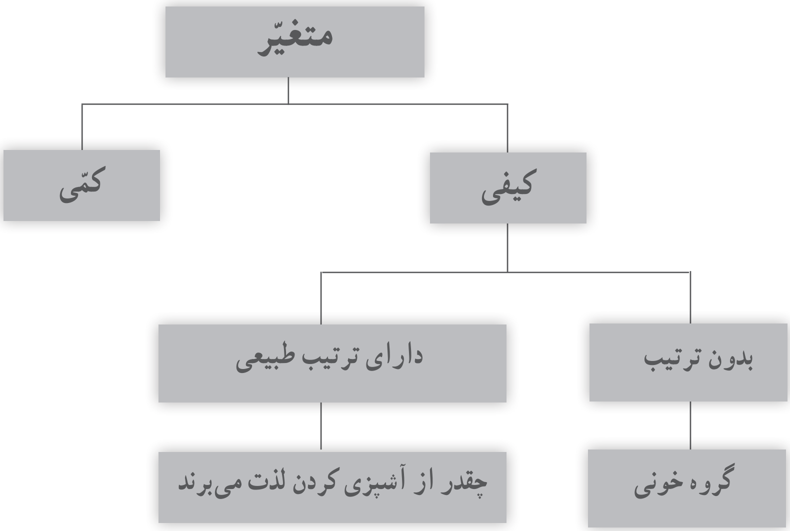
در پاسخ به سؤال اول، یک ترتیب طبیعی وجود دارد؛ همانند شکل «الف» در صورتی که در پاسخ به سؤال دوم نمی‌توان ترتیب طبیعی قائل شد، شکل «ب» را ملاحظه کنید.

الف



ب

۲ در شکل زیر به جای علامت سؤال، پاسخ مناسب را قرار دهید.



متغیّرهای ترتیبی و اسمی

انواع متغیّر کیفی :

متغیّرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند. این متغیّرها به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌شود :

۱ متغیّر ترتیبی   ۲ متغیّر اسمی (غیر ترتیبی)

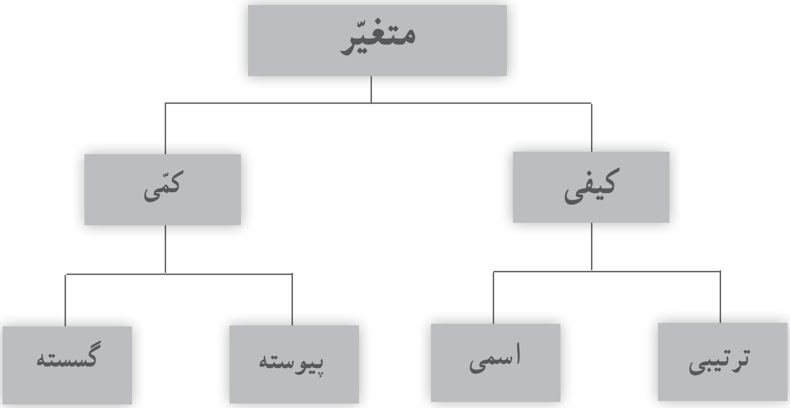
متغیّر ترتیبی

متغیّری است که در آن، نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. به عنوان مثال، سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

متغیّر اسمی (غیرترتیبی)

متغیّری کیفی است که ترتیبی نیست؛ مانند جنسیت (زن و مرد)

انواع متغیّرها در یک نگاه



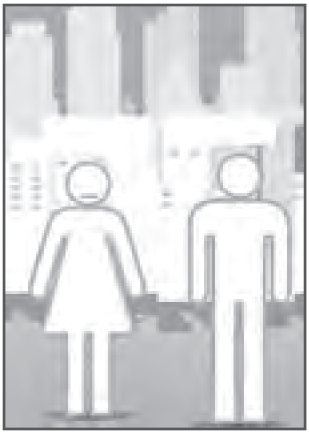
کار در کلاس

با توجه به شکل‌های زیر جملات زیر را کامل کنید :

در شکل «الف»، جنسیت افراد، یک متغیّر اسمی است و مقادیر آن زن و مرد است.

در شکل «ب»، مقام‌هایی که یک ورزشکار در مسابقه به‌دست می‌آورد، یک متغیّر کیفی است و مقادیر آن مقام اوّل، مقام دوم و مقام سوم است.

در شکل «پ»، میزان علاقهٔ شما دربارهٔ خورش قیمه سؤال شده است که یک متغیّر کیفی است و مقادیر آن بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم است.



الف

مقام اوّل

مقام سوم مقام دوم

ب

بسیار زیاد
زیاد
متوسط
کم
بسیار کم

پ

معلمان محترم و صاحب نظران گرامی می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران-صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴- گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی عمومی و متوسطه نظری