

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

اللّٰهُمَّ صَلِّ عَلٰی مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضیات گسسته

رشته ریاضی و فیزیک

راهنمای معلم

پایه دوازدهم
دوره دوم متوسطه



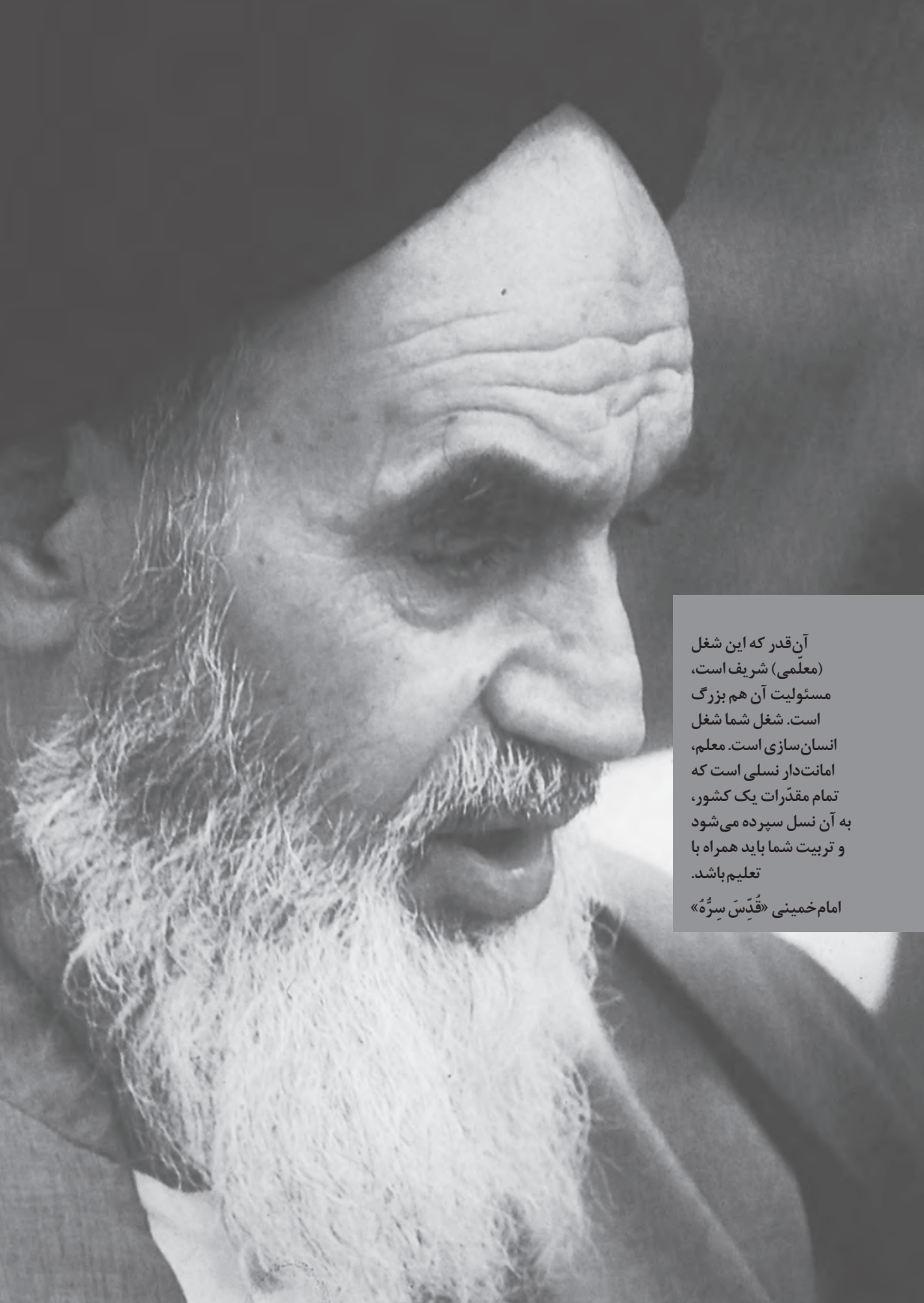
وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

- نام کتاب: راهنمای معلم ریاضیات گسسته - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۲۳۶۲
- پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
- مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
- شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سید محمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
- مدیریت آماده‌سازی هنری: حمیدرضا امیری، فریبا جباری، فیروز خدابخشی، ابراهیم ریحانی و محمدرضا سید صالحی (اعضای گروه تألیف) - جعفر ربّانی (ویراستار)
- شناسه افزوده آماده‌سازی: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
- نشانی سازمان: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا) - مریم دهقان‌زاده (رسم) - مرضیه اخلاقی، سیدکیوان حسینی، آذر روستایی‌فیروزآباد، فاطمه پزشکی و حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
- نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۹۲۶۶-۸۸۳۰، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir
- ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
- چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
- سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول ۱۳۹۸

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۳۴۰۶-۹

ISBN: 978-964-05-3406-9



آن قدر که این شغل
(معلمی) شریف است،
مسئولیت آن هم بزرگ
است. شغل شما شغل
انسان سازی است. معلم،
امانت دار نسلی است که
تمام مقدرات یک کشور،
به آن نسل سپرده می شود
و تربیت شما باید همراه با
تعلیم باشد.
امام خمینی «قَدِّسَ سِرُّهُ»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست مطالب

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

- درس اول: استدلال ریاضی ۳
- درس دوم: بخش پذیری در اعداد صحیح ۱۰
- درس سوم: هم‌نهمی در اعداد صحیح و کاربردها ۲۱

فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

- درس اول: معرفی گراف ۴۲
- درس دوم: مدل‌سازی با گراف ۴۶

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

- درس اول: مباحثی در ترکیبیات ۵۵
- درس دوم: روش‌هایی برای شمارش ۶۴

سخنی با معلم

ساختار کتاب درسی ریاضیات گسسته بر اساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین طراحی شده است. فعالیت‌ها، موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم ریاضی فراهم می‌کنند و مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان هستند. معلم در این میان نقش مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها بر عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها توسط معلم وجود دارد. راهنمای حاضر بر اساس آن تنظیم شده است که کتاب درسی محور اصلی در فرایند آموزش باشد. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌گو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

اهداف هر فصل و اهداف هر درس در کتاب حاضر توضیح داده شده است. همچنین در روش تدریس ارائه شده برای هر درس، نحوه اجرای هر فعالیت و چالش‌های پیش رو، پیشنهادهایی برای غنی‌سازی هر فعالیت، بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان در آن فعالیت و نیز توصیه‌هایی برای ارزشیابی نیز ارائه شده است. علاوه بر این در مورد پاسخ بیشتر فعالیت‌ها و تمرینات، راهنمایی به عمل آمده است. در کنار این بحث‌هایی نیز به عنوان دانستنی‌هایی برای معلم و همچنین نمونه سؤال‌هایی برای ارزشیابی ارائه شده است.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس باشند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حدود و ثغوری در کتاب مشخص شده است. رعایت این حد و مرزها، در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی الزامی است. روند کتاب نشان می‌دهد که حتی ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. ارزشیابی باید بر اساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای آن در زندگی واقعی، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است امید است که این موضوع مد نظر معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درسی را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

فصل اول

آشنایی با نظریهٔ اعداد

نگاه کلی به فصل

فصل ۱ کتاب ریاضیات گسسته، به مبحث استدلال و نظریه اعداد اختصاص یافته است. این فصل شامل سه درس است. موضوع درس اول در مورد استدلال ریاضی می‌باشد و روش‌های استدلال و اثبات ریاضی شامل اثبات مستقیم، مثال نقض، اثبات غیرمستقیم، اثبات بازگشتی، همراه با سؤالات متنوع مطرح شده است. در درس دوم به موضوع بخش‌پذیری در اعداد صحیح که شامل معرفی رابطه عاد کردن و ویژگی‌های آن، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، قضیه تقسیم و کاربردهای آن، افزاز مجموعه Z به کمک قضیه تقسیم و مسائل مختلف مربوط به آنها پرداخته شده است. در درس سوم، مبحث هم‌نهشتی در اعداد صحیح مطرح می‌گردد که شامل معرفی رابطه هم‌نهشتی و ویژگی‌های آن و برخی کاربردهای هم‌نهشتی مثل تعیین باقی‌مانده تقسیم و تقویم‌نگاری است. سپس معادله هم‌نهشتی و معادله سیاله خطی معرفی می‌شوند و شرط وجود جواب آنها بیان می‌گردد. حل معادله سیاله خطی از طریق تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی، همراه با مثال‌هایی آموزش داده می‌شود. همچنین کاربرد معادله سیاله خطی در حل برخی از مسائل عینی و مرتبط با زندگی روزمره مطرح شده است.

استدلال ریاضی

درس اول

روش تدریس

در مثال ص ۹ دانش‌آموزان با دو نوع استدلال، یعنی «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» آشنا می‌شوند. همکاران محترم می‌توانند این مثال را بدون رجوع دانش‌آموزان به کتاب، در کلاس درس مطرح نمایند و در صورت امکان یک گفت‌وگو و بحث ریاضی را شکل دهند و به کمک دانش‌آموزان بحث را هدایت نمایند. البته با توجه به سطح کلاس امکان طرح مثال غنی تر هم وجود دارد. بخشی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان حین بحث و گفت‌وگو قابل برطرف شدن است. همچنین مسئله‌هایی که در کار در کلاس ارائه شده‌اند نیز برای بحث و گفت‌وگو مناسب هستند.

کار در کلاس ص ۳

قسمت‌های الف)، ب)، ث) و چ) به روش «اثبات مستقیم» و بقیه موارد به کمک ارائه «مثال نقض» قابل حل هستند.

حل قسمت چ کار در کلاس ص ۳

$$4k+1 = a^2 \Rightarrow 4k = a^2 - 1 \Rightarrow k = \frac{a^2 - 1}{4} = \left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{a-1}{2}\right)$$

چون $4k+1$ عددی فرد است پس a^2 نیز عددی فرد است و در نتیجه a نیز فرد است. بنابراین $a+1$ و $a-1$ هر

دو زوج هستند و در نتیجه $\frac{a-1}{2}$ و $\frac{a+1}{2}$ اعدادی طبیعی هستند. اختلاف این دو عدد برابر واحد است:

$$\frac{a+1}{2} - \frac{a-1}{2} = \frac{a+1-a+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

اثبات با در نظر گرفتن همه حالاتها

هم ارزی $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow r) \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$ نشان می‌دهد که چرا برای اثبات درستی $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow r$ باید هر حالت را جداگانه بررسی کرد. مثال‌های مناسب دیگر مواردی مانند، گویا یا گنگ بودن، مثبت یا منفی بودن، بزرگ‌تری یا کوچک‌تری و نظایر آن را شامل می‌شوند. همکاران عزیز توجه دارند که هدف آشنایی با این نوع استدلال است و طرح مباحث دشوار که نیاز به تکنیک‌ها و قواعد و یا محاسبات پیچیده دارند مورد تأیید مؤلفین کتاب حاضر نمی‌باشد. ضمناً با ارائه فرصت به دانش‌آموزان برای ارائه راه‌حل‌هایشان ممکن است پاسخ‌های متفاوت و در شرایطی بهتر از آنچه که در این کتاب ارائه شده‌اند، به دست آید.

کار در کلاس ص ۵

الف) اگر ab عددی فرد باشد، باید هر دو a و b فرد باشند:

$$a = 2m + 1, \quad b = 2n + 1$$

$$a^2 = 4m^2 + 4m + 1, \quad b^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4m + 4n + 2$$

که عددی زوج است.

ب) اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، با توجه به اینکه: $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ بنابراین $\frac{n(n+1)}{2}$

$$n(n+1) = 4k$$

هم باید زوج باشد و در نتیجه

$$n = 1 \Rightarrow n(n+1) = 1 \times 2$$

$$n = 2 \Rightarrow n(n+1) = 2 \times 3$$

$$n = 3 \Rightarrow n(n+1) = 3 \times 4$$

$$n = 4 \Rightarrow n(n+1) = 4 \times 5$$

$$n = 5 \Rightarrow n(n+1) = 5 \times 6$$

$$n = 6 \Rightarrow n(n+1) = 6 \times 7$$

با بررسی پاسخ‌ها مشخص است که $n = 3$ و $n = 4$ تنها پاسخ‌های قابل قبول هستند.

اثبات غیر مستقیم / اثبات به روش برهان خلف

مطالعات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان گاهی اثبات‌ها را حفظ می‌کنند و با آنکه به ظاهر توانایی ارائه آن را دارند، اما از توضیح برخی ایده‌های اساسی در یک اثبات ناتوان هستند. برای درک برهان خلف شایسته است ایده منطقی که در ورای آن قرار دارد برای دانش‌آموز تشریح شود. در هر حال همان‌گونه که پولیا می‌گوید «این‌گونه برهان مخالفانی نیز دارد و به‌طور خلاصه گفته می‌شود که با گوش دادن به چنین برهانی، ناگزیر باید در تمام مدت توجه خود را به فرض غلطی معطوف داریم که لازم است آن را فراموش کنیم، نه به قضیه راستی که باید آن را در خاطر نگاه داریم». در هر حال از نظر پولیا برای داوری در مورد چنین اعتراضاتی باید میان دو کاربرد برهان خلف، یکی به عنوان افزار پژوهش و دیگری به عنوان وسیله بیان و عرضه کردن تمایز قائل شویم.

حل کار در کلاس ص ۶

الف) فرض کنیم x یک عدد گنگ باشد، ولی (فرض خلف) $\frac{1}{x}$ عددی گویا باشد. واضح است که $x \neq 0$. با توجه به آنچه در مثال آخر ص ۵ آمده است، حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است، بنابراین حاصل $x \cdot \frac{1}{x}$ باید عددی گنگ باشد در حالی که $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ که یک تناقض است.

ب) فرض کنیم تابع f در a پیوسته باشد ولی تابع g در a پیوسته نباشد. فرض کنیم $f+g$ (فرض خلف) در a پیوسته است، بنابراین $f+g-f$ هم در a پیوسته است، یعنی g در a پیوسته است که یک تناقض است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اثبات به کمک گزاره‌های هم‌ارز یکی از روش‌های نیرومند در استدلال ریاضی است. در حقیقت بخش مهمی از کار به توانایی ارائه گزاره‌ای هم‌ارز با گزاره‌ای که باید اثبات شود — و البته گزاره‌ای که بررسی درستی یا نادرستی آن ساده‌تر از گزاره اصلی باشد — اختصاص دارد. تأکید می‌گردد که سطح سؤالات مطرح شده در آزمون‌ها باید در محدوده و سطح سؤالات کتاب باشد.

حل کار در کلاس ص ۷

الف) گزاره‌های $a < b$ و $a^2 < b^2$ هم‌ارز نیستند. بنابراین ترکیب دو شرطی $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$ درست

نیست.

(ب) دو گزاره $a < b$ و $a^2 < b^2$ هم‌ارز هستند و هر یک دیگری را نتیجه می‌دهد. بنابراین $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ یک ترکیب دو شرطی درست است.

حل کار در کلاس ص ۸

(الف) اگر $n \in \mathbb{N}$ همان‌گونه که قبلاً دیده‌اید می‌توان ثابت کرد:

n زوج است $\Leftrightarrow n^2$ زوج است

بنابراین این دو گزاره معادل هم هستند.

حل تمرینات درس اول ص ۸

۱ (الف) اگر x و y هم علامت باشند و $x, y \neq 0$ داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

همواره برقرار است.

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \quad (\text{ب})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2yz + x^2 + z^2 - 2zx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

همواره برقرار است.

برای اثبات رابطه $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ کافی است در قسمت قبل به جای z ، عدد ۱ قرار دهیم.

البته به‌طور مستقل و شبیه روش بالا نیز می‌توان عمل کرد.

$$2 \quad x = \frac{1}{p} \text{ یک پاسخ است. مسئله چند جواب دارد؟}$$

۳ فرض کنیم که α و β دو عدد گنگ و $\alpha + \beta$ گویا باشد، اما $\alpha - \beta$ گویا نباشد (فرض خلف) بنابراین

$(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$ هم گویاست، یعنی 2α گویاست و از آنجا α گویا خواهد بود که یک تناقض است.

۴ فرض کنیم چنین اعدادی یافت شوند. پس $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = 0$$

اگر $x = 0$ ، آن‌گاه y می‌تواند عددی صحیح و دلخواه باشد.

اگر $y = 0$ ، آن گاه x می تواند عددی صحیح و دلخواه باشد.

۵ فرض کنیم a و b نا صفری موجود باشند که

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = ab$$

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 0 \Rightarrow \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \\ \frac{3b^2}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

پس $a = 0$ و $b = 0$ که تناقض با فرض ناصفر بودن a و b دارد.

۶ الف) فرد

$$x = 2k + 1 \Rightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \end{aligned}$$

ب) اعداد مذکور را $n+2$ ، $n+1$ ، n ، $n-1$ و $n-2$ در نظر می گیریم.

$$\frac{(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2)}{5} = \frac{5n}{5} = n$$

نمونه سؤال های ارزشیابی

۱ برای هر دو عدد حقیقی a و b با شرط $a + b > 0$ ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 \geq a^2b + ab^2$$

۲ ثابت کنید برای هر عدد حقیقی a داریم:

$$\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$$

۳ ثابت کنید هر عدد ۶ رقمی به صورت \overline{abcabc} بر اعداد ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است.

۴ اگر $a > 0$ و $b > 0$ و $a + b = 1$ ثابت کنید $-ab \leq \frac{1}{4}$

۵ ثابت کنید تابعی چون f موجود است که $f = f^{-1}$.

۶ ثابت کنید عدد اولی چون p موجود است که $1 + vp$ مکعب کامل باشد.

۷ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است، دلیل بیاورید :

الف) اگر $A \subseteq B$ و $x \notin B$ آن‌گاه $x \notin A$

ب) اگر $B \not\subseteq A$ و $C \not\subseteq B$ آن‌گاه $C \not\subseteq A$

ج) اگر $x \in A$ و $A \in B$ آن‌گاه $x \in B$

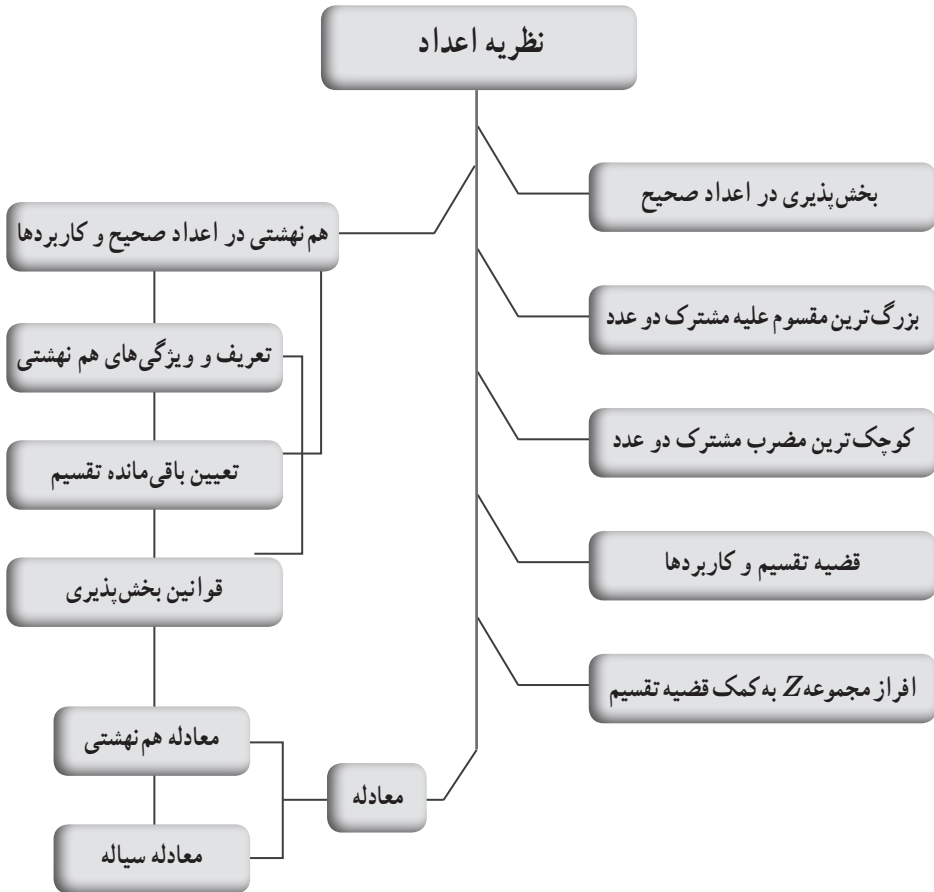
۸ ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.

۹ اگر m یک عدد مثبت باشد ثابت کنید :

$$m + \frac{4}{m^2} \geq 3$$

۱۰ ثابت کنید بین هر دو عدد گویای متمایز، عددی گنگ موجود است.

نقشه مفهومی درس‌های ۲ و ۳ فصل اول



بخش پذیری در اعداد صحیح

درس دوم

اهداف

- ۱ آشنایی و درک مفهوم بخش پذیری در اعداد صحیح
- ۲ آشنایی با رابطه عاد کردن و شناخت ویژگی‌های آن و به کارگیری آن در حل برخی از مسائل
- ۳ به کارگیری تعریف رابطه عاد کردن برای بیان مفهوم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد
- ۴ به کارگیری تعریف رابطه عاد کردن برای بیان مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد
- ۵ آشنایی با قضیه تقسیم و کاربرد آن در حل برخی از مسائل
- ۶ به کارگیری قضیه تقسیم برای افراز مجموعه Z

روش تدریس

در شروع درس، به بیانی ساده مفهوم رابطه عاد کردن مطرح شده است و مفهوم بخش پذیری برای اعداد طبیعی همراه با مثال مطرح می‌شود. سپس در حالت کلی‌تر، مفهوم بخش پذیری به مجموعه اعداد صحیح تعمیم داده شده است.

هدف کاردرکلاس صفحه ۱۰، درک رابطه عاد کردن و استفاده از آن برای حل مسئله است.

حل کاردرکلاس صفحه ۱۰، قسمت ۲

$$3^9 = 3^5 \times 3^4 \xrightarrow{3^4=q} 3^9 = 3^5 \times q \rightarrow 3^5 \mid 3^9$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^n = a^m \times a^{n-m} \xrightarrow{a^{n-m}=q} a^n = a^m \times q \rightarrow a^m \mid a^n$$

سپس ویژگی‌ها و نتایج رابطه عاد کردن همراه با دلایل و اثبات مطرح شده است.

اثبات ویژگی ۱:

$$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow mb = a(mq) \Rightarrow a | mb$$

پاسخ به سؤالات مربوط به ویژگی ۱:

پاسخ سؤال اول: خیر، با توجه به مثال‌های مطرح شده، همواره چنین نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت.

پاسخ سؤال دوم:

$$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow kb = (ka)q \Rightarrow ka | kb$$

$$ka | kb \Rightarrow kb = kaq \Rightarrow b = aq \Rightarrow a | b$$

تکمیل اثبات ویژگی ۲:

$$a | b, b | c \Rightarrow b = aq_1, c = bq_2$$

$$\Rightarrow c = (aq_1)q_2 \Rightarrow c = a(q_1q_2) \stackrel{q_1q_2=q}{\Rightarrow} c = aq \Rightarrow a | c$$

پاسخ سؤال مربوط به ویژگی ۳:

خیر، به طور مثال: $2 | 3+7 \rightarrow 2 | 3, 2 | 7$

کاردر کلاس صفحه ۱۱

قسمت ۱، دلیل درستی رابطه $a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$:

$$a | 1 \Rightarrow |a| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1 \Rightarrow a = -1 \text{ یا } a = 0 \text{ یا } a = 1$$

از طرفی چون $a | 1$ پس $a \neq 0$ ، بنابراین: $a = \pm 1$

قسمت ۲،

$$a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \stackrel{q^n=q'}{\Rightarrow} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

در واقع با حل این مسئله ثابت شد اگر $\frac{b}{a}$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه $\frac{b^n}{a^n}$ نیز عددی صحیح است.

قسمت ۳،

$$\left. \begin{array}{l} a | b \Rightarrow b = aq_1 \\ c | d \Rightarrow d = cq_2 \end{array} \right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c)(q_1q_2) \stackrel{q_1q_2=q}{\Rightarrow} b \times d = (a \times c) \times q \Rightarrow ac | bd$$

قسمت ۴، با استفاده از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a | b \Rightarrow a | mb \\ c | d \Rightarrow c | nc \end{array} \right\} \xrightarrow{\pm} a | mb \pm nc$$

قبل از ورود به مبحث بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، مفهوم اعداد اول برای دانش‌آموزان یادآوری شده است. در واقع اعداد اول به عنوان زیر بنا و سازنده همه اعداد صحیح، نقش بسیار مهم و اساسی ایفا می‌کنند. سپس با استفاده از رابطه عادی کردن، تعریف عدد اول بیان می‌شود و مثالی مطرح شده است.

تکمیل حل مثال :

$$\left. \begin{array}{l} a|7k+6 \Rightarrow a|9 \times (7k+6) \Rightarrow a|63k+54 \\ a|9k+7 \Rightarrow a|7 \times (9k+7) \Rightarrow a|63k+49 \end{array} \right\} \Rightarrow a|(63k+54) - (63k+49) \Rightarrow a|5 \Rightarrow a=5 \text{ یا } a=1$$

می‌توان برای درک بهتر دانش‌آموزان، مثال دیگری نیز مطرح نمود تا پاسخ دهند.

مثال : اگر a عددی صحیح و دو عدد $(5m+4)$ و $(4m+3)$ را عادی کند، ثابت کنید : $a = \pm 1$

حل :

$$\left. \begin{array}{l} a|5m+4 \Rightarrow a|4 \times (5m+4) \Rightarrow a|20m+16 \\ a|4m+3 \Rightarrow a|5 \times (4m+3) \Rightarrow a|20m+15 \end{array} \right\} \Rightarrow a|(20m+16) - (20m+15) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

در شروع این درس مفهوم مقسوم علیه‌های یک عدد با توجه به رابطه عادی کردن تعریف شد، وقتی $a|b$ ، a یک مقسوم علیه b است. با توجه به این تعریف، مفاهیم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد معرفی می‌شوند.

ممکن است برای دانش‌آموزی سؤال شود که در تعریف b م م، چرا a و b هر دو با هم صفر نیستند؟ اگر a و b هر دو را با هم صفر در نظر بگیریم، پس باید b م م صفر و صفر را حساب کنیم. فرض کنیم $(0,0) = d$ ، طبق تعریف داریم : $d|0$ و $0|d$ ، ولی d باید بزرگ‌ترین عددی باشد که صفر را عادی می‌کند. که چنین عددی را نمی‌توان یافت. چون همه اعداد صفر را عادی می‌کنند و بین آنها بزرگ‌ترینی وجود ندارد.

در صفحه ۱۳، بعد از تعریف کوچک‌ترین مضرب مشترک، سؤال شده که توضیح دهید هر یک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای c تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که c از هر مضرب مشترک دلخواهی چون m ، کوچک‌تر یا مساوی است.

هدف از کاردرکلاس صفحه ۱۳، درک بهتر دانش‌آموزان از مفاهیم b م م و k م م و به کارگیری از این مفاهیم برای اثبات برخی قضیه‌ها و حل مسائل است.

—۱

اثبات الف :

$$a|b \Rightarrow (a,b) = |a|$$

با توجه به دو شرط موجود در تعریف ب م م داریم:

$$|a| \mid |a| \xrightarrow{ab} |a| \mid b$$

$$\forall m > 0; m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \mid a \Rightarrow |m| \leq |a| \Rightarrow m \leq |a|$$

اثبات ب:

$$a \mid b \Rightarrow [a, b] = |b|$$

با توجه به دو شرط موجود در تعریف ک م م داریم:

$$b \mid |b| \xrightarrow{ab} a \mid |b|$$

$$\forall m > 0; a \mid m, b \mid m \Rightarrow b \mid m \Rightarrow |b| \leq |m| \Rightarrow |b| \leq m$$

۲- در این قسمت، منظور از قضیه مطرح شده این است که عدد اول p نسبت به هر عددی که مضرب p نباشد، اول است.

$$(p, a) = d \begin{cases} \rightarrow d \mid p \xrightarrow{\text{اول } p} d = 1 \text{ یا } d = p \\ \rightarrow d \mid a \end{cases} \quad (1)$$

اگر $d = p$ باشد، در این صورت، با توجه به (۱) باید $p \mid a$ (به جای d قرار می‌دهیم p) که با فرض $(p \nmid a)$ تناقض دارد، پس باید $d = 1$.

نتیجه‌ای که می‌توان از این قضیه گرفت این است که: اگر بزرگ‌ترین شمارنده دو عدد صحیح a و b برابر یک باشد، آن دو عدد نسبت به هم اول هستند. $(a, b) = d = 1$

در صفحه ۱۴، بحث تقسیم پذیری در Z ، در حالت کلی مطرح می‌شود و با بیان قضیه‌ای به نام قضیه تقسیم، که از مهم‌ترین قضیه‌های نظریه اعداد به شمار می‌رود، حالت‌هایی را که در تقسیم a بر b ، باقی‌مانده صفر نباشد، را در نظر می‌گیریم.

در حالت کلی‌تر می‌توان قضیه تقسیم را به این صورت بیان نمود که، اگر a و b اعداد صحیح باشند و $b \neq 0$ ، اعداد صحیح و منحصر به فرد r و q وجود دارند به طوری که: $a = bq + r$ ، $0 \leq r < |b|$.

واضح است که اگر $r = 0$ باشد، $a = bq$ بوده، آنگاه a بر b بخش پذیر است.

در ادامه برای درک مفهوم قضیه تقسیم و کاربرد آن در حل مسائل تقسیم‌پذیری، مثال‌هایی مطرح شده است.

در مثال اول صفحه ۱۴، که هدف آن تعیین باقی‌مانده تقسیم عدد 25 بر 7 می‌باشد، به عبارتی از تساوی $4 + (7 \times 3) = 25$ استفاده شده است، که طرفین این تساوی در عدد (-1) ضرب و به صورت $4 - (7 \times 3) = 25 - 21 = 4$ نوشته می‌شود. به دانش‌آموزان تأکید شود که علامت منفی در کنار عدد 7 قرار

نمی‌گیرد، چون می‌خواهیم باقی مانده تقسیم عدد (-25) را بر 7 به دست آوریم. سپس در کتاب با توجه به شرایط قضیه تقسیم، باقی مانده را که باید عددی نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم علیه باشد را به دست آورده است. در صفحه ۱۵، بحث افراز مجموعه Z به کمک قضیه تقسیم بیان شده است. دانش‌آموزان در پایه یازدهم، در کتاب آمار و احتمال، با مفهوم افراز یک مجموعه آشنا شدند. بهتر است مفهوم افراز در کلاس برای دانش‌آموزان یادآوری گردد.

فرض کنیم $A \neq \emptyset$ یک مجموعه و A_1, A_2, \dots, A_n زیرمجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه A_1, A_2, \dots, A_n افراز شده است، هر گاه سه شرط زیر را هم زمان داشته باشد:

$$(1) \text{ هیچ یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشد. یعنی: } \forall i \leq n; A_i \neq \emptyset$$

$$(2) \text{ اشتراک هر دو زیرمجموعه متمایز، تهی باشد. یعنی: } \forall i, j \ (i \neq j); A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$(3) \text{ اجتماع تمام زیرمجموعه‌ها با مجموعه اصلی برابر باشد. یعنی: } \bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

سپس مسئله‌های حل شده در کتاب مورد بررسی قرار گیرند.

در مسئله ۳ صفحه ۱۵، می‌خواهیم ثابت کنیم که هر عدد صحیح و فرد، به یکی از دو صورت $4k+1$ و $4k+3$ نوشته می‌شود. این مطلب ممکن است برای دانش‌آموزان سؤال برانگیز باشد، چون هر عدد فرد را به صورت $2k+1$ نشان می‌دادند. می‌توان با مثالی به آنها نشان داد که بعضی $2k+1$ ها به صورت $4k+1$ و بعضی به صورت $4k+3$ هستند. به طور مثال، عدد ۹ را می‌توان به صورت $4 \times 2 + 1$ نوشت که همان $4k+1$ است و عدد ۷ را می‌توان به صورت $4 \times 1 + 3$ نوشت که همان $4k+3$ است.

توصیه آموزشی

□ به دانش‌آموزان تأکید شود برای اینکه مسائل مربوط به نظریه اعداد برایشان ساده و آسان شود، با دقت تعاریف و اثبات ویژگی‌های مفاهیم مطرح شده در کتاب را یاد بگیرند.

□ بعضی مطالب که پیش‌نیاز مطالب جدید است و در کتاب یادآوری شده، با روش پرسش و پاسخ در کلاس مطرح شود تا دانش‌آموزان از آموخته‌های قبلی خود برای مبحث جدید استفاده کنند و ارتباط مفهومی بین مفاهیم ریاضی را به خوبی درک نمایند و یادگیری معنادار صورت گیرد. به عنوان مثال، قبل از ورود به مبحث افراز مجموعه Z ، از دانش‌آموزان پرسیده شود: آیا مجموعه اعداد فرد طبیعی و اعداد زوج طبیعی، افرازی برای مجموعه N هستند؟ برای W چگونه؟ چرا؟ با طرح این گونه سؤالات، هم مفهوم افراز برای دانش‌آموزان یادآوری می‌شود و هم برای درک بهتر و ایجاد مهارت در حل مسئله به آنها کمک می‌کند.

□ به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل پیچیده و دشوار اجتناب گردد.

اشتباهات رایج دانش آموزان

معمولاً دانش‌آموزی که به تعاریف دقت نمی‌کند و خواص و ویژگی‌های مفهوم مطرح شده در درس را بدون دلایل و اثبات به ذهن می‌سپارد، در حل مسائل نظریه اعداد دچار مشکل و اشتباه می‌شود. مثلاً به اشتباه فکر می‌کند وقتی حکمی برقرار است، پس عکس آن حکم نیز برقرار است و عکس آن حکم را بدون بررسی و اطمینان از درستی آن، در حل مسئله‌ها به کار می‌برد. همچنین، به این نکته توجه ندارد که در بعضی از حکم‌ها اگر عدد مرکب باشد یا اول باشد، تفاوتی وجود دارد. به عنوان نمونه:

□ اگر a و b اعداد صحیح باشند، از $a|b^n$ که $(n \in \mathbb{N})$ ، نتیجه می‌گیرد: $a|b$. در حالی که این نتیجه‌گیری همواره درست نیست. به عنوان مثال، از $9|3^3$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $9|3$. ولی اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت که: $p|a^n \Leftrightarrow p|a$.

□ اگر a و b و c اعداد صحیح باشند، از $a|bc$ نتیجه می‌گیرد: $a|c$ یا $a|b$. که این حکم همواره درست نیست. همان‌طور که در کتاب مثال‌هایی ارائه شد، مثلاً اگر $6|3 \times 4$ ، ولی $6 \nmid 3$ یا $6 \nmid 4$. حال اگر p عددی اول باشد، می‌توان نتیجه گرفت که: $p|ab \Rightarrow p|a$ یا $p|b$.

□ اگر a و b اعداد صحیح باشند، از $a \nmid b$ ، نتیجه می‌گیرد که $(a, b) = 1$. که این حکم همواره برقرار نیست. مثلاً: عدد ۱۸، عدد ۶ را عاد نمی‌کند، ولی ۶ و ۱۸ نسبت به هم اول نیستند. حال اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت که: $p \nmid a \Leftrightarrow (p, a) = 1$.

دانستنی‌های معلم

نظریه اعداد یکی از شاخه‌های جالب و با اهمیت ریاضیات می‌باشد که توانسته توجه بشر را برای هزاران سال به خود جلب کند. در این شاخه از ریاضیات، به مسائل، قضایا و برهان‌هایی برمی‌خوریم که قدمت بسیار طولانی دارند و پیشینه تاریخی آنها به روزگاران بسیار دور بر می‌گردد. تالس به عنوان نخستین کسی که برای احکامی از ریاضیات استدلال منطقی ارائه کرده است، شناخته می‌شود. پس از تالس، فیثاغورس و شاگردانش تلاش کردند که خواص اعداد را مورد مطالعه قرار دهند. پس از ایشان، اقلیدس در کتاب «اصول» گرد آیه‌ای منسجم از احکام ریاضی با اثبات‌های منطقی شامل علم حساب را تألیف کرد. بخشی از آموزه‌های امروزی علم حساب از جمله مباحث بخش‌پذیری، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک و نحوه محاسبه آن، اعداد اول، قضیه بنیادی حساب و نامتناهی بودن اعداد اول در کتاب اصول یافت می‌شوند. امروزه نظریه اعداد، آن‌چنان وسعت یافته که تقریباً در تمام شاخه‌های ریاضی رخنه کرده است و حتی

توانسته در علوم غیر ریاضی همچون کامپیوتر، کاربرد داشته باشد. اگر بخواهیم در حالت کلی این علم را تعریف کنیم، باید بگوییم نظریه اعداد، شاخه‌ای از ریاضیات است که ویژگی‌های اعداد صحیح در آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نظریه هم‌نهستی یا حساب پیمان‌های یکی از شاخه‌های مهم نظریه اعداد است و این شاخه در واقع ابزار بسیار قدرتمندی برای محاسبات مختلف می‌باشد. در اوایل قرن نوزدهم کارل فردریش گاوس، ریاضیدان بزرگ آلمانی، با بیان هم‌نهستی‌ها توانست راهگشا و حل‌کننده بسیاری از مشکلات و مسائل نظریه اعداد باشد. هم‌نهستی‌ها کاربردهای بسیاری در دانش کامپیوتر، از جمله حساب با اعداد صحیح بزرگ و رمزنگاری دارند. مفهوم هم‌نهستی در موارد بسیاری در زندگی ما مشهود است.

می‌دانیم، بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است. در واقع معادله‌ای چند جمله‌ای با متغیرهای صحیح، که در آن بیش از یک متغیر وجود دارد، معادله سیاله نامیده می‌شود. از لحاظ تاریخی، این‌گونه معادله‌ها از زمان ریاضیدان یونانی دیوفانت که در قرن سوم بعد از میلاد می‌زیسته، مطرح بوده‌اند و به همین مناسبت به آنها «معادله‌های دیوفانتی» نیز می‌گویند.

حل تمرینات درس دوم صفحه ۱۶ کتاب

۱

$$ab|cd, a|cd, b|cd, c|ab, d|ab$$

۲

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow (-b) = a(-q) \Rightarrow a|-b$$

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)(-q) \Rightarrow -a|b$$

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow -b = -aq \Rightarrow -a|-b$$

۳

$$\left. \begin{aligned} a|5k+3 &\Rightarrow a|9 \times (5k+3) \Rightarrow a|45k+27 \\ a|9k+4 &\Rightarrow a|5 \times (9k+4) \Rightarrow a|45k+20 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a|(45k+27) - (45k+20) \Rightarrow a|7 \stackrel{a>1}{\Rightarrow} a=7$$

پس a عددی اول است.

۴

$$5 \mid 4k + 1 \begin{cases} \xrightarrow{a|b \rightarrow a^n | b^n} 25 \mid 16k^2 + 4k + 1 \\ \xrightarrow{a|b \rightarrow ma | mb} 25 \mid 20k + 5 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \xrightarrow{a|b, a|c \rightarrow a|b+c} 25 \mid 16k^2 + 20k + 6$$

۵

خیر، به عنوان مثال: $2 \mid 4, 3 \mid 9 \rightarrow 2+3 \nmid 4+9$

۶

الف)

$$m \in \mathbb{Z}, (m, m+1) = d \Rightarrow d \mid m+1, d \mid m \Rightarrow d \mid (m+1) - m \xrightarrow{d > 0} d \mid 1 \Rightarrow d = 1$$

ب)

$$m \in \mathbb{Z}, (2m+1, 2m+3) = d \Rightarrow d \mid 2m+3, d \mid 2m+1 \Rightarrow d \mid (2m+3) - (2m+1) \Rightarrow d \mid 2$$

$$\xrightarrow{d > 0} \begin{cases} d = 1 & \text{قابل قبول} \\ d = 2 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

چون هر دو عدد فردند، پس $d=1$ قابل قبول است.

۷

اثبات به برهان خلف:

فرض کنیم $d = (p, q)$ و $d \neq 1$ ، داریم:

$$d \mid p, d \mid q \xrightarrow{d \neq 1} d = p, d = q \Rightarrow p = q$$

که با فرض مسئله ($p \neq q$) در تناقض است. پس: $d=1$

۸

$$m \leq n, a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$$

$$a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^m \Rightarrow a^m \mid b^{n-m} \times b^m \Rightarrow a^m \mid b^n$$

۹

$$\left. \begin{array}{l} a = 7q + 5 \Rightarrow \lambda a = \lambda \times (7q + 5) \Rightarrow \lambda a = 56q + 40 \\ a = 8q' + 7 \Rightarrow \gamma a = \gamma \times (8q' + 7) \Rightarrow \gamma a = 56q' + 49 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \lambda a - \gamma a = (56q + 40) - (56q' + 49)$$

$$\Rightarrow a = 56q - 56q' - 9 = 56q - 56q' - 56 + 56 - 9 =$$

$$56 \underbrace{(q - q' - 1)}_{q''} + 47 = 56q'' + 47 \Rightarrow r = 47$$

$$a \in Z, k \in Z, a = 2k + 1, b | a + 2 \Rightarrow b | 2k + 3$$

پس b عددی فرد است، بنابراین: $b = 2k' + 1$, $k' \in Z$

$$a^2 + b^2 + 3 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 + 3$$

می دانیم حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی بر ۲ تقسیم پذیر است یعنی حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی، عددی زوج خواهد بود و داریم:

$$= 4 \underbrace{k(k+1)}_{2n} + 4 \underbrace{k'(k'+1)}_{2n'} + 5 = 4n + 4n' + 5 = 4 \underbrace{(n+n')}_{n''} + 5 = 4n'' + 5 \Rightarrow r = 5$$

۱۱) برای اثبات اینکه $3 | n^2 - n$ ، n را به سه صورت می توان نوشت:

$$۱) n = 3k \Rightarrow 3 | n \Rightarrow 3 | n(n-1) \Rightarrow 3 | n^2 - n$$

$$۲) n = 3k + 1 \Rightarrow n - 1 = 3k \Rightarrow 3 | (n-1) \Rightarrow 3 | (n-1)(n+1)n \Rightarrow 3 | n^2 - n$$

$$۳) n = 3k + 2 \Rightarrow n + 1 = 3k + 3 = 3 \underbrace{(k+1)}_{k'} \Rightarrow 3 | (n+1) \Rightarrow 3 | (n+1)(n-1)n \Rightarrow 3 | n^2 - n$$

۱۲) طبق فرض برای $a = bq + r$ داریم: $n | a$ و $n | b$ ، پس:

$$\left. \begin{array}{l} n | a \\ n | b \Rightarrow n | bq \end{array} \right\} \Rightarrow n | a - bq \Rightarrow n | r$$

۱۳) اگر a عددی صحیح باشد، می توان آن را به یکی از حالت های $a = 3k$ یا $a = 3k + 1$ یا $a = 3k + 2$ نوشت:

$$a = 3k \Rightarrow 3 | a$$

$$a = 3k + 1 \Rightarrow a + 2 = 3k + 3 = 3 \underbrace{(k+1)}_{k_1} \Rightarrow 3 | a + 2$$

$$a = 3k + 2 \Rightarrow a + 4 = 3k + 6 = 3 \underbrace{(k+2)}_{k_2} \Rightarrow 3 | a + 4$$

پس همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

$$k \in Z, (k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3 \underbrace{k(k+1)}_{2n} + 1 = 2 \underbrace{(3n)}_{n'} + 1 = 2n' + 1$$

۱۵ هر عدد صحیح a را می توان به یکی از حالت های $a = 6k$ یا $a = 6k + 1$ یا $a = 6k + 2$ یا $a = 6k + 3$ یا $a = 6k + 4$ یا $a = 6k + 5$ نوشت. اگر سه عدد صحیح متوالی را به صورت $a + 2$ و $a + 1$ و a در نظر بگیریم:

$$a(a+1)(a+2) \xrightarrow{a=6k} \underbrace{6k(6k+1)(6k+2)}_{k_1} = 6k_1 \Rightarrow 6 \mid a(a+1)(a+2)$$

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2) &\xrightarrow{a=6k+1} (6k+1) \underbrace{(6k+2)}_{2(3k+1)} \underbrace{(6k+3)}_{3(2k+1)} \\ &= 6 \underbrace{(6k+1)(3k+1)(2k+1)}_{k_2} = 6k_2 \Rightarrow 6 \mid a(a+1)(a+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2) &\xrightarrow{a=6k+2} (6k+2) \underbrace{(6k+3)}_{3(2k+1)} \underbrace{(6k+4)}_{2(3k+2)} \\ &= 6 \underbrace{(6k+2)(2k+1)(3k+2)}_{k_3} = 6k_3 \Rightarrow 6 \mid a(a+1)(a+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2) &\xrightarrow{a=6k+3} \underbrace{(6k+3)}_{3(2k+1)} \underbrace{(6k+4)}_{2(3k+2)} (6k+5) \\ &= 6 \underbrace{(2k+1)(3k+2)(6k+5)}_{k_4} = 6k_4 \Rightarrow 6 \mid a(a+1)(a+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2) &\xrightarrow{a=6k+4} (6k+4)(6k+5) \underbrace{(6k+6)}_{6(k+1)} \\ &= 6 \underbrace{(6k+4)(6k+5)(k+1)}_{k_5} = 6k_5 \Rightarrow 6 \mid a(a+1)(a+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2) &\xrightarrow{a=6k+5} (6k+5) \underbrace{(6k+6)}_{6(k+1)} (6k+7) \\ &= 6 \underbrace{(6k+5)(k+1)(6k+7)}_{k_6} = 6k_6 \Rightarrow 6 \mid a(a+1)(a+2) \end{aligned}$$

الف) $([m^\nabla, m], m^\Delta)$

$$([m^\nabla, m], m^\Delta) = (m^\nabla, m^\Delta) = m^\nabla$$

$$\text{ب) } (2m, 6m^2)$$

$$(2m, 6m^2) = 2|m|$$

$$\text{پ) } (3m+1, 3m+2)$$

$$(3m+1, 3m+2) = 1$$

ب م م دو عدد صحیح متوالی برابر یک است.

$$\text{ت) } [m^y, (m^x, m^z)]$$

$$[m^y, \underbrace{(m^x, m^z)}_{m^x}] = [m^y, m^x] = |m^y|$$

$$\text{ث) } [(72, 48), 12^{\circ}]$$

$$[\underbrace{(72, 48)}_{24}, 12^{\circ}] = [24, 12^{\circ}] = 12^{\circ}$$

هم‌نهستی در اعداد صحیح و کاربردها

درس سوم

اهداف

- ۱ آشنایی و درک مفهوم هم‌نهستی در اعداد صحیح
- ۲ شناخت ویژگی‌های هم‌نهستی و قوانین بخش‌پذیری
- ۳ به‌کارگیری خواص هم‌نهستی برای یافتن باقیمانده تقسیم اعداد تواندار و بزرگ بر اعداد طبیعی
- ۴ به‌کارگیری خواص هم‌نهستی در تقویم نگاری و محاسبه روزهای هفته بر حسب تاریخ داده شده
- ۵ آشنایی با معادله هم‌نهستی و حل آن
- ۶ تشخیص معادله سیاله خطی و تبدیل آن به معادله هم‌نهستی
- ۷ درک وجود یا عدم وجود جواب در معادله هم‌نهستی و معادله سیاله خطی
- ۸ مهارت در حل معادله هم‌نهستی و حل معادله سیاله خطی و یافتن جواب‌های عمومی آنها
- ۹ به‌کارگیری معادله سیاله خطی در حل مسئله‌های کاربردی و مرتبط با زندگی روزمره

روش تدریس

برای ورود به موضوع هم‌نهستی، درس با فعالیتی آغاز شده است، که با استفاده از مفهوم افراز و مفهوم بخش‌پذیری، مفهوم هم‌نهستی را نتیجه می‌دهد.

پاسخ فعالیت صفحه ۱۸

۱ بله، به عنوان مثال: $8 - 4 = -4$ و $8 - 8 = 0$ مضرب ۴ است.

۲ بله، به عنوان مثال: $20 - 1 = 19$ و $20 - 20 = 0$ مضرب ۴ است.

$$a, b \in A_4 \Rightarrow \begin{cases} a = 4k_1 + 1 \\ b = 4k_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = (4k_1 + 1) - (4k_2 + 1) = 4(k_1 - k_2) \Rightarrow 4 \mid a - b \quad 3$$

۴ بله – تفاضل دو عضو دلخواه از مجموعه A_7 ، مضرب ۴ می‌باشد.

سپس با نتیجه‌گیری از این فعالیت، رابطه هم‌نهشتی تعریف شده است. همان‌طور که می‌دانیم، رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m (\equiv^m)، روی Z یک رابطه هم‌ارزی است (یعنی دارای سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی است)، بنابراین رابطه \equiv^m ، مجموعه Z را افراز می‌کند.

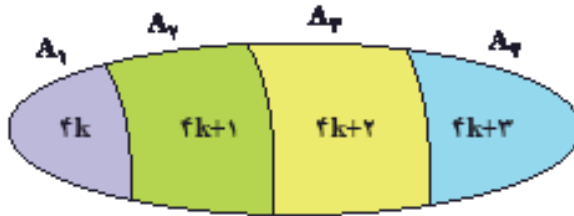
واضح است که با توجه به تعریف رابطه هم‌نهشتی و خواص رابطه عاد کردن داریم:

$$۱) \forall a \in Z, m \in N \quad a \equiv^m a \quad \text{انعکاسی}$$

$$۲) \forall a, b \in Z, m \in N \quad a \equiv^m b \Leftrightarrow b \equiv^m a \quad \text{تقارنی}$$

$$۳) \forall a, b, c \in Z, m \in N \quad a \equiv^m b, b \equiv^m c \Rightarrow a \equiv^m c \quad \text{تعدی}$$

در این درس، برای هر عضو Z ، کلاس یا دسته هم‌نهشتی با عنوان قرارداد تعریف شده است. با توجه به فعالیتی که مطرح شد، رابطه \equiv^4 ، فقط دارای چهار کلاس یا دسته هم‌نهشتی می‌باشد که این چهار کلاس، مجموعه Z را به شکل زیر افراز می‌کند.



در حالت کلی می‌توان گفت که رابطه \equiv^m ، دارای m دسته هم‌نهشتی $[0], [1], [2], \dots, [m-1]$ می‌باشد. در ادامه درس، در صفحه ۱۹، برای استفاده از رابطه هم‌نهشتی، ویژگی‌هایی از آن مورد بررسی قرار گرفته است.

تکمیل اثبات ویژگی ۱

$$a \equiv^m b \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c = (a + c) - (b + c) \Rightarrow a + c \equiv^m b + c$$

$$a \equiv^m b \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a - c - b + c = (a - c) - (b - c) \Rightarrow a - c \equiv^m b - c$$

تکمیل اثبات ویژگی ۲

$$a \equiv^m b \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid c \times (a - b) = ac - bc \Rightarrow ac \equiv^m bc$$

در صفحه ۲۰، تأکید می‌شود که عکس ویژگی ۲ برقرار نیست. یعنی:

$$ac \equiv bc \not\Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

به عنوان مثال، $۱۴ \equiv ۶ \pmod{۱۶}$ و $۲ \times ۱۴ \equiv ۲ \times ۶ \pmod{۱۶}$.

برای اثبات ویژگی ۳، از ویژگی ۱ ($a|b \Rightarrow a|mb$) استفاده شده است و تأکید می‌شود که عکس ویژگی ۳

برقرار نیست. یعنی: $a^n \equiv b^n \not\Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

اثبات ویژگی ۴

اثبات ۱

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | ac - bc \\ c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m | c - d \Rightarrow m | bc - bd \end{array} \right\} \Rightarrow m | (ac - bc) + (bc - bd)$$

$$\Rightarrow m | ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

اثبات ۲ و ۳

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \\ c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m | c - d \end{array} \right\} \Rightarrow m | (a \pm c) - (b \pm d) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$$

سپس تذکری بیان شده است: $a = mq + r \Leftrightarrow a \equiv r \pmod{m}$ ، این رابطه در واقع نشان می‌دهد هم‌نهستی همان

قضیه تقسیم است بدون حضور خارج قسمت.

در صفحه ۲۱، نکاتی مهم همراه با مثال‌های حل شده، برای درک بهتر دانش‌آموزان مطرح شده است.

$$۲۶۹ \equiv ۱۱ \pmod{۱۰} \rightarrow ۲۶۹ = ۱ \times ۲۶ + ۱۰ \rightarrow ۲۶۹ \equiv ۱۱ \pmod{۲۶}$$

پس از بیان ویژگی‌ها و نتایج ذکر شده، از هم‌نهستی‌ها به عنوان ابزاری برای یافتن باقیمانده تقسیم اعداد

تواندار و بزرگ بر اعداد طبیعی استفاده می‌شود که یکی از کاربردهای رابطه هم‌نهستی می‌باشد.

در فعالیت صفحه ۲۲، ابتدا عدد نویسی در مبنای ۱۰ را یادآور می‌شود و سپس رابطه هم‌نهستی را برای

یافتن باقیمانده تقسیم عدد بر ۹ به کار می‌برد و نتیجه‌ای که از حل این فعالیت حاصل می‌شود را در حالت

کلی برای هر عدد n رقمی بسط می‌دهد.

هدف از کاربرد کلاس صفحه ۲۳، این است که دانش‌آموزان به قاعده‌هایی کلی برای یافتن باقیمانده تقسیم

اعداد n رقمی بر ۲، ۳، ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد پی ببرند.

معمولاً در مسائل هم‌نهستی اگر پایه بزرگ‌تر از پیمانانه یا بزرگ‌تر از نصف پیمانانه باشد، ابتدا آن را کوچک

کرده و به کوچک‌ترین عدد مثبت یا منفی در آن پیمانه تبدیل می‌کنیم. از طرفی برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم a^n بر m ، گام اول، پیدا کردن توانی از a است که باقیمانده آن بر m برابر ۱ یا -۱ باشد.

حل کار در کلاس صفحه ۲۳

۱

$$A = 598348$$

$$A = 5 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 8$$

$$10^5 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 5 \times 10^5 \equiv 5 \pmod{3}$$

$$10^4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 9 \times 10^4 \equiv 9 \pmod{3}$$

$$10^3 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 8 \times 10^3 \equiv 8 \pmod{3}$$

$$10^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 3 \times 10^2 \equiv 3 \pmod{3}$$

$$10 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4 \times 10 \equiv 4 \pmod{3}$$

$$\frac{\quad \quad \quad 8 \equiv 8}{\quad \quad \quad 8 \equiv 8}$$

$$A \equiv 5 + 9 + 8 + 3 + 4 + 8 \pmod{3} \Rightarrow A \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow r = 1$$

بنابراین، باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳، با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ برابر است.

۲ همان‌طور که در مسئله اشاره شد:

$$10^{11} \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow \begin{cases} 10^n \equiv -1 & n \text{ فرد} \\ 10^n \equiv 1 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv a_0 - 1 \times a_1 + 1 \times a_2 - 1 \times a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1}$$

یعنی برای یافتن باقیمانده تقسیم یک عدد n رقمی بر ۱۱، کافی است از رقم یکان شروع و ارقام را یک در میان با علامت مثبت و منفی جمع کنیم و عدد حاصل را بر ۱۱ تقسیم کنیم. در کتاب، باقیمانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر ۱۱ به همین طریق حساب شده و $r = 6$ است.

۳ بسط عدد A در مبنای 10 به صورت زیر است:

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0$$

از طرفی می‌دانیم: $1^{\circ} \equiv 0$, $1^{\circ 5} \equiv 0$, $1^{\circ 2} \equiv 0$; بنابراین:

$$\forall k \in \mathbb{N}, 1^{\circ k} \equiv 0, 1^{\circ 5k} \equiv 0, 1^{\circ 2k} \equiv 0$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + 0 \times a_{n-2} + \dots + 0 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_0, A \equiv a_0, A \equiv a_0$$

یعنی، باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ یا ۵، برابر است با باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ یا ۵ و باقیمانده تقسیم هر عدد بر 1° برابر است با خود رقم یکان آن عدد.

نتیجه‌ای که از این قاعده می‌گیریم این است که، هر گاه بخواهیم رقم سمت راست یا رقم یکان یک عدد تواندار و بزرگ را حساب کنیم، باید هم‌نهشتی آن عدد را به پیمانه 1° محاسبه نماییم. پیدا کردن رقم یکان، کاربرد جالب دیگری از هم‌نهشتی‌ها است.

در مورد شرط بخش‌پذیری بر اعداد ۲، ۵ و 1° می‌گوییم: عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن زوج باشد یا عدد زوج باشد. عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد. عددی بر 1° بخش‌پذیر است که رقم یکان آن صفر باشد.

مسائلی از قبیل روزهای هفته، ساعت و ماه که حالت گردشی داشته و با افزودن عدد ثابتی (۷ روز، ۲۴ ساعت یا ۱۲ ماه) به وضعیت و شرایط قبلی برمی‌گردند، به عنوان مثال‌هایی عملی از هم‌نهشتی هستند. در صفحه ۲۴، کاربرد هم‌نهشتی در تقویم نگاری و تعیین روزهای هفته بر حسب تاریخ داده شده بیان می‌شود و فعالیتی برای درک بهتر دانش‌آموزان از این کاربرد، مطرح شده است.

پاسخ قسمت ۲ فعالیت صفحه ۲۴

از روی تقویم سال ۹۷، هفتم تیر روز پنج‌شنبه بوده است. حال اگر فاصله ۷ تیر تا ۲۲ بهمن در سال ۹۷ را حساب کنیم، داریم: ۲۴ روز در تیر ماه و دو ماه مرداد و شهریور (۳۱ روزه) و چهار ماه مهر و آبان و آذر و دی (۳۰ روزه) و ۲۲ روز تا ۲۲ بهمن، یعنی: $d = 24 + 2 \times 31 + 4 \times 30 + 22 = 228$ از طرفی $228 \equiv 4$ و با توجه به جدول زیر، روز متناظر با عدد ۴، دوشنبه است، یعنی ۲۲ بهمن سال ۹۷ روز دوشنبه می‌باشد.

پ	ج	ش	ی	د	س	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

مبحث بعدی درس، در مورد معادله هم‌نهشتی است. هم‌نهشتی‌ها می‌توانند خیلی شبیه به معادلات مورد بحث قرار گیرند، وقتی که در رابطه آنها مجهولی باشد. ابتدا تعریف و شکل کلی یک معادله هم‌نهشتی و منظور از حل این معادله بیان شده است. به دانش‌آموزان تأکید شود که منظور از یک جواب از معادله هم‌نهشتی، عدد صحیحی است که در این معادله صدق می‌کند.

در صفحه ۲۵، مثال‌هایی از معادله هم‌نهشتی مطرح شده است، که در صورت وجود جواب، با به‌کارگیری از خواص و ویژگی‌های هم‌نهشتی می‌توان جواب‌های عمومی معادله را به دست آورد.

با توجه به قضیه مطرح شده «شرط لازم و کافی برای آنکه معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ در Z جواب داشته باشد، آن است که $b \mid (a, m)$ »، به دانش‌آموزان تأکید گردد برای حل معادله‌های هم‌نهشتی، ابتدا باید شرط وجود جواب در آنها، مورد بررسی قرار گیرد.

در صفحه ۲۶، مبحث معادله سیاله خطی مطرح می‌شود. در واقع یکی از کاربردهای مهم هم‌نهشتی‌ها در حل معادلات سیاله است. ابتدا فعالیتی از مثالی عینی و کاربردی مطرح شده است که قابل درک برای دانش‌آموزان می‌باشد و با تکمیل این فعالیت به مفهوم معادله سیاله خطی پی می‌برند.

همان‌طور که می‌دانیم، معادله درجه اول $ax+by=c$ در صفحه مختصات، معادله یک خط راست است که از بی‌نهایت نقطه در صفحه می‌گذرد و مختصات این نقاط مانند $A(x, y)$ ، در معادله خط فوق صدق می‌کند، یعنی (x, y) جواب معادله است و در نتیجه: $ax+by=c$

معادله خط راست $ax+by=c$ ($a, b, c \in Z$) به معادله سیاله خطی معروف است که دارای دو مجهول x و y می‌باشد و هدف از بررسی این معادله این است که بدانیم آیا در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است یا نیست. یعنی آیا مختصات نقطه‌ای مانند $A(x, y)$ که $x, y \in Z$ ، در آن صدق می‌کند یا خیر؟ در واقع ما به دنبال ملاکی برای تشخیص این مطلب هستیم که در چه صورت معادله سیاله خطی در Z دارای جواب است.

همان‌طور که در کتاب مطرح می‌شود، معادله سیاله خطی $ax+by=c$ در Z دارای جواب است، اگر و فقط اگر، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b (ضرایب x و y) عدد c را بشمارد. یعنی: $(a, b) \mid c$

معادله سیاله خطی در Z یا هیچ جوابی ندارد و یا دارای بی‌شمار جواب است. در معادله سیاله $ax+by=c$ ، اگر $(a, b) = 1$ ، در این صورت معادله همواره در Z دارای جواب است.

اولین مرحله در حل معادلات سیاله، ساده کردن آن است، یعنی ابتدا بررسی می‌کنیم که ضرایب x و y فاکتور نداشته باشند، سپس اقدام به حل کنیم. اگر بخواهیم وجود و تعداد جواب‌های معادله سیاله خطی را بررسی کنیم، کافی است بتوانیم این معادله را به یک معادله هم‌نهشتی تبدیل کنیم، که چنین عملی امکان‌پذیر است. در واقع، اگر شرط وجود جواب در معادله $ax+by=c$ برقرار باشد، برای یافتن جواب‌های عمومی

این معادله، مثلاً اگر x را بخواهیم، طرفین را در پیمانه b هم نهشت قرار می‌دهیم و آن را به فرم یک معادله هم نهشتی می‌نویسیم. حال با استفاده از خواص و ویژگی‌های هم نهشتی، معادله را حل می‌کنیم، تا مجهول به دست آید، سپس می‌توان آن را در معادله اصلی جایگذاری نمود تا مجهول دیگر یعنی y نیز به دست آید. هدف از کار در کلاس صفحه ۲۷، این است که دانش‌آموزان با تکمیل پاسخ سؤالات به درک بهتری از درس برسند. برای حل معادله سیاله خطی، به دانش‌آموزان تأکید شود ابتدا شرط وجود جواب را در این معادله بررسی کنند و تشخیص دهند معادله دارای جواب صحیح است یا خیر، اگر شرط وجود جواب برقرار بود با تبدیل معادله سیاله خطی به معادله هم نهشتی، جواب‌های معادله و تعداد آنها را مشخص کنند. در ادامه کار در کلاس، مسئله‌های متنوعی از دنیای واقعی برای نشان دادن کاربرد معادله سیاله خطی مطرح شده است. دانش‌آموزان با بررسی حل آنها، متوجه می‌شوند مسائلی که معادله سیاله خطی را به زندگی روزمره مرتبط می‌سازد باید $x \geq 0$ و $y \geq 0$ باشند، چون تعداد اشیاء هرگز منفی نمی‌شود.

توصیه آموزشی

□ به دانش‌آموزان تأکید شود، به اثبات ویژگی‌های هم نهشتی توجه داشته باشند، تا به درک خوبی از این مفهوم برسند و بتوانند از این ویژگی‌ها به درستی در حل مسائل استفاده نمایند.

□ استفاده از روش گفتمان ریاضی در کلاس باعث می‌شود که معلم با بسیاری از تفکرات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان آشنا شده و امکان برطرف کردن آنها را در کلاس و با مشارکت دیگر دانش‌آموزان پیدا کند.

□ زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که باید در طرح سؤالات ارزشیابی و امتحانات رعایت گردد.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

□ به این نکته توجه ندارد که قانون حذف برای رابطه هم نهشتی در حالت کلی برقرار نیست.

□ وقتی دو طرف رابطه هم نهشتی را به توان می‌رساند، به اشتباه، پیمانه را هم به توان می‌رساند. یعنی از $a \equiv b$ نتیجه می‌گیرد: $a^m \equiv b^m$. (به راحتی می‌توان با یک مثال نقض، این حکم را رد نمود.)

□ در حل معادله هم نهشتی $5x \equiv 1$ می‌نویسد: $x \equiv \frac{1}{5}$ ، که اساساً بی‌معنی است و به این موضوع توجه نداشته است که ما به حوزه اعداد صحیح کار داریم و عدد $\frac{1}{5}$ ، عددی صحیح نیست.

□ ممکن است در حل مسئله‌ها بر اثر بی‌دقتی خطاهای محاسباتی داشته باشد.

حل تمرینات درس سوم صفحه ۲۹ کتاب

۱

$$۱۳۹۸ = ۱۵۵ \times ۹ + ۳ \Rightarrow ۱۳۹۸ \equiv ۳^۹$$

پس عدد ۱۳۹۸ به دسته هم‌نهستی [۳] تعلق دارد.

۲

$$k \equiv ۰^۳ \text{ یا } k \equiv ۱^۳ \text{ یا } k \equiv ۲^۳$$

می‌دانیم رابطه \equiv مجموعه Z را به سه مجموعه $[۰]$ ، $[۱]$ و $[۲]$ افراز می‌کند و طبق تعریف افراز، باید $Z = [۰] \cup [۱] \cup [۲]$ ، پس اگر K عددی صحیح و دلخواه باشد، باید $K \in [۰]$ ، $K \in [۱]$ یا $K \in [۲]$ که طبق تعریف دسته‌های هم‌نهستی، ثابت می‌شود:

$$K \in [۰] \Rightarrow K \equiv ۰^۳ \text{ یا } K \in [۱] \Rightarrow K \equiv ۱^۳ \text{ یا } K \in [۲] \Rightarrow K \equiv ۲^۳$$

۳

$$a \equiv b^m \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow n \mid a - b \Rightarrow a \equiv b^n$$

۴

$$\left. \begin{array}{l} d \mid m, m \mid a - b \Rightarrow d \mid a - b \\ d \mid n, n \mid b - c \Rightarrow d \mid b - c \end{array} \right\} \Rightarrow d \mid (a - b) + (b - c) \Rightarrow d \mid a - c \Rightarrow a \equiv c^d$$

۵ فرض کنیم باقیمانده تقسیم a بر m و b بر m ، مساوی r باشد، ثابت می‌کنیم $a \equiv b^m$

$$\left. \begin{array}{l} d = mq_1 + r \\ b = mq_2 + r \end{array} \right\} \Rightarrow a - b = m \underbrace{(q_1 - q_2)}_q \\ \Rightarrow a - b = mq \Rightarrow a \equiv b^m$$

۶ عکس تمرین ۵: اگر $a \equiv b^m$ باشد، آنگاه باقیمانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m ، مساوی است.

اثبات: فرض کنیم $a \equiv b^m$ یعنی $a - b = mk$ و فرض کنیم باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، ثابت می‌کنیم باقیمانده تقسیم b بر m نیز برابر با r است.

$$a - b = mk \quad (۱) \quad , \quad a = mq + r \quad (0 \leq r < m) \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} (mq + r) - b = mk \Rightarrow b = m \underbrace{(q - k)}_{q'} + r \\ \Rightarrow b = mq' + r \quad (0 \leq r < m) \quad (۳)$$

رابطه (۳) نشان می‌دهد که باقیمانده تقسیم b بر m مساوی با r است.

۷

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1}b + \binom{n}{2} \times a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} \times a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$
 ثابت کنید که برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$.
 با توجه به بسط دو جمله ای خیام:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$
 (تمام جمله‌ها فاکتور ab دارند.)

$$\Rightarrow (a+b)^n - a^n - b^n = abQ$$

$$\Rightarrow (a+b)^n - (a^n + b^n) = abQ \Rightarrow (a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$$

۸ با توجه به تمرین ۷، در این سؤال $a=11$ و $b=12$ است، که در این صورت به ازای $n=51$ ، عدد $11^{51} - 12^{51} - (11+12)^{51} - 11^{51} - 12^{51}$ یا $23^{51} - 11^{51} - 12^{51}$ بر عدد $11 \times 12 = 132$ بخش پذیر است. یعنی:

$$23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \equiv 0 \pmod{132}$$

۹

$$21^{\circ} \equiv 12 \Rightarrow 21^{\circ} \equiv 24 \equiv 1 \Rightarrow 21^{\circ} + 7 \equiv 1 + 7$$

$$\Rightarrow (21^{\circ} + 7) \times 9 \equiv (1 + 7) \times 9 \Rightarrow (21^{\circ} + 7) \times 9 \equiv 72 \equiv 3 \Rightarrow r = 3$$

۱۰ دو عدد $(3a-5)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر دارند، یعنی به پیمانه 10 با یکدیگر هم نهشت هستند.

$$4a - 7 \equiv 3a - 5 \pmod{10} \Rightarrow 4a - 3a \equiv 7 - 5 \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 9a \equiv 18 \pmod{10} \Rightarrow 9a + 6 \equiv 24 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 9a + 6 \equiv 4 \pmod{10}$$

پس رقم یکان عدد $(9a+6)$ ، عدد ۴ است.

۱۱

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + \dots + 50! \equiv 1 + 2 + 6 + 4 + 0 + 0 + \dots + 0 = 13 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow A \equiv 3 \pmod{10}$$

پس رقم یکان عدد A ، عدد ۳ است.

۱۲ معادله جواب دارد. $\forall x+5y=1 \Rightarrow (7,5)=1|11$

$$\Rightarrow 7x \equiv 11 \pmod{5} \Rightarrow 7x \equiv 11 + 2 \times 5 = 21 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$7x + 5y = 1 \Rightarrow 7(5k + 3) + 5y = 11 \Rightarrow 35k + 21 + 5y = 11$$

$$\Rightarrow y = -7k - 2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2000x + 5000y = 29000 \rightarrow 2x + 5y = 29$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 29 \Rightarrow 2x \equiv 29 + 1 \times 5$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 34 \Rightarrow x \equiv 17 \Rightarrow x = 5k + 17$$

$$2x + 5y = 29 \Rightarrow 2(5k + 17) + 5y = 29 \Rightarrow 10k + 34 + 5y = 29$$

$$\Rightarrow 5y = -10k - 5 \Rightarrow y = -2k - 1$$

k	x	y
-1	12	1
-2	7	3
-3	2	5

(به سه طریق)

الف) $423x \equiv 79$

ب) $8x \equiv 20$

ج) $51x \equiv 11$

معادله جواب دارد. $(423, 11) = 1 | 79$ الف)

$$423 = 11 \times 38 + 5 \Rightarrow 423 \equiv 5$$

$$79 = 11 \times 7 + 2 \Rightarrow 79 \equiv 2$$

$$5x \equiv 2 \Rightarrow 5x \equiv 2 + 3 \times 11 \Rightarrow 5x \equiv 35 \Rightarrow x \equiv 7$$

$$\Rightarrow x = 11k + 7 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ب) معادله جواب دارد. $(8, 12) = 4 | 20$

$$8x \equiv 20 - 1 \times 12 = 8 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x \equiv 1$$

$$\Rightarrow x = 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ج) معادله جواب ندارد. $(51, 6) = 3 | 11$

۱۵ ۲۹ روز مهر و چهار ماه آبان و آذر و دی و بهمن و ۷ روز تا ۷ اسفند

$$29 + 4 \times 30 + 7 = 156 \equiv 2$$

ش	ج	پ	چ	س	د	ی
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

پس ۷ اسفند ماه، روز سه شنبه است.

۱۶ شهریور (۳۱ روزه) و چهار ماه مهر و آبان و آذر و دی (۳۰ روزه) و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن

$$31 + 4 \times 30 + 12 = 163 \equiv 2$$

چون روزها را در جهت عقب برگزشتیم، با توجه به جدول زیر:

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۳۱ مرداد ماه، روز چهارشنبه است.

۱۷

$$5a + 9 \equiv 0 \Rightarrow 5a \equiv -9 \Rightarrow 5a \equiv -9 + 4 \times 11$$

$$\Rightarrow 5a \equiv 35 \Rightarrow a \equiv 7 \Rightarrow a = 11k + 7 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۱۸ معادله جواب دارد. $(3, 5) = 1 | 23$

$$3x + 5y = 23 \Rightarrow 3x \equiv 23 \Rightarrow 3x \equiv 23 - 1 \times 5$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 18 \Rightarrow x \equiv 6 \Rightarrow x = 5k + 6$$

$$3x + 5y = 23 \Rightarrow 3(5k + 6) + 5y = 23 \Rightarrow 5y = -15k + 5 \Rightarrow y = -3k + 1$$

k	x	y
۰	۶	۱
-۱	۱	۴

(به دو طریق)

۱۹ معادله جواب دارد. $x+y=9 \Rightarrow (1,1)=1|9$

$$\Rightarrow x \equiv 9 \Rightarrow x = k + 9$$

$$x+y=9 \Rightarrow k+9+y=9 \Rightarrow y=-k$$

k	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	-۸	-۹
x	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
y	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

(به ده طریق)

۲۰ معادله جواب دارد. $7x+9y=73 \Rightarrow (7,9)=1|73$

$$\Rightarrow 9y \equiv 73 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 3y \equiv 1+2 \times 7$$

$$\Rightarrow 3y \equiv 15 \pmod{7} \Rightarrow y \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow y = 7k + 5$$

$$7x+9y=73 \Rightarrow 7x+9(7k+5)=73$$

$$\Rightarrow 7x+63k+45=73 \Rightarrow 7x=-63k+28 \Rightarrow x=-9k+4$$

k	x	y
۰	۴	۵

(به یک طریق)

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید.

الف) | $\Leftrightarrow 18 \times 0 \equiv 0 \pmod{18}$ (نماد عادکردن).

ب) $a = \dots$ یا $a | b \Leftrightarrow a | 18$

پ) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ ، در این صورت $a = \dots$ یا $a = \dots$.

ت) اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a | \dots$.

ث) حاصل $(3m+1, 3m+2)$ برابر \dots است.

ج) اگر دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m ، هم باقیمانده باشند، در این صورت \dots .

چ) معادله $6x \equiv 11 \pmod{9}$ دارای جواب نیست، زیرا \dots .

ح) اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $a \equiv b \pmod{m}$ ، در این صورت \dots .

خ) شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب باشد، آن است که \dots .

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. در صورت نادرست بودن، یک مثال نقض بیاورید.

(الف) اگر $a|b+c$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$.

(ب) اگر $a|b$ و $c|d$ ، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$.

(پ) همواره ب م م دو عدد، ک م م همان دو عدد را می‌شمارد.

(ت) همواره ک م م دو عدد، از ب م م همان دو عدد بزرگ‌تر است.

(ث) اگر $a|b$ آنگاه $a^n|b^{n+1}$.

(ج) اگر $a-b|a$ ، آنگاه $a-b|b$.

(چ) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n|m$ ، آنگاه $a \equiv b \pmod{n}$.

(ح) $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

(خ) $ac \equiv bc \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

(د) $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a+c \equiv b+d \pmod{m}$

(ذ) $a^n \equiv b^n \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

(الف) عدد $2^{39} - 3^{52}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

(۱) ۷۱ (۲) ۷۲ (۳) ۷۳ (۴) ۷۴

(ب) در یک تقسیم باقیمانده ۲۳ و خارج قسمت ۷ است. حداکثر چند واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم

تا خارج قسمت تغییری نکند؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۵

(پ) باقیمانده تقسیم a بر ۹ و ۶ به ترتیب ۵ و ۳ است، باقیمانده تقسیم a بر ۱۸ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱۷ (۳) ۱ (۴) ۵

(ت) باقیمانده تقسیم a و b بر ۱۷ به ترتیب ۱۵ و ۳ است. باقیمانده تقسیم $2a - 3b$ بر ۱۷ کدام است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

(ث) اگر x و y جواب‌هایی برای معادله سیاله $2x + 3y = 6$ باشند، مقدار $(x-y)$ کدام است؟

(۱) $5k+2$ (۲) $5k$ (۳) $-2-5k$ (۴) $5k-2$

(ج) اگر معادله $9x + my = 6$ در Z دارای جواب باشد، مجموعه جواب برای پارامتر m کدام است؟

$(1 \leq m \leq 9), (m \in N)$

(۱) $\{3, 9\}$ (۲) $\{6, 9\}$ (۳) $\{3, 6\}$ (۴) $\{1, 3, 6\}$

ج) در معادله $mx+(m-1)y=12$ مجموعه جواب برای پارامتر m کدام است، تا معادله در Z دارای جواب باشد؟

$$Z(1) \quad \{1, -1\}(2) \quad \emptyset(3) \quad \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}(4)$$

ح) اگر a و b اعدادی فرد باشند، کدام گزینه نادرست است؟

$$1) a^2 - b^2 = 8k \quad 2) 2 | (a^2 + b^2) - 8 \quad 3) 16 | a^2 - b^2 \quad 4) 16 | a^2 - b^2$$

خ) عبارت زیر درست است؟

$$1) a|bc \Rightarrow a|b \text{ یا } a|c \quad 2) a|b-c \Rightarrow a|b \text{ یا } a|c$$

$$3) a|b+c \Rightarrow a|b \text{ یا } a|c \quad 4) a|b \Rightarrow a^2 | b^2$$

د) یک بسته ۲۸۸ کیلویی را به چند طریق می توان با وزنه های ۷ و ۱۹ کیلویی وزن کرد؟

$$1) 0 \quad 2) 1 \quad 3) 2 \quad 4) 3$$

ذ) کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته بندی که نیاز به 85° ریال تمبر دارد، با تمبرهای 9° و 5° ریالی کدام است؟

$$1) 11 \quad 2) 12 \quad 3) 13 \quad 4) 14$$

ر) در هم نهشتی به پیمانانه m ، سه عدد a ، 41 و 132 در یک کلاس هم ارزی قرار دارند، کوچک ترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعه Z به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افزایش شود، کدام است؟

$$1) 102 \quad 2) 103 \quad 3) 104 \quad 4) 106$$

ز) اگر برای هر عدد طبیعی n ، عدد a^n بر b^n بخش پذیر باشد، کدام گزاره نادرست است؟

$$1) (a, b^n) = b^n \quad 2) [a^n, b] = a^n \quad 3) (a, b) = |b| \quad 4) [a, b] = |a|$$

ژ) a و b هر دو عدد اول هستند. اگر ab مربع کامل باشد، کدام حکم همواره درست است؟

$$1) a \text{ و } b \text{ هر دو مربع کامل هستند.} \quad 2) a \text{ و } b \text{ هر دو مساوی یک هستند.}$$

$$3) a \text{ با } b \text{ مساوی است.} \quad 4) a^2 b \text{ مربع کامل است.}$$

س) اگر a مضربی از 6 و b مضربی از 15 باشد، باقیمانده تقسیم a بر b ، بر کدام عدد همواره بخش پذیر است؟

$$1) 2 \quad 2) 3 \quad 3) 5 \quad 4) 6$$

ش) اگر بدانیم 20 فوروردین روز دوشنبه است، چهارمین شنبه بهمن ماه چه روزی است؟

$$1) 27 \text{ ام} \quad 2) 28 \text{ ام} \quad 3) 29 \text{ ام} \quad 4) 30 \text{ ام}$$

ص) چند مجموعه از مجموعه های $\{2, -17, -20, -14, -7\}$ ، $A = \{22, 12, 51, 16, 71\}$ ، B و

$C = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ ، مجموعه همه دسته های هم نهشتی به پیمانانه 5 است؟

$$1) 1 \quad 2) 2 \quad 3) 3 \quad 4) \text{هیچ}$$

ض) اگر $11|a+b$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $11|6a-5b$ ۲) $11|7a+4b$ ۳) $11|3a+9b$ ۴) $11|a^2+b^2$

ط) پنجم تیر ماه یک سال، روز شنبه است، اول مهر ماه این سال کدام است؟

۱) چهارشنبه ۲) پنجشنبه ۳) جمعه ۴) شنبه

ظ) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد به صورت‌های $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول

هستند؟

۱) ۸۶ ۲) ۸۷ ۳) ۸۹ ۴) ۹۰

۴) باقیمانده تقسیم $A=1!+2!+3!+\dots+2000!$ را بر ۲۴ بیابید.

۵) اگر $5|2k+1$ ، ثابت کنید $25|14k^2+19k+6$.

۶) اگر $b>1$ و m و n اعداد طبیعی باشند، به طوری که $m|n$ ، ثابت کنید $(b^m-1)|(b^n-1)$.

۷) اگر دو عدد ۲۴ و ۱۸ عدد m را عاد کنند، در این صورت کدام عدد همواره m را عاد می‌کند؟

۸) چند عدد اول P وجود دارد به طوری که $168P+1$ مجذور یک عدد طبیعی باشد؟

۹) اداره پستی فقط تمبرهای 15° و 25° ریالی برای فروش دارد. به چند طریق می‌توان با ترکیبی از

این دو تمبر، بسته‌ای را به اندازه 3700 ریالی تمبرگذاری کرد؟

۱۰) اگر $b|n+1$ و $b|n^2+9n+1$ ثابت کنید $b|7$.

۱۱) ثابت کنید اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $|a| \leq |b|$.

۱۲) در صورتی که a عدد صحیح و زوج بوده و باقیمانده تقسیم آن بر ۲۳ برابر ۱۳ باشد، ثابت کنید

باقیمانده تقسیم عدد $\frac{a}{4}$ بر ۲۳، برابر ۱۸ می‌باشد.

۱۳) ثابت کنید اگر n یک عدد فرد باشد، آنگاه $24|n^2-n$.

۱۴) ب م م دو عدد $3n+4$ و $7n+9$ را بیابید.

۱۵) حاصل $([a, (a, b)], (a, [a, b]))$ را به دست آورید. $(a, b \in \mathbb{N})$

۱۶) دو عدد a و b نسبت به هم اول هستند و $54|(a+b)^2$ ، کوچک‌ترین مضرب مشترک a و 36 را بیابید.

۱۷) اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول نباشند، آنگاه

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را به دست آورید.

۱۸) اگر عدد زوج a بر ۲۱ تقسیم شود، باقی مانده برابر ۱۳ خواهد شد. باقی مانده تقسیم $\frac{a}{۳}$ بر ۲۱ را به دست آورید.

۱۹) باقی مانده تقسیم عدد ۱۳۸۵ بر ۱۲ را به دست آورید.

۲۰) ثابت کنید عدد $۱ - ۲^{۱۱}$ بر ۲۳ بخش پذیر است.

۲۱) ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

۲۲) اگر $a|c$ ، حاصل $([c, 1], (a, [a, b]))$ را به دست آورید.

۲۳) اگر اول مهر در سالی روز پنج‌شنبه باشد، معین کنید ۲۲ بهمن همان سال چه روزی خواهد بود؟

۲۴) اگر دو عدد $(۲a - ۵)$ و $(۳a + ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(۷a - ۳)$ را به دست آورید.

۲۵) باقی مانده تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱} - ۱) \times ۴$ بر ۲۳ بیابید.

۲۶) اگر باقی مانده تقسیم a و b بر ۲۷، به ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، باقی مانده تقسیم $(۲a - ۳b)$ بر ۲۷ را بیابید.

۲۷) عدد ۱۳۷۹ به کدام دسته هم‌نهستی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟

۲۸) ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $۸^n - ۹^n - ۱۷^n$ بر عدد ۷۲ بخش پذیر است.

۲۹) معادله‌های هم‌نهستی زیر را در صورت امکان حل و جواب عمومی برای هر یک به دست آورید.

$$۱) ۱۸x \equiv ۷۲ \pmod{۴۲}$$

$$۲) ۹x \equiv ۲۱ \pmod{۳۰}$$

$$۳) ۳x \equiv ۷ \pmod{۱۰}$$

$$۴) ۹x \equiv ۷ \pmod{۵}$$

$$۵) -۱۱x \equiv ۳ \pmod{۱۷}$$

$$۶) ۱۳x \equiv -۱۵ \pmod{۱۱}$$

$$۷) ۲x \equiv ۱ \pmod{۴}$$

$$۸) ۱۹x + ۴ \equiv ۴x \pmod{۱۱}$$

۳۰) معادله‌های سیاله زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب عمومی برای آنها مشخص کنید.

$$۱) ۱۲x + ۱۵y = ۱۸$$

$$۲) ۲۴x + ۹y = ۵۱$$

$$۳) ۸x - ۶y = ۱۴$$

$$۴) ۳۹x + ۱۳y = ۱۷$$

$$۵) ۱۱x + ۱۳y = ۱۴$$

$$۶) ۶x + ۹y = ۱۰$$

$$۷) ۲۰x + ۱۲y = ۵۰$$

$$۸) ۱۳x + ۷۱y = ۱$$

فصل دوم

گراف و مدل سازی

نگاه کلی به فصل

نظریهٔ گراف یکی از شاخه‌های ریاضی است که گرچه اهمیت آن بی‌شک به‌واسطهٔ کاربردهای مهم و زیبای آن است، اما در ریاضیات محض نیز جایگاه خاصی دارد زیرا در ارتباط تنگاتنگ با برخی مفاهیم مهم ریاضی محض به‌ویژه در شاخه‌های جبرخطی و جبر است. از آنجا که نظریهٔ گراف شامل کاربردهای زیادی است که واقعی، ملموس و قابل درک توسط دانش‌آموز هستند، لذا زمینهٔ مناسبی است برای مطرح شدن در ریاضیات مدرسه‌ای.

این فصل شامل دو درس است که در درس اول فقط معرفی گراف و تعاریف مقدماتی انجام شده است. سعی در این بوده است که از ارائهٔ تعاریف غیرضروری پرهیز شود. از طرفی چون دانش‌آموزان اولین بار است که با این درس مواجه می‌شوند. گاهی اوقات پرهیز از ارائهٔ تعاریف رسمی به گونه‌ای که درک آن توسط دانش‌آموز مشکل باشد مدنظر بوده است به گونه‌ای که برخی تعاریف با توجه دادن دانش‌آموزان به شکل و مثال مطرح شده‌اند. در فصل دوم مفهوم احاطه‌گری مطرح شده است که یکی از مفاهیمی است که قابلیت بیان مدل‌سازی را به‌خوبی دارد و همچنین زمینهٔ بسیار مناسبی به جهت مطرح کردن کاربردهای قابل درک توسط دانش‌آموزان است.

نقشهٔ مفهومی



تصویر عنوانی

بسیاری از کاربردهای نظریه گراف با مدل‌سازی یک مسئله واقعی و تبدیل آن به یک مسئله ریاضی انجام می‌پذیرد. تصویر عنوانی فصل یک نوع مدل‌سازی از بخشی از نقشه شهر مشهد و تبدیل آن به یک گراف را نمایش می‌دهد.

دانستنی‌هایی برای معلم

ارتباط برخی مفاهیم نظریه گراف با بعضی مفاهیم ریاضی محض بسیار جالب و شاید در ابتدای پیدایش گراف بسیار دور از ذهن می‌نمود. به‌طور مثال گراف کیلی با توجه به ساختار یک گروه جبری ساخته می‌شود. در این صورت ارتباطات بسیار جالبی بین مفاهیم جبری و مفاهیم نظریه گراف برقرار است که از هر یک برای مطالعه دیگری می‌توان بهره گرفت. همچنین شاخه‌ای از نظریه گراف جبری به مطالعه گراف‌ها با استفاده از جبر خطی و ماتریس مجاورت یک گراف می‌پردازد.

معرفی منابع برای معلمان

- ۱ D.B. West (2001) Introduction to graph theory.
- ۲ J.A. Bondy, V.S.R. Murty. (2008). Graph theory.
- ۳ T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater. (1998). Fundamentals of domination in graph.
- ۴ N. Biggs. Algebraic Graph Theory.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

- ۱ در هر کدام از موارد (الف) و (ب)، مجموعه رأس‌های گراف G داده شده است. به سؤالات مطرح شده پاسخ دهید.
 - ۱- مرتبه و اندازه گراف را مشخص نمایید.
 - ۲- نمودار گراف را رسم کنید.
 - ۳- $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.
 - ۴- اگر x ، رأس با درجه $\Delta(G)$ و y ، رأس با درجه $\delta(G)$ باشد، مجموعه‌های $N_G(x)$ و $N_G(y)$ را مشخص نمایید.

۵- آیا می‌توانید دو رأس مانند x و y بیابید به گونه‌ای که $N_G(x) \subseteq N_G(y)$ ؟

الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $E(G) = \{af, ab, ae, bc, be, ed, dc\}$

ب) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ و $E(G) = \{ad, ae, bf, bc, dh, cg, ef, fg, gh, eh\}$

۲ گراف همبند و غیرتهی G را به گونه‌ای رسم کنید که a و b و c رأس‌هایی از آن باشند و داشته باشیم

$$N(a) \subseteq N(b) \subseteq N(c)$$

۳ گراف G را به گونه‌ای رسم کنید که a و b و c رأس‌هایی از آن باشند و داشته باشیم

$$N[a] \subseteq N[b] \subseteq N[c]$$

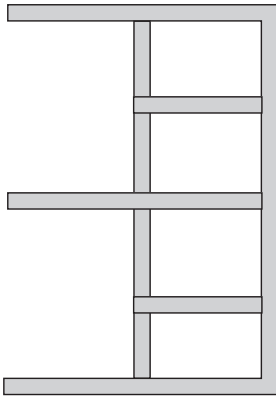
۴ ثابت کنید که اگر G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq 5$ ، آنگاه G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا

مساوی ۵ است.

۵ الف) اگر G یک گراف ۶ رأسی باشد و $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 1$ ، در این صورت $\Delta(\bar{G})$ و $\delta(\bar{G})$

را تعیین کنید.

ب) اگر G یک گراف n رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین $\Delta(G)$ و $\delta(\bar{G})$ برقرار است؟



۶ شکل روبه‌رو قطعه‌ای از نقشه‌ای یک شهرک است. می‌خواهیم

چند دکه روزنامه‌فروشی در برخی تقاطع‌های آن قرار دهیم به گونه‌ای که

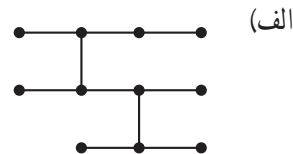
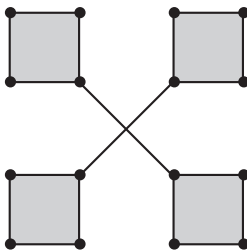
هرگاه در یک تقاطع یا در انتهای یک خیابان قرار داشته باشیم دکه‌ای

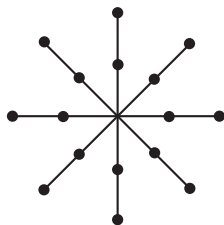
به فاصله حداکثر یک تقاطع از ما وجود داشته باشد. چگونه این کار را

انجام دهیم که با کمترین دکه ممکن انجام شده باشد؟ برای پاسخ خود

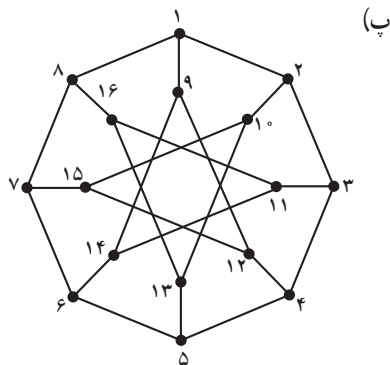
دلیل بیاورید.

۷ در هر یک از گراف‌های زیر عدد احاطه‌گری را مشخص کنید. (با بیان دلایل کافی)





(ت)



(ب)

۸ در یک گروه ورزشی ۱۰ نفر عضو هستند و هر کدام دقیقاً با سه نفر از اعضای گروه دوست صمیمی هستند. می خواهیم به تعدادی از آنها خبری را بدهیم و از آنها بخواهیم به دوستان صمیمی خود در گروه خبر را اطلاع دهند. حداقل باید به چند نفر خبر بدهیم؟

۹ عدد احاطه‌گری گراف‌های P_n و C_n را مشخص نمایید.

۱۰ یک گراف ۳ رأسی بکشید که مجموعه احاطه‌گر مینیمالی با اندازه متفاوت با $\gamma(G)$ داشته باشد.

۱۱ یک گراف ۳ رأسی بکشید که هیچ مجموعه احاطه‌گر مینیمالی با اندازه متمایز از $\delta(G)$ نداشته باشد.

معرفی گراف

درس اول

اهداف

- ۱ شناخت گراف و درک تعاریف این بخش
- ۲ آشنایی با برخی خواص گراف‌ها

روش تدریس

در ابتدا مسائلی تاریخی، مرتبط با گراف‌ها مطرح گردیده است. آشنایی دانش‌آموز با این مسائل ماهیت کاربردی این بخش از ریاضی را در ذهن دانش‌آموزان جا می‌اندازد. از آنجا که دانش‌آموزان در اولین مواجهه خود با درس گراف می‌باشند، ارائه تعاریف رسمی مانند تعریف گراف به صورت تابعی که هر یال را به دو رأس نظیر می‌کند و تعاریف رسمی دیگری از این قبیل می‌تواند از مواجهه راحت و آسان دانش‌آموز با این درس جلوگیری نماید. لذا سعی شده است اکثر تعاریف با استفاده از شکل و نمودار گراف و به صورت شهودی به دانش‌آموزان ارائه گردد.

بسیاری از خواص گراف زمانی که با استدلالی شهودی و ملموس ارائه گردند برای دانش‌آموزان بسیار قابل درک‌تر می‌شوند. به طور مثال در فعالیت دوم صفحه ۳۹ که منجر به اثبات قضیه پایین این صفحه می‌گردد سعی شده است با انجام مراحل این فعالیت دانش‌آموز حکم قضیه را به طور ملموس درک نماید. همچنین در فعالیت دوم صفحه ۴۰، در اثبات مسئله چند بار از فرض مسئله استفاده می‌شود و نوع جالبی از اثبات به دانش‌آموزان ارائه می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم گراف استفاده از استدلال‌های کلامی زیبا در مسائل آن است و یکی از اهداف مهم در گراف نیز تقویت استدلال کلامی دانش‌آموزان است لذا سعی کنید در پایان چنین فعالیتی دانش‌آموزان را تشویق کنید که اثبات را از ابتدا به صورت شفاهی بازگو نمایند.

حل برخی تمرینات درس اوّل صفحه ۴۱

۸



(ت) اگر چنین گرافی داشته باشیم مجموع درجات آن ۱۵ می شود و این غیرممکن است.



(ج) مانند قسمت (ت) امکان پذیر نیست.

۹



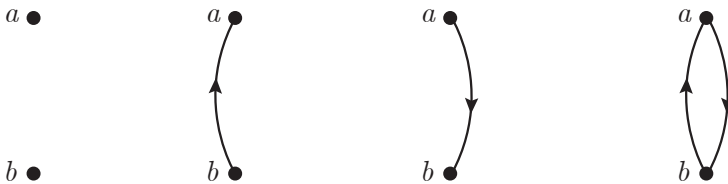
(ت) امکان پذیر نیست.



۱۰ اگر به ازای هر نفر یک رأس قرار دهیم و رئوس نظیر برای کسانی که با هم دست داده اند را به هم وصل کنیم، با توجه به فرض مسئله و در صورتی که نفر هفتم با ۵ نفر دست داده باشد گرافی با مجموع درجات فرد خواهیم داشت که این غیرممکن است.

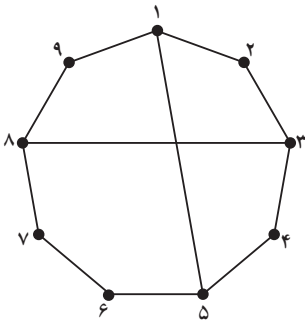
$$(6 \times 2) + (1 \times 5) = 17$$

۱۱ الف) می‌توان به ازای هر نفر یک رأس قرار داد و اگر فرضاً a با b دوست باشد، رأس a را با یک یال جهت‌دار (از a به b) به رأس b وصل کرده لذا کافی است تعداد تمام گراف‌های جهت‌دار با ۵ رأس را مشخص کرد. برای این کار ۵ رأس را در نظر می‌گیریم و تمام حالت‌هایی را که تعدادی یال جهت‌دار بین برخی، همه یا هیچ جفت از رئوس آن قرار داشته باشد مشخص می‌کنیم. اما $\binom{5}{2} = 10$ جفت رأس را می‌توان در نظر گرفت که برای هر جفت از آنها یکی از حالات زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:



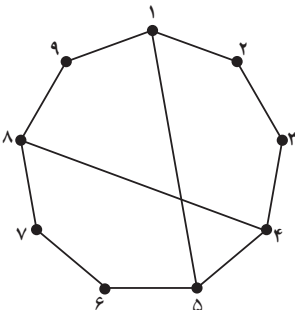
لذا $4^{\binom{5}{2}} = 4^{10}$ حالت امکان‌پذیر است.

ب) در این حالت کافی است تعداد گراف‌های ۵ رأسی (نه جهت‌دار) را مشخص کنیم که از آنجا که برای هر جفت رأس دو حالت وجود دارد، در این حالت تعداد حالات برابر بیست $2^{\binom{5}{2}} = 2^{10}$ است.



۱۲ الف)

- ۹ طول به دور $\rightarrow 1234567891$
- ۵ طول به دور $\rightarrow 123451$
- ۶ طول به دور $\rightarrow 1567891$
- ۷ طول به دور $\rightarrow 123487651$

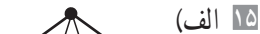


ب)

- ۹ طول به دور $\rightarrow 1234567891$
- ۵ طول به دور $\rightarrow 123451$
- ۶ طول به دور $\rightarrow 1567891$
- ۸ طول به دور $\rightarrow 123487651$

۱۳ الف) بله. با اثباتی کاملاً مشابه با فعالیت دوم صفحه ۴۰ می توان ثابت کرد.

ب) خیر. به عنوان یک مثال نقض در گراف P_4 داریم $\delta(P_4) = 1$ و این گراف به وضوح مسیری به طول ۲ ندارد.



مدل سازی با گراف

درس دوم

اهداف

- ۱ درک مفهوم احاطه‌گری در یک گراف و تعاریف ارائه شده در این درس
- ۲ مدل‌سازی برخی مسائل با استفاده از گراف‌ها
- ۳ آشنایی با خواص مجموعه‌های احاطه‌گر
- ۴ تعیین عدد احاطه‌گری برخی از گراف‌ها
- ۵ استفاده از مفهوم احاطه‌گری در حل مسائل کاربردی
- ۶ استفاده از استدلال کلامی در حل برخی مسائل احاطه‌گری

روش تدریس

ارائه مفهوم احاطه‌گری با استفاده از طرح یک مسئله که توسط گراف مدل‌سازی می‌شود می‌تواند وجه کاربردی این مفهوم را بیشتر نمایان سازد. پس از ارائه مفهوم مجموعه احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری به جاست چند مثال ساده مطرح گردد و فرصت تفکر دانش‌آموزان به مفاهیم ارائه شده داده شود. در مثال صفحه ۴۵ بهتر است سعی شود چگونگی مدل‌سازی مسئله با گراف مورد نظر بیشتر توضیح داده شده و علت اینکه چرا فقط رئوس متناظر با شهرهایی که فاصله کمتر یا مساوی 5° دارند به هم وصل می‌شوند توضیح داده شود. دقت کنید که یکی از اهداف مهم این درس ارتقای قدرت استدلال کلامی دانش‌آموزان است. لذا معلم باید در تعیین سؤال‌ها و طبقه‌بندی آنها از نظر میزان سختی درک استدلال آنها دقت نماید و گام به گام این نوع استدلال را، توسط مطرح کردن سؤالات مناسب و ارائه راهنمایی مناسب، در دانش‌آموزان ارتقا دهد. قابل توجه است که تعیین مجموعه احاطه‌گر مینیمم در برخی گراف‌ها می‌تواند بسیار مشکل باشد و در طرح سؤالات همواره به چگونگی ارائه استدلال توسط دانش‌آموزان باید دقت نمود.

۱

الف) اگر این گراف را (گراف شکل ۴ صفحه ۴۶) G بنامیم، ادعا می کنیم $\gamma(G) = 3$ برای این کار باید دو موضوع را نشان دهیم.

(۱-۱) یک مجموعه احاطه گر ۳ عضوی وجود دارد.

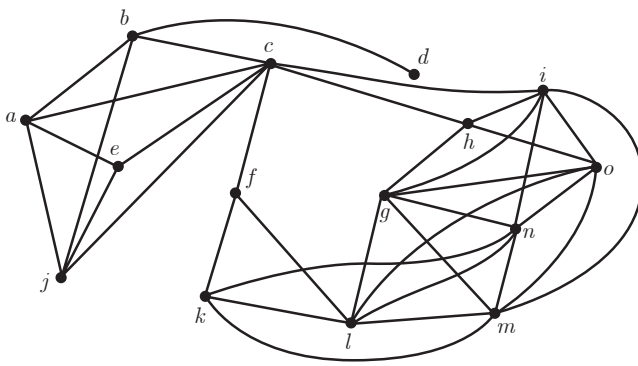
(۱-۲) هیچ مجموعه احاطه گر ۲ عضوی وجود ندارد یا به عبارتی هر مجموعه احاطه گر دلخواهی حداقل ۳ عضو دارد.

حل: (۱-۱) به سادگی دیده می شود که مجموعه $\{i, d, g\}$ برای گراف G یک مجموعه احاطه گر است لذا داریم $\gamma(G) \leq 3$.

حل: (۱-۲) فرض کنیم $D \subseteq \gamma(G)$ یک مجموعه احاطه گر دلخواه برای G باشد. نشان می دهیم D حداقل سه عضو دارد. برای احاطه شدن رأس z حداقل یکی از رئوس i و j و k باید در مجموعه S قرار داشته باشند. هر کدام از رئوس مذکور که در S باشند حداکثر ۴ رأس i و j و k و a را احاطه می کنند و سایر رئوس گراف احاطه نشده باقی می ماندند و از طرفی چون هیچ رأسی به تمام رئوس باقی مانده گراف (سایر رئوس به جز i و j و k و a) وصل نیست پس هیچ رأسی به تنهایی نمی تواند سایر رئوس گراف را احاطه کند. بنابراین حداقل دو رأس دیگر نیز باید در S وجود داشته باشند. پس $|S| \geq 3$ ، یعنی هیچ مجموعه ای با اندازه کوچک تر از ۳ نمی تواند برای این گراف احاطه گر باشد پس $\gamma(G) \geq 3$. حال با توجه به (I) و (II) داریم $\gamma(G) = 3$.

ب) اینکه مجبور باشیم یکی از ایستگاه ها را در b قرار دهیم بدان معنی است که مجموعه احاطه گری با کمترین تعداد ممکن انتخاب کنیم به گونه ای که رأس b در آن باشد. مجموعه مذکور به صورت $\{i, b, g\}$ است و لذا در این حالت هم با ۳ ایستگاه مسئله حل می شود.

۲) اگر به ازای هر روستا یک رأس قرار دهیم و دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر روستاهای



G

متناظر با آنها فاصله شان کمتر یا مساوی ۱۰ باشد گراف مقابل حاصل خواهد شد. حال کافی است مجموعه احاطه گر مینیمم این گراف را به دست آوریم. اگر S یک مجموعه احاطه گر باشد، برای احاطه رأس d یکی از b و d را باید

شامل شود و در هر حال رئوس i, f, g, h, k, l, m, n و o باز هم احاطه نشده باقی می‌مانند. چون هیچ رأسی وجود ندارد که به تنهایی همهٔ این ۹ رأس را احاطه کند لذا S باید حداقل ۲ رأس دیگر و در کل حداقل ۳ رأس داشته باشد پس $|S| \geq 3$ یعنی $\gamma(G) \geq 3$.

از طرفی $\{b, l, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی است. پس $\gamma(G) \leq 3$. یعنی $\gamma(G) = 3$ و کافی است ۳ بیمارستان در روستاهای b, l, i و احداث شود تا شرایط مسئله تأمین شود.

۳ الف) $\{e, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای آن است، لذا $\gamma(G) \leq 2$. از طرفی چون رأسی با درجهٔ ۷ وجود ندارد پس هیچ رأس به تنهایی همهٔ رئوس را احاطه نمی‌کند. بنابراین $\gamma(G) \geq 1$ و لذا $\gamma(G) = 2$.
ب) $\{e, j\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است و با استدلالی مشابه (الف) ثابت می‌شود که $\gamma(G) = 2$.
پ) فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. برای اینکه رأس a احاطه شده باشد باید یکی از رئوس e, b, a, f در S باشند. به‌طور مشابه یکی از رئوس c, d, g, h و نیز یکی از رئوس i, j, k, l باید در S باشند پس S حداقل ۳ عضو دارد و لذا $\gamma(G) \geq 3$.

از طرفی $\{t, g, i\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leq 3$ و لذا $\gamma(G) = 3$.
ت) اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، باید شامل یکی از اعضای $N(V)$ به‌ازای هر $V \in V(G)$ باشد. لذا برای احاطه کردن هر کدام از رئوس بالایی مثلث‌ها باید حداقل یکی از رئوس آن مثلث را شامل شود پس S حداقل ۵ عضو دارد، یعنی $\gamma(G) \geq 5$.

از طرفی $\{f, i, k, l, n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف مذکور است و لذا $\gamma(G) \leq 5$. بنابراین داریم $\gamma(G) = 5$.

ث) فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد. چون این گراف شامل ۴ دور C_5 است و از طرفی از هر کدام از C_5 ها حداقل ۲ رأس باید در S باشد (زیرا در غیر این صورت همهٔ رئوس آن C_5 احاطه نمی‌شوند)، لذا حداقل ۸ رأس باید در S باشد، پس $\gamma(G) \geq 8$. از طرفی کافی است از هر کدام از C_5 ها دو رأس غیر مجاور را انتخاب کنیم. مجموعهٔ ۸ عضوی حاصل یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G است. بنابراین $\gamma(G) \leq 8$ و لذا $\gamma(G) = 8$.

۴) اگر داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، این بدین معناست که رأسی در G هست که به همهٔ رئوس دیگر گراف G وصل است یا به عبارتی G شامل یک ستاره است. در این حالت داریم $\Delta(G) = n - 1$. اگر گراف G به‌جز این ستاره یال دیگری نداشته باشد، دارای $n - 1$ یال است که کمترین تعداد ممکن است و در حالتی که تمام رئوس گراف G به هم وصل باشند، G گراف کامل است. در این حالت تعداد یال‌های G برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ است که بیشترین تعداد ممکن است.

۵ با توجه به کران $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ و با توجه به اینکه P_n و C_n هر کدام دارای n رأس اند و $\Delta(P_n) = \Delta(C_n) = 2$ لذا داریم:

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \gamma(P_n) \quad \text{و} \quad \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \gamma(C_n)$$

حال در P_n اگر مجموعه S را به این صورت انتخاب کنیم که دومین رأس P_n را در آن قرار داده و سپس رئوس دیگر را دو تا در میان در S قرار دهیم، S یک مجموعه احاطه گر برای P_n با اندازه $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ خواهد بود و لذا $\gamma(P_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$. بنابراین $\gamma(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ و برای C_n نیز کافی است به طریقی مشابه رئوس را دو تا در میان در S قرار دهیم و نتیجه ای مشابه آنچه برای P_n گفته شد بگیریم.

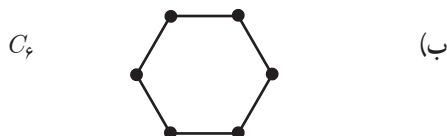
۶ با توجه به کران $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ و چون در گراف k -منتظم داریم $\Delta = k$ پس $\left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ داریم $n = 12$ و $\Delta = 2$ پس $\left\lfloor \frac{12}{2+1} \right\rfloor = 4$. پس کمترین مقدار برای $\gamma(G)$ برابر ۴ است و چنین گرافی می تواند P_{12} یا C_{12} باشد.

۸

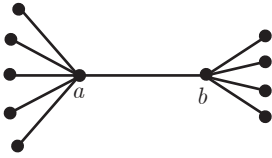


(پ) اگر $k \leq \frac{n}{4}$ باشد کافی است یک مسیر k رأسی در نظر بگیریم و به هر رأس آن یک رأس جدید وصل کنیم سپس دوباره به برخی رئوس مسیر k رأسی، رأس هایی وصل کنیم تا تعداد رئوس n تا شود. اگر $k > \frac{n}{4}$ در این صورت گراف مورد نظر نمی تواند همبند باشد. می توان ۴ تا رأس تنها در نظر گرفت و به برخی از آنها آنقدر رأس جدید وصل کرد که تعداد رئوس n تا شود.

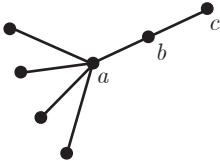
۹



۱۰



الف) کافی است گرافی مانند شکل مقابل رسم شود به گونه‌ای که مجموع رئوس متصل به دو رأس a و b برابر $n-2$ تا شوند.



ب) یک گراف به شکل مقابل رسم می‌کنیم به طوری که تعداد رئوس متصل به رأس a برابر $n-2$ تا باشد. در این صورت $\{a, b\}$ و $\{a, c\}$ دو γ -مجموعه متمایز از آن هستند.

۱۱



الف) $\{2, 5, 8, 11\}$ یک γ -مجموعه آن است.
 ب) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی آن است.

فصل سوم

ترکیبیات (شمارش)

نگاه کلی به فصل

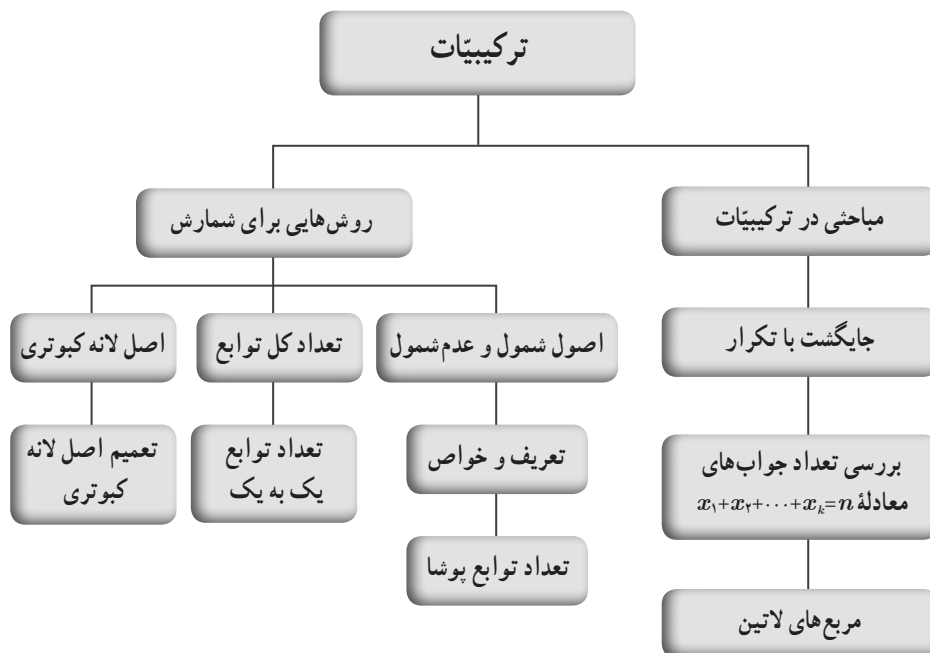
در ترکیببات یا علم شمارش در سطوح مقدماتی، فقط از اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش استفاده می‌شود، حال آنکه شمارش می‌تواند توسط ابزارهای دیگر یا اصول دیگری نیز انجام شود. در این فصل، اصول دیگری برای حل مسائل شمارشی مانند اصل شمول و عدم شمول و اصل لانه کبوتری و تعمیم آن معرفی می‌شوند.

فصل ۳ کتاب ریاضیات گسسته به موضوع ترکیببات پرداخته شده است. این فصل شامل دو درس است.

در درس اول، مباحثی در ترکیببات بیان می‌شود. ابتدا برخی از ابزارهای شمارشی که دانش‌آموزان در سال‌های قبل با آنها آشنا شدند با ارائه مثال‌هایی یادآوری می‌شود و قضیه جایگشت با تکرار همراه با سؤالاتی متنوع مطرح می‌گردد. سپس تعیین تعداد جواب‌های حسابی یا طبیعی معادله سیاله خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد و در ادامه مربع‌های لاتین معرفی می‌شوند. مربع‌های لاتین که کاربردهای ملموسی در حل مسائل دنیای واقعی دارند، زمینه مناسبی برای پرورش تفکر ریاضی و استدلال، به‌ویژه ارتقای استدلال کلاسی در دانش‌آموزان هستند.

موضوع درس دوم، در مورد روش‌هایی برای شمارش است. ابتدا اصل شمول و عدم شمول معرفی شده و کاربرد آن در حل برخی از مسائل و تعیین تعداد توابع پوشا مطرح می‌گردد. همچنین تعیین تعداد کل توابع و تعداد توابع یک به یک بیان شده است. سپس به معرفی اصل لانه کبوتری و تعمیم آن و کاربردهای آن در حل مسائل و حل مسائلی از دنیای واقعی همراه با سؤالات متنوعی پرداخته شده است.

نقشه مفهومی درس های ۱ و ۲ فصل سوم



دانستنی‌های معلم

امروزه ترکیبیات یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که سریعاً در حال رشد و گسترش می‌باشد. یکی از علل رشد سریع ترکیبیات، ورود کامپیوتر در صحنه علم و جامعه است، چون اساس برنامه‌های کامپیوتری معمولاً الگوریتم‌های ترکیبیاتی می‌باشند.

ریاضی‌دانان چینی، هندی و یونانی از قرن نخست میلادی با فرمول‌های مربوط به آرایش‌ها و ترکیب‌ها آشنایی داشتند.

کار ترکیبیات مطالعه مجموعه‌های متناهی از اشیاء و ساختارهای روی آنها، نظیر جایگشت‌ها، ترکیب‌ها و... است. در مطالعه این‌گونه مجموعه‌ها و ساختارهای روی آنها، سه مسئله عمده مورد بررسی قرار می‌گیرد:

الف) مسئله وجودی: گاهی اوقات وجود شیء با ویژگی‌های خاص به راحتی معلوم نمی‌شود. اگر وجود این شیء همیشه امکان ندارد، طبیعی است سؤال کنیم تحت چه شرایطی شیء مورد نظر وجود خواهد داشت.

ب) مسئله شمارش: یکی از قسمت‌های مهم و جالب ترکیبیات، روش‌های شمارش در آن است، که بعضاً روش ترکیبیاتی یا شمارش بدون شمردن نامیده می‌شود. شمارش بدون شمردن به سه طریق ممکن است صورت گیرد. فرض کنید می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه متناهی A را تعیین کنیم:

۱- ارائه الگویی از مسئله و تعبیر دوگانه و معادل آن

۲- برقرار نمودن تناظری یک به یک میان مجموعه A و مجموعه‌ای مانند B که تعداد اعضای آن را

می‌دانیم.

۳- افراز مجموعه A به چند مجموعه جدا از هم مانند A_1, A_2, \dots, A_k به طوری که شمارش اعضای

این مجموعه‌ها ساده یا تعداد اعضای آنها از قبل معلوم باشد، و جمع کردن تعداد اعضای آنها.

ج) مسئله بهینه‌سازی: در این قسمت با ارائه بهترین الگوریتم‌ها برای ساخت یک ترتیب، که وجود آن ثابت شده است، با حداقل عملیات و با وضوح کامل روبه‌رو هستیم. اکثر الگوریتم‌های موجود در ترکیبیات حتی با کامپیوتر هم زمان زیادی را می‌گیرند تا به نتیجه برسند و برای بعضی از مسائل کاربردی هنوز الگوریتم کارا وجود ندارد.

مباحثی در ترکیبیات

درس اول

اهداف

- ۱ یادآوری ابزارهای شمارش اصل جمع و اصل ضرب و روش‌های شمارش تبدیل و ترکیب
- ۲ آشنایی با قضیه جایگشت با تکرار
- ۳ به‌کارگیری قضیه جایگشت با تکرار در حل برخی از مسائل شمارشی
- ۴ توانایی در طرح مسائلی که با اصل ضرب و به روش دسته‌بندی حل می‌شوند.
- ۵ تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیاله خطی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$
- ۶ تعیین تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ سیاله خطی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$
- ۷ معادل‌سازی برخی مسائل از دنیای واقعی به فرم معادله سیاله خطی و تعیین تعداد جواب‌های آنها
- ۸ آشنایی با مفهوم مربع‌های لاتین و درک خواص مقدماتی آنها
- ۹ استفاده از مربع‌های لاتین در حل مسائل کاربردی

روش تدریس

در شروع درس، ابزارهای شمارش اصل جمع و اصل ضرب و روش‌های شمارش مانند تبدیل r شیء از n شیء و ترکیب r شیء از n شیء و به‌کارگیری از آنها در حل برخی از مسائل شمارشی با ارائه مثال‌هایی یادآوری می‌شود. منظور از این یادآوری این است که به اهداف ما برای رسیدن به مفاهیم و مباحث جدید شمارشی کمک کند. با نتیجه‌گیری از مسئله مطرح شده در صفحه ۵۸، جایگشت با تکرار به صورت قضیه بیان می‌شود و مثال‌هایی برای درک بهتر این مفهوم برای دانش‌آموزان مطرح شده است. در صفحه ۵۹، فعالیتی بیان شده است که با استفاده از مفهوم ترکیب و قضیه جایگشت با تکرار، به حل آن می‌پردازد و مسئله مطرح شده را در حالت کلی بررسی می‌کند، سپس با نتیجه‌ای که از قسمت قبل

می‌گیرد، تعداد جایگشت‌ها را در حالت کلی تعمیم می‌دهد. در قسمت ۴ این فعالیت، چون برای انتخاب n گل از k نوع گل، تکرار مجاز است، بنابراین جابه‌جایی ستاره‌ها با هم (انتخاب هر نوع گل) یعنی $n!$ و جابه‌جایی خط‌های عمودی با هم یعنی $(k-1)!$ ، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند، لذا تعداد کل جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌های تکراری که ستاره‌ها و خط‌های عمودی جابه‌جا می‌شوند تقسیم می‌کنیم که مساوی است با:

$$\frac{(n+k-1)!}{n! \times (k-1)!} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

سپس برای درک بهتر و یادگیری دانش‌آموزان، مثال‌هایی مطرح شده است.

هدف از فعالیت صفحه ۶۰، معادل‌سازی مسئله «تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین ۳ نوع گل»، به فرم معادله سیاله خطی $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ است، تا تعداد جواب‌های این معادله که همان تعداد انتخاب‌های اشاره شده در مسئله می‌باشد را به دست آورد، که برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

با نتیجه‌گیری از این فعالیت، فرمول $\binom{n+k-1}{k-1}$ را برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی (حسابی) معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ معرفی می‌کند.

حل کار در کلاس صفحه ۶۱ کتاب

۱ ابتدا از هر نوع گل، ۱ شاخه برداشته، لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه $4 = 7 - 3$ می‌شود. اگر منظور از y_i همان x_i باشد که یک شاخه از آن برداشته شده، پس معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ به معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 4$ تبدیل می‌شود، با این تفاوت که شرط‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ ، $x_i \geq 1$ ($i=1, 2, 3$) است و شرط‌های معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 4$ ، $y_i \geq 0$ ($i=1, 2, 3$) می‌باشد. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 4$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۴ شاخه گل از بین ۳ نوع گل، یعنی:

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

نتیجه: برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ ، در صورتی که $x_i \geq a_i$ ، که در آن $1 \leq i \leq k$ و همچنین a_i یک عدد طبیعی مشخص است تغییر متغیر می‌دهیم:

$$y_i = x_i - a_i \geq 0 \Rightarrow x_i = y_i + a_i$$

سپس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ای که برحسب y_i تنظیم شده به دست می‌آید.

۲ ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته، لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و معادله به صورت $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n-k$ تبدیل می‌شود. یعنی تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n-k$ برابر است. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n-k$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\binom{(n-k) + k - 1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

یعنی تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

۳

$$\begin{aligned} x_1 > 1 &\Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq 0 \xrightarrow{y_1 = x_1 - 2} y_1 \geq 0, x_1 = y_1 + 2 \\ x_3 > 3 &\Rightarrow x_3 \geq 4 \Rightarrow x_3 - 4 \geq 0 \xrightarrow{y_3 = x_3 - 4} y_3 \geq 0, x_3 = y_3 + 4 \\ \Rightarrow y_1 + 2 + x_2 + y_2 + 4 + x_4 + x_5 &= 14 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_2 + x_4 + x_5 = 8 \\ \Rightarrow \binom{8 + 5 - 1}{5-1} &= \binom{12}{4} = 495 \end{aligned}$$

۴ با توجه به شرط مسئله ($x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$) و فرمول سؤال ۲ این کار در کلاس داریم:

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

۵

$$\begin{aligned} x_7 &= 4 \\ x_5 > 2 &\Rightarrow x_5 - 2 > 0 \xrightarrow{y_5 = x_5 - 2} y_5 > 0, x_5 = y_5 + 2 \\ x_1 + x_2 + 4 + x_3 + y_3 + 2 + x_4 &= 12 \\ \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + y_3 + x_4 + x_6 &= 6 \Rightarrow \text{با توجه به فرمول سؤال ۲: } \binom{6-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5 \end{aligned}$$

ارائهٔ تعریف مربع لاتین می‌تواند به طور مستقیم صورت بگیرد و نیز می‌توان مانند آنچه در صفحهٔ ۶۲ صورت گرفته است با طرح یک سؤال دانش‌آموزان را به سمت این مفهوم سوق داد. مطمئن شوید دانش‌آموزان مفهوم مربع لاتین را فهمیده‌اند و خواصی از آن را که در کتاب مطرح شده است مانند «تعویض جای دو سطر (یا دو ستون) مربع لاتین بودن را حفظ می‌کند» و یا «اعمال یک جایگشت بر اعضای یک مربع لاتین، مربع لاتین بودن را حفظ می‌کند» را با درک علت آن فهمیده‌اند. توجه کنید که یکی از اهداف

این درس ارتقای سطح استدلال کلامی دانش‌آموزان است، لذا از دانش‌آموزان بخواهید که استدلال‌های موردنظر را به صورت شفاهی بیان نمایند. در این بخش توجه داشته باشید که سؤالات انحرافی بسیاری مانند اینکه «در حالت کلی چند مربع لاتین $n \times n$ داریم» و غیره می‌توان مطرح نمود که جزء اهداف درسی این کتاب نیستند.

در تعریف دو مربع لاتین متعامد، معمولاً گفته می‌شود از کنار هم قرار گرفتن درایه‌های نظیر به نظیر، زوج مرتب‌هایی حاصل می‌شود اما در این کتاب برای راحت‌تر درک کردن دانش‌آموزان و از آنجا که مربع‌های لاتین با مرتبه ۲ رقمی در این کتاب مطرح نشده‌اند به جای زوج مرتب، اعداد دو رقمی گفته شده است. مطمئن شوید که دانش‌آموزان اینکه متعامد بودن دو مربع در حل مسائل دقیقاً کجا به کار می‌آید را متوجه شده‌اند.

مطالب خواندنی آورده شده در صفحه ۶۷ می‌تواند به جهات مختلف برای دانش‌آموزان جالب باشد. گرچه این مطلب به عنوان خواندنی آمده و طبیعتاً در امتحان از آن سؤال مطرح نمی‌شود اما این مطلب که دانش‌آموزان بدانند مجهولات مفهومی به ظاهر در طول سال‌ها چندین ریاضی‌دان را به خود مشغول کرده است و حتی اوایلر در این زمینه حدس اشتباه زده است می‌تواند این ذهنیت غلط را که ریاضیات صرفاً توسط چند نابغه که همه چیز را می‌دانسته‌اند به وجود آمده است، در آنها مرتفع سازد.

برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبه فرد شیوه‌های دیگری هم هست که در این کتاب مطرح نشده است. برای ساخت دو مربع لاتین متعامد از مرتبه زوج نیز شیوه‌هایی ارائه شده است که در این کتاب طرح آنها مدنظر نیست. لذا اگر در ارزشیابی سؤالی مطرح شود که نیاز به دو مربع لاتین مرتبه زوج داشته باشد باید دو مربع لاتین متعامد نیز ارائه شوند. در سؤالات ارزشیابی، با تغییر عامل‌های سؤال مطرح شده درباره کارخانه ریسندگی می‌توانید سؤال‌های کاربردی مختلفی ارائه کنید که برنامه‌ریزی برای آنها توسط دو مربع لاتین متعامد انجام شود.

توصیه آموزشی

- به پیش‌نیازهای مبحث درس توجه شود و در کلاس با روش پرسش و پاسخ با دانش‌آموزان، مفاهیمی که قبلاً آموخته‌اند، مرور و یادآوری گردد تا مباحث جدید و مرتبط را بهتر درک کنند.
- طرح سؤالاتی برای معادلات سیاله که شرط‌هایی برای x_i ها به صورت $a \leq x_i \leq b$ در آن لحاظ شده باشد، در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نمی‌باشد.
- به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل دشوار اجتناب گردد.

اشتباهات رایج دانش آموزان

□ در حل مسئله‌ای که از قضیه جایگشت با تکرار استفاده می‌شود، ممکن است تعداد تکرارها را نادرست شمرده باشد.

□ عدم درک درست از مفاهیم ترکیبیاتی و به کارگیری نادرست از آنها در حل مسائل شمارشی.

□ هنگام معادل‌سازی مسئله‌ای از دنیای واقعی به فرم معادله سیاله خطی، ممکن است دچار اشتباه شود.

□ برای تعیین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی (حسابی) یا تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله سیاله خطی، به شرط‌های داده شده در مسئله دقت نمی‌کند، که در صورت لزوم با تعویض کدام متغیرها بتواند مسئله را به شرایط مورد نظر رسانده و با استفاده از فرمول، تعداد جواب‌های معادله را به دست آورد.

حل تمرینات درس اول صفحه ۷۲ کتاب

۱ هر دو برادری که رو به رو می‌نشینند را در یک دسته در نظر می‌گیریم، پس ۴ دسته داریم و تعداد جایگشت‌ها می‌شود ۴!، از طرفی در هر دسته، هر دو برادری که رو به رو می‌نشینند هم جایگشت دارند که برابر است با ۲!. بنابراین طبق اصل ضرب داریم: $4! \times (2!)^4$

۲ تعداد جایگشت‌های کد ۵ رقمی برابر ۵! است. از طرفی با توجه به تعداد حالات انتخاب ارقام از

$$\binom{5}{3} \times \binom{4}{2}$$

۳ الف) ۹!

ب) $4! \times 6!$

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند، پس باید در قفسه، کتاب‌ها را یک در میان بچینیم.

۵	۴	۴	۳	۳	۲	۲	۱	۱
---	---	---	---	---	---	---	---	---

ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی فیزیک ریاضی

طبق اصل ضرب داریم: $5! \times 4!$

ت) $3! \times 7!$

۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف

قرار بگیرند، اگر بخواهیم دانش‌آموزان پایه دوازدهم همواره کنار هم باشند؟

$$\frac{6!}{2! \times 3!}$$

$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 3!}$$

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!}$$

٥

٦

٧

(الف) ٨

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \Rightarrow \binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4} = 1365$$

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

ب

ب

$$x_2 \geq 2 \Rightarrow x_2 - 2 \geq 0 \xrightarrow{y_2 = x_2 - 2} y_2 \geq 0, x_2 = y_2 + 2$$

$$x_5 > 3 \Rightarrow x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \xrightarrow{y_5 = x_5 - 4} y_5 \geq 0, x_5 = y_5 + 4$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \Rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$$

ت

$$x_2 = 0$$

$$x_4 \geq 5 \Rightarrow x_4 - 5 \geq 0 \xrightarrow{y_4 = x_4 - 5} y_4 \geq 0, x_4 = y_4 + 5$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + 0 + y_4 + 5 + x_5 = 11$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_4 + x_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 126$$

(الف) ٩

$$2 \leq i \leq 5 \rightarrow i = 2, 3, 4, 5$$

$$x_i > 0 \Rightarrow x_i \geq 1 \rightarrow x_i - 1 \geq 0 \xrightarrow{y_i = x_i - 1} y_i \geq 0, x_i = y_i + 1$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 11$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

ب

$$x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \Rightarrow x_1 - 3 \geq 0 \xrightarrow{y_1 = x_1 - 3} y_1 \geq 0, x_1 = y_1 + 3$$

$$x_5 \geq 4 \Rightarrow x_5 - 4 \geq 0 \xrightarrow{y_5 = x_5 - 4} y_5 \geq 0, x_5 = y_5 + 4$$

$$\Rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12$$

$$\Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5 \Rightarrow \binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252$$

ب)

$$1 \leq i \leq 5 \rightarrow i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x_i \geq 1 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \xrightarrow{y_i = x_i - 1} y_i \geq 0, x_i = y_i + 1$$

$$\Rightarrow y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 11$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$

ت)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 0 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + 3 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15 \\ x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + 6 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل جوابها} = 36 + 15 + 3 = 54$$

ث)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 0 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + 1 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6 \\ x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + 2 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3 \\ x_2 = 9 \Rightarrow x_1 + 3 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

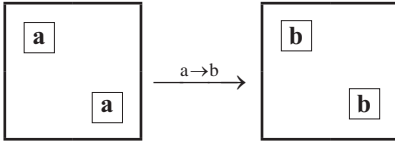
$$\Rightarrow \text{تعداد کل جوابها} = 10 + 6 + 3 + 1 = 20$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \Rightarrow \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

۱۰

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right. \Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

۱۱



۱۲ خیر - مثلاً اگر تمام ۱ها به ۲ تبدیل شده باشند، در این صورت در جایگاهی متناظر آنها اعداد تکراری ۱۲ به وجود می‌آید.

۱۳ الف)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

بله متعامدند

ب)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

خیر متعامد نیستند زیرا مثلاً در جایگاه‌های سطر اول ستون اول و سطر دوم ستون سوم عدد دورقمی ۳۲ تکرار می‌شود.

۲- خیر

ب) ۱- خیر

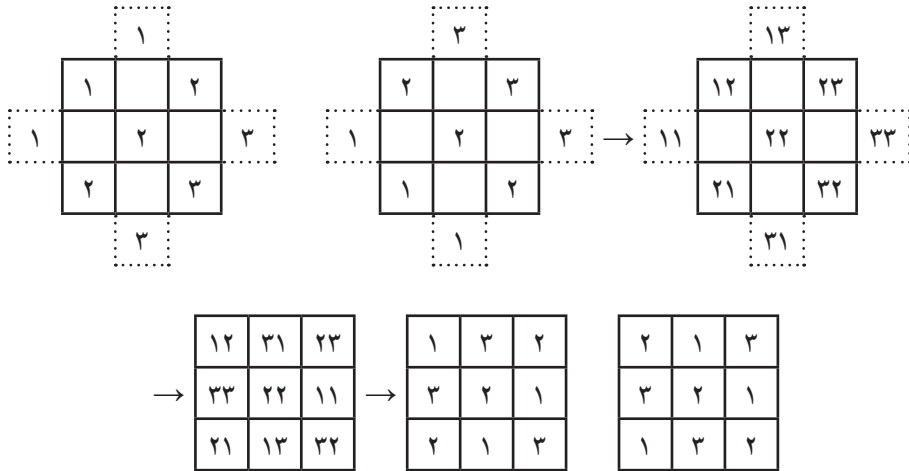
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
S_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
S_2	T_6	T_1	T_4	T_3	T_5	T_2
S_3	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
S_4	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
S_5	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
S_6	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

۱۴ کافی است از یک مربع لاتین 6×6

استفاده کنیم. جلسات را با S_1, S_2, \dots, S_6 و نمایش می‌دهیم.

لذا به طور مثال مدرس T_1 در جلسه اول به

کلاس C_1 می‌رود.



با همین روش دو مربع لاتین از مرتبه ۷ ساخته می‌شود.

۱۶ با روش توضیح داده شده در صفحه ۷۰ می‌توان دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ به دست آورد که با نوشتن آنها در یک مربع و نمایش راننده‌ها با d_1, \dots, d_7 و نمایش روزهای هفته با s_1, \dots, s_7 و نمایش ماشین‌ها با اعداد سمت چپ و نمایش جاده‌ها با اعداد سمت راست، خواهیم داشت:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
d_1	۱۲	۲۳	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۱
d_2	۷۳	۱۴	۲۵	۳۶	۴۷	۵۱	۶۲
d_3	۶۴	۷۵	۱۶	۲۷	۳۱	۴۲	۵۳
d_4	۵۵	۶۶	۷۷	۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
d_5	۴۶	۵۷	۶۱	۷۲	۱۳	۲۴	۳۵
d_6	۳۷	۴۱	۵۲	۶۳	۷۴	۱۵	۲۶
d_7	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۵	۷۶	۱۷

بنابراین به‌طور مثال راننده d_1 در روز s_1 با ماشین شماره ۱ و در جاده شماره ۲ رانندگی می‌کند.

روش‌هایی برای شمارش

درس دوم

اهداف

- ۱ آشنایی با مفهوم اصل شمول و عدم شمول
- ۲ به‌کارگیری اصل شمول و عدم شمول در حل مسائل ترکیباتی
- ۳ آشنایی با مفهوم توابع پوشا و یافتن تعداد آنها به کمک اصل شمول و عدم شمول
- ۴ به‌کارگیری مفهوم اصل ضرب برای یافتن تعداد کل توابع
- ۵ به‌کارگیری مفهوم تبدیل r شیء از n شیء برای یافتن تعداد توابع یک به یک
- ۶ مهارت در ارائه الگویی از مسئله و تعبیر معادل آن
- ۷ آشنایی با مفهوم اصل لانه کبوتری و به‌کارگیری آن در حل برخی از مسائل
- ۸ آشنایی با مفهوم تعمیم اصل لانه کبوتری و به‌کارگیری آن در حل برخی از مسائل
- ۹ توانایی در طرح مسائلی که با اصل لانه کبوتری حل می‌شوند.

روش تدریس

یکی از تکنیک‌های بسیار مهم در حل مسائل ترکیباتی، اصل شمول و عدم شمول است. دانش‌آموزان از سال‌های قبل، با نظریه مجموعه‌ها آشنایی دارند. بهتر است قبل از ورود به موضوع درس، با روش پرسش و پاسخ در کلاس، مفاهیم $A \cup B$ و $A \cap B$ و $A - B$ و A' برای آنها یادآوری شود، سپس به معرفی اصل شمول و عدم شمول پرداخت.

واضح است که تساوی $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ اصل شمول است و تساوی $|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$

اصل عدم شمول، چون $\overline{A \cup B}$ هیچ یک از ویژگی‌های اعضای A و B را شامل نمی‌شود.

در ابتدای درس، اصل شمول و عدم شمول را برای دو مجموعه متناهی بیان می‌کند و سپس این اصل را برای سه مجموعه متناهی بسط می‌دهد. در کتاب برای درک بهتر و یادگیری دانش‌آموزان، نمودار ون برای

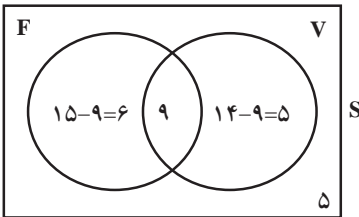
دو مجموعه متناهی و برای سه مجموعه متناهی که با هم در اشتراک هستند، رسم شده است. واضح است

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

اگر A و B دو مجموعه متناهی جدا از هم باشند، داریم:

در صفحه ۷۴، مثالی مطرح شده است که دانش‌آموزان در کتاب ریاضی (۱) پایه دهم، در مبحث تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه، با این گونه سؤالات آشنایی دارند و برای حل آن، با از روش نموداری (رسم نمودار ون) یا از قانون $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ استفاده می‌کردند.

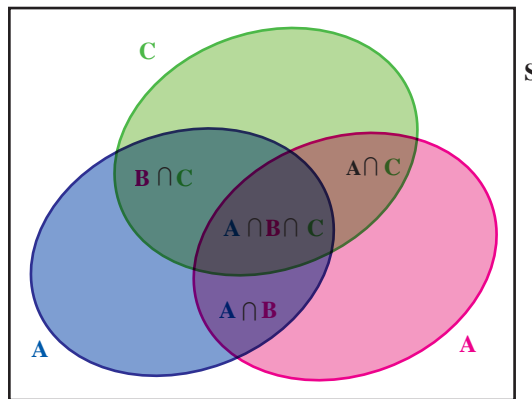
۲۵



برای اینکه برایشان یادآوری شود، از دانش‌آموزان بخواهیم قبل از استفاده از اصل شمول و عدم شمول، با رسم نمودار ون پاسخ مثال صفحه ۷۴ را به دست آورند. مانند روبه‌رو:

سپس با کمک از اصل شمول و عدم شمول، حل این مثال را در کتاب تکمیل نمایند.

در صفحه ۷۵، اصل شمول برای سه مجموعه متناهی بیان شده است و برای دلایل برقراری تساوی آن، از دانش‌آموزان خواسته شده، با کمک نمودار ون به سؤال پاسخ دهند. بهتر است از دانش‌آموزان بخواهیم در نمودار ون، نواحی اشتراک را با نماد مجموعه‌ها نشان دهند. مانند نمودار ون زیر:



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه، یعنی تعداد اعضای که حداقل به یکی از سه مجموعه تعلق دارند. با توجه به نمودار ون، در جمع تعداد اعضای مجموعه‌های A ، B و C ، هر عضو متعلق به اشتراک دوتایی مجموعه‌ها به طور تکراری به حساب آمده، پس اشتراک دوتایی‌ها باید یک بار کم شوند. همچنین در جمع تعداد اعضای هر سه مجموعه، اشتراک سه تایی آنها، سه بار حساب شده بود و وقتی اشتراک‌های دوتایی

را کم می‌کنیم، هر سه بار حذف می‌شود، پس باید یک اشتراک سه تایی اضافه کنیم. سپس با استفاده از تعریف متمم، اصل عدم شمول یعنی تعداد اعضای S که در هیچ یک از مجموعه‌های A ، B و C تعلق ندارند، بیان می‌شود. برای نشان دادن کاربرد اصل شمول و عدم شمول، فعالیتی مطرح شده است.

تکمیل فعالیت صفحه ۷۵

۱۳ ۱

۲ خیر، چون بر اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر است.

۳ مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیر نیستند را \bar{A} و مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیر نیستند را \bar{B} و مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش پذیر نیستند را \bar{C} تعریف می‌کنیم.

۴ بله، طبق قانون دمورگان به طور کلی داریم: $\overline{UA_i} = \cap \bar{A_i}$

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{(A \cup B) \cup C} = \overline{(A \cup B)} \cap \bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

۵

$$A = \{1 \leq n \leq 400 \mid 3 \mid n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{400}{3} \right] = 133$$

$$B = \{1 \leq n \leq 400 \mid 4 \mid n\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{400}{4} \right] = 100$$

$$C = \{1 \leq n \leq 400 \mid 5 \mid n\} \Rightarrow |C| = \left[\frac{400}{5} \right] = 80$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{400}{[3, 4]} \right] = \left[\frac{400}{12} \right] = 33 \quad |A \cap C| = \left[\frac{400}{[3, 5]} \right] = \left[\frac{400}{15} \right] = 26$$

$$|B \cap C| = \left[\frac{400}{[4, 5]} \right] = \left[\frac{400}{20} \right] = 20 \quad |A \cap B \cap C| = \left[\frac{400}{[3, 4, 5]} \right] = \left[\frac{400}{60} \right] = 6$$

$$|A \cup B \cup C| = 133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6 = 240$$

$$\Rightarrow |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 400 - 240 = 160$$

نکته مطرح شده در این فعالیت را می‌توان در حالت کلی بیان نمود، یعنی تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی k که بر عدد a بخش پذیر باشند برابر $\left[\frac{k}{a} \right]$ است و تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی k که هم

بر عدد a و هم بر عدد b بخش پذیر باشند برابر $\left[\frac{k}{[a, b]} \right]$ است.

حل کار در کلاس صفحه ۷۶

$$A = \{1 \leq n \leq 350 \mid 4 \mid n\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{350}{4} \right\rfloor = 87$$

$$B = \{1 \leq n \leq 350 \mid 5 \mid n\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{350}{5} \right\rfloor = 70$$

$$C = \{1 \leq n \leq 350 \mid 6 \mid n\} \Rightarrow |C| = \left\lfloor \frac{350}{6} \right\rfloor = 58$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{350}{[4,5]} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{350}{20} \right\rfloor = 17$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{350}{[4,6]} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{350}{12} \right\rfloor = 29$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{350}{[5,6]} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{350}{30} \right\rfloor = 11$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{350}{[4,5,6]} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{350}{60} \right\rfloor = 5$$

$$|A \cup B \cup C| = 87 + 70 + 58 - 17 - 29 - 11 + 5 = 163$$

$$\Rightarrow |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 350 - 163 = 187$$

برای درک بهتر دانش آموزان از کاربرد اصل شمول و عدم شمول، سوالات متنوعی مطرح شده است و با مباحثی که در فصل‌های قبل خوانده‌اند، مرتبط می‌باشند.

حل کار در کلاس صفحه ۷۷

۱) گراف‌های الف و پ مورد نظرند، چون رأس تنها ندارند و گراف‌های ب و ت را نباید شمرد.

۲) می‌دانیم تعداد کل گراف‌های ساده‌ای که می‌توان با p رأس رسم کرد، برابر است با: $\binom{p}{2} = 2$

پس تعداد کل گراف‌های ساده با سه رأس برابر است با: $\binom{3}{2} = 2 \cdot \frac{3(3-1)}{2} = 2 \cdot 3 = 8$

۳) A_a : مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای A تنها بماند.

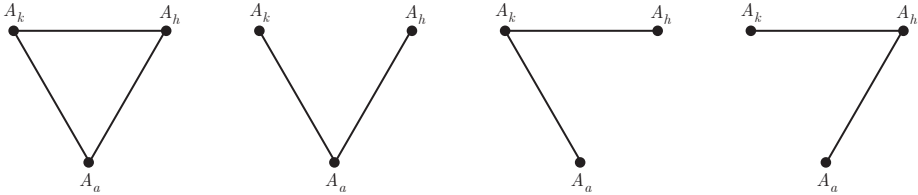
A_h : مجموعه راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای H تنها بماند.

$$|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$$

$$|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1 \quad |A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$$

$$|A_k \cap A_a \cap A_h| = 2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow |\overline{A_k \cap A_a \cap A_h}| = |\overline{A_k \cup A_a \cup A_h}| = |S| - |A_k \cup A_a \cup A_h| = 8 - 4 = 4$$



۶ الف) برای محاسبه $|A_k|$ ، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستای K تنها بماند، در این حالت روستای K را کنار می‌گذاریم و می‌ماند دو روستای دیگر، که ۱ یال (جاده) بین آنها وجود دارد که آن یال یا می‌تواند باشد و یا می‌تواند نباشد، پس می‌شود ۲ حالت و همین‌طور داریم: $|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$

ب) برای محاسبه $|A_k \cap A_a|$ ، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستاهای K و A تنها بمانند، در این حالت روستاهای K و A را کنار می‌گذاریم، می‌ماند یک روستا، پس می‌شود ۱ حالت و همین‌طور داریم:

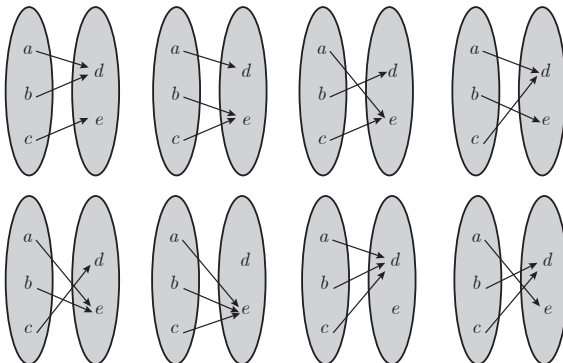
$$|A_k \cap A_a| = |A_k \cap A_h| = |A_a \cap A_h| = 1$$

ب) برای محاسبه $|A_k \cap A_a \cap A_h|$ ، یعنی تعداد طرق جاده‌کشی اگر روستاهای K و A و H تنها بمانند، که باز هم می‌شود ۱ حالت و داریم: $|A_k \cap A_a \cap A_h| = 1$

فعالیت صفحه ۷۸

قبل از بررسی و تکمیل حل آن، برای جلب توجه دانش‌آموزان از آنها خواسته شود، تعداد توابع یک مجموعه سه عضوی به یک مجموعه دو عضوی را با استفاده از رسم نمودار پیکانی پیدا کنند. مانند زیر:

$$f: \{a, b, c\} \rightarrow \{d, e\}$$



پس کلاً ۸ تابع وجود دارد.

با این مثال ساده، دانش‌آموزان درک می‌کنند که شمردن تعداد کل توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی، که تعداد اعضای بیشتری داشته باشند، کار مشکل و زمان‌بری است. حال با استفاده از اصول شمارش و بدون شمردن مستقیم به راحتی می‌توان از رابطه n^m تعداد کل توابع را پیدا نمود.

سپس تابع پوشا معرفی شده است و نشان داده می‌شود که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، می‌توان تعداد توابع پوشا را شمارش کرد.

نکته‌ای که دانش‌آموزان باید به آن دقت داشته باشند این است که با توجه به تعریف تابع پوشا، اگر $|A| < |B|$ باشد، هیچ تابع پوشای $f: A \rightarrow B$ وجود نخواهد داشت.

در قسمت ۱ فعالیت صفحه ۷۸، تعریفی برای مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 بیان شده است، A_1 شامل توابعی است که در آنها به b_1 پیکان نمی‌رسد، A_2 شامل توابعی است که در آنها به b_2 پیکان نمی‌رسد و A_3 شامل توابعی است که در آنها به b_3 پیکان نمی‌رسد. پس $A_1 \cap A_2$ شامل توابعی است که در آنها به b_1 و b_2 پیکان نمی‌رسد و به همین ترتیب، $A_1 \cap A_3$ شامل توابعی است که در آنها به b_1 و b_3 پیکان نمی‌رسد و $A_2 \cap A_3$ شامل توابعی است که در آنها به b_2 و b_3 پیکان نمی‌رسد.

در قسمت ۲ این فعالیت، برای پیدا کردن تعداد اعضای A_1 ، یعنی تعداد اعضای توابعی که به b_1 پیکان نمی‌رسد، با حذف b_1 از مجموعه B ، سؤال شبیه این است که چه تعداد تابع از مجموعه $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ به مجموعه $\{b_2, b_3\}$ وجود دارد، که برابر است با: $2^5 = 32$ و به همین صورت واضح است که: $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$ برای پیدا کردن تعداد اعضای $A_1 \cap A_2$ ، یعنی تعداد اعضای توابعی که به b_1 و b_2 پیکان نمی‌رسد، با حذف b_1 و b_2 از مجموعه B ، سؤال شبیه این است که چه تعداد تابع از مجموعه $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ به مجموعه $\{b_3\}$ وجود دارد، که برابر است با: $1^5 = 1$ و به همین صورت واضح است که: $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$ و در آخر $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$. از طرفی تعداد کل توابع از مجموعه ۵ عضوی به مجموعه ۳ عضوی برابر $3^5 = 243 = |S|$. بنابراین برای پیدا کردن تعداد اعضای مجموعه $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$ داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0 = 93$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 243 - 93 = 150$$

در ادامه، برای درک بهتر دانش‌آموزان مثال‌های عینی و کاربردی مطرح شده است.

در فعالیت صفحه ۷۹، می‌خواهیم تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را شمارش کنیم. بهتر است تعریف تابع یک به یک از دانش‌آموزان پرسیده شود تا برایشان یادآوری

شود که تابع یک به یک تابعی است که هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم یکسان نداشته باشند.

۱ ۶ راه

۲ ۵ راه، چون f باید یک به یک باشد، وقتی یکی از اعضای مجموعه B برای $f(a_1)$ انتخاب شده، پس ۵ انتخاب برای $f(a_2)$ خواهیم داشت.

۳ به ۴ طریق می‌توان $f(a_2)$ را تعریف کرد.

به ۳ طریق می‌توان $f(a_3)$ را تعریف کرد. $f(a_3) \neq f(a_2), f(a_3) \neq f(a_1), f(a_3) \neq f(a_2) \Rightarrow f$ یک به یک

$$\text{بنابراین تعداد کل توابع یک به یک برابر است با: } \frac{6!}{2!} = 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

سپس با نتیجه‌گیری از این فعالیت، فرمول تعیین تعداد کل توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B که معادل است با یافتن تعداد راه‌های انتخاب m شیء از k شیء، بیان می‌شود و مثالی برای یادگیری دانش‌آموزان مطرح شده است.

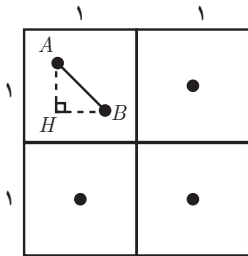
مبحث بعدی درس به معرفی اصل لانه کبوتری پرداخته شده است. اصل لانه کبوتری یکی از ساده‌ترین ابزار برای حل مسائل ترکیباتی می‌باشد و با آنکه صورت ساده‌ای دارد می‌توان مسائل مهم و پیچیده‌ای را با استفاده از این اصل حل نمود، که در واقع بدون استفاده از این اصل، اثبات و حل چنین مسائلی کاری بسیار دشوار خواهد بود. در کتاب برای ایجاد انگیزه یادگیری در دانش‌آموزان، شروع درس با سؤالی مطرح شده است و بهتر است به روش پرسش و پاسخ در کلاس مطرح گردد. سپس اصل لانه کبوتری بیان شده و با سؤالات متنوعی، کاربرد آن در حل مسائل نشان داده می‌شود.

پاسخ تمرین صفحه ۸۱

می‌دانیم باقی مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعداد $0, 1, 2, \dots, n-1$ می‌باشد، که آنها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، پس n لانه داریم. حال اگر $n+1$ عدد طبیعی دلخواه را به‌عنوان کبوترها در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این $n+1$ عدد، باقی مانده‌های تقسیمشان بر n با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a بر n هم باقی مانده بوده و بنابر هم‌نهشتی باید $a \equiv b \pmod{n}$ و حکم به دست می‌آید.

حل کار در کلاس صفحه ۸۱

۱ با توجه به شکل، مثلث اصلی یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ را به ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ تقسیم کرده و آنها را به‌عنوان ۹ لانه در نظر می‌گیریم. اکنون اگر ۱۰ نقطه را به‌عنوان ۱۰ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه در داخل یکی از این مثلث‌ها قرار گرفته و لذا فاصله این دو نقطه از یکدیگر کمتر از ۱ خواهد شد.



۲ مسئله : ۵ نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض اند، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از آنها کمتر از $\sqrt{2}$ است.

حل :

با توجه به شکل، وسط اضلاع موازی در مربع را به هم وصل کرده تا ۴ مربع به ضلع ۱ ایجاد شود. ۴ مربع کوچک را به عنوان ۴ لانه در نظر می گیریم. اکنون اگر ۵ نقطه را به عنوان ۵ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B وجود خواهند داشت که در داخل یکی از مربع ها قرار گیرند. ثابت می کنیم که $AB < \sqrt{2}$.

ضلع مربع کوچک $BH < BH$ ، ضلع مربع کوچک $AH < AH$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH < 1 \\ BH < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH^2 < 1 \\ BH^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 1 + 1 \xrightarrow{AH^2 + BH^2 = AB^2} AB^2 < 2 \Rightarrow AB < \sqrt{2}$$

۳ چهار فصل سال را به عنوان ۴ لانه و افراد یک خانواده ۵ نفری را به عنوان ۵ کبوتر در نظر می گیریم. با توجه به اصل کبوتری، دست کم دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار می گیرند، یعنی دست کم دو نفر از این ۵ نفر وجود دارند که فصل تولدشان یکی است.

۴ حالت (۱)، حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم، که در این صورت درجات رئوس از ۱ تا $p-1$ تغییر می کند. اگر رئوس هر گراف را به عنوان کبوترها و درجات رئوس از ۱ تا $p-1$ را به عنوان لانه ها در نظر بگیریم، بنابراین تعداد p کبوتر و $p-1$ لانه داریم که با توجه به اصل کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار بگیرند، یعنی حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

حالت (۲)، حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم، که در این صورت درجات بقیه رئوس از ۱ تا $p-2$ تغییر می کند. چون درجه رأس تنها صفر است و با کنار گذاشتن آن، تعداد $p-1$ رأس داریم. اگر رئوس گراف را به عنوان کبوترها و درجات رئوس از ۱ تا $p-2$ را به عنوان لانه ها در نظر بگیریم، بنابراین تعداد $p-1$ کبوتر و $p-2$ لانه داریم که با توجه به اصل کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار بگیرند، یعنی حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

نیازی نیست حالتی را برای دو رأس یا بیشتر تنها در نظر بگیریم، چون رأس های تنها درجه صفر دارند و کنار گذاشته می شوند، بنابراین از تعداد رئوس و تعداد درجات رئوس به یک اندازه کم می شود و تعداد رئوس همواره از تعداد درجات بیشتر می باشد.

فعالیت صفحه ۸۲، تعمیم اصل لانه کبوتری را به بیانی ساده مطرح می کند. مسئله هایی برای نشان دادن کاربرد این تعمیم مطرح شده است.

حل کار در کلاس صفحه ۸۳

۱ تعداد لانه‌ها برابر است با تعداد ماه‌های سال ضربدر تعداد روزهای هفته، یعنی: $n = ۱۲ \times ۷ = ۸۴$ ، از طرفی: $k = ۹ \rightarrow k + ۱ = ۱۰$ ، پس تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn + ۱ = ۸۴ \times ۹ + ۱ = ۷۵۷$ باشد.

۲

$$k + ۱ = ۵ \rightarrow k = ۴$$

$$kn + ۱ = ۵۴ \rightarrow ۴n = ۵۳ \rightarrow n = \left[\frac{۵۳}{۴} \right] = ۱۳$$

۲ با توجه به اینکه در زبان فارسی ۳۲ حرف وجود دارد، پس طبق اصل ضرب برای تعیین حرف اول و دوم فامیلی غیر تکراری هر فرد حاضر در همایش $۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲$ حالت وجود دارد. حال اگر این حالت‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، یعنی تعداد لانه‌ها برابر است با: $n = ۹۹۲$ ، از طرفی: $k + ۱ = ۳ \rightarrow k = ۲$ ، پس تعداد افراد حاضر در سالن همایش حداقل می‌بایست $kn + ۱ = ۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$ باشد.

حل مثال صفحه ۸۳

گرافی تعریف می‌کنیم که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطه دوستی بین هر دو دانش‌آموز، یالی بین رأس‌های متناظرشان باشد، پس درجه هر رأس، تعیین‌کننده تعداد دوستان دانش‌آموز متناظر با آن رأس خواهد بود. از طرفی می‌دانیم که در هر گراف ساده، حداقل ۲ رأس هم‌درجه وجود دارد، یعنی حداقل دو دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

توصیه آموزشی

- بهتر است برای حل فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های کتاب، به روش پرسش و پاسخ با دانش‌آموزان گفت‌وگو شود تا به این طریق آنان تفکرات ریاضی خود را توصیف و سازماندهی کنند و استحکام بخشند و یادگیری مفهومی صورت گیرد.
- قبل از ورود به مبحث جدید، پیش‌نیازهای آن مبحث در کلاس برای دانش‌آموزان یادآوری گردد تا ارتباط مفهومی میان مفاهیم ریاضی را به خوبی درک کنند.
- در این کتاب، تعمیم اصل شمول و عدم شمول برای حداکثر سه مجموعه بیان شده است، این مورد در طرح سؤالات امتحانات و ارزشیابی‌ها رعایت گردد.
- سطح سؤالات ارزشیابی، در حد مسائل مطرح شده در کتاب درسی باشد.

اشباهات رایج دانش آموزان

- عدم تشخیص تابع پوشا. به عنوان مثال، با توجه به تابع $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c\}$ ، نمی‌تواند تشخیص دهد $f_1 = \{(a, a), (b, c), (c, a), (d, c)\}$ پوشا هست یا نیست.
- به این نکته توجه ندارد که در تابع $f: A \rightarrow B$ ، اگر تعداد اعضای مجموعه A کمتر از تعداد اعضای مجموعه B باشد، امکان ندارد f پوشا باشد.
- قبل از پیدا کردن تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B ، به شرط $|A| \leq |B|$ دقت نمی‌کند.
- معمولاً نمی‌داند که چه زمانی باید از اصل لانه کبوتری استفاده کند و اینکه در مسئله مطرح شده، کبوترها کدام هستند و لانه‌ها کدام، دچار اشتباه می‌شود.
- به واژگان کلیدی «حداقل» و «حداکثر» در مسئله توجه ندارد.

حل تمرینات درس دوم صفحه ۸۴ کتاب

۱

$$A = \{1 \leq n \leq 90 \mid 2 \mid n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{90}{2} \right] = 45$$

$$B = \{1 \leq n \leq 90 \mid 3 \mid n\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{90}{3} \right] = 30$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{90}{[2, 3]} \right] = \left[\frac{90}{6} \right] = 15$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 45 + 30 - 15 = 60$$

۲

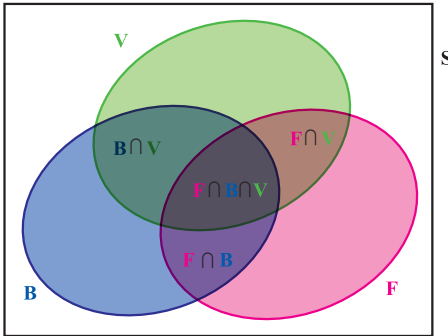
$$A = \{1 \leq n \leq 200 \mid 4 \mid n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{200}{4} \right] = 50$$

$$B = \{1 \leq n \leq 200 \mid 7 \mid n\} \Rightarrow \bar{B} = \{1 \leq n \leq 200 \mid 7 \nmid n\}$$

$$A \cap \bar{B} = A - (A \cap B) \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{200}{[4, 7]} \right] = \left[\frac{200}{28} \right] = 7$$

$$\Rightarrow |A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$



۳ الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟
پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

$$|F|=15, |V|=11, |B|=9, |\bar{F} \cap \bar{B} \cap \bar{V}|=10$$

$$|S|=34, |F \cap V|=5, |B \cap V|=6, |F \cap B|=3$$

الف)

$$|F \cup B \cup V| = |S| - |\bar{F} \cap \bar{B} \cap \bar{V}| = 34 - 10 = 24$$

$$\Rightarrow |F \cup B \cup V| = |F| + |B| + |V| - |F \cap V| - |B \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V|$$

$$\Rightarrow 24 = 15 + 11 + 9 - 5 - 6 - 3 + |F \cap B \cap V| \Rightarrow |F \cap B \cap V| = 3$$

ب)

$$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10$$

پ)

$$|V \cap \bar{B}| = |V| - |V \cap B| = 11 - 6 = 5$$

ت)

$$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10$$

$$|V| - |F \cap V| - |B \cap V| + |F \cap B \cap V| = 11 - 5 - 6 + 3 = 3$$

$$|B| - |F \cap B| - |B \cap V| + |F \cap B \cap V| = 9 - 3 - 6 + 3 = 3$$

$$\Rightarrow 10 + 3 + 3 = 16$$

۱۶ نفر فقط در یک رشته بازی می کنند.

۴ می خواهیم یک رمز ۵ رقمی به صورت \overline{abcde} بسازیم که در آن a, b, c, d, e ارقام ۱ تا ۹ می باشند.

ابتدا مجموعه های A, B, C را به صورت زیر و مخالف با آنچه مورد نظر مسئله است تعریف می کنیم:

$$A = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 2\} \Rightarrow |A| = 8^5$$

$$B = \{\overline{abcde} \mid a, b, c, d, e \neq 3\} \Rightarrow |B| = 8^5$$

$$C = \overline{\{abcde \mid a, b, c, d, e \neq \forall\}} \Rightarrow |C| = 8^5$$

$$A \cap B = \overline{\{abcde \mid a, b, c, d, e \neq 2, 3\}} \Rightarrow |A \cap B| = 7^5$$

$$A \cap C = \overline{\{abcde \mid a, b, c, d, e \neq 2, 7\}} \Rightarrow |A \cap C| = 7^5$$

$$B \cap C = \overline{\{abcde \mid a, b, c, d, e \neq 3, 7\}} \Rightarrow |B \cap C| = 7^5$$

$$A \cap B \cap C = \overline{\{abcde \mid a, b, c, d, e \neq 2, 3, 7\}} \Rightarrow |A \cap B \cap C| = 6^5$$

$$\text{تعداد کل ۵ رقمی‌ها} : |S| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5 = 59049$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 8^5 + 8^5 + 8^5 - 7^5 - 7^5 - 7^5 + 6^5 = 55659$$

$$|\overline{A \cap B \cap C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 59049 - 55659 = 3390$$

$$\Rightarrow \text{زمان لازم برحسب ثانیه} : 3390 \times 6 = 20340$$

۵

$$B \text{ به } A \text{ از } |B|^{|A|} = 4^5$$

در این سؤال $|A|=m=5$ ، $|B|=k=4$ و شرط $m \leq k$ برقرار نیست، بنابراین هیچ کدام از این تابع‌ها یک به یک نمی‌باشند.

۶ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک به یک از

$$\text{مجموعه ۵ عضوی به مجموعه ۸ عضوی، یعنی: } (\lambda)_5 = \frac{8!}{3!} = 6720$$

۷ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک

مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، که با توجه به تذکر صفحه ۷۹ کتاب از رابطه $3^m - (3 \times 2^m - 3)$ $3^m - (3 \times 2^m - 3)$ به دست می‌آید.

$$\left. \begin{array}{l} |A|=m=6 \geq 3 \\ |B|=3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3^6 - (3 \times 2^6 - 3) = 729 - 189 = 540$$

۸ اگر روزهای سال را به‌عنوان لانه‌ها و افراد را به‌عنوان کبوترها در نظر بگیریم، در این صورت

می‌خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ لانه قرار دهیم. چون تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه قرار گیرند، یعنی حداقل دو نفر وجود دارند که در یک روز متولد شده باشند.

تعداد کیبوترها = ۵۰۵

۹

$$\Rightarrow n = 7 \times 12 = 84 \Rightarrow \text{تعداد ماه‌های سال} \times \text{تعداد روزهای هفته} = \text{تعداد لانه‌ها}$$

طبق تعمیم اصل لانه کیبوتری داریم:

$$kn + 1 \xrightarrow{n=84} 505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کیبوتر در آن قرار می‌گیرند، یعنی لااقل ۷ نفر از دانش‌آموزان آن دبیرستان، روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۰ طبق تعمیم اصل لانه کیبوتری داریم:

$$\rightarrow n = 365 \text{ و } k + 1 = 2 \rightarrow k = 19$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کیبوترها} = kn + 1 = 19 \times 365 + 1 = 6936$$

یعنی حداقل ۶۹۳۶ نفر در آن سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی می‌باشند.

۱۱ می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲، یکی از اعداد ۰ و ۱ است، اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد بر ۲ را به‌عنوان لانه‌ها در نظر بگیریم، پس ۲ لانه داریم و ۳ عدد طبیعی را به‌عنوان کیبوترها در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کیبوتری، حداقل ۲ کیبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۳ عدد، باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۲ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۲ هم باقی‌مانده بوده، پس a و b هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود، که مجموعشان عددی زوج است.

۱۲ اعداد مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم: (افراز مجموعه A به

۴۲ زیرمجموعه)

$$\{42, 43\} \text{ و } \dots \text{ و } \{5, 80\} \text{ و } \{4, 81\} \text{ و } \{3, 82\} \text{ و } \{2, 83\} \text{ و } \{1, 84\}$$

دسته‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، بنابراین ۴۲ لانه داریم و می‌خواهیم ۴۳ کیبوتر را از اعداد درون آنها انتخاب کنیم. در بدترین شرایط از هر کدام از لانه‌ها یک عدد برداریم، چون ۴۲ لانه داریم و از هر لانه یک عدد انتخاب کرده‌ایم، پس ۴۲ عدد انتخاب شد، ولی مجموع هیچ دو عددی در بین اعداد انتخابی ۸۵ نمی‌باشد. حال یک عدد مانده که آن را از یکی از لانه‌ها انتخاب کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کیبوتری، حداقل دو عدد در این زیرمجموعه ۴۳ عضوی وجود دارند که مجموعشان برابر ۸۵ می‌باشد.

۱۳ اعداد مجموعه $A = \{1, 5, \dots, 81, 85\}$ را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم: (افراز مجموعه A

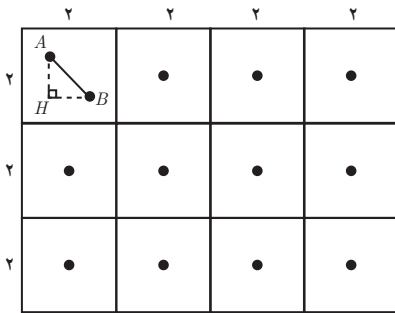
به ۱۲ زیرمجموعه)

$$\{1\}, \{5, 85\}, \{9, 81\}, \{13, 77\}, \{17, 73\}, \{21, 69\}, \{25, 65\}, \{29, 61\}, \{33, 57\}, \{37, 53\}, \{41, 49\}, \{45\}$$

چون مجموع عدد ۱ و همین‌طور عدد ۴۵ با هیچ‌کدام از اعداد داخل مجموعه A ، برابر ۹۰ نمی‌شوند،

لذا هر کدام از آنها را در یک دسته مجزا قرار دادیم.

دسته‌ها را به‌عنوان لانه‌ها در نظر می‌گیریم، بنابراین ۱۲ لانه داریم و می‌خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم. در بدترین شرایط از هر لانه یک عدد برداریم، پس ۱۲ عدد انتخاب شد و یک انتخاب دیگر مانده که آن را از یکی از لانه‌های موجود غیر از لانه‌های یک عضوی، چون قبلاً عدد درون آن را برداشته‌ایم، انتخاب می‌کنیم. پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.



۱۴ با توجه به شکل، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم کرده و آنها را به‌عنوان ۱۲ لانه در نظر می‌گیریم. اکنون اگر ۱۳ نقطه را به‌عنوان ۱۳ کبوتر تصور کنیم، در این صورت طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند، یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B وجود دارند که در داخل یک مربع قرار می‌گیرند. ثابت می‌کنیم که $AB < \sqrt{8}$

ضلع مربع $BH < 2$ و ضلع مربع $AH < 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH^2 < 4 \\ BH^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 4 + 4 \Rightarrow \xrightarrow{AH^2 + BH^2 = AB^2} AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

۱۵ هر نقطه به‌صورت زوج مرتب (a, b) دارای دو مؤلفه اول و دوم است که با توجه به زوج یا فرد بودن

هر کدام از مؤلفه‌ها، در یکی از دسته‌های زیر قرار می‌گیرد:

اگر هر دسته را به‌عنوان لانه و هر نقطه را به‌عنوان کبوتر در نظر بگیریم، در این صورت ۴ لانه و ۵ کبوتر داریم، که طبق اصل لانه کبوتری، لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه، با توجه به زوج یا فرد بودن مختصاتشان، مانند هم هستند. از طرفی چون مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است و مجموع دو عدد فرد، نیز عددی زوج می‌باشد، پس جمع مؤلفه‌های اول آنها و همچنین جمع مؤلفه‌های دوم آنها زوج است و بر ۲ بخش پذیرند. بنابراین مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح است.

	a	b
دسته ۱	زوج	زوج
دسته ۲	زوج	فرد
دسته ۳	فرد	زوج
دسته ۴	فرد	فرد

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید.

(الف) با جابه‌جایی ارقام عدد ۳۶۹۴۴۴، تعداد تا عدد شش رقمی می‌توان نوشت به طوری که رقم‌های ۴ یک در میان باشند.

(ب) با ارقام ۳، ۹، ۹، ۳ و ۹، به تعداد تا می‌توان کد ۵ رقمی نوشت.

(پ) شش نفر که دو نفر آنها برادر هستند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند. تعداد حالتی که دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند، برابر است.

(ت) تعداد طرقی که R مهره نامتمايز را می‌توان در N جعبه متمایز جا داد. به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد، برابر است. ($N \leq R$)

(ث) تعداد طرقی که می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد، برابر $\binom{\dots}{۳}$ است.

(ج) اگر A, B, C و زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A, B, C قرار ندارند، به صورت نشان داده می‌شود.

(چ) تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر ۳ بخش پذیر باشند، برابر است.

(ح) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به مجموعه ۸ عضوی برابر است.

(خ) تعداد توابع غیر یوشا از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ برابر است.

(د) هر گاه کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k+1$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) تعداد جایگشت‌های مختلف کلمه *consonant*، به طوری که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، برابر ۶! است.

(ب) تعداد طرقی که ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ کنار هم قرار گیرند به طوری که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، برابر $۳! \times ۲!$ است.

(پ) مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰ را می‌توان به تعداد $\frac{۱۰!}{۲! \times ۳! \times ۴!}$ طریق به مجموعه‌های ۲، ۳ و ۴ عضوی افراز نمود.

(ت) تعداد توابع غیر یک به یک از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ روی خودش، برابر ۲۱ تا است.

(ث) به تعداد $۵^۴$ تابع مانند $f: A \rightarrow B$ می‌توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است.

ج) تعداد طرقی که می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد به طوری که هر نفر حداکثر یک کتاب داشته باشد، برابر $\binom{8}{5}$ است.

چ) مجموعه اعدادی که بر a و بر b بخش پذیر باشد با مجموعه اعدادی که بر «ب م م» آن دو عدد بخش پذیرند، برابر می باشد.

ح) اصل لانه کبوتری قضیه ای است که با برهان خلف ثابت می شود.

خ) اگر ۴ نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ در نظر بگیریم، به طور یقین حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله شان کمتر از ۱ است.

د) از ۶۶ نفر در یک مهمانی، به طور یقین حداقل ۳ نفر یافت می شوند که نام خانوادگی آنها با یک حرف فارسی شروع شود.

۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) به چند طریق می توان ۸ سیب را بین چهار نفر تقسیم کرد که اولاً همه سیب ها تقسیم شوند. ثانیاً بریدن سیب مجاز نباشد، ثالثاً به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟

$$(1) \binom{8}{3} \quad (2) \binom{7}{4} \quad (3) \binom{8}{4} \quad (4) \binom{7}{2}$$

ب) ۱۸ تخته سیاه نامتمایز را به چند طریق می توان بین ۸ مدرسه تقسیم کرد؟

$$(1) 8^{18} \quad (2) 18^8 \quad (3) \binom{18+8-1}{8} \quad (4) \binom{18+8-1}{18}$$

پ) ۱۰ سکه بهار آزادی را به چند طریق می توان میان ۳ نفر تقسیم تصادفی نمود؟

$$(1) 66 \quad (2) 120 \quad (3) 720 \quad (4) 1000$$

ت) به چند طریق مختلف می توان تعداد ۵ کلید مشابه میله ای و ۱۰ کلید مشابه دکمه ای را در یک پانل کنترل کنار هم چید به طوری که کلید چهارم از نوع میله ای باشد؟

$$(1) 1001 \quad (2) 2002 \quad (3) 3003 \quad (4) 4004$$

ث) به چند طریق می توان ۲۰ مهره نامتمایز را در ۱۵ ظرف متمایز قرار داد به طوری که ظرف شماره ۷ درست ۴ مهره داشته باشد؟

$$(1) \binom{29}{14} \quad (2) \binom{30}{14} \quad (3) \binom{29}{13} \quad (4) \binom{30}{13}$$

ج) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ که $x_i \in N \cup \{0\}$ ، کدام است؟

$$\binom{14}{4} (۴) \quad \binom{13}{10} (۳) \quad \binom{13}{4} (۲) \quad \binom{10}{4} (۱)$$

ج) ۵ درخت کاج متمایز و ۷ درخت صنوبر متمایز و ۳ درخت سرو متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کاشت؟

$$\binom{15}{3} (۴) \quad 15! (۳) \quad \frac{15!}{3!} (۲) \quad \frac{15!}{5! \times 7! \times 4!} (۱)$$

ح) ۳ کتاب متمایز ریاضی و ۴ کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک قفسه قرار داد به طوری که کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند؟

$$720 (۴) \quad 540 (۳) \quad 360 (۲) \quad 180 (۱)$$

خ) کمترین مقدار m در مجموعه $\{m \text{ و } 22 \text{ و } 21 \text{ و } 20\}$ چقدر باشد تا حداقل ۶ عضو از مجموعه در تقسیم بر عدد ۶ باقی‌مانده‌های یکسانی داشته باشند؟

$$51 (۴) \quad 31 (۳) \quad 53 (۲) \quad 50 (۱)$$

د) حداقل تعداد نقاط درون دایره‌ای به شعاع واحد، به طوری که حداقل سه نقطه وجود داشته باشد که مساحت مثلث حاصل از این سه نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، کدام است؟

$$16 (۴) \quad 15 (۳) \quad 13 (۲) \quad 12 (۱)$$

ذ) در یک مهمانی حداقل چند نفر حضور داشته باشند تا دست کم چهار نفر از آنها در یک روز هفته و یک فصل از سال متولد شده باشند؟

$$113 (۴) \text{ نفر} \quad 85 (۳) \text{ نفر} \quad 112 (۲) \text{ نفر} \quad 84 (۱) \text{ نفر}$$

ر) تعدادی کتاب از چهار موضوع مختلف، متعلق به دانش‌آموزی می‌باشد، حداقل چند کتاب باید وجود داشته باشد تا دانش‌آموز لااقل ۳ کتاب از یک موضوع داشته باشد؟

$$13 (۴) \quad 5 (۳) \quad 8 (۲) \quad 9 (۱)$$

ز) حداقل چند دو تایی مرتب از اعداد صحیح انتخاب کنیم، تا به طور یقین لااقل در دو جفت انتخاب شده (a, b) و (c, d) ، حاصل هر عدد $a+c$ و $b+d$ زوج باشند؟

$$6 (۴) \quad 5 (۳) \quad 4 (۲) \quad 3 (۱)$$

ژ) در چند گراف ساده با رئوس a, b, c, d, e ، هیچ یک از رأس‌های a, b, c تنها نیستند؟

$$854 (۴) \quad 432 (۳) \quad 192 (۲) \quad 150 (۱)$$

س) n عدد طبیعی متمایز موجود است. حداقل مقدار n بقدر باشد تا اطمینان یابیم که حداقل ۳ عدد مابین آنها موجود است که دارای رقم یکان یکسانی بوده و در تقسیم بر ۳ باقی مانده‌های یکسان دارند؟

۶۰ (۱) ۹۰ (۲) ۶۱ (۳) ۹۱ (۴)

ش) اگر $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $|A \cap B| = 2$ و مجموعه $(A-B) \times (B-A)$ دارای ۲۱ عضو باشد، تعداد عضوهای مجموعه A کدام است؟

۷ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

ص) تعداد اعداد دو رقمی که مضرب ۷ هستند اما بر ۱۱ بخش پذیر نیستند، کدام است؟

۱۲ (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴)

ض) در مجموعه $\{1, 2, \dots, 60\}$ چند عدد وجود دارد که مضرب ۵ باشند، ولی بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۷ بخش پذیر نباشند؟

۳۴ (۱) ۶۸ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۵۴ (۴)

ط) چند تابع پوشای f می توان نوشت به طوری که: $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}$

۷ (۱) ۱۱ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴)

ظ) به چند طریق می توان بین سه روستای A, B و C جاده کشید، به طوری که هیچ روستایی تنها نماند؟

۱ (۱) ۱۴ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴) تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ب) $x_1 + x_2 + 1 \cdot x_3 = 23$

۵) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ ب) $x + y + (z+2)^2 = 12$

۶) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ را با شرط $x_1 > 1$ و $x_2 > 2$ و $x_3 > 3$ تعیین کنید.

۷) تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x + y + z + t = 48$ که $x > 5$ ، $z > 7$ ، $y > 6$ و $t > 8$ را به دست آورید.

۸) معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ با شرط $x_i \geq 2i - 1$ و $i = 1, 2, 3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۹) به چند طریق یک کلاس ۳۰ نفری می توانند به سه کاندیدای مشخص از کلاسشان رأی دهند؟ (هر دانش‌آموزی فقط یک رأی می دهد.)

۱۰ سه نوع گل و به تعداد فراوان از هر نوع داریم، ۸ شاخه گل از بین آنها انتخاب می‌کنیم به طوری که از هر نوع حداقل ۲ شاخه برداشته باشیم، تعداد راه‌های انتخاب چند تا است؟

۱۱ می‌خواهیم ۷ مداد را میان ۳ نفر توزیع کنیم به طوری که ممکن است به بعضی‌ها مداد نرسد، تعداد حالات چند تا است؟

۱۲ ۸ نفر می‌خواهند با ۳ ماشین سواری مسافرت بروند، به چند صورت می‌توانند مسافرت کنند؟

۱۳ می‌خواهیم ۱۰ شاخه گل را بین ۳ نفر تقسیم کنیم به طوری که به هر کس حداقل یک شاخه گل برسد. به چند طریق می‌توان این کار انجام داد؟

۱۴ هفت کیبوتر به چند طریق می‌توانند در سه لانه متمایز قرار گیرند به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱۵ ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان یک در میان در یک قفسه چید؟

۱۶ شماره پلاک ماشینی ۵۵۵ م ۱۱ است. چند پلاک ماشین با همین ۵ رقم و حرف «م» می‌توان ساخت؟

۱۷ ۹ نفر برای صعود یک کوه به چند طریق می‌توانند به گروه‌های ۲، ۳ و ۴ نفره تفکیک شوند؟

۱۸ با حروف کلمه Mississippi، چند کلمه ۱۱ حرفی می‌توان نوشت به طوری که:

الف) قیدی درباره مکان حروف نباشد.

ب) همه sها کنار هم باشند.

۱۹ در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به دست آمده است:

۶۰ نفر آنها مجله A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجله B، ۵۰ نفر مجله C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B و ۲۰

نفر مجله‌های B و C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجله A، B و C را می‌خوانند.

مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند.

ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند.

پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند.

۲۰ با ارقام ۱، ۲ و ۳ چند عدد شش رقمی ساخته می‌شود که در هر یک از آنها، هر یک از ارقام مذکور

حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۲۱ چه تعداد شماره شناسنامه پنج رقمی می‌توان ساخت که در آنها هر یک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل

یک بار ظاهر شوند؟

۲۲ اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{e, f\}$ باشد، مطلوب است :

الف) تعداد توابع از B به A

ب) تعداد توابع یک به یک از B به A

پ) تعداد توابع پوشا از B به A

۲۳ چند عدد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰ وجود دارد که نسبت به ۶۵ اول باشد؟

۲۴ در بین اعداد طبیعی، چند عدد سه رقمی داریم که نه بر ۳ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند؟

۲۵ ۶ مسافر به چند طریق می توانند در ۳ ایستگاه پیاده شوند به طوری که لا اقل در یکی از ایستگاه‌ها

کسی پیاده نشود؟

۲۶ ده نقطه داخل مربعی به ضلع واحد مفروض اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این ده نقطه کمتر

از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ می باشد.

۲۷ پنج نقطه داخل دایره‌ای به شعاع ۳ مفروض اند. نشان دهید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه

از $3\sqrt{2}$ کمتر است.

۲۸ ۱۴ عدد از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ را به دلخواه انتخاب می کنیم. ثابت کنید تفاضل حداقل دو

تا از عددها برابر ۷ است.

۲۹ از مجموعه $\{1, 2, 3, 5, 9, 13, 17\}$ یک زیرمجموعه انتخاب می کنیم. حداقل تعداد عضوهای

زیرمجموعه چند عضو باشد تا همواره مطمئن شویم دو عضو آن در رابطه $y = 4x + 1$ صدق می کند؟

۳۰ برای آنکه در یک شهرک حداقل چهل نفر در یکی از ماه‌های سال متولد شده باشند، باید در این

شهرک حداقل چند نفر زندگی کنند؟

۳۱ یک مجموعه ۳۶ عضوی از اعداد طبیعی داریم. اگر همه این اعداد را بر عدد ۳۵ تقسیم کنیم، نشان

دهید حداقل ۲ عدد از بین آنها یافت می شود که در تقسیم بر ۳۵ باقی مانده یکسان داشته باشند.

۳۲ نشان دهید هر زیر مجموعه از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ که دارای ۶ عضو می باشد، حداقل دو

عضو دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است.

۳۳ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه یازدهم و ۵ دانش آموز پایه دوازدهم مسئله‌ای طرح کنید

که پاسخ آن برابر باشد با :

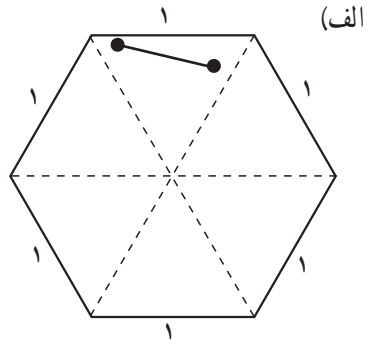
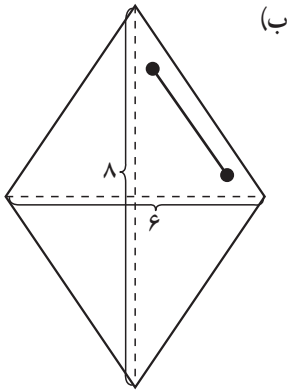
پ) $4! \times 5!$

ب) $4! \times 6!$

الف) $8! \times 5!$

۳۶ برای هر کدام از شکل‌های زیر مسئله‌ای طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ

دهید.



معلمان محترم و صاحب نظران گرامی می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از

طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email)

ارسال نمایند. talif@talif.sch.ir

دفتر تالیف کتاب های درسی عمومی متوسطه نظری