بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلىٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

حسابان (۲)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

راهنمای معلم

پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای معلم حسابان (۲) ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۳۸۱

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)

سعیدحق‌جو، محمود داورزنی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، محمدتقی طاهری‌تنجانی، مرتضی علیشاهی، مجتبی قربانی، آناهیتا کمیجانی و هادی‌مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)

مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی(مدیر امورفنی‌وچاپ) ـ جواد صفری(مدیرهنری) ـ شهرزاد قنبری(صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ فاطمه باقری‌مهر، سیدکیوان حسینی، نوشین معصوم‌دوست، سپیده ملک‌ایزدی و حمید ثابت‌کلاچاهی (امور آماده‌سازی)

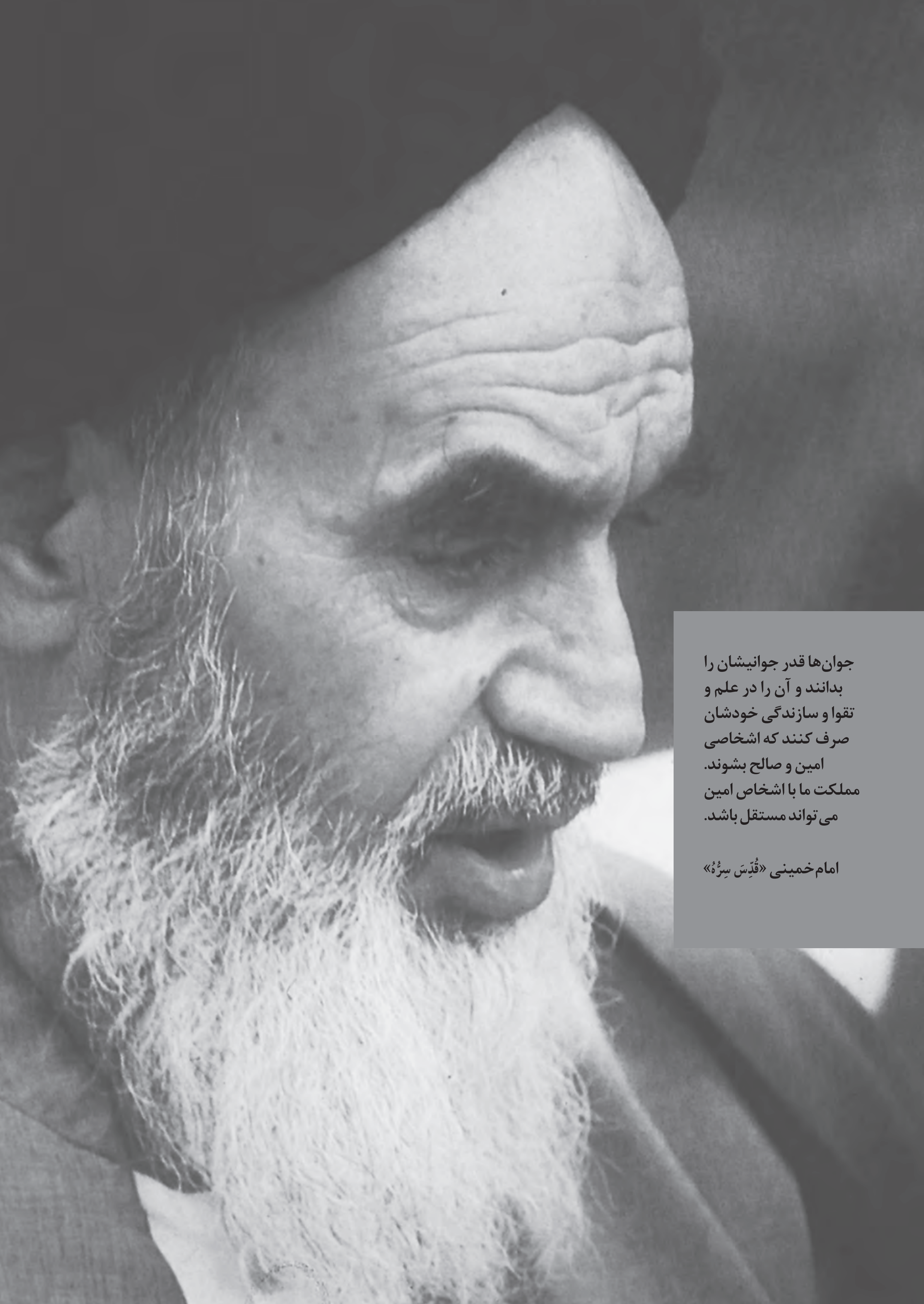
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۸

شابک ۲ـ۳۴۳۴ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3434-2



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست

مقدمه

ساختار کتاب درسی حسابان (۲) براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین طراحی شده است. فعالیت‌ها و موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم ریاضی فراهم می‌کنند و مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان هستند. معلم در این میان نقش مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها برعهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها توسط معلم وجود دارد. راهنمای حاضر براساس آن تنظیم شده است که کتاب درسی محور اصلی در فرایند آموزش باشد. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

برای تصویر عنوانی هر فصل اطلاعاتی مناسب و مرتبط با آن در کتاب راهنما آمده است. اهداف هر فصل و اهداف هر درس در کتاب حاضر توضیح داده شده است. همچنین در روش تدریس ارائه شده برای هر درس، نحوه اجرای هر فعالیت و چالش‌های پیش‌رو، پیشنهادهایی برای غنی‌سازی هر فعالیت، بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان در آن فعالیت و نیز توصیه‌هایی برای ارزشیابی نیز ارائه شده است. علاوه‌بر این در مورد پاسخ بیشتر فعالیت‌ها و تمرینات، راهنمایی به‌عمل آمده است. در کنار این بحث‌هایی نیز به‌عنوان دانستنی‌هایی برای معلم و همچنین نمونه سؤال‌هایی برای ارزشیابی ارائه شده است.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس باشند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حدود و ثغوری در کتاب مشخص شده است. رعایت این حد و مرزها، در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی الزامی است. روند کتاب نشان می‌دهد که حتی ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

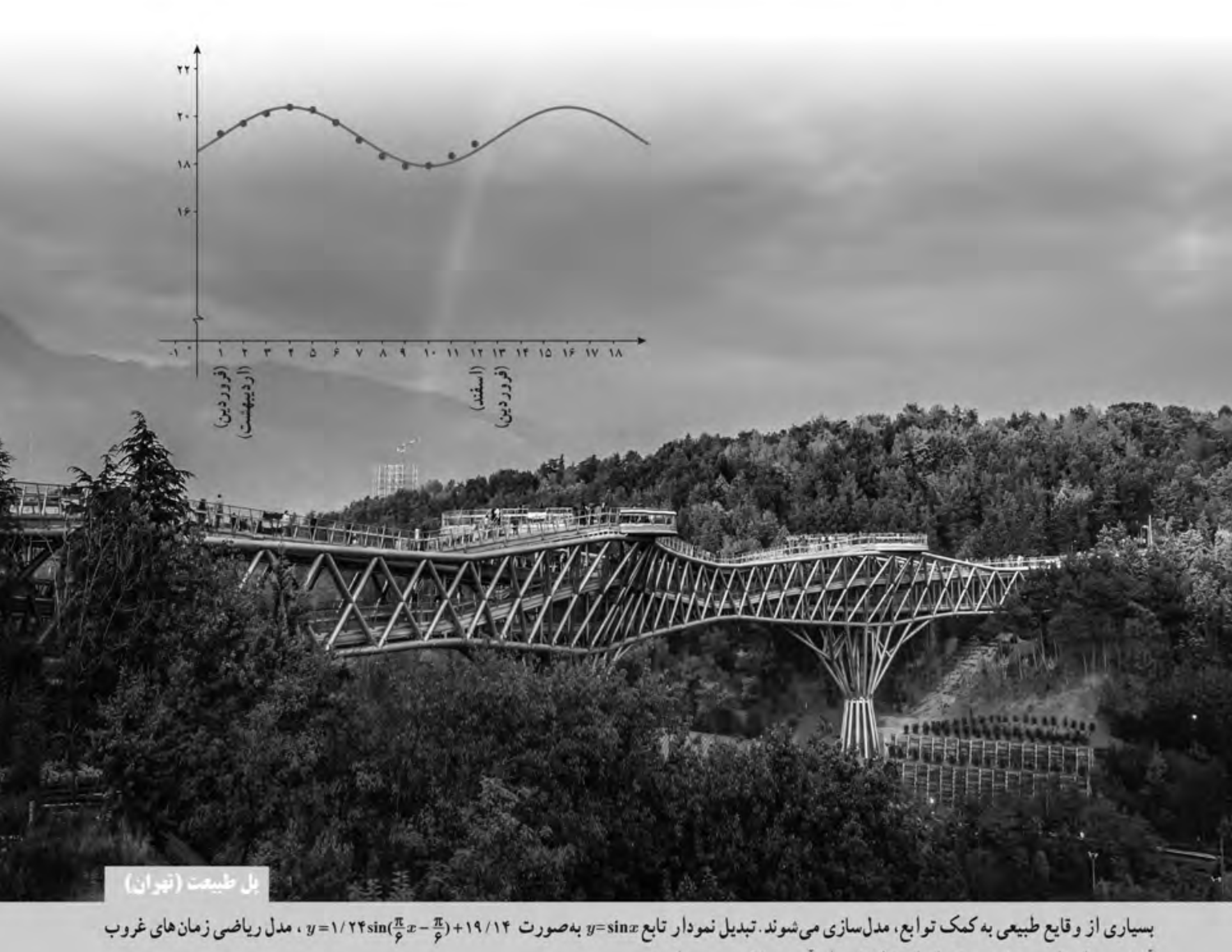
ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای آن در زندگی واقعی، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به‌صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که این موضوع باید مدنظر معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درسی را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان

تابع

فصل ۱



پل طبیعت (تهران)

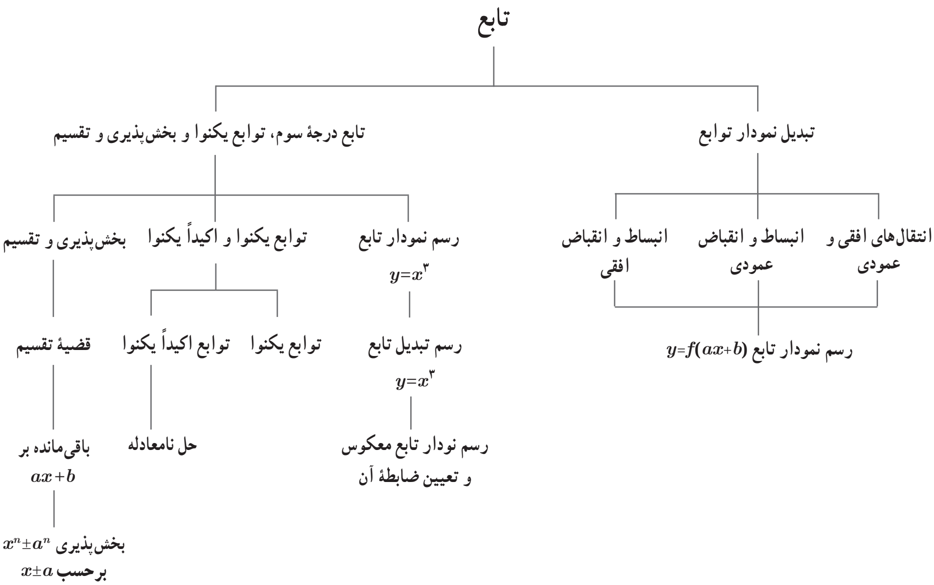
بسیاری از وقایع طبیعی به کمک توابع، مدل‌سازی می‌شوند. تبدیل نمودار تابع $y=\sin x$ به‌صورت $y=1/24\sin(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{6})+19/14$ ، مدل ریاضی زمان‌های غروب آفتاب در ابتدای هر ماه شهر تهران است که نمودار آن در بالا رسم شده است.

تابع

اهداف کلی فصل ۱

فصل اول با عنوان «تابع» شامل دو درس است. در درس اول، تبدیل نمودار توابع در شکل‌های مختلف خود که انتقال‌های افقی و عمودی و همچنین انبساط یا انقباض عمودی و افقی است، به‌طور یکجا بررسی می‌شود. در درس دوم، ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ به همراه تبدیل‌های مختلف آن آمده است و سپس تعریف توابع یکنوا به همراه درک شهودی آنها ذکر شده است. در همین قسمت به حل نامعادلات شامل توابع اکیداً یکنوا پرداخته شده است. در قسمت آخر این درس نیز تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر بررسی شده است. هدف از این بخش، چگونگی تجزیه x^n-a^n یا x^n+a^n برحسب $x-a$ یا $x+a$، برای nهای زوج و فرد است.

نقشهٔ مفهومی



تصویر عنوانی

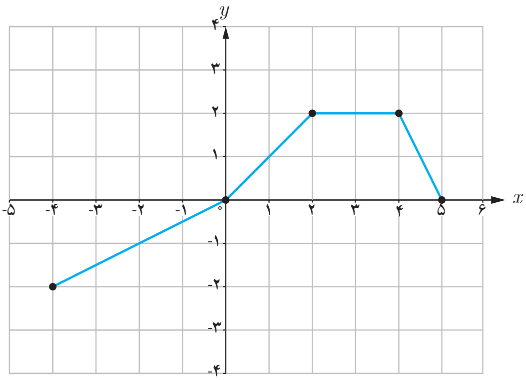
زمان‌های طلوع یا غروب خورشید با توابعی به شکل $y=a\sin[\omega(x-b)]+c$ مدل‌سازی می‌شوند که در آن همهٔ تبدیل‌های مختلف روی تابع $y=\sin x$ انجام شده است. به‌عنوان یک نمونه، زمان‌های غروب خورشید در شهر تهران و در ابتدای هر ماه به‌صورت $y=۱/۲۴\sin(\frac{\pi}{۶}x-\frac{\pi}{۶})+۱۹/۱۴$ مدل شده است. نمودار این تابع به همراه زمان‌های غروب خورشید نیز در یک نمودار رسم شده است.

سؤالات ارزشیابی فصل ۱

۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۲f(x-۲)+۱$

ب) $y=-f(۲x+۱)$



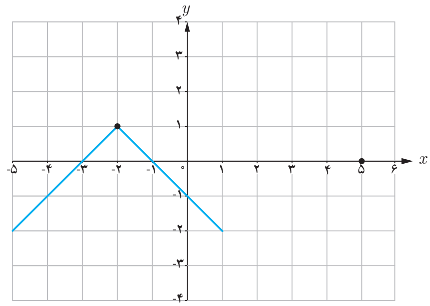
۲ دامنه و برد تابع f، بازه‌های $D_f=[-۲,+\infty)$ و $R_f=[-۳,۱]$ هستند. دامنه و برد توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y=-f(x)+۲$

ب) $y=f(-۲x+۳)$

۳ نمودار تابع $y=۲\sin\frac{x}{۲}-۱$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ رسم کنید.

۴ نمودار زیر از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=|x|$ به‌دست آمده است. ضابطهٔ این تابع را مشخص کنید.



۵ تابع $y=x^۳-۳x^۲+۳x+۲$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این تابع را به کمک نمودار $y=x^۳$ رسم کنید.

ب) نمودار $f^{-۱}$ را رسم کرده و ضابطهٔ آن را تعیین کنید.

۶ در هر مورد، نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در فاصله $[-\infty,۲]$ صعودی و در فاصله $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد.

ب) تابعی که در فاصله $(-\infty,۰)$ و $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ اکیداً صعودی نباشد.

۷ اگر f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً نزولی است.

۸ اگر f و g در یک فاصله به ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی باشند، تابع $f-g$ در این فاصله چه وضعیتی دارد؟

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $kx^{۲}-۲x+۱$ بر $x+۱$ برابر با ۲- باشد، k را به‌دست آورید.

۱۰ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $ax^{۳}-x^{۲}+۲bx-۱$ بر $x+۳$ بخش‌پذیر و بر $x-۲$ باقی‌ماندهٔ ۳ داشته باشد.

۱۱ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $(\frac{۱}{۲})^{۳x-۱} \leq \frac{۱}{۸}$

ب) $۲^{-x+۱} \geq ۴^{۲x-۱}$

پ) $\log_{۲}(۲x-۱) \leq \log_{۲}(-x+۱)$

ت) $\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۲) \leq ۴$

۱۲ هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته شده، تجزیه کنید.

الف) $x^{۸}-۱$ با عامل $x-۱$

ب) $x^{۶}-۶۴$ با عامل $x+۲$

پ) $x^{۵}+۳۲a^{۵}$ با عامل $x+۲a$

۱۳ $x^{۱۰}-۱$ برحسب چه عبارت‌هایی در زیر تجزیه می‌شود؟

الف) $x-۱$

ب) $x+۱$

پ) $x^{۲}-۱$

ت) $x^{۲}+۱$

درس ۱

تبدیل نمودار توابع

اهداف درس

۱ توانایی رسم توابع به شکل $y=af(bx+c)+d$ به کمک نمودار $y=f(x)$.

۲ محاسبه دامنه و برد تابع $y=af(bx+c)+d$ به کمک دامنه و برد تابع f.

۳ آشنایی با قرینه‌یابی نسبت به محورهای مختلف.

۴ تعیین ضابطهٔ یک نمودار که تبدیل به یک تابع شناخته شده است.

روش تدریس

از سال دهم، دانش‌آموز با رسم بعضی از توابع و انتقال‌های افقی و عمودی آنها آشنا شده‌اند. در ابتدای این درس، این مفاهیم به همراه استدلال‌های مربوطه آمده است.

۱ اگر (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x)+k$ باشد، سپس (x_0,y_0+k) یک نقطه از نمودار تابع g خواهد بود. بنابراین برای $k>0$، نقاط نمودار f به اندازهٔ k واحد به بالا و اگر $k<0$، این نقاط به پایین انتقال می‌یابند تا نمودار g مشخص شود.

۲ اگر (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x+k)$ باشد، سپس (x_0-k,y_0) یک نقطه از نمودار g خواهد بود. بنابراین برای $k>0$، نقاط نمودار f به اندازهٔ k واحد به چپ و اگر $k<0$، این نقاط به راست انتقال می‌یابند تا نمودار g رسم شود.

برای تفهیم این دو مطلب، در مثال‌های مربوطه، دامنه و برد f را محدود کنید تا تغییرات دامنه و برد در تابع g مشاهده شود. کار در کلاس صفحهٔ ۴ برای این موضوع آورده شده است. می‌توان بعد از این

کار در کلاس، جمع‌بندی به‌صورت زیر انجام داد.

اگر دامنه و برد تابع f به‌صورت $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$ باشد، سپس :

الف) دامنه و برد تابع $g(x)=f(x)+k$ عبارت است از : $D_g=[a,b]$ و $R_g=[c+k,d+k]$.

ب) دامنه و برد تابع $h(x)=f(x+k)$ عبارت است از : $D_h=[a-k,b-k]$ و $R_h=[c,d]$.

در مثال‌های بعدی می‌توان دامنه و برد f را بازه‌هایی انتخاب کرد که از یک یا دو طرف بی‌کران باشند. از شمارهٔ (۲) کار در کلاس صفحهٔ ۴ می‌توان برای این منظور استفاده کرد.

یک بخش مهم از مثال‌های دیگر، رسم توابع به شکل $y=f(x+k)+l$ است که نمودار f داده شده است. مثال صفحهٔ ۵، برای این منظور داده شده است.

انبساط و انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ که در نمودار $g(x)=kf(x)$ $(k>۰)$ به‌وجود می‌آید، مشابه رویه‌ای است که در انتقال‌ها آمده است، در صفحهٔ ۶ مشاهده می‌شود. انجام فعالیت این صفحه در رسم نمودارهای $y=۳\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ و مقایسه نمودار آنها با $y=\sin x$، تفاوت آنها را به خوبی نشان می‌دهد. استدلال مربوط بـه این مطلب نیز در همین صفحه آمده است. اگـر $k<۰$، نمودار تـابع g، قـرینهٔ تابع f نسبت به محور xها است، بنابراین همان‌طور کـه در صفحهٔ ۷ آمده است، نمودار تابع g فقط برای $k>۱$ و $۰<k<۱$ بحث شده است. در کار در کلاس صفحهٔ ۷، ۳ موضوع اشاره شده است.

۱ تعیین دامنه و برد تابع $g(x)=kf(x)$ از روی دامنه و برد تابع f.

اگر $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$، سپس :

$$k>۰\Rightarrow\begin{cases}D_g=[a,b]\\R_g=[kc,kd]\end{cases}\quad,\quad k<۰\Rightarrow\begin{cases}D_g=[a,b]\\R_g=[kd,kc]\end{cases}$$

۲ رسم چند تابع برای دست‌ورزی بیشتر.

رسم توابع $y=-x^۲$ و $y=۲x^۲-۱$ و همچنین شماره (۳) کار در کلاس، برای این موضوع است.

۳ تعیین ضابطهٔ نموداری که فقط از قرینه‌یابی و انتقال یک نمودار دیگر به‌دست آمده است. قسمت (پ) از شمارهٔ ۲ این کار در کلاس به این موضوع پرداخته است. برای تعیین ضابطهٔ این تابع می‌توانید روش‌های مختلفی را انتخاب کنید.

از جمله، دو روش زیر :

روش اول :

$$y=|x|\xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}}y=|x+۲|\xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}}y=|x+۲|+۱\xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}}y=-|x+۲|-۱$$

روش دوم :

$$y=|x| \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} y=-|x| \xrightarrow{\text{۱ واحد به پایین}} y=-|x|-1 \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y=-|x+2|-1$$

انبساط و انقباض افقی، آخرین بخش از این درس است. در فعالیت صفحهٔ ۸، ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ در فاصله $[0,2\pi]$ رسم شده است و سپس از دانش‌آموزان خواسته شده که نمودار تابع $y=\sin 2x$ را در فاصلهٔ $[0,\pi]$ رسم کنند. رسم هر دو نمودار در یک دستگاه و مقایسه آنها، انقباض افقی نمودار $y=\sin x$ را نشان می‌دهد. نتیجهٔ این فعالیت در حالت کلی به این صورت است که اگر (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، سپس $(\frac{x_0}{k},y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع $g(x)=f(kx)$ است. پس برای رسم تابع g کافیست طول نقاط تابع f را در $\frac{1}{k}$ ضرب کرد.

مشابه قسمت قبل، فقط برای مقادیر مثبت k، تقسیم‌بندی به‌صورت $k>1$ و $0<k<1$ انجام شده و برای $g(x)=f(-x)$، بحث قرینه کردن نسبت به محور yها مطرح شده است تا برای مقادیر منفی k، نیاز به بحث نباشد.

کار در کلاس صفحهٔ ۱۰، دقیقاً اهداف کار در کلاس صفحهٔ ۷ را دارد. در شمارهٔ ۱ این کار در کلاس اگر دامنه و برد تابع f برابر با $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$ باشد و $g(x)=f(kx)$، سپس

$$k>0 \Rightarrow \begin{cases} D_g=[\frac{a}{k},\frac{b}{k}] \\ R_g=[c,d] \end{cases} \quad , \quad k<0 \Rightarrow \begin{cases} D_g=[\frac{b}{k},\frac{a}{k}] \\ R_g=[c,d] \end{cases}$$

آخرین مثال از این درس، به رسم نمودار توابعی به شکل $g(x)=f(ax+b)$ می‌پردازد. یافتن نقطهٔ متناظر $(x_\circ,y_\circ)$ از نمودار f روی نمودار g، از ضابطهٔ معکوس $y=ax+b$ به‌دست می‌آید :

$$y=ax+b \xRightarrow{\text{جابه‌جایی } x \text{ و } y} x=ay+b \Rightarrow y=\frac{x-b}{a}$$

بنابراین نقطهٔ متناظر $(x_\circ,y_\circ)$ از f، نقطهٔ $(\frac{x_\circ-b}{a},y_\circ)$ از نمودار $y=f(ax+b)$ خواهد بود. با توجه به این مطلب، دو روش زیر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد می‌شود.

■ **روش اول :**

$$(x_\circ,y_\circ)\in f \xrightarrow{b \text{ واحد به چپ}} (x_\circ-b,y_\circ) \xrightarrow[\text{در } \frac{1}{a}]{\text{ضرب طول نقاط}} (\frac{x_\circ-b}{a},y_\circ)\in g$$

■ **روش دوم :**

$$(x_\circ,y_\circ)\in f \xrightarrow[\text{در } \frac{1}{a}]{\text{ضرب طول نقاط}} (\frac{x_\circ}{a},y_\circ) \xrightarrow[\text{انتقال به چپ}]{\frac{b}{a} \text{ واحد}} (\frac{x_\circ}{a}-\frac{b}{a},y_\circ)\in g$$

وجود روش دوم به‌خاطر تساوی $\frac{x_\circ-b}{a}=\frac{x_\circ}{a}-\frac{b}{a}$ است.

درس ۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

اهداف درس

۱ درک مفاهیم یکنوا و اکیداً یکنوا و توانایی تعیین بازه‌هایی که توابع مختلف در آنها این خواص را دارند.

۲ درک تعریف توابع اکیداً یکنوا و حل نامعادلاتی که شامل این توابع هستند.

۳ آشنایی با قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

۴ توانایی تعیین باقی‌مانده تقسیم یک چندجمله‌ای بر $ax+b$

۵ توانایی تجزیه $x^n \pm a^n$ با عامل‌های $x \pm a$؛ برای nهای زوج و فرد.

روش تدریس

این درس همان‌طور که از نام آن برمی‌آید، شامل ۳ بخش است. در بخش اول تابع چندجمله‌ای تعریف می‌شود و سپس در ادامهٔ آن، تابع درجه سوم $y=x^3$، به کمک نقطه‌یابی رسم می‌شود. رسم هر تابع درجهٔ سوم در این زمان برای دانش‌آموزان امکان‌پذیر نیست ولی می‌توان هر تابع درجهٔ سومی که از تبدیل تابع $y=x^3$، مانند $y=(x+1)^3-2$ حاصل می‌شود را رسم کرد. شمارهٔ ۱ از کار در کلاس صفحهٔ ۱۴ به این موضوع می‌پردازد. در قسمت (پ) کافیست تابع را به‌صورت زیر بنویسیم:

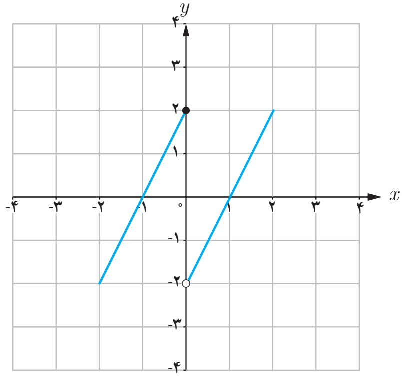
$$y=x^3-3x^2+3x=x^3-3x^2+3x-1+1=(x-1)^3+1$$

شمارهٔ ۲از این کار در کلاس به مقایسهٔ نمودار توابع $y=x^3$ و $y=x^2$ در ربع اول و در بازهٔ $[0,2]$ می‌پردازد و نشان می‌دهد که در فاصلهٔ $[0,1]$، نمودار $y=x^3$ پایین‌تر از نمودار $y=x^2$ است ولی در فاصله $[1,2]$، این رفتار عوض می‌شود. مقایسهٔ رفتار این دو تابع را می‌توان از مقایسهٔ x^2 و x^3 نیز نتیجه گرفت.

بخش دوم این درس به توابع صعودی و نزولی پرداخته است. مفهوم صعودی و نزولی از روی نمودار صفحهٔ ۱۵ و انجام فعالیت این صفحه به خوبی قابل درک است. تعریف دقیق این توابع در صفحهٔ ۱۶ آمده

است. ذکر یک نکته در اینجا ضروری است : هدف این بخش، درک توابع یکنوا از روی نمودار است و نه اثبات یکنوایی به کمک ضابطهٔ تابع.

در صفحهٔ ۱۷، توابع اکیداً یکنوا، با همان نگاه توابع یکنوا، تعریف شده‌اند. کار در کلاس این صفحه به ۳ مطلب می‌پردازد. شماره‌های ۱ و ۲، برای رسم توابع شناخته شده و تعیین فاصله‌هایی است که این توابع در آنها اکیداً یکنوا هستند. باید دقت داشت که ممکن است یک تابع در زیر بازه‌هایی از دامنه، اکیداً یکنوا باشد ولی در کل دامنه، اکیداً یکنوا نباشد. مثلاً تابع زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی نیست ولی در فاصله‌های $(-\infty,0]$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



در شمارهٔ ۳ این کار در کلاس، هر تابع اکیداً صعودی در یک فاصله، صعودی نیز خواهد بود ولی عکس این مطلب صحیح نیست (مانند تابع $y=3$ در فاصله $(0,+\infty)$) برای پاسخ به این سؤال و موارد مشابه، از تعابیر فارسی نیز می‌توان استفاده کرد.

در شمارهٔ ۴، می‌دانیم که اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، سپس برای هر a و b در این فاصله داریم :

$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

این گزاره شرطی، معادل با عکس نقیض خود یعنی گزارهٔ شرطی زیر است :

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$$

از این مطلب برای حل نامعادلاتی می‌توان استفاده کرد که یک تابع اکیداً صعودی وجود دارد و می‌توان

تابع f را در نامعادله حذف کرد. به‌عنوان مثال، برای حل نامعادله قسمت (ب)، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\log (x+۱)\leq\log(۲x-۳) \xRightarrow[\text{صعودی است.}]{\text{تابع } y=\log x \text{ اکیداً}} x+۱\leq۲x-۳ \Rightarrow x\geq۴$$

البته باید دقت کرد که این جواب باید با دامنهٔ توابع $y=\log(x+۱)$ و $y=\log(۲x-۳)$ اشتراک گرفته شود که در اینجا جواب نهایی همان $x\geq۴$ است.

برای توابع اکیداً نزولی، بحث مشابهی وجود دارد که تمرین ۹ در صفحهٔ ۲۲ به این مطلب پرداخته است. آخرین بخش از این درس، تقسیم و بخش‌پذیری است. ابتدا قضیهٔ تقسیم به شکل خطی به‌صورت $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$ با انجام یک فعالیت، آموزش داده می‌شود. سپس در فعالیت صفحهٔ ۱۹، به کمک این قضیه به راحتی می‌توان باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ را به‌دست آورد و نشان داد که $r(x) = f(\frac{-b}{a})$. اثبات این مطلب به‌صورت زیر است :

$$f(x) = (ax+b)q(x)+r(x) \xrightarrow{x=-\frac{b}{a}}$$

$$f(-\frac{b}{a}) = ۰\times q(x)+r(x) \longrightarrow$$

$$f(-\frac{b}{a}) = ۰$$

کار در کلاس پایین صفحهٔ ۱۹ برای دست‌ورزی در این زمینه است.

در آخرین فعالیت این درس، با انجام مراحل خواسته شده، x^n-a^n برحسب $x-a$ تجزیه می‌شود. برای انجام شماره ۳ از این فعالیت، می‌توان به دو صورت عمل کرد. می‌توانید این شماره را از شمارهٔ ۱ نتیجه گرفت و یا می‌توان x^n-a^n را بر $x-a$ به‌صورت زیر تقسیم کرد :

$$\begin{array}{l|l}
x^n-a^n & x-a \\ \hline
\underline{x^n-ax^{n-۱}} & x^{n-۱}+ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}+\dots+a^{n-۲}x+a^{n-۱} \\
ax^{n-۱}-a^n & \\
\underline{ax^{n-۱}-a^۲x^{n-۲}} & \\
a^۲x^{n-۲}-a^n & \\
\quad\vdots & \\ \hline
\quad ۰ &
\end{array}$$

اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است، از شمارهٔ ۲ نتیجه می‌شود و اینکه خارج قسمت چگونه نوشته شده است، از مقایسهٔ هر جمله با جملهٔ قبل صورت گرفته است.

با تعویض a به $-a$ و بحث راجع به nهای فرد و زوج، اتحادهای دیگری نتیجه می‌شود که کار در کلاس صفحهٔ ۲۰ به این مطالب پرداخته است.

فصل ۲

مثلثات

انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به‌هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

درس ۱
تناوب و تانژانت

اهداف درس

۱ درک مفهوم تناوب و نقش آن در ساختار توابع متناوب مثلثاتی

۲ تشخیص دورهٔ تناوب در توابع با ضابطهٔ $y = a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

۳ تشخیص مقدار ماکزیمم و مینیمم در توابع با ضابطهٔ $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

۴ تعیین ضابطه از روی نمودار توابع $y= a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

۵ درک تأثیر پارامترهای a، b و c در توابع با ضابطهٔ $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این توابع.

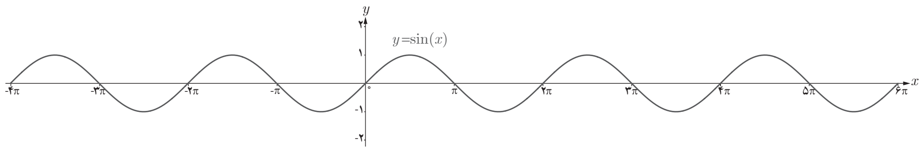
۶ آشنایی با تابع تانژانت و تغییرات آن در دایرهٔ مثلثاتی.

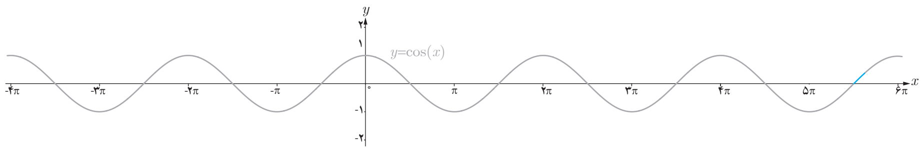
۷ آشنایی با نمودار تابع تانژانت و ارتباط آن با دایرهٔ مثلثاتی.

۸ تشخیص مقدار و علامت تانژانت زاویهٔ دلخواه با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی.

روش تدریس

در ابتدای درس با توجه به شناخت نسبی که دانش‌آموزان از توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ دارند، مفهوم دورهٔ تناوب بیان شده است و با تأکید بر یکسان بودن مقادیر این دو تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ ۲π روی محور xها این مفهوم توضیح داده شده است. در کتاب ریاضی ۲ (حسابان ۱) روابط $\sin(x\pm ۲k\pi)=\sin x$ و $\cos(x\pm ۲k\pi)=\cos x$ در فصل مثلثات آورده شده است و معلم می‌تواند با توضیح و یادآوری مفهوم این دو تساوی با استفاده از نمودارهای $\sin x$ و $\cos x$ که در صفحهٔ ۳۲ (۲۴) کتاب رسم شده است، به درک بهتر دانش‌آموزان به این مفهوم کمک نماید.





با توجه به اینکه نمودار این توابع در بازه‌هایی به طول ۲π، ۴π، ۶π، ۸π و . . . و کلاً ۲kπ تکرار می‌شود، می‌توان گفت در تمام آنها تابع تکرار می‌شود اما در کتاب، دورهٔ تناوب را کوچک‌ترین آنها معرفی کرده است و به‌طور کلی :

تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم : $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دورهٔ تناوب f می‌نامیم.

تذکر : مفهوم تناوب و دورهٔ تناوب برای توابع غیرمثلثاتی نیز به‌کار می‌رود ولی کتاب تنها به بررسی این مفهوم در توابع مثلثاتی که اشاره شد، پرداخته است و از تدریس تناوب در توابع دیگر احتراز شود.

همچنین از بررسی تناوب توابع مثلثاتی پیچیده که حاصل‌ضرب یا حاصل‌جمع و . . . دو یا چند تابع مثلثاتی هستند نیز اجتناب شود. دلیل این امر تأکید بر مفهوم اصلی تناوب و نیز احتراز از تکنیک‌های محاسباتی برای یافتن دورهٔ تناوب توابعی است که دانش‌آموز صرفاً با توجه به عملیات جبری، دورهٔ تناوب آنها را یافته و قادر به رسم نمودار آنها نیست و نمی‌تواند تناوب تابع را از روی نمودار آن بررسی کند.

ازاین‌رو به دبیران محترم توصیه می‌شود که با استفاده از ابزارهای نوین آموزشی مانند نرم‌افزار جئوجبرا (GeoGebra[1]) سعی در تعمیق مفهوم به‌جای آموزش رویه‌های جبری داشته باشند. بدیهی است آموزش رویه‌ها نیز در جای خود اهمیت داشته و بخش بزرگی از آموزش ریاضی را تشکیل می‌دهند. اما تأکید روی این رویه‌ها بدون درک درستی از مفهوم دورهٔ تناوب مدنظر کتاب نمی‌باشد.

۱ــ این نرم‌افزار از سایت www.GeoGebra.org قابل دانلود است. در این سایت محتواهای مفیدی برای استفاده در کلاس درس قابل دسترسی است.

فعالیت ص ۲۴

۱ هدف این فعالیت، بررسی تأثیر ضریب a در تابع $f(x)=a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع است. در جدول صفحهٔ ۲۵ نمودار توابع مختلفی با ضابطهٔ $y=a\sin x$ و مقادیر مختلف a رسم شده است، که مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب توابع از روی نمودار آنها مشخص می‌شود. برای مثال در تابع $y=-۳\sin x$، مقدار ماکزیمم ۳ و مقدار مینیمم ۳− است و دورهٔ تناوب ۲π است و یا در تابع $y=-\frac{۱}{۳}\sin x$ مقدار ماکزیمم $\frac{۱}{۳}$ و مقدار مینیمم $-\frac{۱}{۳}$ و دورهٔ تناوب نیز ۲π است.

۲ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تابع $y=a\sin x$ و $y=a\cos x$ داریم :

$$\max=|a| \quad , \quad \min=-|a| \quad , \quad T=۲\pi$$

یعنی ضریب a بر مقدار ماکزیمم و مینیمم مؤثر است ولی دورهٔ تناوب را تغییر نمی‌دهد.

۳ همچنین با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع بدیهی است که در صورت انتقال عمودی یک تابع، دورهٔ تناوب آن تغییر نمی‌کند ولی مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع تغییر می‌کنند و داریم :

$$\begin{cases} y=a\sin x+c \\ y=a\cos x+c \end{cases} \to \max=|a|+c \;,\; \min=-|a|+c \;,\; T=۲\pi$$

فعالیت ص ۲۶

۱ هدف این فعالیت بررسی تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر max و min این تابع است. در جدول این فعالیت، نمودار توابع مختلفی با ضابطهٔ $y=\sin bx$ و مقادیر مختلف b رسم شده است که مقادیر max و min و دورهٔ تناوب توابع از روی نمودار آنها مشخص می‌شود. برای مثال در تابع $y=\sin(-۳x)$، مقدار max برابر ۱ و مقدار مینیمم برابر ۱− و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{۳}$ است و یا در تابع $y=\sin(\frac{x}{۲})$ مقدار max برابر ۱ و مقدار مینیمم برابر ۱− و دورهٔ تناوب ۴π است.

۲ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در تابع $y=\sin bx$ و $y=\cos bx$ داریم :

$$\max=۱ \quad , \quad \min=-۱ \quad , \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}$$

۳ همچنین با توجه به ویژگی‌های انتقال توابع بدیهی است که در صورت انتقال عمودی یک تابع، دورهٔ تناوب آن تغییری نمی‌کند ولی مقادیر max و min تابع تغییر می‌کنند و داریم :

$$\begin{cases} y = \sin bx + c \\ y = \cos bx + c \end{cases} \rightarrow \max = ۱ + c \ , \ \min = -۱ + c \ , \ T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

نتیجه : با توجه به دو فعالیت قبل می‌توان گفت که در دو تابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع تأثیری ندارد ولی در مقدار max و min آن مؤثر است اما ضریب b در دورهٔ تناوب تابع مؤثر بوده ولی در مقدار max و min آن تأثیری ندارد و انتقال عمودی نیز که با مقدار c مشخص می‌شود در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و فقط در مقدار max و min تابع اثرگذار است.

> توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

بنابراین اگر ضابطهٔ تابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ باشد می‌توانیم مقادیر ماکزیمم و مینیمم و همچنین دورهٔ تناوب تابع را به‌دست آوریم و به عکس اگر این مقادیر را داشته باشیم می‌توانیم ضابطهٔ توابع مورد نظر را بنویسیم.

مثال ص ۲۷

در این مثال چهار ضابطهٔ تابع داده شده و دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هرکدام را خواسته است که با استفاده از مطالبی که گفته شد می‌توان مقادیر مورد نظر را به‌دست آورد :

الف) $\left.\begin{matrix} y = ۳\sin(۲x) - ۲ \\ a = ۳ , b = ۲ , c = -۲ \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \max = |a| + c = |۳| - ۲ = ۱ \\ \min = -|a| + c = -|۳| - ۲ = -۵ \end{matrix}$

و $T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi$

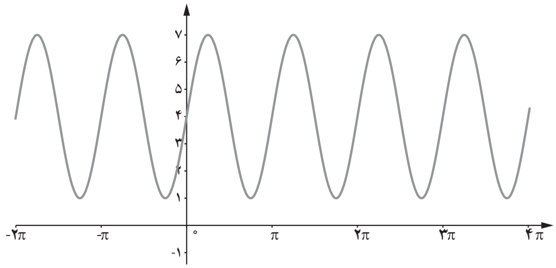
ب) $\left.\begin{matrix} y = \pi\sin(-x) + ۱ \\ a = \pi , b = -۱ , c = ۱ \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \max = |\pi| + ۱ = \pi + ۱ \\ \min = -|\pi| + ۱ = ۱ - \pi \end{matrix}$

و $T = \frac{۲\pi}{|-۱|} = ۲\pi$

مثال ص ۲۸

در این مثال چهار نمودار مثلثاتی آورده شده و با تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم، ضابطهٔ تابع را خواسته است.

الف)

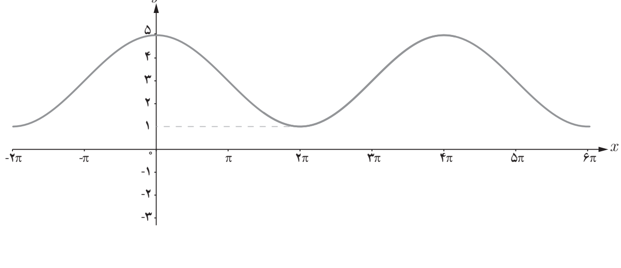


با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که ماکزیمم یا مینیمم تابع در $x=۰$ واقع نشده است، بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به‌صورت $y=a\sin bx+c$ باشد. مقدار max برابر ۷ و مقدار min برابر ۱ است. همچنین با دقت در نمودار مشخص است که طول بازه‌ای که تابع در آن یک بار تکرار می‌شود برابر π است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} |a|+c=۷ \\ -|a|+c=۱ \end{cases} \to ۲c=۸ \to c=۴ \quad , \quad |a|=۳ \text{ و } \frac{۲\pi}{|b|}=\pi \to |b|=۲$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید همواره مقدار c، میانگین max و min تابع است. پس ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=۳\sin ۲x+۴$ یا $y=-۳\sin(-۲x)+۴$ است، یعنی a و b یا هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند که در کتاب هر دو مقدار a و b را مثبت فرض کرده و ضابطهٔ $y=۳\sin ۲x+۴$ را نوشته است.

ب)



با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که ماکزیمم تابع در $x=\circ$ واقع شده است. بنابراین ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به‌صورت $y=a\cos bx+c$ باشد. مقدار max برابر ۵ و مقدار min برابر ۱ است. از نمودار پیداست که دورهٔ تناوب برابر ۴π است، بنابراین داریم :

$$\begin{cases} |a|+c=۵ \\ -|a|+c=۱ \end{cases} \rightarrow ۲c=۶ \rightarrow c=۳ \quad , \quad c=۳ \quad , \quad |a|=۲$$

که a و b هر دو مثبت هستند.

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi \rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}$$

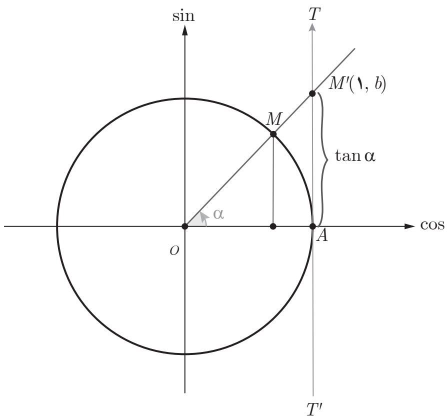
بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳$ است.

تانژانت

فعالیت ص ۲۹

هدف این فعالیت معرفی محور تانژانت و تشخیص مقدار و علامت تانژانت برای زوایای مختلف در نواحی دایرهٔ مثلثاتی است.

در قسمت الف، باید این مطلب توضیح داده شود که تانژانت هر زاویهٔ دلخواه مانند α، از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود و این خط را محور تانژانت می‌نامیم. توصیه می‌شود دبیران محترم علاوه بر شکل کتاب که تانژانت زاویه‌ای در ربع اول را مشخص کرده است، برای هر سه ناحیهٔ دیگر مثال‌های دلخواه زده و از دانش‌آموزان بخواهند تا تانژانت زاویه‌ها را مشخص نمایند. تشخیص علامت تانژانت زاویه که بستگی به ناحیهٔ زاویه دارد نیز یک هدف آموزشی مهم بوده که باید به دقت توضیح داده شود.

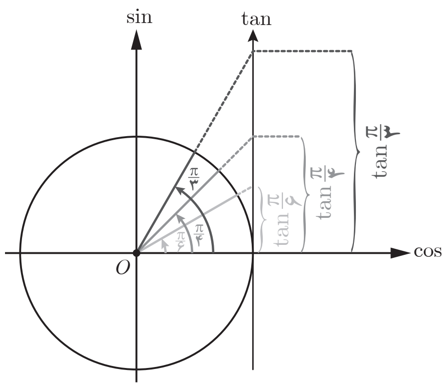


در قسمت پ توضیح تعریف نشده بودن $\tan\frac{\pi}{۲}$ باید با رسم زاویه‌هایی که در ربع اول به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند صورت بگیرد. همچنین توضیح در مورد $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ با رسم زاویه‌هایی در ربع سوم که به $\frac{۳\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند انجام می‌شود.

تغییرات تانژانت

فعالیت ص ۳۰

این فعالیت به منظور بررسی تغییرات تابع تانژانت طراحی شده است. در شکل، چند زاویه که دانش‌آموزان با آن آشنا هستند مشخص شده است و تانژانت این زوایا روی محور تانژانت با رنگ‌های مربوط تعیین شده است. دانش‌آموز با دقت در مقادیر تانژانت زوایای مورد نظر درمی‌یابد که با بزرگ شدن زاویه‌ها در ربع اول، مقادیر تانژانت نیز افزایش می‌یابند و با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در این ربع و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{۲}$، مقدار تانژانت بیشتر و بیشتر می‌شود تا اینکه در $\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است. نکتهٔ مهم در این فعالیت جلب توجه دانش‌آموزان به تغییرات تانژانت در ربع اول است.



کار در کلاس ص ۳۰

این کار در کلاس تعمیم و جمع‌بندی فعالیت قبلی است که در آن تغییرات تانژانت در ربع‌های دوم تا چهارم نیز بررسی شده است و در قسمت الف روند تغییر مدنظر بوده است که روند تغییرات تانژانت در هر ربع افزایشی است. در قسمت ب بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع خواسته است که به‌صورت زیر است :

ربع دوم: $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi \rightarrow \tan\alpha \in (-\infty, ۰)$

ربع سوم: $\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲} \rightarrow \tan\alpha \in (۰, +\infty)$

ربع چهارم: $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi \rightarrow \tan\alpha \in (-\infty, ۰)$

در قسمت پ جدولی داده شده است که مقادیر تانژانت را برای زوایایی که در ریاضی ۱ و حسابان ۱ دانش‌آموز با نسبت‌های مثلثاتی آنها آشنا شده، خواسته است که در همهٔ ربع‌ها جهت تغییرات صعودی و علامت $\nearrow$ است. هدف این بررسی با جزئیات فوق، فراهم آوردن مقدمات رسم نمودار تابع تانژانت است.

تابع تانژانت :

ماهیت تابعی تانژانت در صفحهٔ ۳۲ به‌صورت رسمی بیان شده است و اینکه به ازای هر زاویهٔ دلخواه α در دایرهٔ مثلثاتی (به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $k \in \mathbb{Z}$) مقداری حقیقی به‌عنوان $\tan\alpha$ داریم این امر را به‌طور واضح بیان می‌کند.

دامنه و برد تابع تانژانت نیز در همین قسمت معرفی شده است. دورهٔ تناوب تانژانت π است زیرا :

$$\tan(\pi+x)=\tan x$$

و مقداری کوچک‌تر از π وجود ندارد که این رابطه به ازای آن برقرار باشد.

کتاب در مورد دورهٔ تناوب محدودیتی را قرار داده است که «به‌دست آوردن دورهٔ تناوب تابع شامل تانژانت مد نظر نیست.» مثلاً به‌دست آوردن توابعی مانند $\tan ۲x$، $\tan^۲ ۳x$، $\tan x+\tan ۴x$ و ... مد نظر نیست. بنابراین رسم توابع شامل تانژانت مانند $\tan ۲x+۱$، $\tan ۳x$ و ... مدنظر نبوده و استفاده از آنها در ارزشیابی‌ها و آزمون‌ها مجاز نیست.

تمرین درس اول

۱

الف) $y=۱+۲\sin ۷x$

$a=۲\ ,\ b=۷\ ,\ c=۱$

$\max=|a|+c=|۲|+۱=۳$

$\min=-|a|+c=-|۲|+۱=-۱$

$T=\dfrac{۲\pi}{|b|}=\dfrac{۲\pi}{|۷|}=\dfrac{۲\pi}{۷}$

ب) $y=\sqrt{۳}-\cos\dfrac{\pi}{۲}x$

$a=-۱\ ,\ b=\dfrac{\pi}{۲}\ ,\ c=\sqrt{۳}$

$\max=|-۱|+\sqrt{۳}=۱+\sqrt{۳}$

$\min=-|-۱|+\sqrt{۳}=\sqrt{۳}-۱$

$T=\dfrac{۲\pi}{\left|\dfrac{\pi}{۲}\right|}=۴$

پ) $y=-\pi\sin(\dfrac{x}{۲})-۲$

$a=-\pi\ ,\ b=\dfrac{۱}{۲}\ ,\ c=-۲$

$\max=|-\pi|-۲=\pi-۲$

$\min=-|-\pi|-۲=-\pi-۲$

$T=\dfrac{۲\pi}{\left|\dfrac{۱}{۲}\right|}=۴\pi$

ت) $y=-\dfrac{۳}{۴}\cos ۳x$

$a=-\dfrac{۳}{۴}\ ,\ b=۳\ ,\ c=۰$

$\max=\left|-\dfrac{۳}{۴}\right|+۰=\dfrac{۳}{۴}$

$\min=-\left|-\dfrac{۳}{۴}\right|+۰=-\dfrac{۳}{۴}$

$T=\dfrac{۲\pi}{|۳|}=\dfrac{۲\pi}{۳}$

۲ در این سؤال باید با توجه به ضابطه‌ها و ویژگی‌های نمودارها، نمودار هر ضابطه را مشخص کنیم. ابتدا دورهٔ تناوب و max و min هر ضابطه را تعیین می‌نماییم.

الف) $y=\sin\pi x \rightarrow \max=۱\ ,\ \min=-۱\ ,\ T=۲$

ب) $y=۲-\cos\dfrac{۱}{۲}x \rightarrow \max=۳\ ,\ \min=۱\ ,\ T=۴\pi$

پ) $y=\sin ۲x \rightarrow \max=۱\ ,\ \min=-۱\ ,\ T=\pi$

ت) $y=۱-\cos ۲x \rightarrow \max=۲\ ,\ \min=۰\ ,\ T=\pi$

نمودار ۱ : $\max=۲$ ، $\min=۰$ و $T=\pi$ است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۱، $y=۱-\cos ۲x$ (قسمت ت) است.

نمودار ۲ : max=۳ ، min =۱ و T=۴π است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۲، $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x$ (قسمت ب) است.

نمودار ۳ : max=۱ ، min =−۱ و T= π است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۳، y=sin۲x (قسمت پ) است.

نمودار ۴ : max=۱ ، min =−۱ و $T=\frac{۲\pi}{۳}$ است، بنابراین ضابطهٔ نمودار ۴، y=sinπx (قسمت الف) است.

۳ در این سؤال دورهٔ تناوب و مقدار max و min داده شده است و ضابطهٔ تابعی مثلثاتی خواسته است. پاسخ‌های مختلفی برای این سؤال می‌توان نوشت :

الف) $c=۰\ ,|a|=۳\ ,|b|=۲ \longrightarrow y=۳\sin۲x$

ب) $c=۶\ ,|a|=۳\ ,|b|=\frac{۲\pi}{۳} \longrightarrow y=-۳\cos(\frac{۲\pi}{۳}x)$

پ) $c=-۴\ ,|a|=۳\ ,|b|=\frac{۱}{۲} \longrightarrow y=۳\sin(-\frac{۱}{۲}x)-۴$

ت) $c=۰\ ,|a|=۱\ ,|b|=۴ \longrightarrow y=-\cos(-۴x)$

از دانش‌آموزان بخواهید ضابطه‌های دیگری را نیز بنویسند.

۴

الف) ماکزیمم یا مینیمم نمودار در $x=۰$ واقع نشده است، بنابراین ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به‌صورت $y=a\ \sin bx+c$ باشد.

$c=۱\ ,\ |a|=۲\ ,\ |b|=\frac{۱}{۲} \rightarrow y=۲\sin(\frac{x}{۲})+۱$

ب) ضابطهٔ این تابع می‌تواند به‌صورت $y=a\ \cos bx+c$ باشد.

الف) $c=-۱\ ,|a|=۳\ ,|b|=۲ \longrightarrow y=-۳\cos۲x-۱$

۵

الف) نادرست زیرا : $\frac{۷\pi}{۶}<\frac{\pi}{۴}$ ولی $\tan\frac{۷\pi}{۶}>\tan\frac{\pi}{۴}$. تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

ب) نادرست، زیرا تابع تانژانت در تمام بازه‌هایی که تعریف می‌شود اکیداً صعودی است.

پ) با توجه به ویژگی‌های تابع تانژانت درست است.

۶ در این سؤال، با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، مقایسهٔ مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را خواسته است.

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$
sin	۰	$\nearrow$	$\frac{۱}{۲}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\nearrow$	۱
tan	۰	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\nearrow$	۱	$\nearrow$	$\sqrt{۳}$	$\nearrow$	$+\infty$ ت ن

ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.

	$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		$\frac{۱۱\pi}{۶}$		۲π
sin	-۱	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\nearrow$	$-\frac{۱}{۲}$	$\nearrow$	۰
tan	$-\infty$ ت ن	$\nearrow$	$\sqrt{۳}$	$\nearrow$	-۱	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\nearrow$	۰

درس ۲
معادلات مثلثاتی

اهداف درس

درس دوم از فصل مثلثات به معادلات مثلثاتی می‌پردازد. هدف از این فصل آشنا کردن دانش‌آموزان با معادلات مثلثاتی و نحوه حل و تفسیر جواب‌های معادلات مثلثاتی برای برخی معادلات ساده است. گفتنی است که رعایت حدود و ثغور این معادلات در آموزش برای اتمام محتوای کل کتاب در طول سال تحصیلی از یک سو و رعایت آنها برای ارزشیابی از سوی دیگر ضروری است.

اهداف آموزشی مدنظر این درس به قرار زیر هستند :

۱ آشنایی با معادلات ساده مثلثاتی و ارتباط آنها نمودار توابع مثلثاتی متناظر

۲ حل معادلات ساده مثلثاتی و یافتن جواب‌های کلی معادلات

۳ بررسی درسی جواب با توجه به محدودیت‌های مطرح شده در مسایل کاربردی

روش تدریس

این درس به معادلات مثلثاتی ساده همراه با برخی کاربردهای مقدماتی آنها در مدلسازی می‌پردازد.
بررسی معادلات مثلثاتی بر پایه دانش قبلی دانش‌آموزان است از جمله اینکه دانش‌آموزان با نمودار توابع مثلثاتی ساده آشنا هستند. از این رو با برجسته کردن ارتباط بین جواب معادلات مثلثاتی و صفرهای توابع مثلثاتی نظیر، رفته رفته حالت کلی (یا جواب کلی) معادلات ساده مثلثاتی را به کمک خود دانش‌آموزان

به دست می‌آوریم. اینکار فرایند ابتدا برای معادله $\sin x = ۰$ و $\sin x = ۱$ انجام شده و سپس در فعالیت ص۳۶ برای معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ دنبال شده است.

فعالیت ص۳۶

از این فعالیت ابتدا با دانش قبلی دانش‌آموزان از روابط مثلثاتی و جدول مقادیر مثلثاتی سعی در یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ می‌شود. احتمالاً دانش‌آموزان به این شیوه تعدادی از جواب‌ها را حدس می‌زنند اما نه همه آنها را. سپس از طریق رسم نمودار تابع $y = \sin x$ و قطع دادن آن با خط $y = \frac{۱}{۲}$ راه منسجم‌تری برای یافتن جواب‌های معادله می‌یابند. در گام بعدی سعی در دسته‌بندی جواب‌های یافته می‌شود. در این مرحله از دایره مثلثاتی برای دسته‌بندی جواب‌ها استفاده می‌شود. به این طریق گام به گام دانش‌آموزان را در یافتن جواب‌های کلی معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ راهنمایی می‌کنیم.

در ادامه آخرین گام برای حالت کلی معادله یعنی $\sin x = a$ که $-۱ \leq \quad \leq ۱$ انجام داده شده است. توصیه می‌شود که قبل از ارائه حالت کلی معادله سینوسی، با چند مثال دیگر گام‌های فعالیت قبل تکرار شود و پس از آن به حالت کلی معادله $\sin x = a$ که $-۱ \leq a \leq ۱$ پرداخته شود.

پس از چند مثال و کار در کلاس به معادلات کسینوسی می‌پردازیم.

فعالیت ص۳۸

این فعالیت مشابه فعالیت قبل اما برای معادلات کسینوسی است. در اینجا گام اول که حدس و آزمایش به کمک جدول مقادیر کسینوس و روابط مثلثاتی آن است حذف نشده است. چنانچه دبیران محترم انجام این گام را برای دانش‌آموزان خود لازم می‌دانند. می‌توانند آنرا همانند فعالیت قبل اجرا کنند. در پایان با استفاده از دایره مثلثاتی و دسته‌بندی کردن جواب‌های به‌دست آمده از تقاطع نمودارها، جواب‌های کلی معادله کسینوسی $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ به‌دست می‌آیند.

پس از فعالیت ص ۳۸، حالت کلی معادلات کسینوسی به‌صورت $\cos x = a$ که $-۱ \leq a \leq ۱$ از طریق دایره مثلثاتی بررسی شده و جواب‌های کلی آن داده شده است.

شایان ذکر است که در این درس فقط به معادلاتی پرداخته می‌شود که در نهایت زاویه موردنیاز برای محاسبه جواب‌ها شناخته شده باشد مثلاً معادلاتی که نهایتاً به‌صورت $\sin x = ۰/۳$ ختم می‌شوند مورد نظر نیست و لذا نیازی به تعریف زوایای معکوس مثلثاتی و نیز مفهوم زاویه اصلی نمی‌باشد.

در ادامه سعی شده با جواب‌هایی از معادلات که می‌بایست در شرط خاصی صدق کنند پرداخته شود. دانش‌آموزان در مثال آخر ص ۳۹ در شرایطی واقعی و کاربردی از این نوع محدودیت‌ها که به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند آشنا می‌شوند. اغلب جواب‌هایی از معادله که در شرایط خواسته شده از مسئله صدق می کنند را «جواب‌های خاص» می گویند. در کتاب از این اصطلاح غیرضروری پرهیز شده و به جای آن سعی شده دانش‌آموز از خلال خواسته‌های مسئله‌ها و اطلاعات داده شده درک کند که همه جواب‌های به‌دست آمده از معادله جواب مسئله نیستند.

در صفحهٔ ۴۱، با رسم نمودار تابع $y = \tan x$ و خط $y = a$ به جواب‌های معادله $\tan x = a$ که همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است؛ دست می‌یابد و با بررسی معادلهٔ $\tan x = a$ در دایرهٔ مثلثاتی جواب‌های کلی این معادله یعنی $x = k\pi + \alpha \quad (k \in z)$ را به دست می‌آورد. همچنین در صفحهٔ ۴۲، رابطهٔ تانژانت مجموع دو زاویه را به دست آورده است که در مثال ص ۴۳ یک مثال کاربردی از این رابطه آورده شده است.

نمونه سؤالات برای ارزشیابی

۱ فرض کنید $\sin\alpha = a$ و α زاویه‌ای حاده باشد. حاصل عبارات زیر را برحسب α بدست آورید.

الف) $\sin ۲\alpha$

ب) $\cos ۲\alpha$

۲ معادلات زیررا حل کنید.

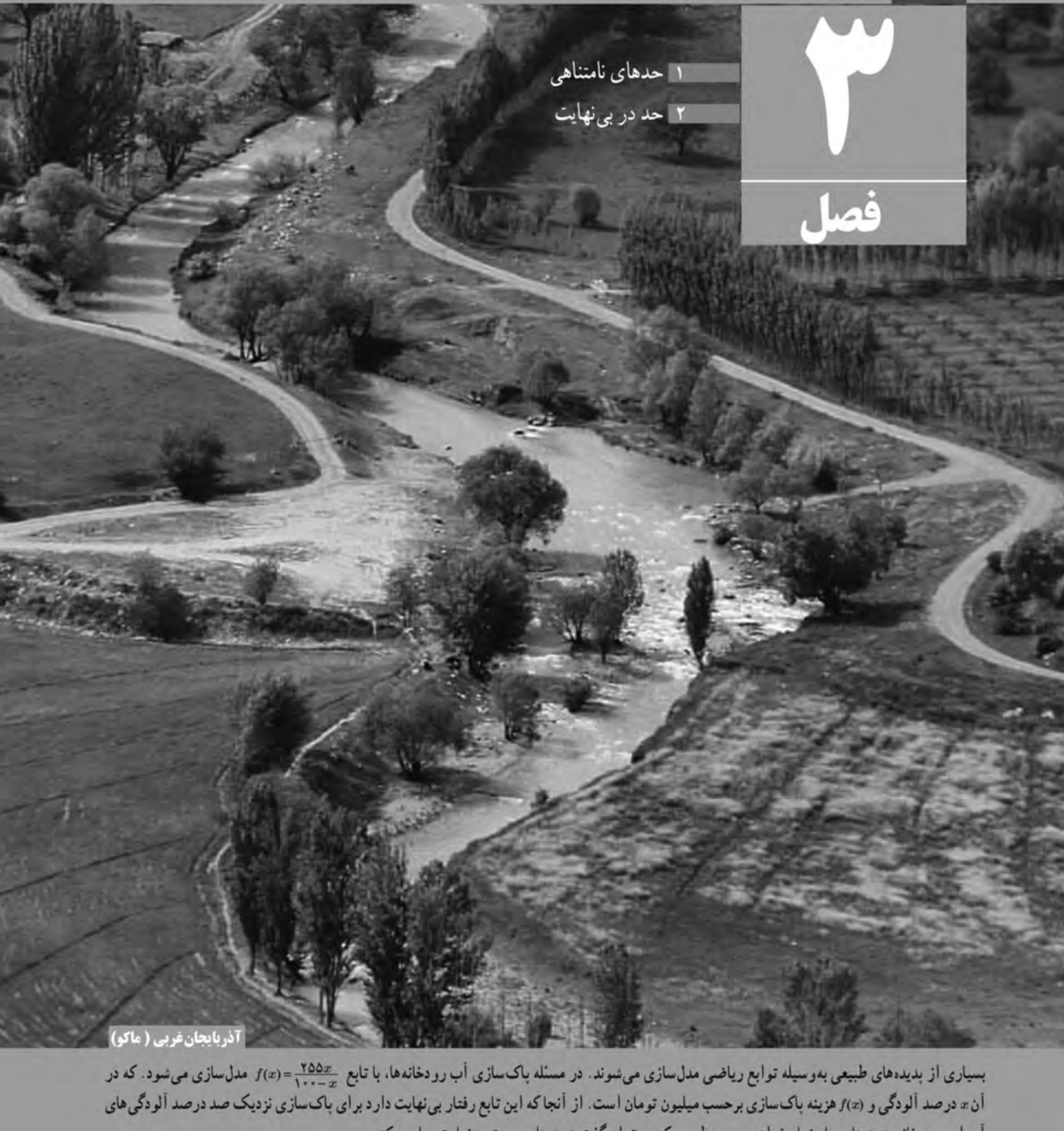
الف) $\sin ۵x = \sin (۲x + ۱)$

ب) $\cos ۲x - \sin x - ۲ = -۲$

ج) $\sin ۲x - \sin x = ۰$

حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت

فصل ۳



آذربایجان غربی (ماکو)

بسیاری از پدیده‌های طبیعی به‌وسیله توابع ریاضی مدل‌سازی می‌شوند. در مسئله پاک‌سازی آب رودخانه‌ها، با تابع $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ مدل‌سازی می‌شود. که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. از آنجا که این تابع رفتار بی‌نهایت دارد برای پاک‌سازی نزدیک صد درصد آلودگی‌های آب این رودخانه هزینه‌ها بسیار زیاد خواهد بود. به‌طوری که می‌توان گفت هزینه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

حدهای نامتناهی ــ حد در بی‌نهایت

اهداف کلی فصل ۳

۱ آشنایی با حدهای نامتناهی
۲ آشنایی با حد تابع در بی‌نهایت
۳ آشنایی با مجانب‌های قائم و افقی تابع
۴ آشنایی با حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان

دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ درک مفاهیمی از حدهای یک‌طرفه نامتناهی و حد نامتناهی داشته باشند و از طریق جدول و نمودار توابع این مفاهیم را بیان کنند.

۲ درک مناسبی از قضایای حدهای بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت داشته باشند و در حل مسائل از آنها استفاده کنند.

۳ با استفاده از قضایا، حدود توابع در بی‌نهایت را حدس زده و محاسبه کنند.

۴ مجانب‌های قائم و افقی تابع کسری (گویا) و تابع تانژانت را در صورت وجود به‌دست آورند و از آنها در رسم تابع بهره بگیرند.

۵ از طریق نمودار توابع، رفتار تابع در یک نقطه و رفتار تابع در بی‌نهایت را تشخیص دهند و مجانب‌های افقی و قائم تابع را در صورت وجود نشان دهند.

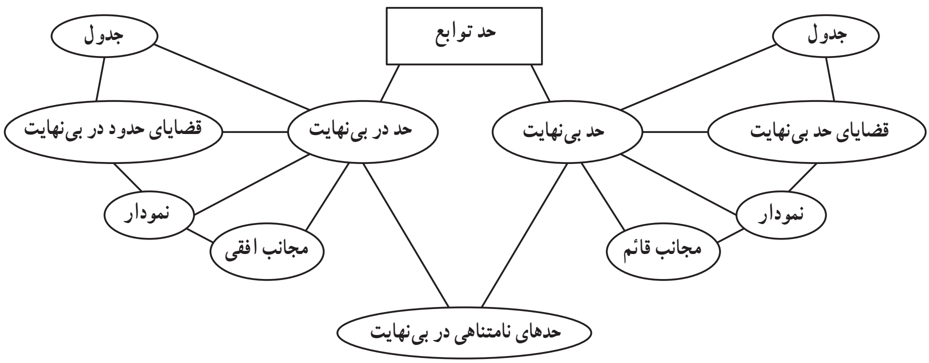
پیش نیازها

۱ آشنایی با مفهوم حد و قضایای حد تابع در یک نقطه
۲ آشنایی با نمودار تابع تانژانت، نمودار توابع $y=\frac{1}{x}$ و $y=\frac{1}{|x|}$ و ...

زمان‌بندی پیشنهادی

پیشنهاد می‌شود این فصل در ۳ هفته آموزشی تدریس و تمرین شود.

نقشهٔ مفهومی



نگاه کلی به فصل

هدف اصلی این فصل درک مناسب از مفهوم بی‌نهایت و آشنایی با قضایای رفتار تابع در بی‌نهایت و رفتار تابع در همسایگی یک نقطه وقتی تابع رفتار بی‌نهایتی دارد می‌باشد. همچنین آشنایی با مجانب‌های افقی و قائم تابع در رسم توابع می‌تواند از اهداف اصلی این فصل باشد. روش آموزشی انتخاب شده در این فصل به‌گونه‌ای نیست که دانش‌آموزان صرفاً محاسبات صوری انجام دهند بلکه درک روش‌ها در ارتباط آنها با دنیای واقعی از اهداف مهم این فصل و سایر فصول است.

روش آموزشی این فصل بر مبنای فعالیت و کار در کلاس و راهنمایی قدم به قدم دانش‌آموز برای مواجهه با مفهوم است. به‌گونه‌ای که دانش‌آموزان خودشان را در ساخت مفهوم مشارکت داشته باشند. آشنایی با قضایای مربوطه صرفاً از طریق مثال‌های جبری و هندسی مورد نظر است و بیشتر کاربرد قضایا در حل مسائل مورد توجه است و در هیچ‌جا وارد اثبات قضایا نشده‌ایم.

درس ۱

حدهای نامتناهی

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم حد بی‌نهایت از طریق جدول و نمودار
۲ مهارت محاسبه حدود نامتناهی با استفاده از قضایا و
۳ آشنایی با مجانب قائم نمودار یک تابع

روش تدریس

دانش‌آموزان در سال قبل با مفهوم حد و قضایای آن آشنا شده‌اند و رفتار تابع در یک نقطه را از طریق جدول و نمودار درک می‌کنند. در این درس با رفتار تابع در همسایگی محذوف یک نقطه در حالتی که تابع رفتار بی‌نهایت دارد آشنا می‌شویم. در اولین فعالیت در صفحه ۴۶ دانش‌آموزان نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را می‌شناسند. از طریق این نمودار در همسایگی راست $x=0$ و همچنین در کار در کلاس صفحه ۵۳ در همسایگی چپ $x=0$ با همسایگی‌های یک‌طرفه یک نقطه آشنا می‌شوند.

در بند ۱ فعالیت صفحه ۵۲ با تکمیل جدول به این درک می‌رسد که هرچه به نقطه صفر نزدیک‌تر می‌شویم مقدار تابع افزایش می‌یابد.

بند ۲ $\frac{1}{x}>10^6 \Rightarrow x<\frac{1}{10^6}$

با یک محاسبه ساده مشخص می‌شود که x را باید از یک میلیونیم کوچک‌تر بگیریم تا $f(x)$ از یک میلیون بزرگ‌تر شود.

بند ۳ دانش‌آموزان باید به این درک برسند که با نزدیک شدن به صفر از سمت راست نقطه تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود بلکه هر عددی درنظر بگیریم از آن هم نزدیک‌تر می‌توان شد.

❊ پس از بررسی این فعالیت دانش‌آموزان را هدایت به این مسئله می‌کنیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد.

در پایان این فعالیت رسماً نماد ∞ را معرفی می‌کنیم و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$

تذکر صفحه ۵۳ مطلب مهمی است که حتماً باید یادآوری شود.

کار در کلاس ص ۴۷

شبیه همان کار در کلاس که در فعالیت قبل مطرح شد اینجا انجام می‌شود. در حقیقت دانش‌آموزان باید بتوانند در همسایگی چپ $x = ۰$ رفتار تابع $y = \frac{۱}{x}$ را درک کنند.

بند (الف) در جدول مشاهده می‌شود که هرچه از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شویم مقادیر $f(x)$ از نظر قدر مطلق بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند.

ب) $\frac{۱}{x} < -۱۰^۶ \Rightarrow x > \frac{-۱}{۱۰^۶}$ یا $x > ۰/۰۰۰۰۰۱$

x باید از منفی یک میلیونیم بزرگ‌تر در نظر گرفته شود.

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ کوچک و کوچک‌تر می‌شوند.

ت) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty$

تذکر : می‌توان نتایج جدول فوق را روی محور اعداد نیز نشان داد تا چگونگی ارتباط را بهتر درک کنند در پایان کار در کلاس می‌توان به جمع‌بندی معرفی حدهای یک‌طرفه نامتناهی پرداخت. یادآوری حالات مختلف حدهای یک‌طرفه نامتناهی در صفحه ۴۸ و از طریق نمودار آمده است می‌توان از دانش‌آموزان خواست رفتار هر تابع در همسایگی نقطه $x=۰$ را از طریق شکل‌های داده شده بیان کنند.

بعد از این تذکر مثالی ارائه شده است رفتار تابع $y = \frac{۱}{|x|}$ در همسایگی نقطه $x=۰$ از چپ و راست دارای یک رفتار است و در پایان این مثال رسماً تعریف حد نامتناهی ارائه می‌شود.

کار در کلاس ص ۵۰

در جهت تثبیت و تعمیق مطالب آموخته شده از طریق نمودار سه تابع دیگر رفتار تابع مشاهده می‌شود. با نمودار $y=\frac{1}{x-2}$ تا حدودی آشنا هستند همان انتقال نمودار $y=\frac{1}{x}$ می‌باشد. در همسایگی نقطه $x=2$ مشاهده می‌شود که $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ در تابع $y=\log_3 x$ تابع فقط در همسایگی راست $x=0$ تعریف می‌شود که $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ با نمودار تابع $y=\tan x$ در فصل قبل آشنا شده‌اند در اینجا به درک مناسبی در رابطه با رفتار تابع در نقاطی که تانژانت تعریف نمی‌شود می‌شوند.

$$\lim_{x\to(\frac{-\pi}{2})^+} h(x)=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} h(x)=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} h(x)=-\infty$$

در ادامه و پس از درک اولیه در رابطه با حدهای نامتناهی قضایای مربوطه مطرح می‌شوند. همه این قضایا با مثال تفهیم می‌شوند و به هیچ وجه وارد اثبات رسمی آن نمی‌شویم.

کار در کلاس ص ۵۱

برای تثبیت قضایای مطرح شده در این صفحه یک کار در کلاس مطرح شده است.

(الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ هم از طریق نمودار این مطلب مشخص شده است و هم از طریق قضیه ۱ در حالتی که $n=2$

(ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ استفاده از قضیه (۱)

می‌توان از قضیه (۲) نیز یادآور شد که در (الف) حد راست و حد چپ تابع در $\lambda=0$ برای $+\infty$ است لذا تابع در این نقطه حد نامتناهی $+\infty$ دارد ولی در قسمت (ب) حد چپ و حد راست تابع یکسان نشده‌اند لذا نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع در این نقطه حد نامتناهی دارد.

در مثال ص ۵۲، هدف درک مناسبی از مفهوم بی‌نهایت در یک مدل‌سازی واقعی در مسائل پیرامونی است.

در این صفحه و صفحه بعد چند مثال آمده است تا به جوانب مختلف قضایای مطروحه پرداخته شود. این مثال‌ها برای درک مناسب و مهارت‌های ساده محاسبه حدود هستند. از طرح مسائل پیچیده خصوصاً مسائلی که متغیر در زیر رادیکال است اجتناب شود. طرح سؤالات باید به گونه‌ای باشد که توابع آن مورد

نیاز باشند و یا پیچیدگی‌های لازم را نداشته باشند و از طرح توابع جبری مثلثاتی و رادیکال‌هایی که محاسبات دشوار دارند خودداری شود تا مفهوم فدای تکنیک نشود بدیهی است برای دانش‌آموزان قوی‌تر طرح این‌گونه مسائل خللی در روند آموزش ایجاد نمی‌کند ولی به جهت کمبود زمان تدریس طرح مسائل پیچیده توصیه نمی‌شود

کار در کلاس ص ۵۳

جهت تثبیت قضایای ذکر شده در مورد حدهای بی‌نهایت که تا اینجا مورد بررسی قرار گرفته‌اند. محاسبه چند حدّ آمده است.

الف) در همسایگی راست ۲ حد تابع به‌صورت $\frac{۳}{۰^+}$ در می‌آید که معادل $+\infty$ خواهد شد.
ب) در همسایگی چپ ۲ صورت کسر به‌صورت (۲−۱) درخواهد آمد حد مخرج به‌صورت ۰^- تبدیل می‌شود که حاصل $+\infty$ خواهد شد.

پ) در همسایگی راست یک حد تابع به‌صورت $\frac{۲}{۰^+}$ و یا $+\infty$ تبدیل خواهد شد.
در ادامه قضیه ۴ برای حالتی که حد صورت کسر عدد و حد مخرج کسر بی‌نهایت می‌شود مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فعالیت ص ۵۴

هدف بیان حالات عدد به علاوه بی‌نهایت یا عدد ضربدر بی‌نهایت در بحث حد است. قضیه ۵ در این رابطه بیان شده است و برای ورود آن به فعالیت صفحه ۵۴ در نظر گرفته شده است.

بند ۱ــ

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)=۱$

ب) $$(f+g)(x)=\frac{۱}{x^۲}+x+۱=\frac{۱+x^۳+x^۲}{x^۲}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱+x^۳+x^۲}{x^۲}=+\infty$$

حد صورت یک و حد مخرج صفر است و در همسایگی محذوف صفر مثبت است. با استفاده از قضیه ۳ حد تابع به‌دست می‌آید.

پ) نتیجه می‌گیریم که اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=l+\infty=+\infty$$

در بحث حد اگر عددی با بی‌نهایت جمع شود. حاصل بی‌نهایت باقی می‌ماند.

بند ۲ــ

(قضیه ۳)
$$f\times g=\frac{x+1}{x^2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2}=+\infty$$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L>0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x).\,g(x)=+\infty$

به‌عبارت دیگر در بحث حدّ اگر تابعی $+\infty$ باشد با ضرب یک عدد مثبت در بی‌نهایت حد تابع همچنان بی‌نهایت باقی می‌ماند.

این نتایج در قضیه ۵ به‌صورت کلی بیان شده است مثال‌های بعد از ارائه قضیه به تفهیم بیشتر مسئله کمک می‌کند.

تذکر : در بیان قضیه ۵ در حالتی که $L=0$ می‌شود و به حالات $\infty\times 0$ در بحث حد می‌رسیم تعمداً ورود نمی‌کنیم و در ارزشیابی‌ها نیز اکیداً توصیه نمی‌شود و در تعارض با اهداف رسمی این درس است.

تذکر : یادآوری این مطلب نیز برای دانش‌آموزان ضروری به‌نظر می‌رسد.

قضایا و مطالب مربوط به حدهای نامتناهی با قضایای حالت حدهای متناهی با هم تفاوت دارند زیرا نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ را داریم که اعداد حقیقی نیستند بنابراین $+\infty$ و $-\infty$ قرینه هم نیستند لذا در محاسبه حدود نامتناهی با ساده کردن عبارات، توابع را به گونه‌ای می‌نویسیم که بتوان از قضایای ذکر شده استفاده کرد.

کار در کلاس ص ۵۵

هدف تعمیق، تثبیت قضیه ۵ می‌باشد

بند ۱ــ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آنگاه

الف) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=-\infty$

ب) اگر $L>0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x).\,g(x)\big)=-\infty$

اگر $L<0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x).\,g(x)\big)=+\infty$

بند ۲ـ

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{x+۱}{x-۱} = +\infty$ (بند ت قضیه ۳)

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x^۲+x}{x^۳} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x+۱}{x^۲} = +\infty$ (بند الف قضیه ۳)

پ) $\lim\limits_{x\to -۲^+} \frac{x+۲}{x^۲+۴x+۴} = \lim\limits_{x\to -۲^+} \frac{x+۲}{(x+۲)^۲} = \lim\limits_{x\to -۲^+} \frac{۱}{x+۲} = +\infty$ (بند الف قضیه ۳)

ت) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۲-\cos ۲x}{x} = -\infty$ (بند ب قضیه ۳)

تذکر : ما در حل این کار در کلاس از قضیه ۳ بهره بردیم و می‌توانستیم با نوشتن $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ به‌صورت $\lim\limits_{x\to a} \frac{۱}{g(x)} \times \lim\limits_{x\to a} f(x)$ از قضیه ۵ نیز استفاده کرد.

مجانب قائم

مجانب قائم

در صفحه ۵۵ بحث مجانب‌ها با استفاده از دو نمودار توابع شناخته شده که در بخش‌های قبل مشاهده کرده‌اند آغاز می‌شود. سپس تعریف رسمی از مجانب قائم ارائه می‌شود. مجانب تابع $f(x)$ خطی است که در بی‌نهایت دور بر منحنی نمایش $f(x)$ مماس است. ما از ذکر این مطلب به‌صورت رسمی در کتاب درسی خودداری کردیم باور مفهوم مماس شدن در بی‌نهایت بر منحنی کمی سخت است لذا در حین تدریس شاید بتوان این مطلب را نیز یادآور شد. ما در این فصل به دو نوع مجانب قائم و افقی پرداخته‌ایم. عدم ورود به مجانب مایل به جهت آن است که در رسم توابع نیز توابعی که مجانب مایل دارند مورد نظر نیستند. و تا همین حد برای دانش‌آموزان در این سطح کافی است. هدف اصلی درک مناسبی از مفهوم مجانب و حدهای بی‌نهایت می‌باشد که به‌صورت شهودی در این بخش انجام می‌شود. هریک از حالات مختلف مجانب‌های قائم منحنی‌ها در مثال صفحه ۵۶ آمده است.

سپس به تکنیک محاسبه مجانب‌های قائم پرداخته می‌شود. اینکه در توابع کسری ریشه مخرج مجانب قائم است حرف درستی نیست ریشه مخرج با شرط آنکه در دامنه تعریف تابع باشد و صورت کسر را صفر نکند می‌تواند مجانب قائم باشد. در ضمن تابعی مانند $y=\tan x$ نیز مجانب قائم دارد ولی تابع کسری

نمی‌باشد. با ذکر دو مثال و ورود به جزئیات دانش‌آموزان قادر خواهند بود مجانب‌های یک تابع را از روی ضابطه آن در صورت وجود به‌دست آورند.

کار در کلاس ص ۵۷

$x^{۲}-x-۶=۰ \Rightarrow x=۲ \,,\, x=-۳$

از آنجا که $x=۲$ ریشه صورت است و $\lim\limits_{x\to -۳} f(x)=+\infty$ پس $x=-۳$ مجانب قائم منحنی است.

راه‌های حل تمرین ص ۵۸

۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳+x^{۲}}}{x^{۲}}=+\infty$ (استفاده از بند الف قضیه ۳)

ب) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{۱}{(x-۲)^{۲}}=+\infty$ (استفاده از بند الف قضیه ۳)

پ) $\lim\limits_{x\to -۲}\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{|۵-x|}{|۲+x|}=+\infty$ (استفاده از بند الف قضیه ۳)

۲

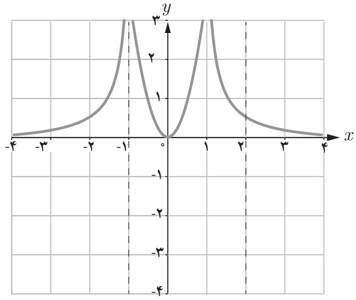
الف) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{۲x}{x^{۲}-۴}=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^{-}}\dfrac{x^{۲}+۲x+۱}{x^{۲}+x-۱۲}=-\infty$

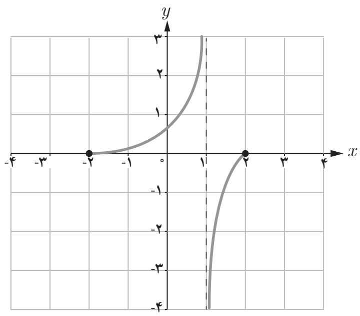
(علامت مخرج در قسمت (ب) را می‌توان از طریق جدول تعیین علامت مشخص کرد)

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}}\dfrac{x+۱}{۹-x^{۲}}=-\infty$

۳ نمودار توابع زیادی را می‌توان رسم کرد. یکی از مسائل باز پاسخ است به عنوان نمونه :



۴



۵

الف) $x=۳$ مجانب قائم تابع است زیرا :

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۲x-۱}{۳-x} = -\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲x-۱}{۳-x} = +\infty$$

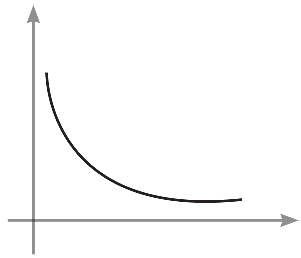
ب) ریشه‌های مخرج $x=۰$ و $x=۱$ هستند $x=۰$ مجانب قائم نمی‌تواند باشد زیرا :

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{x+۱}{x-۱} = -۱$$

حقا $x=۱$ مجانب قائم تابع است زیرا :

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = +\infty$$

۶ دامنه تابع $(-\infty\ ,\ ۰)$ است در این حالت ضابطه به‌صورت $f(x)=\frac{۱}{۲x}$ تبدیل می‌شود که $x=۰$ مجانب قائم آن است و نمودار تابع در مجاورت مجانب قائم آن به‌صورت زیر رسم می‌شود.



۷ $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x}{(x-۱)^{۲}}=+\infty$

با توجه به آن که در همسایگی‌های چپ و راست $x=۱$ حد تابع $+\infty$ شده است فقط شکل (الف) این ویژگی را داراست.

درس ۲

حد در بی‌نهایت

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم حد در بی‌نهایت از طریق جدول و نمودار
۲ آشنایی با قضایای حد در بی‌نهایت و استفاده از آنها در محاسبه حدود.
۳ آشنایی با مجانب افقی نمودار یک تابع
۴ آشنایی با حدود نامتناهی در بی‌نهایت

روش تدریس

در این درس دانش‌آموزان را با مفهوم حد در بی‌نهایت و رفتار تابع هنگامی که متغیر بی‌کران افزایش یا کاهش می‌یابد آشنا می‌کنیم. در این درس از طریق نمودار تابع و جدول رفتار تابع را در بی‌نهایت مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانند درس قبل مشهود پایه و اساس کار خواهد بود. شروع کار با یک فعالیت روی تابع شناخته شده $y=\frac{۱}{x}$ می‌باشد. در این فعالیت متغیر x را از سمت راست بی‌کران افزایش می‌دهیم تا رفتار تابع را مشاهده کنیم.

تمرین ص ۵۹

۱ از طریق پر کردن جدول حدس می‌زند که با افزایش بی‌کران x، مقدار تابع بی‌کران کاهش می‌یابد.

۲ $$|f(x)|<\frac{۱}{۵}\Rightarrow\left|\frac{۱}{x}\right|<\frac{۱}{۵}\overset{x>۰}{\Rightarrow}x>۵$$

حداقل مقدار x را از ۵ باید بزرگ‌تر در نظر بگیریم.

۳ $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{10} \xrightarrow{x>0} \frac{1}{x} < \frac{1}{10} \Rightarrow x > 10$

۴ $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{100} \xrightarrow{x>0} \frac{1}{x} < \frac{1}{100} \Rightarrow x > 100$

۵ بله اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ تا محور xها از عددی مانند k کمتر شود کافی است $k > \frac{1}{k}$ در نظر گرفته شود.

پس از بررسی این فعالیت به جمع‌بندی در مورد حد تابع وقتی متغیر آن بی‌کران افزایش می‌یابد می‌رسیم و رسماً می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

کار در کلاس ص ۶۰

هدف از این کار در کلاس رفتار تابع مورد بحث وقتی متغیر x بی‌کران کاهش می‌یابد می‌باشد و در حقیقت به تکمیل بحث قبل کمک می‌کند مشابه فعالیت دانش‌آموزان کار را پیش خواهند برد و چالش خاصی ندارد.

۱ از طریق پر کردن جدول متوجه می‌شوند که با کاهش x از طریق اعداد منفی مقدار $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شود.

۲ $|f(x)| < \frac{1}{3} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{x} < \frac{1}{3} \Rightarrow x < -3$

۳ $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow -\frac{1}{x} < \frac{1}{10^6} \Rightarrow x < -10^6$

پس از بررسی این کار در کلاس مشاهده می‌شود که اگر x به اندازه کافی کوچک‌تر (از طریق اعداد منفی) شود آنگاه $f(x)$ را می‌توان به اندازه دلخواه به صفر نزدیک کرد سپس رسماً از نماد $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ استفاده می‌کنیم.

در ادامه نماد $x\to\pm\infty$ را معرفی کرده و از این به بعد می‌توان از آن استفاده کرد. هرچند که استفاده از این نماد زیاد متداول نمی‌باشد ولی به جهت خلاصه‌نویسی می‌توان قرارداد کرد هنگامی که از این نماد استفاده

می‌شود منظورمان $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ است و بدان معنی نیست که هم‌زمان $+\infty$ و $-\infty$ با هم به‌کار می‌رود.
پس از این تذکر رسماً تعریف حد در بی‌نهایت مطرح می‌شود. دانش‌آموزان باید قادر باشند نماد $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$ را با بیان فارسی توصیف نمایند.

کار در کلاس ص ۶۱

جهت تثبیت مطلب از طریق نمودار حد در بی‌نهایت برای دو تابع بررسی می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{\to+\infty} g(x) \qquad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=-2$$

در ادامه در صفحه ۶۲ قضایای ۶ و ۷ و چند مثال در رابطه با نحوهٔ استفاده از آنها مطرح می‌شود. در قضیه ۷ اعمال جبری روی توابع برای حد در بی‌نهایت مطرح می‌شود.
مبحث بعدی در این درس حدهای نامتناهی در بی‌نهایت است. از این مبحث در رسم شاخه‌های منحنی توابع استفاده می‌کنیم. مطلب را با دو تابع خطی و درجه دوم شروع کرده و به تعریف مورد نظر می‌رسیم. سپس در کار در کلاس صفحه ۶۴ به تعمیق و ثبت مطلب پرداخته می‌شود.

کار در کلاس ص ۶۴

۱ برای بیان مفهوم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ می‌گوییم حد تابع f وقتی که مقادیر x از هر عدد منفی کوچک و کوچک‌تر شود بی‌کران افزایش می‌یابد مشابه این مطلب را در حالت بعدی نیز می‌توان بیان کرد.

۲ $$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

در ادامه فعالیتی مطرح می‌شود که آمادگی لازم برای حد توابع چندجمله‌ای می‌باشد. در این فعالیت برای تابع $f(x)=x^3$ و حد این تابع در $x\to\pm\infty$ به‌صورت شهودی و از طریق جدول مطرح می‌شود.
۱ و ۲ــ با تکمیل جدول مشاهده می‌شود با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ نیز افزایش می‌یابد و با کاهش مقادیر x از طریق اعداد منفی، مقادیر $f(x)$ نیز کاهش می‌یابد.

۳ $$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

پس از طرح فعالیت فوق زمینه برای طرح قضیه ۸ در حالت کلی آماده می‌شود. قضایای ۹ و ۱۰ حالات مختلفی از حد در بی‌نهایت برای یک تابع ثابت و یک تابع یا حد بی‌نهایت است که حاصل‌ضرب این دو تابع مورد بررسی قرار می‌گیرد که به‌صورت خلاصه عدد در بی‌نهایت بی‌نهایت می‌شود و برای علامت آن باید به علامت عدد و علامت بی‌نهایت توجه شود. از این قضیه در مثال‌های مختلف می‌توان استفاده کرد و با توجه به قضایای ۹ و ۱۰ به‌طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در بی‌نهایت طرح می‌شود. سپس در کار در کلاس به یک قاعده در رابطه حد خارج قسمت دو تابع در بی‌نهایت پرداخته می‌شود.

کار در کلاس ص ۶۶

۱

الف)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

با فاکتورگیری $a_n x^n$ از جملات صورت و فاکتورگیری $b_m x^m$ از جملات مخرج و حدگیری به عبارت $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ می‌رسیم که معادل $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ می‌باشد.

۲ اگر $m=0$ باشد طبیعی است که $x^{n-m}=x^0=1$ و حد تابع به‌صورت $\frac{a_n}{b_m}$ تبدیل می‌شود. در حالتی که $n<m$ باشد $n-m<0$ و x^{n-m} وقتی $x\to\pm\infty$ به سمت صفر میل می‌کند در نتیجه پاسخ نهایی حد به‌صورت صفر خواهد بود. در حالت $n>m$ چون $n-m>0$ پس $\lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} = \pm\infty$ خواهد شد و جواب مسئله به علامت $\frac{a_n}{b_m}$ بستگی دارد.

۳

الف) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2} x = \pm\infty$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

پ) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1} = 0$

مجانب افقی

ابتدا با تعریف رسمی مجانب افقی چند مثال ارائه می‌شود. با توجه به کار در کلاس صفحه ۶۶ شرط وجود یا عدم وجود مجانب افقی یک تابع را به سادگی می‌توان تحقیق نمود. محدودیتی که در این بخش وجود دارد نوع توابع است که محدود به توابع کسری شده است. البته برای رسم توابع هموگرافیک در فصل پنجم نیاز به این مطلب داریم و وارد حواشی و نکات پیچیده نخواهیم شد. البته مجانب مایل نیز از اهداف رسمی کتاب درسی نمی‌باشد و باید در تدریس به این نکته توجه شود.

کار در کلاس ص ۶۸

هدف تحقیق شرایط مجانب افقی از طریق نمودار شهود است. در قسمت (الف) خط $y=۲$ مجانب افقی نیست زیرا شاخه‌های منحنی به این خط نزدیک نمی‌شوند. در شکل (ب) خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است. در قسمت (پ) خط $y=۲$ با یک شاخه منحنی بر هم منطبق شده‌اند و واضح است وقتی $x\to -\infty$ داریم $y=۲$ که شرط مجانب افقی را داراست پس خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است.

در قسمت (ت) خط $y=۲$ مجانب افقی منحنی تابع است اگرچه در یک نقطه در سمت راست نمودار را قطع کرده است در شکل (ت) نیز خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع است.

۱

الف) $x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$

چون $x=-۱$ ریشه صورت است پس خط $x=۱$ مجانب قائم تابع است و چون $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۰$ پس خط $y=۰$ مجانب افقی تابع است.

ب) تابع $y=x^۳$ دارای مجانب افقی و قائم نمی‌باشد و شرایط تعریف را ندارد.

پ) خط $x=-۱$ مجانب قائم تابع است و تابع مجانب افقی ندارد چون $x\to\pm\infty$ و $y\to\pm\infty$ و شرایط مجانب افقی وجود ندارد [در حقیقت تابع مجانب مایل دارد.]

راه‌های حل تمرین ص ۶۹

۱

الف) وقتی متغیر x به بی‌نهایت مثبت نزدیک می‌شود (بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود) مقادیر تابع به عدد ۲ نزدیک می‌شود.

ب) وقتی متغیر x به بی‌نهایت منفی نزدیک می‌شود (و از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود) مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شود.

۲

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۱$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-۱$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=-\infty$

خطوط $x=۳$ و $x=-۲$ مجانب‌های قائم و خطوط $y=۱$ و $y=-۱$ مجانب‌های افقی تابع‌اند.

۳

الف) $+\infty$ ب) ۰ پ) $\mp\infty$ ت) $-\infty$

۴

الف) $x=۳$ مجانب قائم و $y=۲$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۲x-۱}{x-۳}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x-۳}=۲$$

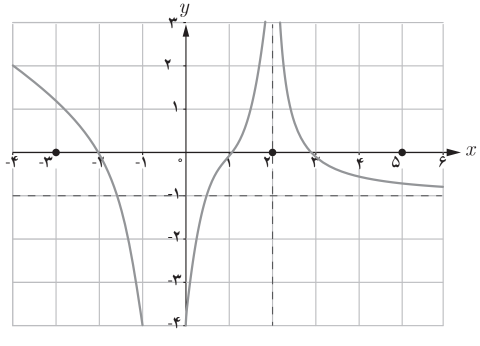
برای هر قسمت شرط تعریف را لازم است بررسی کنیم.

ب) خطوط $x=-۲$ و $x=۲$ مجانب‌های قائم و خط $y=۰$ مجانب افقی هستند.

پ) خطوط $x=-۱$ و $x=۱$ مجانب‌های قائم و خط $y=-۲$ مجانب افقی هستند.

ت) تابع مجانب قائم ندارد و $y=۰$ مجانب افقی تابع است.

۵ به‌عنوان نمونه می‌توان نمودارهای روبه‌رو را رسم کرد.



نمونه سؤالات برای ارزشیابی

۱ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر برای تابع f داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ تابع f در $x=a$ حد دارد.

ب) نمودار یک تابع می‌تواند مجانب افقی خودش را قطع کند.

پ) نمودار یک تابع می‌تواند مجانب قائم خودش را قطع کند.

ت) تابع $f(x)=۲$ دارای یک مجانب افقی است.

۲ نمودار یک تابع مانند f را چنان رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

- خط $x=۲$ مجانب قائم آن باشد.
- $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = -۲$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$ و $f(۰)=۱$

۳ نمودار تابع $y = \dfrac{x+|x|}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خودش به چه صورتی رسم می‌شود.

۴ در نظریه نسبیت جرم ذره‌ای که با سرعت v حرکت می‌کند از رابطه $m(v) = \dfrac{m_۰}{\sqrt{۱-v^۲c^{-۲}}}$ به‌دست می‌آید که در آن $m_۰$ جرم ذره در حالت سکون و c سرعت نور است. وقتی سرعت ذره به سرعت نور نزدیک می‌شود (یعنی $v\to c^-$) چه اتفاقی برای جرم ذره می‌افتد؟

۵ مجانب‌های افقی و قائم توابع زیر را به‌دست آورید (در صورت وجود)

الف) $f(x) = \dfrac{۳x-۳}{|x|-۱}$

ب) $g(x) = \dfrac{x^۲+x-۲}{x^۲-x-۶}$

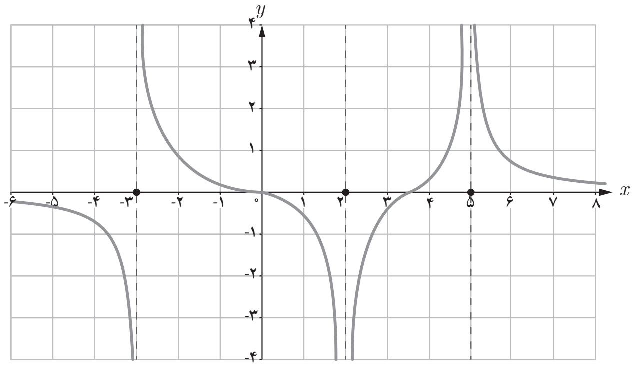
پ) $h(x) = \dfrac{x|x|+۲}{x-۱}$

ت) $t(x) = \dfrac{x^۲+x}{x|x|-۱}$

ث) $M(x) = \dfrac{۳x^۲}{x^۲+۱} - x$

ج) $N(x) = \dfrac{-x+۱}{x^۲-۱}$

۶ حدود زیر را برای نمودار f در شکل زیر در صورت وجود حدس بزنید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

۷ در مورد جواب $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k + x^۲ + ۱}{x^۵ + ۴x^۲ - ۱}$ برحسب k چه می‌توان گفت.

۸ هرگاه $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^b + x^۲ - ۱}{۳x^۲ + x} = ۱$ مقدارهای a و b را تعیین کنید.

۹ اگر خط $x=۳$ مجانب قائم تابع $y = \dfrac{x}{x^۲ + ax + b}$ باشد مقادیر a و b را تعیین کنید.

۱۰ حاصل هریک از حدود زیر را به‌دست آورید. (در صورت وجود)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۳ - ۶x}{x^۳ - ۴x^۲ + ۴x}$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} \dfrac{\sqrt{x^۲ - ۱}}{x^۲ + ۳x + ۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{-۲x + ۱}{(x-۲)^۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۴x^۲ - x + ۷}{x^۲ - ۳x + ۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \cot x$

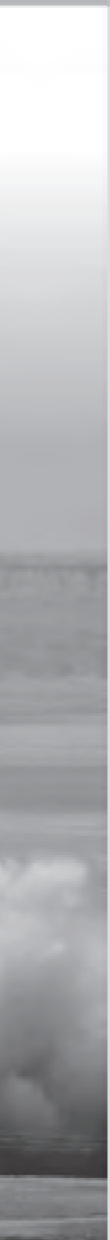
ج) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{[x]+۱}{x^۲ - ۱}$

۱۱ اگر منحنی نمایی تابع $y=\frac{(a^{۲}+۱)x^{۲}+۴}{x^{۲}+ax+۲۵}$ فقط یک مجانب قائم داشته باشد معادله مجانب افقی تابع را تعیین کنید.

۱۲ حدود زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-(۱-x)^{۳}}{۲x-x^{۲}+۵x^{۳}}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(۱-x)^{۳}-(۱+x^{۳})}{(x-۱)^{۲}}$



فصل ۴

مشتق

ماهواره‌بر سیمرغ ــ پایگاه فضایی امام خمینی(ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

مشتق

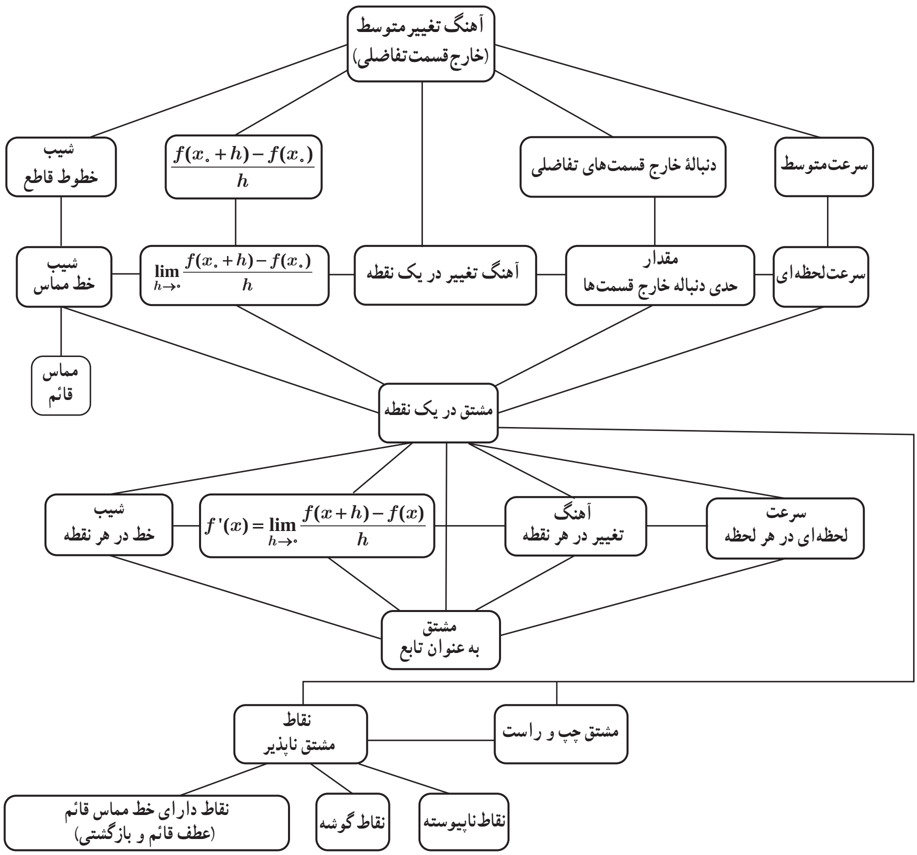
اهداف کلی فصل ۴

- آشنایی با مفهوم مشتق در یک نقطه
- درک رابطه بین شیب خط مماس و مشتق
- بررسی نقاط مشتق ناپذیر
- درک مشتق به عنوان یک تابع
- درک آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر و رابطه آن با مشتق

نگاه کلی به فصل

مفهوم مشتق شامل سه درس است که درس اول شامل مفهوم شهودی خط مماس، مشتق در یک نقطه و معرفی بازنمایی‌های مختلف مشتق می‌باشد و درس دوم به بیان مشتق‌پذیری و معرفی مشتق به عنوان تابع می‌پردازد و در درس سوم آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و کاربردهای آن اشاره می‌شود. اتصال بین این مفاهیم نیز حائز اهمیت است. برای ارائه هر مفهومی در کتاب علاوه بر برنامه درسی، به پشتوانه نظری و پژوهشی نیاز است. در این قسمت ابتدا نقشه مفهومی فصل (مشتق) و سپس مختصری راجع به چارچوب‌های نظری مورد استفاده در این بخش ارائه شده است.

نقشهٔ مفهومی


آهنگ تغییر متوسط (خارج قسمت تفاضلی)
شیب خطوط قاطع
$\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$
دنبالهٔ خارج قسمت‌های تفاضلی
سرعت متوسط
شیب خط مماس
$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$
آهنگ تغییر در یک نقطه
مقدار حدی دنباله خارج قسمت‌ها
سرعت لحظه‌ای
مماس قائم
مشتق در یک نقطه
شیب خط در هر نقطه
$f'(x)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
آهنگ تغییر در هر نقطه
سرعت لحظه‌ای در هر لحظه
مشتق به عنوان تابع
نقاط مشتق ناپذیر
مشتق چپ و راست
نقاط دارای خط مماس قائم (عطف قائم و بازگشتی)
نقاط گوشه
نقاط ناپیوسته

دانستنی‌هایی برای معلم[1]

حساب دیفرانسیل یکی از بزرگترین دستاوردهای انسان است (NCTM، ۲۰۰۰؛ هاگس ــ هالت و دیگران، ۲۰۱۷) که نقش مهمی در تمدن بشری ایفا کرده است. یکی از مباحث حساب دیفرانسیل که بسیار حائز اهمیت می‌باشد، مشتق[2] است. این مفهوم در کتاب‌های جدید ریاضی در پایه دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ارائه می‌گردد. تحقیقات نشان می‌دهند که مفهوم مشتق یکی از مفاهیم مشکل برای دانش‌آموزان و دانشجویان می‌باشد و علت این امر، پیچیدگی تعریف و بازنمایی‌های آن است (تامپسون، ۱۹۹۴؛ زندیه، ۲۰۰۰). مطالعات زیادی در مورد بررسی تفکر دانش‌آموزان در ارتباط با مفاهیم حساب دیفرانسیل، شامل مشتق انجام شده است (به‌طور مثال، اوهرتمن و دیگران، ۲۰۰۸؛ بری و نیمن، ۲۰۰۳؛ سلدن. جی، سلدن. ای، هاک، و میسن، ۲۰۰۰). مشتق، ابتدا به کار برده شده، سپس کشف و توسعه یافته و در نهایت تعریف شده است (گرابینر، ۱۹۸۳). سیر تاریخی استفاده از مشتق تا تعریف آن بیش از ۲۰۰ سال طول کشیده است. فرما[3] در ابتدا از آن استفاده می‌کرد، نیوتن[4] و لایب نیتز[5] آن را کشف نمودند، تیلور، اولر و مک لورن آن را توسعه داده، لاگرانژ آن را نامگذاری و تعیین نمود و در پایان کوشی[6] و وایراشتراس[7] آن را تعریف کردند (گرابینر، ۱۹۸۳). از طرفی مشتق یکی از مفاهیم حساب دیفرانسیل است که در علوم مختلف مهندسی، فیزیک، شیمی، علوم انسانی و اقتصاد و غیره کاربرد و اهمیت دارد (رودرا و گودهرت، ۲۰۱۰).

از جمله اهداف این فصل آن است که مفاهیم ریاضی جدید به کمک مفاهیم قبلی در کتاب‌های درسی ساخته شوند. در این راستا، چگونگی ارائه مبحث مشتق درکتاب‌های درسی حائز اهمیت است؛ زیرا یکی از شاخصه‌های اصلی تدریس معلمان کتاب‌های درسی هستند، بنابراین نحوهٔ بیان مفهوم‌سازی مشتق در کتاب‌ها مهم است. همچنین سعی شده است که از شهود نهایت بهره را ببریم. از مفاهیم پایه در این بررسی مفهوم فرایند ــ شئ[8] است، که در ادامه، از منظر اسفارد[9](۲۰۰۸) به آن می‌پردازیم.

فرایند و شئ از دیدگاه اسفارد (۲۰۰۸)

نظریه فرایند و شئ توسط افراد مختلفی به‌صورت‌های گوناگون تعریف شده است. یکی از این نظریه‌ها، نظریه کاربردی **شئ انگاری**[10] اسفارد(۲۰۰۸) می‌باشد. بر اساس این نظریه یک دوگانگی فرایند ــ شئ ذاتی در بیشتر مفاهیم ریاضی وجود دارد. اساس نظریه این است که در ابتدا مفهوم عملیاتی (فرایند محور)

۱ـ مطالب این قسمت برگرفته از مقاله‌های شماره ۱ تا ۳ مراجع است.

۲ــ Derivative
۳ــ Fermat
۴ــ Newton
۵ــ Leibniz
۶ــ Cauchy
۷ــ Weierstrass
۸ــ Process_object
۹ــ Sfard
۱۰ــ Reification

ایجاد می‌شود و پس از آن از طریق شئ انگاری فرایندها، اشیای ریاضی(مفاهیم ساختاری) ایجاد می گردند. فرایندهای پویا، عملیاتی هستند که روی اشیای ثابت و ایستای گذشته عمل می کنند. هر فرایندی که روی یک شئ، عمل می کند؛ خود از عمل، توسط فرایند دیگر به‌وجود آمده است. این فرایند زنجیر مانند، زوج‌های فرایند ــ شئ نامیده می‌شوند. اسفارد از سه مرحله فرایند برای رشد مفهوم صحبت می کند (شکل۲ــ۱) :

مرحله درونی‌کردن[۱] : فرایند یا عملیاتی که یک شخص روی یک شئ ذهنی آشنا و در دسترس انجام می‌دهد و قادر به تکرار آن باشد، گوییم آن را درونی کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص بین فرایندهای مرتبط گام بردارد).

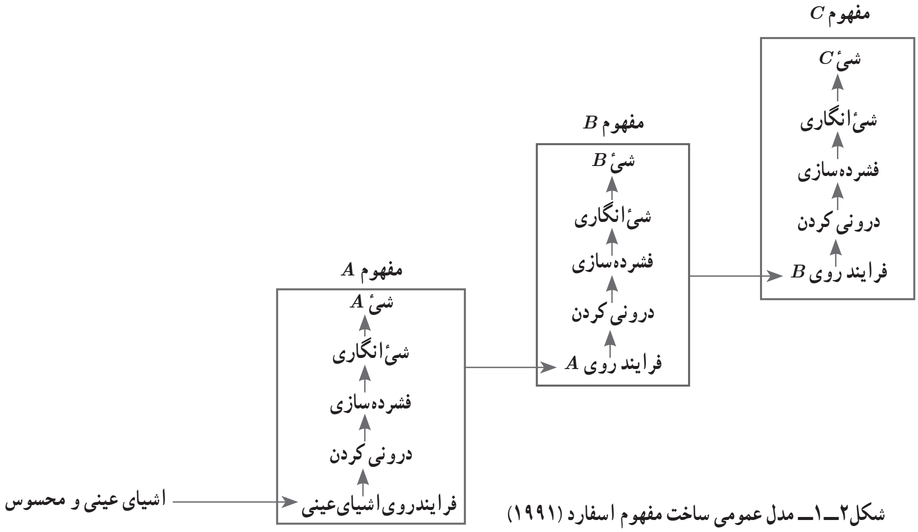
مرحله فشرده‌سازی یا جمع‌بندی[۲] : اگر یادگیرنده قادر باشد فرایند را در نظر بگیرد بدون آنکه در واقعیت اتفاق افتاده باشد گوییم آن را فشرده‌سازی و خلاصه کرده است (زمانی اتفاق می‌افتد که شخص فرایند را به عنوان کل در نظر بگیرد و بتواند به عنوان یک زیرفرایند در فرایند دیگر به کار برد).

مرحله شئ انگاری : زمانی که یادگیرنده از اشیای آشنا به یک نگاه کلی و جدید برسد به طوری که بتواند با آن دست‌ورزی کند، به مرحله شئ انگاری رسیده است. در این حالت فرایند، تبدیل به یک شئ ساختاری ایستا می‌شود و خود پایه‌ای برای فرایند پیشرفته‌تر بعدی می‌گردد (زمانی اتفاق می‌افتد که فرایندها به‌طور ساختاری به عنوان یک شئ در نظر گرفته شوند).

شکل۲ــ۱، مراحل ساخت یک مفهوم از دیدگاه اسفارد شامل درونی کردن، فشرده سازی و شئ انگاری را نشان می‌دهد و ساختار زنجیر مانند فرایند ــ شئ را در هر مرحله نمایان ساخته است. به عنوان مثال، می‌توان روند توسعه ساخت مفهوم تابع را نام برد. در ابتدا شخص با تناظر کردن دو شئ، آشنا می‌شود. به عنوان نمونه هر شخص یک کد ملی دارد یا در هر لحظه دماسنج یک دما را نشان می‌دهد. سپس این تناظر را به عنوان زوج مرتب (شئ) در نظر می‌گیرد، (شخص، کد ملی)؛ کار با زوج‌های مرتب به عنوان اشیا و ادامه مراحل درونی کردن و فشرده‌سازی با برقراری رابطه بین آنها دنبال می‌شود، سپس مفهوم رابطه درک می‌شود. فرایند نگاشتن عضوی از دامنه به درون عضوی از برد با این شرط که یک عضو از دامنه به دو عضو از برد نگاشته نشود را تابع به عنوان فرایند نامیم. اعمال روی تابع و دست ورزی با آن به شئ تبدیل می‌شود. مجموعه توابع را نیز می‌توان به عنوان یک خانواده توابع در نظر گرفت که منجر به جبر توابع می‌شوند. به عنوان مثالی دیگر، خارج قسمت تفاضلی را به عنوان اندازهٔ آهنگ متوسط متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل درنظر می‌گیریم. محاسبهٔ نسبت تفاضلات، به عنوان فرایند A می‌باشد. با انجام چندین محاسبه برای مقادیر مختلف و جمع‌بندی کردن آن، به عنوان یک شئ (شئ A همان نسبت تفاضلات به عنوان عدد است)خلاصه می‌شود. این شئ در فرایند دوم یعنی فرایند حدگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱ــ Interiorization ۲ــ Condensation

فرایند حدگیری در این مرحله، شامل تجزیه و تحلیل یک دنباله از آهنگ‌های متوسط تغییرات وقتی که تفاضل مخرج به سمت صفر میل کند، می‌باشد. نماد لایب نیتسی آن نیز به صورت $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ است. فرایند حدگیری به عنوان آهنگ آنی تغییرات، خلاصه شده و با $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$ نشان می‌دهیم (شئ B). فرایند خلاصه شده آهنگ آنی تغییرات در هر مقدار ورودی به عنوان یک شئ در ساخت تابع مشتق مورد استفاده قرار می‌گیرد. تابع فرایند در این مرحله، تغییرات هم‌زمان مقادیر ورودی و خروجی یا مقادیر آهنگ آنی تغییر خواهد بود و با نماد $\dfrac{dy}{dx}(x)$ نشان می‌دهیم (شئ C).



شکل۲ــ۱ــ مدل عمومی ساخت مفهوم اسفارد (۱۹۹۱)

زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰) چارچوبی برای درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه نموده است که در قسمت بعد به آن می‌پردازیم.

چارچوب زندیه برای درک مفهوم مشتق

زندیه (۱۹۹۷) نشان داد که درک اساسی که منجر به مفهوم مشتق می‌شود در طی بازنمایی‌های مختلف و تکالیف متنوع در زمینه‌های حساب دیفرانسیل محقق می‌شود. زندیه (۲۰۰۰) چارچوبی برای تجزیه و تحلیل درک دانش‌آموزان از مشتق ارائه داده است. دو مؤلفه اصلی چارچوب، یکی بازنمایی‌های چندگانه[1] (زمینه‌ها[2]) و دیگری لایه‌هایی از زوج‌های فرایند ــ شئ[3] می‌باشد که در ادامه هرکدام به اختصار

۱ــ Multiple representations ۲ــ Contexts ۳ــ Layers of process–object pairs

توضیح داده می‌شوند. بازنمایی‌های چندگانه مفهوم مشتق عبارت‌اند از :

الف) نموداری[1] : به عنوان شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه؛

ب) کلامی[2] : به عنوان آهنگ تغییر لحظه‌ای؛

ج) فیزیکی[3] : به عنوان سرعت (شتاب و در حالت کلی حرکت)؛

د) نمادین[4] : به عنوان حد خارج قسمت تفاضلی.

لایه‌های مشتق که هر کدام می‌توانند در نقش فرایند و شئ باشند به صورت زیر است :

نسبت
- فرایند، فرایند تقسیم صورت کسر به مخرج کسر.
- شئ، یک جفت عدد صحیح و یا خروجی فرایند تقسیم.

حد
- فرایند، فرایند نزدیک شدن به یک مقدار.
- شئ، مقدار حد.

تابع
- فرایند، تناظر بین دو مجموعه ناتهی.
- شئ، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب.

جدول ۲ــ۱، چارچوب درک دانش‌آموزان از مفهوم مشتق را که زندیه (۲۰۰۰) ارائه داد، به همراه بازنمایی‌ها و لایه‌های آن نشان می‌دهد.

جدول ۲ــ۱ــ چارچوب درک مفهوم مشتق زندیه (۱۹۹۷، ۲۰۰۰)

زمینه‌ها / لایه‌ها	نموداری	کلامی	فیزیکی	نمادین	غیره
(فرایند ـ شئ)	شیب	آهنگ	سرعت	خارج قسمت تفاضلی	
نسبت					
حد					
تابع					

چارچوب نظری اسفارد

از چارچوب نظری مورد استفاده در ارائه مفهوم مشتق در این کتاب، چارچوب اسفارد، همان رویکرد گفتمان شناختی[5] در متن‌های کتاب حساب دیفرانسیل است. رویکرد گفتمانی بر این پایه استوار است که

۱ــ Graphically
۲ــ Verbally
۳ــ Physically
۴ــ Symbolically
۵ــ Commognitive approach

تفکر نوع معینی از گفتمان با خود یا دیگران است. گفتمان شناختی از دو کلمه گفتمان[۱] و شناخت[۲] تشکیل شده‌اند که هر دو با هم یک پدیده را توصیف می‌کنند (اسفارد، ۲۰۰۸). نظریه گفتمان شناختی یک نظریه منسجم و دقیق برای تفکر دربارهٔ تفکر، مبتنی بر تجزیه و تحلیل گفتمان کلاسیک است (یاکل،۲۰۰۹). نظریه گفتمان شناختی کاربرد زیادی در تجزیه و تحلیل توصیفی و کمی محتوای کتاب‌ها دارد. این نظریه شامل ساختارهایی مانند کنایه[۳]، تفکر و گفتمان است و گفتمان شناختی به عنوان نتیجه‌ای از ارتباط بین فردی میان فرایند گفتمان و شناخت است. گفتمان شناختی دارای پنج خاصیت استدلال[۴]، انتزاع یا تجریدسازی[۵]، عینی‌سازی[۶]، ذهنی‌سازی[۷] و خودآگاهی[۸] می‌باشد. از طرفی ریاضی دارای سیستمی شامل اشیای گفت‌وگو به همراه خود گفت‌وگو است که وقتی اشیای جدید یکی پس از دیگری اضافه شوند از درون بی وقفه رشد می‌کند و گسترش می‌یابند (اسفارد، ۲۰۰۸) و به این ترتیب یک مفهوم، ساخت و گسترش می‌یابد.

رویکرد گفتمان شناختی مبانی اساسی را از بین چهار مشخصه گفتمان شرح می‌دهد:

استفاده از کلمات ــ واسطه‌های تصویری ــ روال‌ها یا روتین‌ها ــ روایت‌های تأییدی

۱ **استفاده از کلمات**[۹]: استفاده از کلمات، کلید مهمی در تدریس و یادگیری حساب دیفرانسیل می‌باشد. گفتمان ریاضی در حساب، گفتمانی است که در آن از جملات تکنیکی در متن‌ها استفاده می‌کنیم. برای نمونه روش استفاده آموزشگران از کلمات برای توضیح معنی حد و مشتق مهم است زیرا دانش‌آموزان نیاز به فرصت برای بیان خود و حس یکپارچه‌ای از مفاهیم دارند.

۲ **واسطه‌های تصویری**[۱۰]: واسطه‌های تصویری اشاره به ابزارهای غیرکلامی گفتمان دارند. در مباحث حساب دیفرانسیل، واسطه‌های تصویری اغلب با نمودارها، اشکال، جدول‌ها، علائم نمادین مشخص می‌گردند.

۳ **روال‌ها یا روتین‌ها**[۱۱]: روال‌ها همان الگوهای تکراری هستند که در سخنرانی‌های کلامی و واسطه‌های تصویری و روایت‌های تأییدی یافت می‌شوند.

۴ **روایت‌های تأییدی**[۱۲]: روایت‌های تأییدی یا تصدیقی اظهاراتی هستند که به عنوان صحبت‌های درست در نظر گرفته می‌شوند. در گفتمان ریاضی، روایت‌های تأییدی، جملاتی از مفاهیم ریاضی مانند تعاریف، قضایا یا توجیه‌ها می‌باشد (جدول ۱ و جدول ۲ را مشاهده کنید). این رویکرد تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنا بخشی[۱۳] می‌نامد. یک شخص، یک کلمه یا نماد ریاضی را با اشیای ملموس و قابل

۱ـ Communication
۲ـ Cognition
۳ـ Metaphor
۴ـ reasoning
۵ـ abstracting
۶ـ objectifying
۷ـ subjectifying
۸ـ consciousness
۹ـ Word ـ use
۱۰ـ Visual mediators
۱۱ـ Routines
۱۲ـ Endorsed narratives
۱۳ـ Realizations

دسترس درک می‌کند. برای نمونه یک شخص، کلمه تابع را با نمودار یا جدول درک می‌کند (اسفارد، ۲۰۰۸، ص۱۵۴).

جدول۱ــ اجزای گفتمان ریاضی در رویکرد گفتمان شناختی (اسفارد، ۲۰۰۸)

اجزا	توصیف‌ها
استفاده از کلمات (Word use)	استفاده از کلمات برای معنی کردن اشیای ریاضی
واسطه‌های تصویری (Visual Mediators)	روشهای غیر کلامی گفتمان
روال‌ها یا روتین‌ها (Routines)	الگوهای تکراری خوش تعریف
روایت‌های تأییدی یا تصدیقی (Endorsed Narratives)	اظهاراتی که سخنرانان به عنوان عبارات درست تأیید می‌کنند.

علاوه بر مشخصه‌های چارچوب گفتمان شناختی، این چارچوب شامل اشیای مختلفی از گفتمان ریاضی مانند : نشانگرها یا دلالت‌گرها [۱]،درخت‌های معنابخشی[۲]، مفاهیم[۳]، اشیای اولیه[۴]و اشیای استدلالی[۵] است.

گفتمان ریاضی

گفتمان ریاضی دارای اجزایی است که عبارت‌اند از :

اشیای اولیه : هر موجود درک‌پذیر و قابل دسترسی که مستقل از گفتمان‌های انسانی وجود دارد و شامل چیزهایی است که ما می‌توانیم ببینیم و لمس کنیم (اشیای مادی و تصاویر).

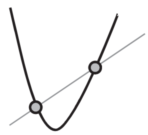
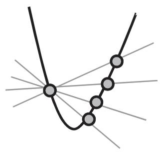
اشیای استدلالی : در فرایند نام‌گذاری صحیح به‌وجود می‌آیند : دادن اسم یا عنصر نمادین مشابه به یک شئ خاص. در این فرایند یک زوج (اسم یا ضمیر، شئ اولیه معین) ایجاد می‌شود. اولین عنصر از زوج نشانگر این است که در برقراری ارتباط با شئ دیگر زوج استفاده می‌شود و به عنوان نشانگر معنابخشی شمرده می‌شود (اسفارد،۲۰۰۸).

درخت معنابخشی : مجموعهٔ سلسله مراتب سازماندهی شده از تمامی مفاهیم نشانگرهای داده شده همراه با معنا بخشی این مفاهیم که به خوبی نشانگرهای قبلی خود را معنابخشی کنند و مفاهیمی برای نشانگرهای بعدی باشند. درخت‌های معنابخشی و در نتیجه اشیای ریاضی دارای ساختار شخصی هستند و اطلاعات ارزشمندی در مورد گفتمان شخص می‌دهند. در این بررسی فرایندی که مشتق یک تابع به‌صورت شئ در نظر گرفته می‌شود را فرایند مشتق و شیئی که فرایند مشتق روی آن اعمال می‌شود شئ اولیه و نتیجه فرایند مشتق را شئ نهایی می‌نامیم.

۱ــ signifiers
۲ــ realization trees
۳ــ realisations
۴ــ primary objects
۵ــ discursive objects

رویکرد گفتمان شناختی تشریح می‌کند که اشیای ریاضی با ماهیت‌های ملموس درک‌پذیر فهمیده می‌شوند؛ مانند کلمات و واسطه‌های تصویری که اسفارد آنها را معنابخشی می‌نامد. معنابخشی به جای درک و فهم استفاده می‌شود و زمانی به کار می‌بریم که یک مفهوم مشکل ریاضی را با استفاده از کلمات و تصاویر به مفاهیم ساده‌تر و قابل درک به کمک اشیای ریاضی تبدیل کنیم.

جدول۲ــ کلمات و واسطه‌های تصویری به عنوان معنا بخشی‌های مشتق

واسطه‌ها	اشیای اولیه	فرایند حد	اشیای نهایی
نمادین	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$	$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
عددی	$\frac{۴۲-۳۵}{۳-۱}$	دنباله‌ای از چند عدد	عدد
نموداری	(خط قاطع) 	(خطوط قاطع) 	(خط مماس) 

نماد $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ به صورت فرایند و شی هر دو بازنمایی می‌شود، این دوگانگی اغلب منجر به مشکل شدن درک نماد به عنوان شئ برای دانش‌آموزان می‌شود (زندیه، ۲۰۰۰).

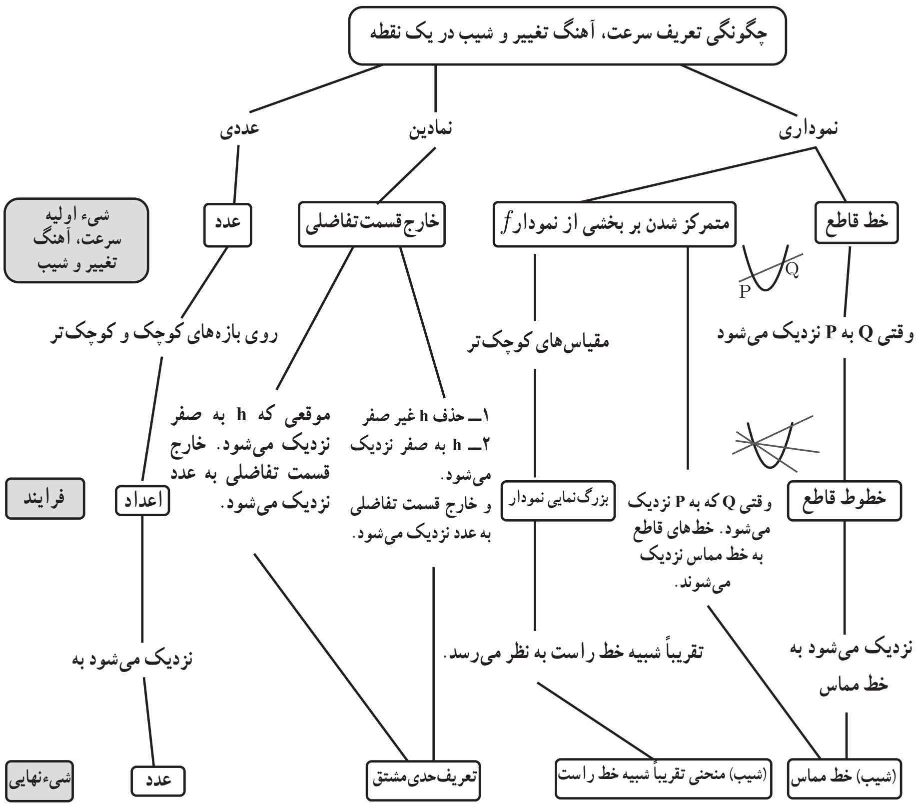
درخت معنا بخشی مشتق در یک نقطه

کتاب حسابان۲، حدوداً ۱۵۰ صفحه است که ۷۳ صفحهٔ آن (معادل ۴۹٪ کتاب) به مشتق و کاربرد آن اختصاص یافته است. در این کتاب از ۵۵ آیتم در مورد مشتق در یک نقطه، ۲۷ آیتم نموداری و ۱۷ آیتم نمادین و ۱۱ آیتم عددی می‌باشند که از آنها، ۳۴ آیتم به فرایند حد پرداخته می‌شوند، ۱۹ آیتم (نموداری) و ۱۵ آیتم (نمادین).

جدول موضوعات و تعداد صفحات و درصد اختصاص یافته به مشتق در کتاب

موضوع	تعداد صفحه	درصد از مبحث مشتق
شیب و خط مماس	۱۲	۱۶٪
مشتق‌پذیری و پیوستگی	۶	۸٪
تابع مشتق	۵	۷٪
مشتق تابع مثلثاتی و تابع مرکب ــ مشتق‌پذیری روی یک بازه	۷	۹٪
آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر	۹	۱۲٪
کاربرد مشتق	۳۴	۴۶٪

درخت معنابخشی مشتق در یک نقطه، در کتاب در ادامه نمایش داده شده است.



برخی از بدفهمی‌های رایج در مورد مشتق

یکی از عوامل مؤثر در طراحی این فصل، مطالعات انجام شده در مورد آموزش مفهوم مشتق بوده است[۱]. در این مطالعات برخی بدفهمی‌های رایج در مورد مفهوم مشتق مشاهده گردیده است که برخی از آنها به شرح زیر است. اطلاعات بیشتر در مراجع آمده است.

۱ عدم توجه به فرایند حدی : دانش‌آموزان صرفاً به نوشتن خارج قسمت تفاضلی بسنده می‌کنند و توجهی به مفهوم حدگیری ندارند. به عنوان نمونه ممکن است بنویسند : $f'(a)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

۲ درک نادرست از تعریف نمادین : برخی دانش‌آموزان تعریف مشتق در یک نقطه را به این صورت معرفی می‌کنند : $f'(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. این شخص علاوه بر اینکه مفهوم حدی را نادیده گرفته است، تفاوتی بین مشتق در یک نقطه و مشتق به عنوان تابع نیز قائل نیست.

۳ درک ناقص یا اشتباه از مشتق : برخی دانش‌آموزان مشتق را به نوعی کم کردن توان معرفی می‌کنند یعنی $f(x)=x^{۳} \to f'(x)=۳x^{۲}$.

۴ مشتق‌گیری از عبارات در توابع چند ضابطه‌ای بدون فراهم بودن شرایط.

۵ در توابعی که شامل چند متغیر هستند و برخی متغیرها ثابت فرض می‌شوند، به نادرستی مشتق گرفته می‌شود.

۶ در محاسبه تعبیر مشتق در یک نقطه در زندگی واقعی برداشت‌های متناقضی دارند.

۷ در مقایسه شیب‌های با مقادیر منفی اشتباهات چشم‌گیری دیده می‌شود.

۸ درک درستی از تقریب در محاسبات مربوط به شیب ندارند.

درس ۱

آشنایی با مفهوم مشتق

هدف کلی : درک مفهوم مشتق

اهداف جزئی

۱ یادآوری مفهوم شیب خط
۲ آشنایی با مفهوم خط مماس به صورت شهودی
۳ محاسبه شیب خط مماس با جدول مقادیر خارج قسمت تفاضلی و نمودار
۴ آشنایی با پیدا کردن معادله خط مماس
۵ محاسبه مشتق به روشی دیگر

پیش نیازها

۱ آشنایی با روش‌های حدگیری
۲ آشنایی با محاسبه شیب

روش تدریس

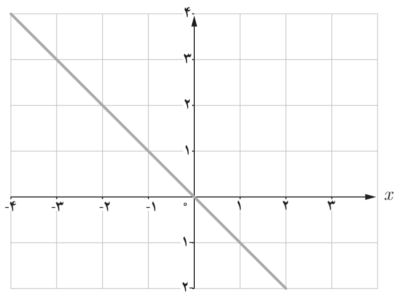
با تکیه بر مفهومی آشنا به نام شیب یک خط، تدریس آغاز می‌شود. مقایسه شیب‌های مختلف، به ویژه تغییرات شیب‌ها وقتی که مثبت یا منفی هستند و مقادیر آنها مفید و آموزنده است. سپس شیب خط مماس بر منحنی به طور شهودی ارائه می‌گردد و در ادامه به صورت دقیق‌تر و در یک فرایند حدی، شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه تعریف می‌گردد و مفهوم مشتق تابع در یک نقطه از آن استخراج می‌گردد.

فعالیت ص ۷۲

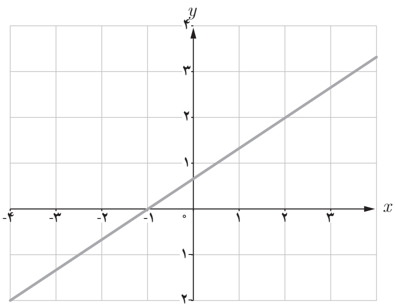
هدف این فعالیت، یادآوری مفهوم شیب خط، محاسبه و مقایسه شیب خطوط با یکدیگر است. به دانش‌آموزان اجازه دهید تا فعالیت را انجام دهند و در انتها مفاهیم را دوره نمایید.

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

$m = -۱$

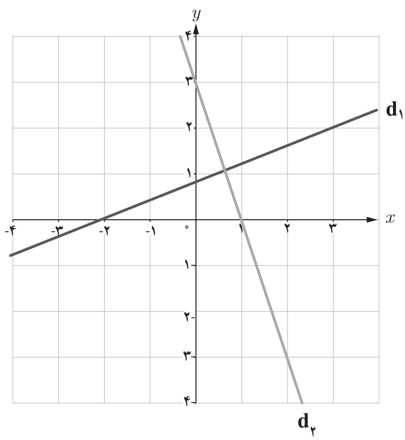


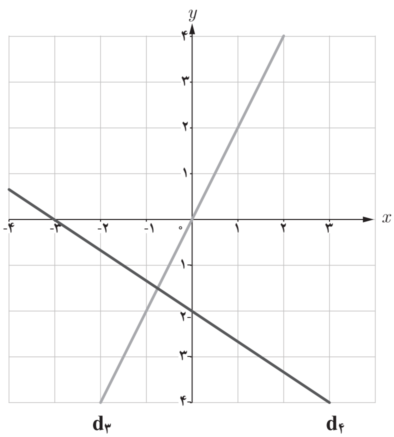
$m = \frac{۲}{۳}$



۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط به خط‌های $d_۱$, $d_۲$, $d_۳$ و $d_۴$ را روی شکل مشخص کنید.

خط	$d_۱$	$d_۲$	$d_۳$	$d_۴$
شیب	$\frac{۲}{۵}$	-۳	۲	$-\frac{۲}{۳}$





توصیه آموزشی

در صورت لزوم شیب‌های دیگر ر ا مطرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید که آنها را به دست آورند. به ویژه مقایسه شیب‌های منفی مختلف ضروری و آموزنده است.
تصاویر صفحهٔ ۷۳ صرفاً برای آشنایی اولیه با خط مماس می‌باشد. مثال‌هایی برای اینکه چه خطوطی را به عنوان مماس می‌شناسیم و چه خطوطی را خط مماس در نظر نمی‌گیریم. همچنین خط مماس لزوماً نبایستی نمودار را در یک نقطه قطع کند و یا هرخطی که در یک نقطه نمودار را قطع کند، لزوماً خط مماس نیست.

فعالیت ص ۷۴

هدف از ارائه این فعالیت درک شهودی خط مماس به کمک نمودار و با استفاده از حد خطوط قاطع است. ارائه مفهوم مشتق بدون فراهم ساختن مقدمات آن، فرصت یادگیری مناسب را از دانش‌آموزان می‌گیرد. باید به دانش‌آموزان فرصت داده شود تا تغییرات خطوط قاطع و حالت‌های حدی را به‌طور شهودی بررسی نمایند.

فعالیت ص ۷۵

هدف از این فعالیت، گذر از درک شهودی خط مماس و انجام محاسبات عددی و رسیدن به دقت می‌باشد. همان‌طور که در مبانی نظری نیز بیان شد، مشتق بازنمایی‌های مختلفی دارد و یکی از آنها عددی و نموداری است. در این فعالیت از دانش‌آموزان می‌خواهیم حدس بزنند، محاسبات انجام دهند، فرایند حدی را مشاهده کنند و در نهایت استدلال نمایند. چالش دیگری که در اینجا مطرح است بحث ورود متغیر می‌باشد که با انجام محاسبات و توجه به تغییرات متغیر طول‌ها، تأثیرات آن بر تغییرات عرض‌ها را متوجه شوند.

بازه [a,b]	$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
[۲,۲/۴]	$\dfrac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\dfrac{-(۲/۴)^{۲}+۱۰(۲/۴)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۴-۲}=\dfrac{۲/۲۵}{۰/۴}=۵/۶$
[۲,۲/۳]	$\dfrac{f(۲/۳)-f(۲)}{۲/۳-۲}=\dfrac{-(۲/۳)^{۲}+۱۰(۲/۳)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۳-۲}=\dfrac{۱/۷۱}{۰/۳}=۵/۷$
[۲,۲/۲]	$\dfrac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\dfrac{-(۲/۲)^{۲}+۱۰(۲/۲)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۲-۲}=\dfrac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
[۲,۲/۱]	$\dfrac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\dfrac{-(۲/۱)^{۲}+۱۰(۲/۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۱-۲}=\dfrac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
[۲,۲/۰۱]	$\dfrac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\dfrac{-(۲/۰۱)^{۲}+۱۰(۲/۰۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۰۱-۲}=\dfrac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
[۲,۲/۰۰۱] ⋮	$\dfrac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\dfrac{-(۲/۰۰۱)^{۲}+۱۰(۲/۰۰۱)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\dfrac{۰/۰۰۵۹۹۹}{۰\ \ ۰۰۱}=$ $=\dfrac{۰/۰۰۵۹۹۹}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$ ⋮
$[۲,۲+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است)	$\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{(۲+h)-۲}=\dfrac{-(۲+h)^{۲}+۱۰(۲+h)+(۲)^{۲}-۱۰(۲)}{h}$ $=\dfrac{-h^{۲}+۶h}{h}=-h+۶$

توصیه آموزشی

اجازه دهید دانش‌آموان محاسبات را انجام دهند و در نتیجه‌گیری به آنها کمک کنید تا خط مماس را به خوبی درک کنند. در صورت لزوم می‌توانند بازه‌های دیگری را نیز انتخاب کنند و محاسبات را انجام دهند. معلمان عزیز می‌توانند در این فعالیت این دو سؤال را از دانش‌آموزان بپرسند و یا به بحث بگذارند.

الف) به نظر شما مقادیر خارج قسمت تفاضلی به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

ب) آیا هر قدر که بخواهیم می‌توانیم خارج قسمت تفاضلی را به آن عدد (۶)نزدیک کنیم؟ اگر پاسخ مثبت است، به چه شرطی؟

کار در کلاس ص ۷۸

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^۲ + ۳$ را در نقطه‌ای به طول ۲− بنویسید.

حل : نقطه تماس A(−۲ ،۷) می‌باشد و برای پیدا کردن شیب خط مماس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم :

$$m = f'(-۲) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h} \lim_{h\to ۰}\frac{(-۲+h)^۲+۳-(-۲)^۲-۳}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{h^۲-۴h}{h} = \lim_{h\to ۰}(h-۴) = -۴$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت $y = -۴x - ۱ \quad \leftarrow \quad y - ۷ = -۴(x+۲)$ است.

کار در کلاس ص ۸۰

اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(❊ راهنمایی : تغییر متغیر $x = a + h$ را به‌کار برید. توجه کنید وقتی که $h \to ۰$ آنگاه $x \to a$)

حل :

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

هدف از ارائه این کاردرکلاس، کاربرد فراوان روش دیگر برای محاسبه مشتق می‌باشد. توجه شود که هر دو روش جبری و هندسی مفید می‌باشند.

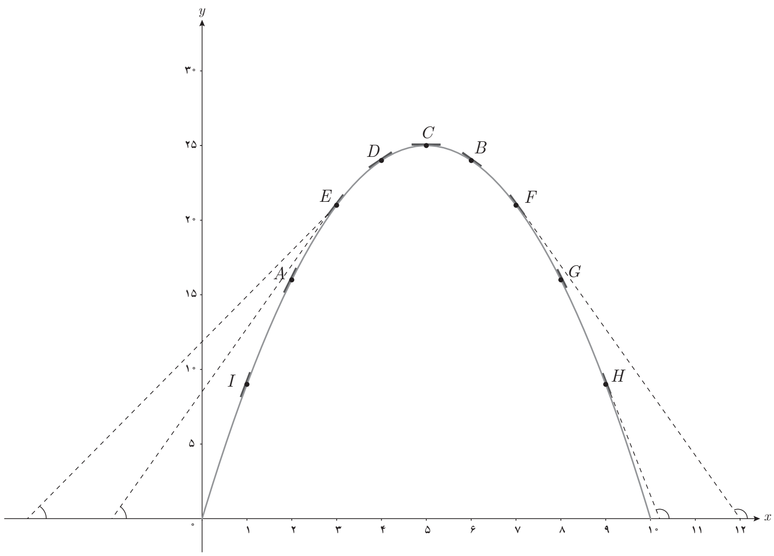
کار در کلاس ص۸۰

الف) برای تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$، $f'(۸)$ و $f'(۵)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشخص تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی دارای مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.



ث) با محاسبه $f'(۳)$ و $f'(۴)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

حل :

الف)

$$f'(۵)=\lim_{x\to۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}=\lim_{x\to۵}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۵}{x-۵}=\lim_{x\to۵}\frac{-(x-۵)^{۲}}{x-۵}$$

$$=\lim_{x\to۵}-(x-۵)=۰$$

$$f'(۸)=\lim_{x\to۸}\frac{f(x)-f(۸)}{x-۸}=\lim_{x\to۸}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۱۶}{x-۸}=\lim_{x\to۸}\frac{-(x-۸)(x-۲)}{x-۸}$$

$$= \lim_{x\to ۸} -(x-۲) = -۶$$

ب) نقاط (D , B) یا (E , F) یا (A , G) یا (I , H)

پ) در نقاط (I , A , E , D) مشتق مثبت و در نقاط (B , F , G , H) مشتق منفی است.

ت) با توجه به شکل و مقایسه زاویه‌ها، مشتق در نقطه ۳ بزرگ‌تر از مشتق در نقطه۴ است.

ث)

$$f'(۳) = \lim_{x\to ۳} \frac{f(x)-f(۳)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۱}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{-(x-۳)(x-۷)}{x-۳}$$
$$= \lim_{x\to ۳} -(x-۷) = ۴$$

$$f'(۴) = \lim_{x\to ۴} \frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{-x^{۲}+۱۰x-۲۴}{x-۴} = \lim_{x\to ۴} \frac{-(x-۴)(x-۶)}{x-۴}$$
$$= \lim_{x\to ۴} -(x-۶) = ۲$$

واضح است که $f'(۳) > f'(۴)$.

توصیه آموزشی

توجه به این نکته در این فعالیت ضروری است که برای زاویه‌های منفرجه که شیب منفی به دست می‌آید، ممکن است در مقایسه شیب‌ها ایجاد بدفهمی شود. همکاران محترم با انجام یک مثال این قسمت را برجسته کنید. به عنوان نمونه شیب در نقطه ۷ بزرگتر از شیب در نقطه ۹ می‌باشد.

شیب	نقطه
۸	۱
۶	۲
۴	۳
۲	۴
۰	۵
−۲	۶
−۴	۷
−۶	۸
−۸	۹

رسم جدول فوق برای دانش‌آموزان آموزنده است.

جمع‌بندی کلی : مثلاً بررسی رفتار کلی از $x = ۰$ تا $x = ۵$ شیب‌ها با مقادیر مثبت کاهش می‌یابد تا به صفر برسد و از $x = ۵$ تا $x = ۱۰$ شیب‌ها با مقادیر منفی کاهش می‌یابند.

پاسخ تمرین‌های ص ۸۱

۱ اگر $f(x)=۳x^۲-۲x+۱$، $f'(۲)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

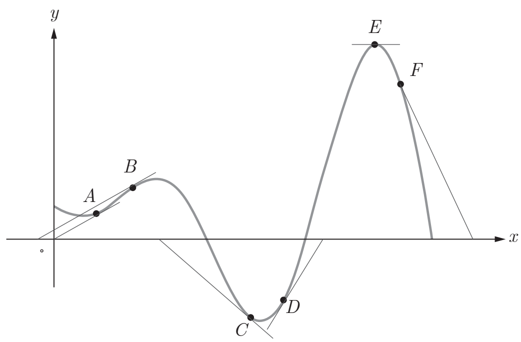
حل : با جای‌گذاری $x=۲$ عرض نقطه تماس برابر ۹ به دست می‌آید و داریم :

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x+۱-۹}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x-۸}{x-۲}$$
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(۳x+۴)(x-۲)}{x-۲}=۱۰$$

$$y-۹=۱۰(x-۲)\rightarrow y=۱۰x-۱۱$$

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{۱}{۲}$	A
۱	B
۲	D

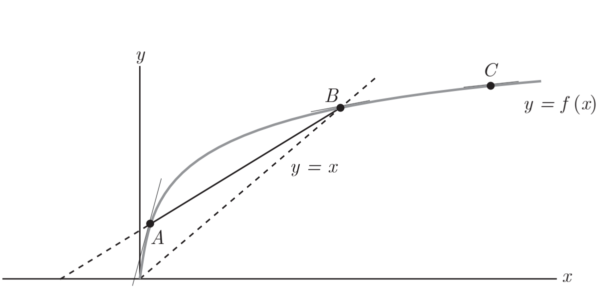


۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C



ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

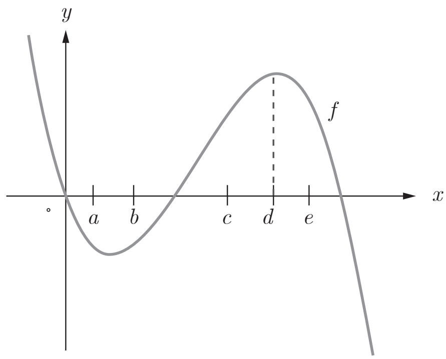
ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 , m_2 , ... و m_6 در نظر بگیرید.

حل : $m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲



۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

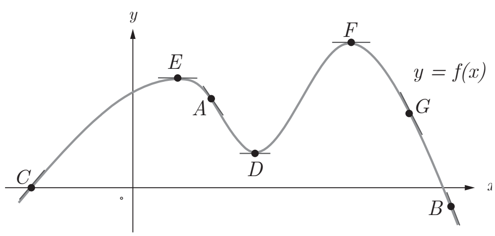
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x)=x^{۳}-۲$ ، $f'(-۱)$ را به‌دست آورید.

حل :

$$'(-\ ) = \lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}-۲+۳}{x+۱} = \lim_{x\to -۱}\frac{x^{۳}+۱}{x+۱}$$

$$= \lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^{۲}-x+۱)}{x+۱} = ۳$$

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

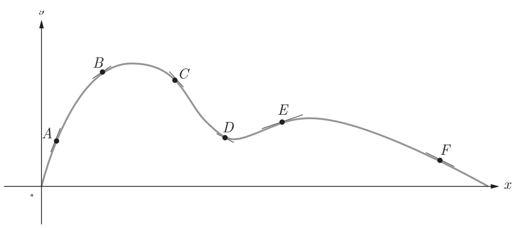
ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E<m_B<m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط F ،D و C منفی است.

ث) $m_F<m_D<m_C$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$



حل :

الف) نادرست است زیرا در نقاط F،D و C منفی می‌باشد.

ب) نادرست است زیرا زاویه‌ای که خط مماس در نقطه A با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد از زاویه‌ای که خط مماس در نقطه B با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد بیشتر است یعنی $m_A > m_B$.

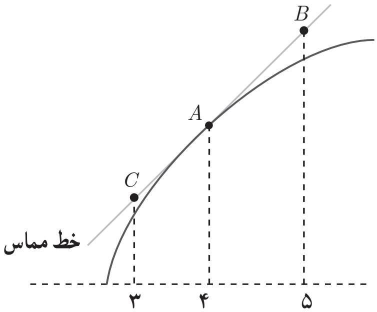
پ) درست است.

ت) درست است.

ث) نادرست است زیرا $m_C < m_D < m_F$.

ج) درست است.

۸ برای تابع f در شکل زیر داریم : $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



حل :

روش اول :

مختصات نقطه $A(۴,۲۵)$ و $B(۴+۱,۲۵+f'(۴)) = B(۵,۲۶/۵)$ و $C(۴-۱,۲۵-f'(۴)) = C(۳,۲۳/۵)$.

روش دوم : مختصات نقطه $A(۴,۲۵)$ و

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

$$y - ۲۵ = ۱/۵(x - ۴)$$

$$y = ۱/۵\, x + ۱۹$$

$$y_B = ۲۶/۵ \,,\, y_C = ۲۳/۵$$

درس ۲

مشتق‌پذیری و پیوستگی

اهداف کلی

بررسی مشتق‌پذیری و معرفی مفهوم مشتق به عنوان تابع

اهداف جزئی

۱ شناسایی نقاط مشتق‌ناپذیر
۲ محاسبه مشتق چپ و راست
۳ بررسی رابطه بین مشتق‌پذیری و پیوستگی
۴ معرفی مماس قائم
۵ آشنایی و درک تابع مشتق
۶ محاسبه تابع مشتق برخی توابع
۷ مشتق تابع مثلثاتی و مرکب
۸ مشتق‌پذیری روی یک بازه
۹ معرفی مشتق مرتبه دوم

پیش نیازها

۱ آشنایی با مشتق در یک نقطه
۲ آشنایی با خط مماس
۳ آشنایی با حدهای نامتناهی

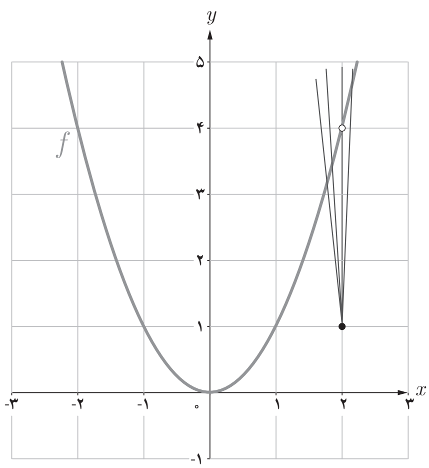
روش تدریس

در این درس در شروع با توجه به مفهوم شیب خط مماس بر منحنی به بررسی عدم وجود خط مماس در نقاطی که تابع ناپیوسته است، پرداخته می‌شود و ارتباط بین پیوستگی و مشتق‌پذیری بررسی می‌شود. با استفاده از نیم مماس‌های راست و چپ مفهوم مشتق راست و چپ ارائه می‌شود سپس مشتق به عنوان یک تابع ارائه می‌شود و در نهایت دستورهایی برای محاسبه مشتق برخی توابع داده می‌شود.
هدف از این فعالیت آن است که مشخص کنیم تا چه حد ناپیوستگی روی مشتق‌پذیری مؤثر است. در این فعالیت تابع ناپیوستگی رفع شدنی دارد (حد وجود دارد).

فعالیت ص ۸۴

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲ \end{cases}$ (شکل زیر) را درنظر می‌گیریم :

الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(۲)$ وجود ندارد؟



حل : با توجه به تعریف مشتق، به دلیل این که مخرج کسر صفر است و صورت کسر یک عدد پس حد وجود ندارد.

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^{۲} - ۱}{x - ۲} = \infty$$

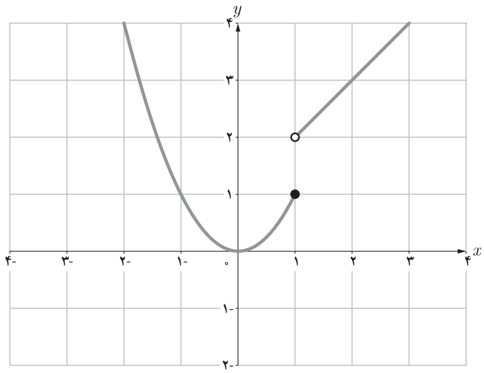
به کمک نمودار هم به دلیل این که شیب خطوط قاطع رسم شده به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند، مشتق وجود ندارد (زاویه خطوط قاطع نسبت به جهت مثبت محور طول‌ها به ۹۰ درجه نزدیک می‌شوند).

هدف از این کاردرکلاس، معرفی نوع دیگر ناپیوستگی (که رفع نشدنی است) و تأثیر آن بر مشتق‌پذیری می‌باشد. تابع در این نقطه پیوستگی چپ دارد.

کار در کلاس ص ۸۵

تابع g (شکل زیر) را به‌صورت $g(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \leq ۱ \\ x + ۱ & x > ۱ \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(۱)$ موجود نیست؟



حل : مشتق چپ و راست در $x = ۱$ محاسبه می‌کنیم :

$$g'_{+}(۱) = \lim_{x \to ۱^{+}} \frac{g(x) - g(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^{+}} \frac{x + ۱ - ۱}{x - ۱} = +\infty$$

$$g'_{-}(۱) = \lim_{x \to ۱^{-}} \frac{g(x) - g(۱)}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^{-}} \frac{x^{۲} - ۱}{x - ۱} = \lim_{x \to ۱^{-}} (x + ۱) = ۲$$

با توجه به اینکه مشتق چپ و راست برابر نیست پس تابع مشتق پذیر نمی‌باشد.

کار در کلاس ص ۸۷

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-۱$ نیز موجود نیست.
در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-۱$ را بنویسید.

حل :

$$f'_{+}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{-(x^{۲}-۱)}{x+۱}=۲$$

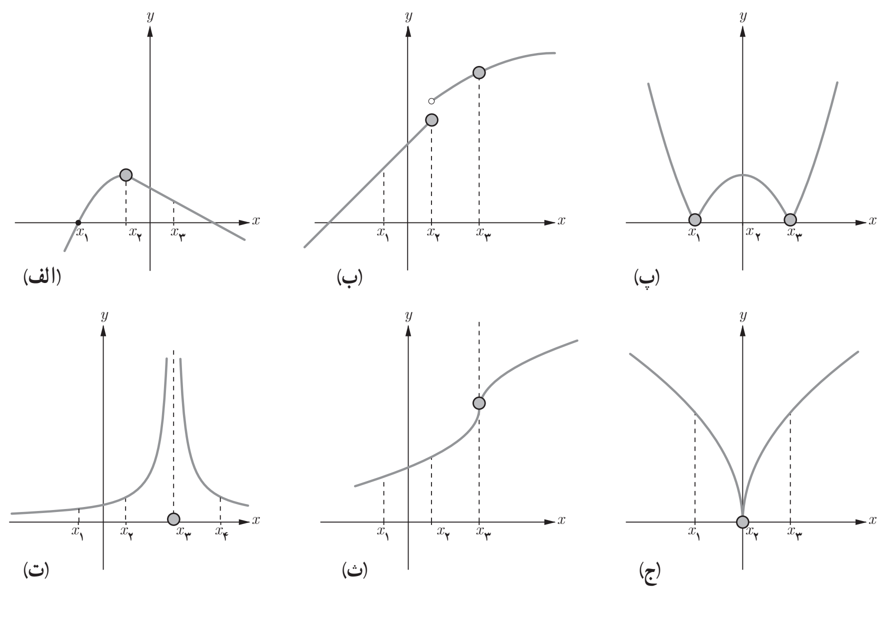
$$f'_{-}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{(x^{۲}-۱)}{x+۱}=-۲$$

نیم مماس راست: $y-۰=۲(x+۱)\to y=۲x+۲$

نیم مماس چپ: $y-۰=-۲(x+۱)\to y=-۲x-۲$

کار در کلاس ص ۸۹

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.



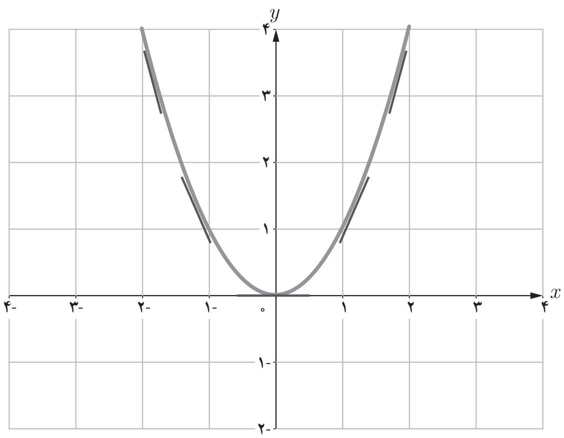
حل :

شکل الف، تابع در x_2 مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.
شکل ب، تابع در x_2 و x_3 مشتق‌پذیر نیست زیرا در این نقاط تابع ناپیوسته است.
شکل پ، تابع در x_3 و x_1 مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست برابر نیستند. دو نیم مماس داریم.
شکل ت، تابع در x_3 مشتق‌پذیر نیست زیرا تابع ناپیوسته است.
شکل ث، تابع در x_3 مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.
شکل ج، تابع در x_2 مشتق‌پذیر نیست زیرا مماس قائم داریم.

هدف از این فعالیت عبور از مشتق در یک نقطه به مشتق به عنوان تابع به کمک چند مثال و تعمیم می‌باشد.
همان‌طور که در بخش‌های نظری نیز بیان گردید مناسب است دانش‌آموزان را با چند مثال ساده وارد بحث مشتق به عنوان تابع نماییم.

فعالیت ص ۹۰

تابع $f(x) = x^2$ را درنظر می‌گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$۲\sqrt{۳}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x-2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{f(x)-f(\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

حل :

$$f'(-3) = \lim_{x\to(-3)} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{x\to(-3)} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$$

$$f'(-1) = \lim_{x\to(-1)} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to(-1)} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$$

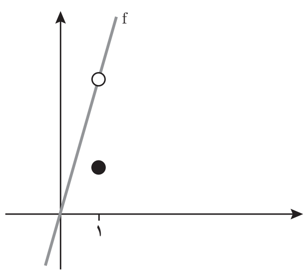
$$f'(\frac{1}{2}) = \lim_{x\to(\frac{1}{2})} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to(\frac{1}{2})} \frac{x^2-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}} = 1$$

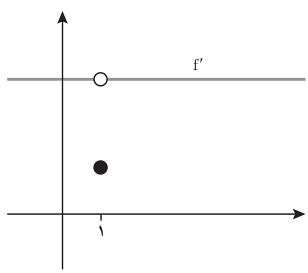
در تمام نقاط مشتق وجود دارد.

کار در کلاس ص ۹۲

اگر $f(x) \quad \begin{cases} 5x & x\neq 1 \\ 2 & 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

حل : دامنه تابع تمام اعداد حقیقی است ولی دامنه تابع مشتق آن تمام اعداد حقیقی به غیر از ۱ می‌باشد.





$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵(x+h)-۵x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵h}{h}=۵ \qquad x\neq ۱$$

تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست زیرا پیوسته نمی‌باشد.

توصیه آموزشی

بررسی رابطه بین نمودار تابع و مشتق آن بسیار حائز اهمیت است. با تأمل در این قسمت به دانش‌آموزان کمک شود تا بهتر آن را درک کنند. از آوردن مثال‌های پیچیده برای دانش‌آموزان خودداری شود. توجه شود که تاکنون قاعده‌ای برای محاسبه مشتق مطرح نگردیده است و دانش‌آموز بایستی از طریق تعریف محاسبات را انجام دهد.

کار در کلاس ص ۹۵

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\frac{۱}{x-۴}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(۳x^{۲}+۵)$ پ) $h(x)=\frac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

حل:

۱ الف) $x\neq$ $\quad f'(x)=-\frac{\quad}{(\quad)}$

ب) $g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^{۲}+۵)+(۶x)\sqrt{x}$

پ) $h'(x)=\frac{۱(۲x^{۲}+x-۱)-(۴x+۱)(x)}{(۲x^{۲}+x-۱)^{۲}}$

۲

$$(fg)'(۲) = f'(۲)g(۲) + g'(۲)f(۲) = ۵(۸) + (-۶)۳ = ۲۲$$

$$(\frac{f}{g})'(۲) = \frac{f'(۲)g(۲) - g'(۲)f(۲)}{g^{۲}(۲)} = \frac{۵(۸) - (-۶)۳}{۸^{۲}} = \frac{۵۸}{۶۴} = \frac{۲۹}{۳۲}$$

کار در کلاس ص ۹۶

مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \tan x$

ب) $g(x) = \frac{۵\cos x}{۱ - \sin x}$

حل : الف) $f'(x) = \cos x(\tan x) + (۱ + \tan^{۲} x)(\sin x)$

ب) $g'(x) = \frac{-۵\sin x(۱ - \sin x) - (-\cos x)(۵\cos x)}{(۱ - \sin x)^{۲}}$

کار در کلاس ص ۹۷

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^{۲}+۱)^{۳}(۵x - ۱)$

ب) $g(x) = \cos^{۳} x$

پ) $h(x) = \sin(۳x^{۲} + ۵)$

حل :

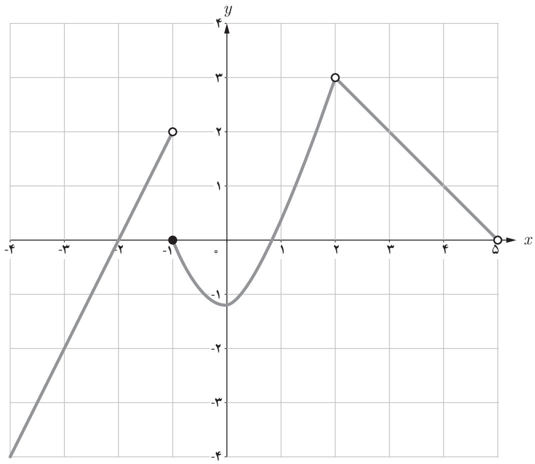
الف) $f'(x) = ۳(۲x)(x^{۲} + ۱)^{۲}(۵x - ۱) + ۵(x^{۲} + ۱)^{۳}$

ب) $g'(x) = ۳\,(-\sin x) \cos^{۲} x$

پ) $h'(x) = ۶x \cos(۳x^{۲} + ۵)$

کار در کلاس ص ۹۸

اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-۱\,,\,۱]$ ، $(۲\,,\,۵)$ و $[-۲\,,\,۰]$ بررسی کنید.



حل :

تابع f در بازهٔ $[-۱,۱]$ مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف $۲x$ است. تابع در بازه $(۲،۵)$ مشتق‌پذیر و مشتق آن با استفاده از تعریف -۱ می‌باشد. ولی تابع در بازه $[-۲,\ ۰]$ مشتق‌پذیر نیست زیرا در $x=-۱$ دارای مشتق چپ ۲ و مشتق راست -۲ است (با استفاده از تعریف).

$$x<-۱: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(x+h)+۴-۲x-۴}{h}=۲$$

$$-۱<x<۲: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۲}-۱-x^{۲}+۱}{h}=۲x$$

$$۲<x<۵: f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(x+h)+۵+x-۵}{h}=-۱$$

تابع در $x=-۱$ پیوسته نیست و مشتق ندارد ولی در $x=۲$ پیوسته است ولی مشتق چپ و راست برابری ندارد (دو نیم مماس داریم).

توصیه آموزشی

مفهوم مشتق‌پذیری روی یک بازه را هم از روی نمودار و هم با استفاده از تعریف مشتق برای دانش‌آموزان مشخص نمایید. توجه شود که در توابع چند ضابطه‌ای امکان بروز بدفهمی هنگام مشتق‌گیری وجود دارد. مثلاً $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۱\\ ۲x+۱ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته نیست و مشتق ندارد در حالی که اگر از هر یک از ضابطه‌ها به تنهایی مشتق گرفته شود به نتیجه اشتباه منجر می‌شود و مشتق تابع ظاهراً ۲ می‌شود. در حقیقت در این مثال شرایط مشتق‌گیری از هر دو ضابطه وجود ندارد.

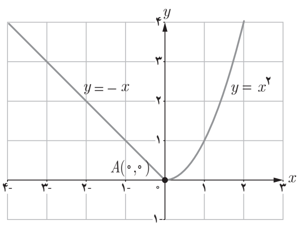
تمرین ص ۹۹

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

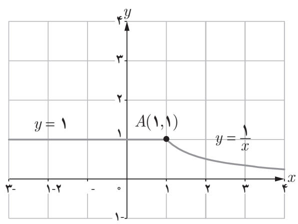
حل:

یکی از پاسخ‌ها می‌تواند $g(x)=\begin{cases}x+۱ & x\leq ۲\\ -۲x+۷ & x>۲\end{cases}$ و $f(x)=|x-۲|$ باشند.

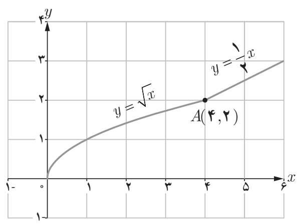
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

حل:

الف) با استفاده از تعریف مشتق، $f'_{-}(۰)=-۱$, $f'_{+}(۰)=۰$

ب) $f'_{-}(۱)=۰$, $f'_{+}(۱)=-۱$

پ) با استفاده از تعریف، $f'_{-}(۴)=\frac{۱}{۴}$, $f'_{+}(۴)=\frac{۱}{۲}$.

۳ تابع $f(x)=\begin{cases}۵x-۴ & x<۰\\ x^{۲} & ۰\le x\le ۳\\ x+۶ & x>۳\end{cases}$ داده شده است.

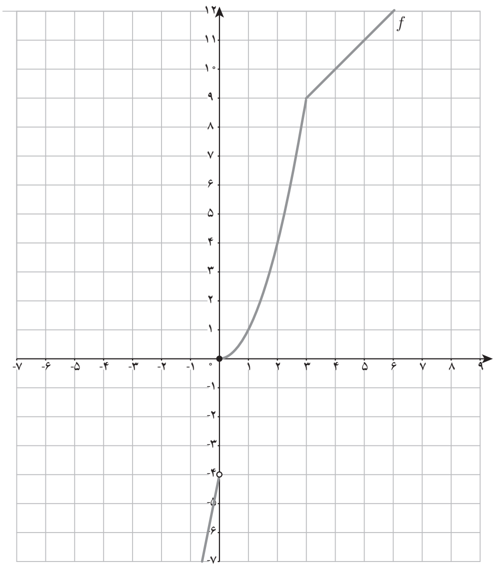
الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

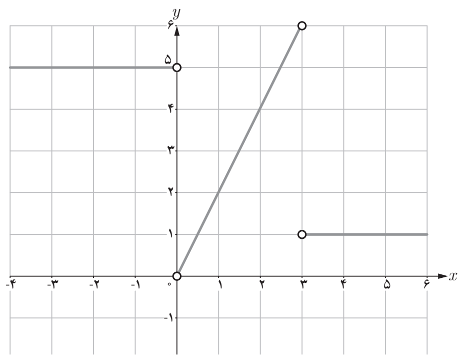
حل : الف)



ب) با استفاده از تعریف مشتق، $f'_-(۰)=۵$, $f'_+(۰)=۰$ و $f'_-(۳)=۶$, $f'_+(۳)=۱$

پ) $f'(x)=\begin{cases}۵ & x<۰\\ ۲x & ۰<x<۳\\ ۱ & x\ge ۳\end{cases}$

ت)



۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x = ۲$ برابر ۳ شود.

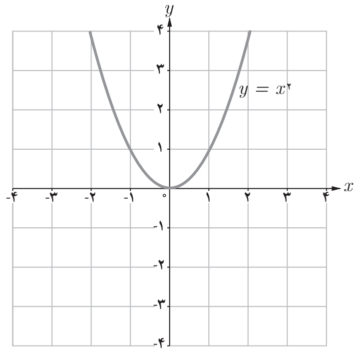
پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

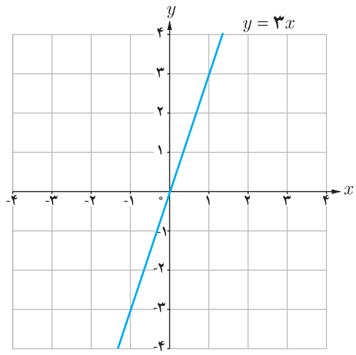
ث) در تمام نقاط منفی باشد.

حل : نمونه‌ای از پاسخ‌ها می‌تواند به‌صورت زیر باشد :

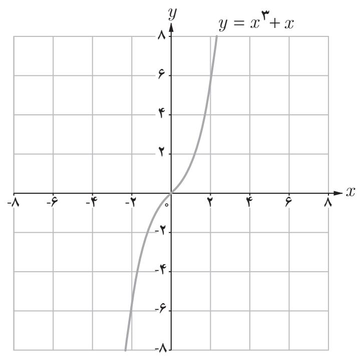
الف) $f'(۰) = ۰$

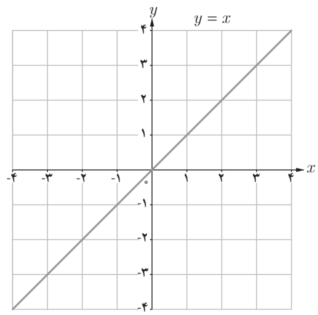


ب) $f'(۲) = ۳$

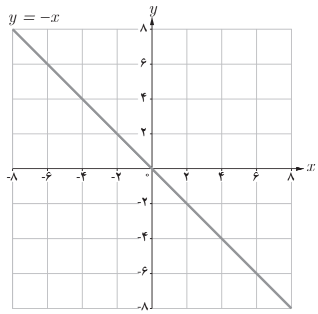


پ) $f'(x) = ۳x^۲ + ۱$





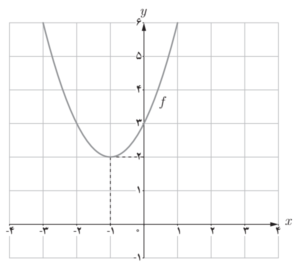
ت) $f'(x) = ۱$



ث) $f'(x) = -۱$

تذکر : توجه شود که این تمرین بازپاسخ است و مقایسه بین پاسخ‌ها چه درست یا نادرست آموزنده است.

۵



الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۳)$ و $f'(۰)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۲)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ بررسی کنید.

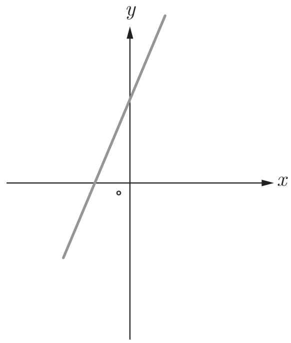
پ) تابع مشتق را رسم کنید.

حل :

الف) با استفاده از شیب خطوط مماس $f'(-۱) < f'(۰) < f'(۲) < f'(۳)$

ب) $f'(x) = ۲x + ۲ : f'(-۱) = ۰ \,,\ f'(۰) = ۲ \,,\ f'(۲) = ۶ \,,\ f'(۳) = ۸$

پ)



۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۳ & x\geq ۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

حل :

تابع در $x=۱$ پیوسته نیست پس مشتق‌پذیر نمی‌باشد. ($f'_-(۱)=+\infty$ و $f'_+(۱)=۲$)

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

حل :

این مسئله بازپاسخ است یکی از جواب‌ها می‌تواند $f(x)=x \;,\; g(x)=x+۱ \;,\; h(x)=x+۲$ باشد.

۸ اگر $f(x)=|x^{۲}-۴|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

حل : تابع در نقاط ۲ و ۲- مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

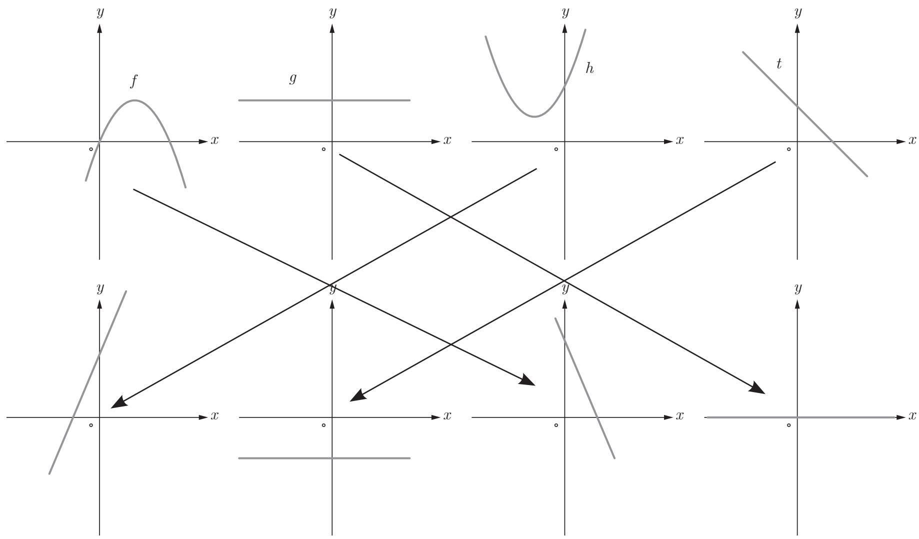
$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=۴$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=-۴$$

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x+۲}=-۴$$

$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x+۲}=۴$$

۹ نمودار توابع f ، g ، h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



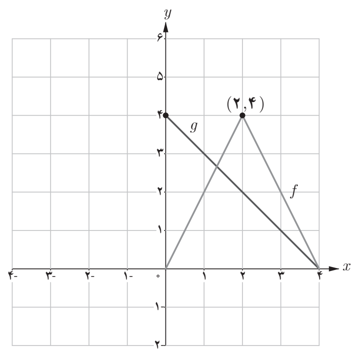
۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x) \cdot g(x)$

مطلوب است : $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$



حل :

الف)

$h'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$

$h'(۱) = ۲(۳) + (-۱)\, ۲ = ۴$

$h'(۲) =$ وجود ندارد

$h'(۳) = (-۲)۱ + (-۱)۲ = -۴$

ب)

$$k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

$$k'(۱)=\frac{۲(۳)-(-۱)(۲)}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

$k'(۲)=$ وجود ندارد

$$k'(۳)=\frac{(-۲)۱-(-۱)۲}{۱}=۰$$

۱۱ اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

حل :

$$(f+g)'(۱)=f'(۱)+g'(۱)=۳+۵=۸$$

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۳)+۲(۵)=۱۹$$

۱۲ اگر $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\leq ۰\\ x & x>۰\end{cases}$ نشان دهید $f'_{+}(۰)$ و $f'_{-}(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

حل :

تابع f در $x=۰$ پیوسته است و $f'_{+}(۰)=۱$, $f'_{-}(۰)=۰$.

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x^{۲}-۰}{x-۰}=۰$$

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x-۰}{x-۰}=۱$$

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۳}$

ب) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

پ) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

ت) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

حل :

الف) $f'(x)=۶x(۲x-۵)^{۳}+۳(۲)(۲x-۵)^{۲}(۳x^{۲}-۴)$

ب) $f'(x)=\dfrac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}$

پ) $f'(x)=\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۱)+۳x^{۲}(\sqrt{۳x+۲})$

ت) $f'(x)=\dfrac{۹(\sqrt{x})-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{x}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sin^{۳}x+\cos^{۲}x$

ب) $f(x)=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$

پ) $f(x)=\mathrm{tg}^{۲}x-۲\cos x$

ت) $f(x)=\sin x\ \cos۲x$

حل :

الف) $f'(x)=۳\cos x\sin\quad x+۲(-\sin x)\cos x$

ب) $f'(x)=\dfrac{-\cos x(۱+\sin x)-\cos x(۱-\sin x)}{(۱+\sin x)^{۲}}$

پ) $f'(x)=۲(۱+\tan^{۲}x)\tan x+۲\sin x$

ت) $f'(x)=\cos x\cos۲x+(-۲\sin۲x)\sin x$

درس ۳

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

هدف کلی درس

بررسی آهنگ تغییر و رابطه آن با مشتق

اهداف درس

۱ تعبیر هندسی و فیزیکی آهنگ تغییر
۲ محاسبه آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر و تفاوت آنها
۳ کاربردهای آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر
۴ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای
۵ اتصال بین آهنگ لحظه‌ای تغییر و مشتق

پیش نیازها

۱ آشنایی با خارج قسمت تفاضلی
۲ آشنایی با مشتق
۳ آشنایی با مفاهیم اولیه سرعت

روش تدریس

در این درس آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای و کاربردهای آن معرفی شده است. مثال‌های متنوعی برای دانش‌آموزان ارائه شده است. **توجه شود که آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.**

با توجه به آنکه دانش‌آموزان در درس فیزیک۳ پایه دوازدهم با مفهوم سرعت لحظه‌ای به طور شهودی آشنا می‌شوند، فرصتی مناسب فراهم می‌شود تا به مفهوم سرعت لحظه‌ای از منظر ریاضی با دقت بیشتری پرداخته شود. بهتر است ارتباط با درس فیزیک به دانش‌آموزان یادآوری شود.

کار در کلاس ص ۱۰۴

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید (محاسبهٔ عددی لازم نیست)

A سرعت متوسط بین $t=۱$ و $t=۳$

B سرعت متوسط بین $t=۵$ و $t=۶$

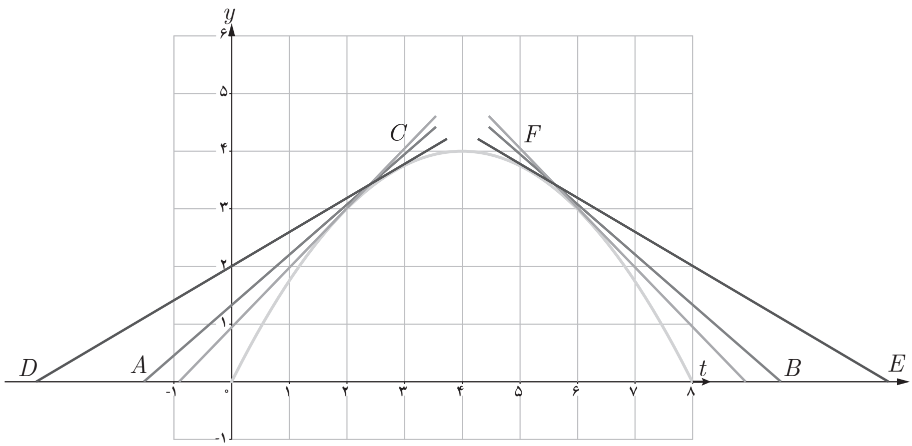
C سرعت لحظه‌ای در $t=۱$

D سرعت لحظه‌ای در $t=۳$

E سرعت لحظه‌ای در $t=۵$

F سرعت لحظه‌ای در $t=۶$

حل: $F < B < E < D < A < C$



کار در کلاس ص ۱۰۵

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی [۰,۲۵] چقدر است؟

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، باهم مقایسه کنید. کدام یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار صفحه قبل مقایسه کنید.

حل :

الف) $\frac{f(۲۵)-f(۰)}{۲۵}=\frac{۷\sqrt{۲۵}+۵۰-۵۰}{۲۵}=\frac{۳۵}{۲۵}=\frac{۷}{۵}=۱/۴cm/M$

ب) $f'(x)=\frac{۷}{۲\sqrt{x}}\ ;\ f'(۲۵)=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷\ ,\ f'(۴۹)=\frac{۷}{۱۴}=۰/۵\rightarrow f'(۴۹)<f'(۲۵)$

پ) $\frac{f(۳۶)-f(۱۶)}{۳۶-۱۶}=\frac{۹۵-۸۰}{۲۰}=\frac{۱۵}{۲۰}=۰/۷۵\ cm/M$

کار در کلاس ص ۱۰۸

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به‌دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی [۵ ,۸] به‌دست آورید.

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم m/s ۳۵ و m/s ۳۵− است.

حل :

الف) $h'(t)=-۱۰t+۴۰$

$h'(۰)=۴۰\ m/s\ ,\ h'(۸)=-۴۰\ m/s$

ب) $\frac{h(۸)-h(۵)}{۸-۵}=\frac{((-۵)(۸)^۲+۴۰(۸))-((-۵)(۵)^۲+۴۰(۵))}{۳}=\frac{-۷۵}{۳}=-۲۵m/s$

پ) $h'(t)=-۱۰t+۴۰=۳۵\rightarrow t=۰/۵s$

$h'(t)=-۱۰t+۴۰=-۳۵\rightarrow t=۷/۵s$

تمرین ص ۱۰۸

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
T درجه حرارت	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

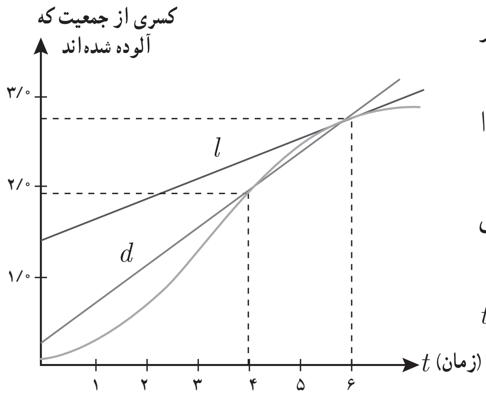
حل :

الف) $\dfrac{T(۱۲)-T(۸)}{۱۲-۸}=\dfrac{۱۹-۱۱}{۴}=۲C/h$

ب) $\dfrac{T(۱۸)-T(۱۲)}{۱۸-۱۲}=\dfrac{۹-۱۹}{۶}=-۱/۶۷C/h$

پ) از صبح ساعت ۸ تا ۱۲ درجه حرارت با سرعت متوسط ۲ سانتی‌گراد بر ساعت در حال افزایش است و از ساعت ۱۲ تا ۱۸ درجه حرارت با سرعت متوسط ۱/۶۷- سانتیگراد بر ساعت در حال کاهش می‌باشد.

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.



الف) شیب‌های خطوط t و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند؟

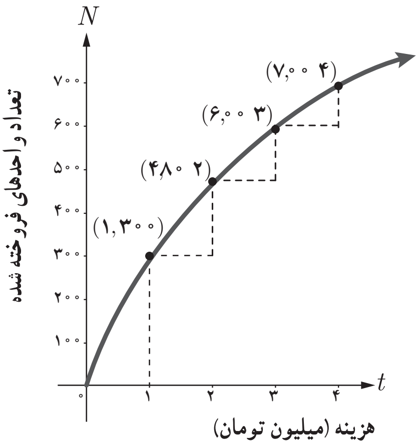
ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های $t=۱$ ، $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=۴$ ، $t=۵$ یا $t=۶$ بررسی کنید.

حل : شیب خط l سرعت آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در پایان هفته ششم (سرعت لحظه‌ای در $t=۶$) و شیب خط d سرعت متوسط آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در بین هفته‌های چهارم تا ششم (آهنگ تغییر متوسط در بین لحظات ۴ تا ۶ هفته) را نشان می‌دهد.

ب) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های $t=۱$ تا $t=۳$ در حال افزایش است.

پ) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان‌های $t=۴$ تا $t=۶$ در حال کاهش می‌باشد.



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

ب) به‌نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، درحال کاهش است؟

حل : الف)
$$\frac{N(۱)-N(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۰۰-۰}{۱}=۳۰۰$$

$$\frac{N(۲)-N(۱)}{۲-۱}=\frac{۴۸۰-۳۰۰}{۱}=۱۸۰$$

$$\frac{N(۴)-N(۳)}{۴-۳}=\frac{۷۰۰-۶۰۰}{۱}=۱۰۰ \qquad N\ ۲ \quad N\ ۱ \ = ۴۸۰ \quad ۳۰$$

ب) با توجه به شیب خطوط قاطع که در حال کم شدن است بنابراین آهنگ تغییر درحال کاهش می‌باشد. هزینه‌های تبلیغات تا یک اندازه مشخص در فروش کالا اثرگذار است. افزایش بیش ازحد هزینه تأثیر بسزایی در میزان فروش ندارد.

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰،۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[۰،۵]$ باهم برابرند؟

حل :
$$f'(t)=۲t-۱ \rightarrow ۲t-۱=\frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}$$

$$\rightarrow ۲t-۱=\frac{۳۰-۱۰}{۵}=۴ \rightarrow t=۲/۵s$$

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

براساس جدول کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳ m/s

ب) ۱۴/۹۱ m/s

پ) ۱۱/۵ m/s

ت) ۱۶/۰۳ m/s

حل : گزینه پ صحیح است. چند پاسخ و استدلال دانش‌آموزان در زیر ارائه شده است.

روش اول : گزینه پ درست است زیرا سرعت تقریبی برابر است با جابجایی به روی زمان

$$v \simeq \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۷/۴ - ۱۶/۳}{۰/۱} = \frac{۱/۱}{۰/۱} = ۱۱$$

روش دوم : گزینه پ صحیح است زیرا سرعت باید بین سرعت متوسط در بازهٔ [۰/۳ ،۰/۴] و [۰/۴ ،۰/۵] باشد.

$$\frac{۱/۱}{۰/۱} < v < \frac{۱/۲}{۰/۱} \Rightarrow ۱۱ < v < ۱۲$$

t ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش سوم : گزینه پ درست است زیرا با محاسبه سرعت‌های متوسط به جواب مسئله می‌رسیم.

۱۰/۵ ، ۱۱ ، $\boxed{۱۱/۵}$ ، ۱۲، ۱۲/۵، ۱۳

ثانیه s / t	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
متر m / $f(t)$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

روش چهارم : گزینه پ صحیح است زیرا

$$v_۱ = \frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱} = \frac{۱۷/۴ - ۱۵/۱}{۰/۵ - ۰/۴} = ۱۱/۵$$

$$v_۲ = \frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲} = \frac{۱۸/۴ - ۱۳/۸}{۰/۶ - ۰/۲} = ۱۱/۵$$

ثانیه s / t	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
متر m / $f(t)$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(۰)=-۶$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f(x)$	-۶	-۳	$-۱/۸$	$-۰/۴$	$-۰/۴$

تذکر : برای تقریب مشتق در یک نقطه مثلاً ۵ می‌توان از آهنگ متوسط تغییر بازه [۵، ۰] یا [۱۰، ۵] یا [۱۰، ۰] استفاده کرد.

حل : برای محاسبه تقریب $f'(۳۰)$ داریم :

$$f'(۳۰) \simeq \frac{f(۱۵) - f(۳۰)}{۱۵ - ۳۰} = \frac{۴۶ - ۴۰}{-۱۵} = -۰/۴$$

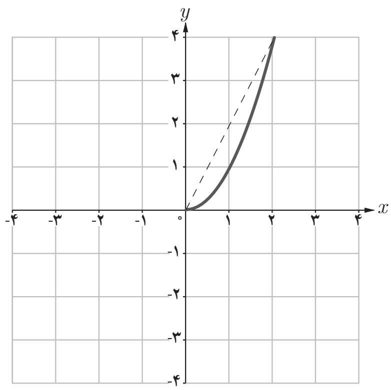
۷ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰،۱]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

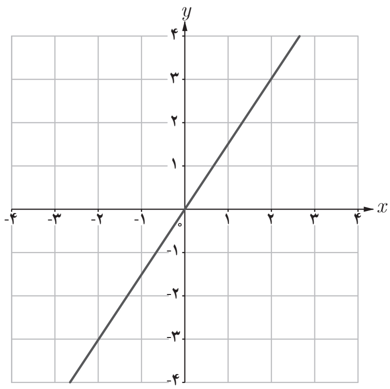
ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = ۰$ و هم $f(a) = ۰$

حل : الف) نادرست است مثال نقض، $f(x) = x^۲$ در $x = ۰$ شیبی کمتر از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[۰،۱]$ دارد.



ب) نادرست است مثال نقض، $f(x) = x$ تابعی صعودی است ولی آهنگ تغییرات متوسط آن ثابت می‌باشد.



پ) نادرست است مثال نقض، $f(x) = x^۲$ در $x = ۰$ دارای این ویژگی است که $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۰$.

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^{۳}$ گرم است.
الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \le t \le ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟
ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چقدر است؟
حل :

الف) $m(۴)-m(۳)=۱۳۰-(۵۴+\sqrt{۳})=۷۶-\sqrt{۳}$

ب) $m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^{۲}\ :\ m'(۳)=۵۴+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$

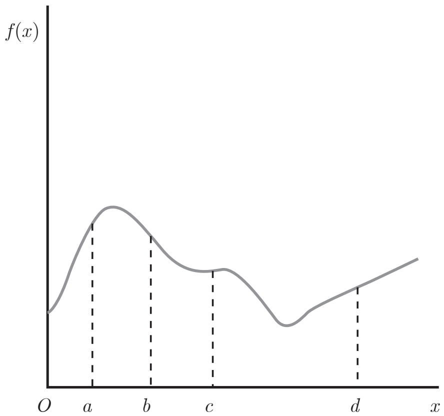
۹ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^{۲}$ به‌دست آید :
الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی [۰، ۱] چقدر است؟
ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه [۰، ۱۰۰] می‌شود؟
حل :

الف) $\frac{V(۱)-V(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۹/۲-۴۰}{۱}=-۰/۸ lit/s$

ب) $\frac{V(۱۰۰)-V(۰)}{۱۰۰-۰}\simeq V'(t)\rightarrow\frac{۰-۴۰}{۱۰۰}=۸۰(-\frac{۱}{۱۰۰})(۱-\frac{t}{۱۰۰})$

$\rightarrow(۱-\frac{t}{۱۰۰})=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{t}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}\rightarrow t=۵۰s$

نمونه سؤالات ارزشیابی

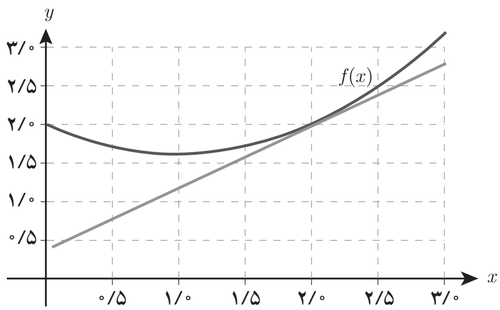


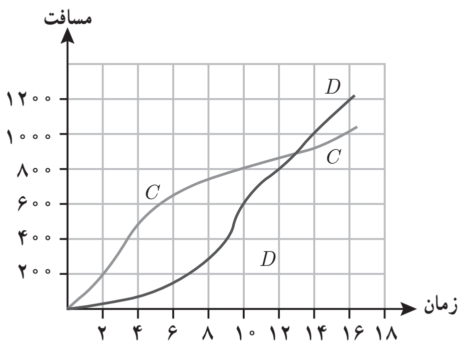
۱ فرض کنید نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است. شیب نمودار در نقاط d، c، b و a را با هم مقایسه کنید.

۲

الف) $\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ را به ازای $h=-۰/۵$ تقریب بزنید. آیا این مقدار بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از $f'(۲)$ است؟ توضیح دهید.

ب) مقادیری از h را بیابید که $\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=۰$.





۳ دو ماشین مسابقه‌ای D و C در یک پیست مسیری به‌طور مستقیم در ۱۶ ثانیه مطابق شکل روبه‌رو طی می‌کنند.

الف) سرعت متوسط هر دو ماشین را در ۱۶ ثانیه اول بنویسید.

ب) بازه‌ای با شروع $t=۴$ برای ماشین D بیابید به طوری که سرعت متوسط ماشین D تقریباً مشابه سرعت متوسط ماشین C در بازه $t=۲$ تا $t=۱۰$ باشد.

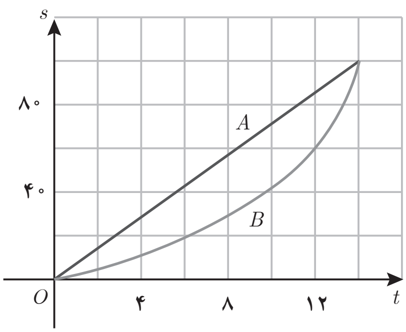
پ) با استفاده از خطوط قاطع و شیب‌ها نشان دهید ماشین D در بازه $t=۴$ تا $t=۱۰$ دارای سرعت متوسط بالاتری نسبت به ماشین C است.

۴ فرض کنید $f(۰)=۰$، درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) اگر برای هر x ، $f(x)\leq x$، آنگاه $f'(x)\leq ۱$.

ب) اگر برای هر x ، $f'(x)\leq ۱$ ، آنگاه $f(x)\leq x$.

۵ نمودار روبه‌رو تابع موقعیت دو دوندهٔ B و A در یک مسابقه دو ۱۰۰ متر را نشان می‌دهد.



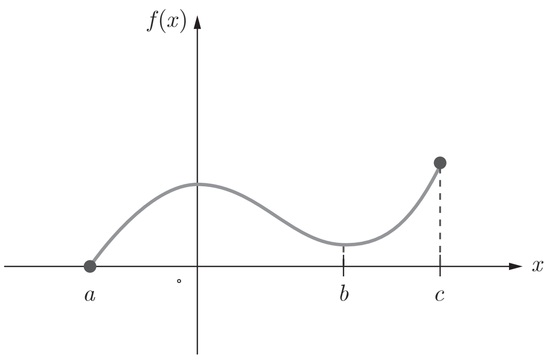
الف) چگونگی حرکت دونده‌ها را مقایسه و تشریح کنید.

ب) در چه زمانی تقریباً فاصله بین دو دونده بیشترین است؟

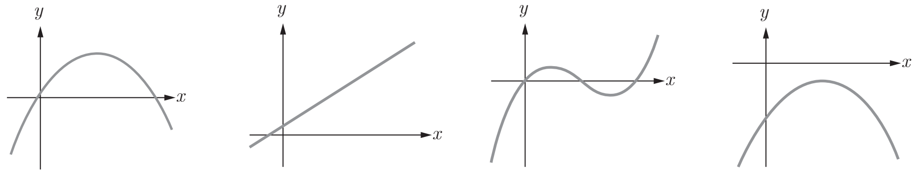
پ) در چه زمانی تقریباً سرعت هر دو دونده یکسان است؟

۶ برای تابع رسم شده در شکل زیر بازه یا نقاطی روی محور طول‌ها بیابید که آهنگ تغییر $f(x)$ نسبت به x :

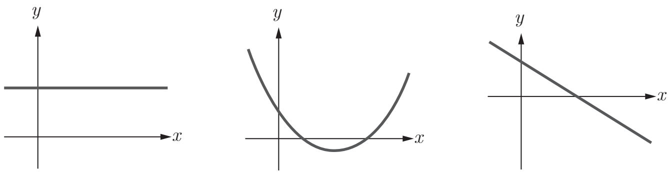
الف) مثبت ب) منفی پ) صفر است.



۷ توابع D، C، B و A را به مشتقات آنها III، II، I نظیر کنید.



(A) (B) (C) (D)



(I) (II) (III)

۸ بشکه‌ای حاوی یک مایع است که در پایین آن سوراخی وجود دارد و مایع درحال خروج از آن می‌باشد. حجم مایع درون بشکه درحال کاهش است و از رابطه $V(t)=10(2-\frac{1}{60}t)^2$ پیروی می‌کند. سرعت خروج مایع در $t=40$ را محاسبه کنید.

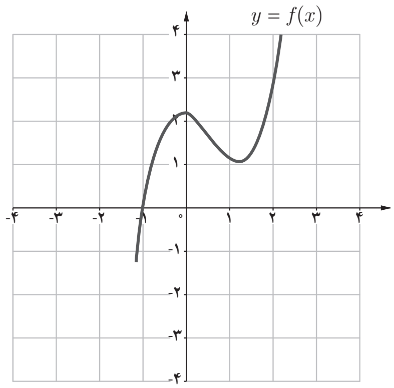
۹ از روی شکل خارج قسمت تفاضلی $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ را تفسیر کنید.

الف) $f(1)$ به چه معنی است؟

ب) $f(1+h)$ به چه معنی است؟ مثلاً برای $h=0/2$؟

پ) $1+h$ به چه معنی است؟

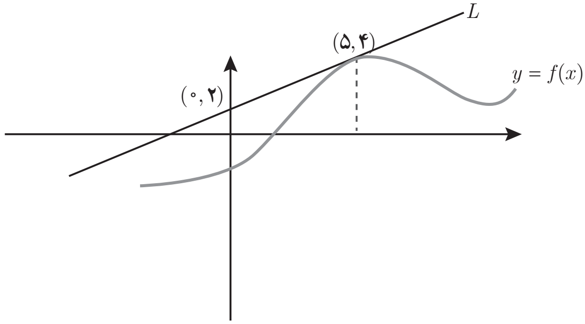
ت) $1+h$ ، $f(1)$ و $f(1+h)$ را روی نمودار مشخص کنید.

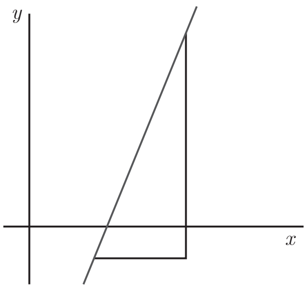


ث) از روی شکل حد $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ را تفسیر کنید.

ج) مقدار حد $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ را برآورد کنید.

۱۰ فرض کنید خط L مماس بر نمودار تابع f در نقطه (۵,۴) است. $f(۵)$ و $f'(۵)$ را به دست آورید.





۱۱ فرض کنید P و Q دو نقطه دلخواه روی نمودار باشند و تغییرات طول‌های آنها x و تغییرات عرض‌های آنها y باشد. اگر بین x و y رابطهٔ $y = mx + b$ برقرار باشد، مقدار m را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

۱۲ مشتق بگیرید.

۱) $y = \sin ۲x \cos ۵x - ۴$

۲) $y = \cos^{۲} x + \tan x$

۳) $y = (x^{۲} - ۳x)^{۳}(x + ۲)$

۴) $y = x \sin x - \dfrac{x}{\sin x}$

۵) $y = \dfrac{۲x - ۵}{x^{۲}}$

۶) $y = \dfrac{۴x^{۳} - ۲x^{۲} + ۱}{x + ۳}$

۱۳ آیا تابع‌های صفحه بعد در نقطهٔ مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف) $f(x) = \sin x$ در $x = ۰$

ب) $f(x) = |x|$ در $x = ۱$

۱۴ در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازهٔ [۲/۲۵، ۲/۵۶] از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱۵ معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به‌طور قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود به‌صورت $S(t) = -۵t^{۲} + ۲۰t$ است. سرعت لحظه‌ای این گلوله در زمان برخورد با زمین چند متر بر ثانیه است؟

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \frac{۱}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $h + ۲$ تغییر می‌کند برابر $\frac{۸}{۹}$ است. h کدام است؟

۱۷ حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه ، برحسب لیتر برابر است با :

$V(t) = ۲۵۰\,(۱۶ - t)^{۲}$

آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است؟ آن را توصیف کنید.

۱۸ در تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x + ۱ & x \geq ۱ \\ x^{۲} + ۱ & x < ۱ \end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(۱ + h^{۲}) - f(۱)}{h^{۲}}$ چقدر است؟

۱۹ مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x = ۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱) = ۰$، $f'(۱) = -۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۲۰ مقدار مشتق عبارت $y = \frac{\sin x}{۱ + \tan^{۲} x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{۳}$ چقدر است؟

۲۱ مقادیر a و b را به‌قسمی تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x + ۱)^{۳} & x \leq ۰ \\ ax + a + b & x > ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ مشتق‌پذیر باشد.

۲۲ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax - a & x < ۱ \\ x^{۲} - x & x \geq ۱ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = ۱$ مشتق پذیر است؟

۲۳ فرض کنید تابع f در $x = ۱$ مشتق پذیر و $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(۱ + h)}{h} = ۳$ ، مقدار $f(۱)$ و $f'(۱)$ را به‌دست آورید.

کاربردهای مشتق

فصل ۵

۱ اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۲ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن

۳ رسم نمودار توابع

گردنه حیران (اردبیل)

سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان ـ زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت به زمان است.

کاربردهای مشتق

اهداف کلی فصل ۵

دانش‌آموزان در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شده‌اند و مهارت‌های محاسبه مشتق توابع مختلف را کسب کرده‌اند. در این فصل وقت آن رسیده است دانش‌آموزان پاسخ این سؤال را دریافت کنند که مشتق در کجا به‌کار می‌آید؟

بعد از یادگیری هر مسئله یا مطلب تئوری ریاضی، نخستین سؤالی که به ذهن می‌آید این است که دانستن این موضوع چه فایدهٔ عملی می‌تواند برای ما داشته باشد؟ گرچه ریاضی درس شیرینی است، اما بسیاری از دانش‌آموزان در کلاس این درس از خود می‌پرسند این مباحث به چه درد ما می‌خورد؟ متأسفانه بسیاری از کاربردهای مهم و جالب ریاضی نیازمند آشنایی با مباحث پیچیده تئوری وسطح بالای دانشگاهی است البته این به معنای آن نیست که نمی‌توان کاربردهای ساده و سطح پایین ریاضی که قابل درک برای عموم دانش‌آموزان راهنمایی یا دبیرستان باشد پیدا کرد.

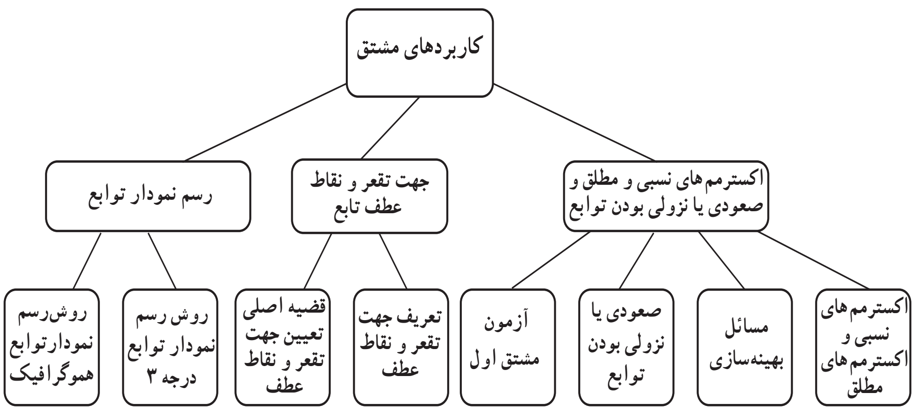
در این فصل کاربردهایی از مشتق بیان می‌شود که شامل یافتن اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع و حل مسائل بهینه‌سازی و رسم نمودار توابع می‌باشد. بهینه‌سازی یک کاربرد ملموس از مشتق در امور روزمره می‌باشد که می‌تواند برای دانش‌آموزانی که همواره به دنبال کاربرد ریاضیات در امور روزمره هستند جالب باشد.

در درس اول مفاهیم ماکسیمم و مینیمم نسبی توابع و همچنین ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع به‌طور دقیق تعریف می‌شوند و از روی ضابطه توابع و نمودار آنها، تفهیم کامل می‌شود. سپس قضیه اکسترمم (یا قضیه قرینه) که بیان می‌دارد اگر تابع f دربازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه در این بازه حتماً دارای ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق می‌باشد بیان می‌گردد. با کمک این قضیه دو مسئله بهینه‌سازی حل می‌شوند. سپس با استفاده از یک قضیه، رابطه مشتق تابع و صعودی یا نزولی بودن تابع بیان می‌گردد و روش یافتن اکسترمم‌های نسبی تابع با کمک آزمون مشتق اول بیان می‌شود.

در درس دوم ابتدا مفهوم جهت تقعر تابع با رسم نمودارهایی بیان می‌شود و رابطه جهت تقعر و مشتق دوم به‌صورت مفهومی تدریس می‌شود و در نهایت، قضیه‌ای که این ارتباط را بیان می‌دارد گفته می‌شود. سپس نقطهٔ عطف تابع تعریف می‌شود و روش محاسبه آن که با استفاده از مشتق دوم صورت می‌گیرد، بیان می‌گردد.

در درس سوم روش رسم نمودار توابع با استفاده از اطلاعاتی که از درس‌های اول و دوم حاصل شده است بیان می‌شود و روش‌های رسم نمودار توابع درجه سوم و نمودار توابع هموگرافیک با مثال‌هایی توضیح داده می‌شود.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل بخشی از یک جاده بیرون شهری (واقع در گردنه حیران اردبیل) که تقریباً شبیه نمودار سهمی می‌باشد آورده شده است. مشتق توابع در رسم نمودار آنها و همچنین بررسی ویژگی‌ها و نقاط خاص این‌گونه نمودارها مانند نقاط اکسترمم نسبی و عطف، کاربرد فراوانی دارد. همچنین با داشتن معادله حرکت یک جسم مانند اتومبیل، به کمک مشتق می‌توان سرعت و شتاب آن را محاسبه نمود.

دانستنی‌هایی برای معلم

یکی از کاربردهای مهم مشتق تعیین شیب خط مماس بر منحنی (در صورت وجود) می‌باشد که در فصل قبل ضمن بیان درس، این کاربرد هم بررسی شده است.

یکی دیگر از کاربردهای مهم مشتق قاعده هوپیتال می‌باشد. با کمک این قاعده بسیاری از حدهایی که برای آنها حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ رخ می‌دهد را بسیار ساده‌تر از روش‌های اولیه آنها می‌توان رفع ابهام کرد.

صورت قاعدهٔ هوپیتال به‌صورت زیر است:

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = ۰$ آنگاه در صورت وجود $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{۱}{g(x)}}{\frac{۱}{f(x)}} = \frac{۰}{۰}$ و به‌کارگیری قاعدهٔ هوپیتال برای حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{۱}{g(x)}}{\frac{۱}{f(x)}}$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یعنی قاعده هوپیتال را برای حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ نیز می‌توان به‌کار برد.

بنابراین از قاعده هوپیتال می‌توان در رفع ابهام حدهایی که تجزیه صورت و مخرج آنها بعضاً بسیار دشوار می‌باشد استفاده نمود؛ مثلاً برای محاسبه حد $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۵]{x}-۱}{x^۳+\cos(x-۱)-۲}$ که حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود

داریم :

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۵]{x}-۱}{x^۳+\cos(x-۱)-۲}\overset{?}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۵\sqrt[۵]{x^۴}}}{۳x^۲-\sin(x-۱)}=\frac{\frac{۱}{۵}}{۳-۰}=\frac{۱}{۱۵}$$

جالب است بدانید که قاعده هوپیتال در واقع متعلق به هوپیتال (گیوم لوپیتال) نمی‌باشد و متعلق به یوهان برنولی (معلم هوپیتال) می‌باشد.

پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال در قرن هفدهم میلادی توسط آگوستین لویی کوشی، برنارد ریسمان و برادران برنولی (ژاکوب و یوهان) صورت پذیرفت. در سال ۱۶۹۶ هوپیتال خلاصه‌ای از درس‌هایی که یوهان برنولی به او داده بود را در کتابی به نام «آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها برای بررسی منحنی‌ها» منتشر کرد که در این کتاب قاعده رفع ابهام حد با استفاده از مشتق که به قاعدهٔ هوپیتال معروف است نیز آمده است.

آزمون مشتق اول آزمونی برای یافتن اکسترمم‌های نسبی یک تابع می‌باشد اما آزمون دیگری هم برای این کار وجود دارد که به آزمون مشتق دوم معروف است و در این فصل به آن اشاره‌ای نشده است.

علت اینکه آن را آزمون مشتق دوم می‌نامند، استفاده از مشتق دوم تابع برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی است. (به جای رسم جدول تعیین علامت y')

آزمون مشتق دوم به‌صورت زیر بیان می‌شود :

فرض کنید تابع f در نقطهٔ a دارای مشتق دوم باشد و $f'(a)=۰$ در این صورت :

الف) اگر $f''(a)>۰$ باشد آنگاه a طول نقطهٔ مینیمم نسبی f می‌باشد.

ب) اگر $f''(a)<۰$ باشد آنگاه a طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی f می‌باشد.

پ) اگر $f''(a)=۰$ باشد این آزمون بی‌نتیجه است.

به عنوان مثال برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی مثال صفحهٔ ۱۲۳ کتاب درسی به کمک آزمون مشتق دوم داریم :

$$f(x)=x^۳-۲x^۲-۴x+۶$$

$$f'(x)=۳x^۲-۴x-۴=۰\rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$f''(x)=۶x-۴\rightarrow\begin{cases}f''(۲)=۸\Rightarrow\\ f''(-\frac{۲}{۳})=-۸\Rightarrow\end{cases}$$

$x=۲$ طول نقطهٔ مینیمم تابع f می‌باشد.

$x=-\frac{۲}{۳}$ طول نقطهٔ ماکسیمم تابع f می‌باشد.

نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۵

۱ در تابع $f(x)=\frac{x^{۳}+b}{ax^{۲}}$ نقطهٔ $M(۲,۳)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی است. مقادیر a و b را بیابید.

(جواب : $a=۱$ و $b=۴$)

۲ اگر تابع $f(x)=ax^{۳}+bx+cx+d$ در نقاط $(۱,۲)$ و $(۲,۳)$ دارای اکسترمم نسبی باشد مقادیر c,b,a و d را بیابید.

(جواب : $a=-۲$, $b=۹$, $c=-۱۲$, $d=۷$)

۳ اگر $A(-۳,۴)$ نقطه ماکسیمم نسبی تابع $y=\frac{x^{۲}+ax+b}{x+۱}$ باشد مقادیر a و b را بیابید.

(جواب : b=۵ و a=۲)

۴ اکسترمم‌های نسبی تابع $y=x^{۳}+۶x^{۲}-۶۳x+۱$ را بیابید.

(جواب $(-۷,۳۹۳)$ و $(۳,-۱۰۷)$)

۵ تابع $y=x^{۴}-۴x+۲$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟

۶ مینیمم مقدار تابع $y=x^{۴}-x^{۲}+۳$ را روی بازهٔ $[۰,۱]$ بیابید.

(جواب : $\frac{۱۱}{۴}$)

۷ در مخروطی به شعاع ۴ سانتی‌متر و ارتفاع ۶ سانتی‌متر یک استوانه محاط می‌کنیم. ماکسیمم مساحت جانبی استوانه را بیابید.

(جواب : ۱۲π)

۸ در یک مخروط مجموع شعاع قاعده و ارتفاع برابر ۳ سانتی‌متر است. ماکسیمم حجم این مخروط را بیابید.

($\frac{۴\pi}{۳}$ = جواب)

۹ استوانه‌ای با ماکسیمم حجم در داخل کره‌ای به شعاع $۱۰\sqrt{۳}$ محاط شده است. ارتفاع این استوانه را بیابید.

(جواب : ۲۰)

۱۰ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن برابر ۱۶ سانتی‌متر است، مثلثی که بیشترین مساحت را دارد اختیار کرده‌ایم. مساحت این مثلث را بیابید.

(جواب : ۳۲)

۱۱ اگر نقطه (۱,۲) نقطه عطف تابع $y=ax^{۳}+bx^{۲}$ باشد، مقادیر b,a را بیابید.

(جواب : $a=-۱$, $b=۳$)

۱۲ جهت تقعر و نقاط عطف تابع $y=\frac{x}{۱+x^{۲}}$ را بیابید.

۱۳ جهت تقعر و نقاط عطف تابع $y=x^{۴}-۸x^{۳}-۷۲x^{۲}+۲۵x-۴$ را بیابید.

۱۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=x^{۲}-۴x+۵$

ب) $y=۸x^{۲}-۴۸x^{۲}+۹۶x-۶۴$

پ) $y=\frac{x+۱}{۲x+۴}$

درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

اهداف درس

۱ دانش‌آموز درک دقیق و شفافی از ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع داشته باشد و فرق بین مقدار اکسترمم نسبی و نقطهٔ اکسترمم نسبی و طول نقطه اکسترمم نسبی را تشخیص دهد.

۲ دانش‌آموز با دیدن نمودار یک تابع بتواند نقاط اکسترمم نسبی آن را تشخیص دهد.

۳ دانش‌آموز تعریف ماکسیمم و مینیمم مطلق و فرق آنها با مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی را درک کند.

۴ دانش‌آموز بتواند با کمک اکسترمم‌های مطلق، مقادیر بهینه برای ماکسیمم‌سازی یا مینیمم‌سازی در مسائل کاربردی را محاسبه کند.

روش تدریس

شروع این درس با یک مثال از تابع دما ــ زمان می‌باشد که مفهوم اکسترمم‌های نسبی در آن توضیح داده شده است. معلم می‌تواند با مثال‌هایی مشابه سرعت ــ زمان (مربوط به سرعت حرکت یک اتومبیل در طول یک بازه زمانی) این مفاهیم را کامل‌تر توضیح دهد.

معلم بر فرق بین مقدار ماکسیمم نسبی، نقطه ماکسیمم نسبی و طول نقطه ماکسیمم نسبی و به همین شکل در مورد مینیمم نسبی تأکید کند تا دانش‌آموز به‌طور دقیق این اصطلاحات را به‌کار گیرد. همچنین تعریف

ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق و بیان فرق آنها و وجود یا عدم وجود آنها و مقادیر آنها با مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی با استفاده از نمودار توابع و ضابطه آنها به‌طور دقیق صورت گیرد. کاردر کلاس صفحه ۱۱۳ برای تفهیم این مفاهیم و مقایسه اختلافات آنها می‌باشد. فعالیت صفحه ۱۱۵ برای تفهیم اکسترمم‌های نسبی و مطلق در نقاطی که تابع مشتق ندارد یا پیوسته نیست می‌باشد و در ادامهٔ آن با انجام فعالیت صفحه ۱۱۶ دانش‌آموز آماده برای یادگیری قضیه صفحه ۱۱۶ که به قضیه اکسترمم معروف است می گردد.

با توجه به این قضیه لزوم تعریف نقاط بحرانی برای یافتن اکسترمم‌های مطلق در یک بازه احساس می‌گردد. پس از تعریف نقاط بحرانی، دانش‌آموز آمادگی حل مسئله‌های بهینه‌سازی کاربردی را دارد که دو مثال صفحه ۱۱۸ و ۱۱۹ نمونه‌هایی از این مثال‌ها می‌باشند.

مثال ابتدای صفحه ۱۱۸ مثالی است که در آن تمامی حالت‌های نقاط بحرانی وجود دارد و از این منظر مثال مناسبی است.

بخش بعدی درس اول مربوط به یافتن بازه‌هایی می‌باشد که تابع در آنها صعودی یا نزولی می‌باشد. مفهوم صعودی یا نزولی بودن تابع در فصل اول کتاب بیان شده است و در این درس رابطه بین صعودی یا نزولی بودن تابع با مثبت یا منفی بودن مشتق تابع بررسی می‌شود. فعالیت صفحه ۱۲۰ به‌طور شهودی به دانش‌آموز می‌فهماند که رابطه بین صعودی بودن تابع و مثبت بودن مشتق تابع در یک بازه و همچنین رابطه بین نزولی بودن تابع و منفی بودن مشتق تابع در یک بازه چیست و با توجه به این فعالیت قضیه صفحه ۱۲۱ که نتیجه آن فعالیت است بیان می‌شود. فعالیت صفحه ۱۲۲ ذهن دانش‌آموز را برای بیان آزمون مشتق اول آماده می‌کند. در این فعالیت به‌طور شهودی دانش‌آموز در می‌یابد که اگر تابع در نقطه‌ای پیوسته باشد و در همسایگی آن تعریف شده باشد و قبل از آن تابع صعودی و بعد از آن نزولی باشد آن نقطه، نقطهٔ ماکسیمم نسبی و اگر قبل از آن نزولی و بعد از آن صعودی باشد، آن نقطه مینیمم نسبی تابع می‌باشد.

مثال صفحه ۱۲۳ بیان می‌دارد که چگونه با کمک آزمون مشتق اول می‌توان اکسترمم‌های نسبی یک تابع را یافت. کار در کلاس صفحه ۱۲۴ مورد مناسبی است برای بررسی ارتباط بین رفتار یک تابع و رفتار مشتق آن. در این مورد بر عکس عمل شده است یعنی از روی نمودار تابع f' ویژگی‌هایی از تابع f مانند صعودی یا نزولی بودن و اکسترمم‌های نسبی بررسی می‌شوند.

درس ۲

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

اهداف درس

۱ دانش‌آموز مفهوم دقیق جهت تقعر منحنی را درک کند و بتواند از روی نمودار تابع جهت تقعر آن را تشخیص دهد.

۲ دانش‌آموز روش تعیین جهت تقعر تابعی که ضابطه آن داده شده است را بیاموزد.

۳ دانش‌آموز با مفهوم نقطهٔ عطف آشنا شود.

۴ دانش‌آموز روش تعیین نقطهٔ عطف یک تابع را که ضابطه آن داده شده است فرا گیرد.

روش تدریس

در شروع این درس مفهوم جهت تقعر بیان شده است و دانش آموز در می‌یابد که اگر در یک بازه، نمودار تابع بالای خطوط مماس برمنحنی در آن بازه قرار گیرد جهت تقعر در آن بازه به سمت بالاست و اگر نمودار زیر خطوط مماس قرار گیرد جهت تقعر در آن بازه رو به سمت پایین است. در فعالیت صفحه ۱۲۸ سعی شده است رابطه بین علامت مشتق دوم تابع در یک بازه و جهت تقعر منحنی تابع در آن بازه بیان شود. در شکل (الف) ملاحظه می‌شود که شیب خط‌های مماس در حال افزایش هستند یعنی مشتق در این بازه صعودی است یعنی $f''(x)$ مثبت است و در شکل (ب) ملاحظه می‌شود که شیب خط‌های مماس در حال کاهش هستند یعنی تابع f' نزولی است که به معنی منفی بودن f'' در این بازه است. این نکته در قالب قضیه صفحه ۱۲۹ بیان شده است.

قسمت (پ) این قضیه حائز اهمیت است و لازم است معلم با ذکر مثال‌هایی مناسب مانند توابع $y=x^3$, $y=x^4$ و $y=-x^4$ این قسمت را به‌طور شفاف توضیح دهد. در کار درکلاس صفحه ۱۳۰ هدف سنجش میزان یادگیری مفهوم جهت تقعر توسط دانش‌آموز می‌باشد. در قسمت دوم درس دوم نقطهٔ عطف تابع تعریف می‌شود. پس از تعریف روی بخشی از تعریف که بیان می‌دارد «در نطقهٔ عطف باید خط مماس موجود باشد» تمرکز می‌کنیم و با مثال‌هایی نموداری و ضابطه‌ای این مفهوم را روشن می‌کنیم (مانند تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$) سپس با استدلال بیان می‌داریم که مشتق دوم در صورت وجود در نطقهٔ عطف برابر صفر می‌باشد. کار در کلاس صفحه ۱۳۲ مهارت دانش آموز در تشخیص نقاط عطف یک تابع را می‌سنجد. کاردرکلاس صفحه ۱۳۵ رابطهٔ بین رفتار f' با جهت تقعر f و همچنین صعودی یا نزولی بودن f را بیان می‌دارد.

درس ۳

رسم نمودار توابع

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم نمودار یک تابع

۲ بیان رابطه بین علامت مشتق اول و دوم تابع با رفتار تابع و جمع‌آوری آنها در قالب یک جدول تعیین علامت شامل تغییرات x ، $f(x)$ و $f'(x)$ و $f''(x)$.

۳ توانایی رسم نمودار توابع درجه ۳ و توابع هموگرافیک.

روش تدریس

در ابتدا مفهوم نمودار تابع برای دانش‌آموز بیان می‌شود که به دانش‌آموز تفهیم می‌شود که هر نقطه از تابع معادل یک نقطه از صفحه دکارتی می‌باشد و تمام نقاط متناظر اگر در صحفه دکارتی تعیین شوند یک نمودار حاصل می‌شود که به آن منحنی نمودار تابع گفته می‌شود.

سپس با یادآوری رابطه بین علامت مشتق اول و مشتق دوم با رفتار تابع، نیاز به محاسبه مشتق اول تابع جهت تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع و یافتن اکسترمم‌های نسبی آن و همچنین مشتق دوم تابع جهت تعیین جهت تقعر و نقاط عطف تابع بیان می‌گردد. سپس بیان شود که برای جمع‌بندی رفتار f', f'' ، هر دوی آنها را همراه با تغییرات x , $f(x)$ در یک جدول ارائه می‌دهیم و با استفاده از این جدول نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم. اگر لازم شد از چند نقطهٔ کمکی هم برای رسم دقیق‌تر نمودار استفاده می‌کنیم.

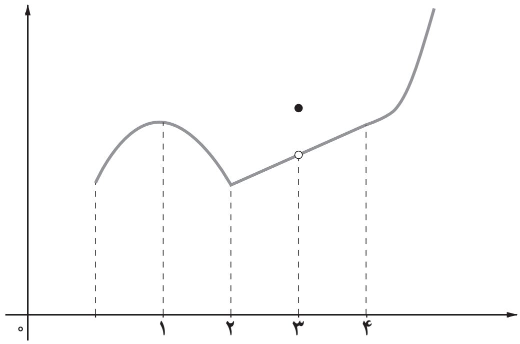
رسم نمودار توابع درجه ۳ تمرین خوبی برای این درس می‌باشد. فقط توجه شود که در حالت کلی امکان حل معادله درجه ۳ وجود ندارد پس یافتن نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها در حالت کلی امکان‌پذیر نیست و لازم است مثال‌ها طوری طراحی شوند که معادله درجه ۳ قابل تجزیه باشد مانند مثال دوم در صفحه ۱۳۹.

یکی از توابع معروف در ریاضی تابع هموگرافیک است که به‌صورت $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ که $C\neq 0$ و $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ می‌باشد. رسم نمودار این توابع نیز در این درس مورد توجه واقع شده است. تفاوت نمودار این توابع با توابع درجه۳ وجود مجانب‌های افقی و قائم می‌باشد. معلم لازم است تا مفاهیم مجانب‌های افقی و عمودی را برای دانش‌آموز یادآوری کرده و سپس رسم نمودار توابع هموگرافیک را به ترتیب بیان شده توضیح دهد.

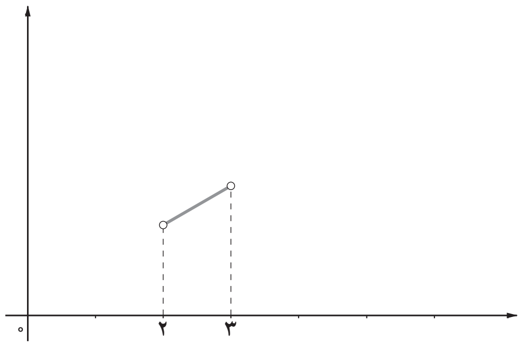
حل تمرین‌های فصل ۵

تمرین ص ۱۲۵

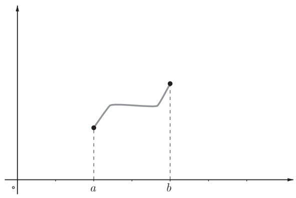
۱



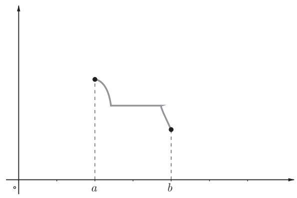
۲



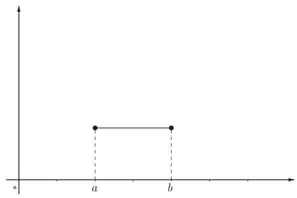
۳



(الف)

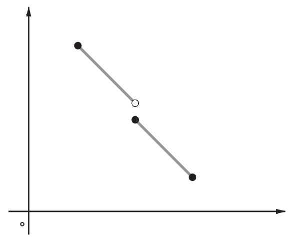


(ب)

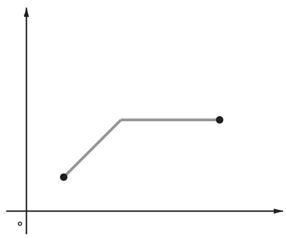


(پ)

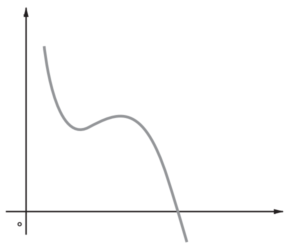
۴



(الف)

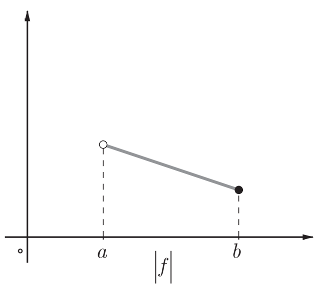


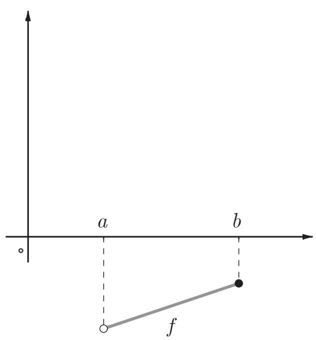
(ب)



(پ)

۵





۶

الف)

$f(x)=۳x^۲-۲x+۵ \qquad [-۲,۱]$

$f'(x)=۶x-۲=۰ \rightarrow x=\frac{۱}{۳} \rightarrow$ نقاط بحرانی : $x=\frac{۱}{۳}\ ,\ -۲\ ,۱$

$f(-۲)=۲۱ \qquad f(\frac{۱}{۳})=\frac{۱۴}{۳} \qquad f(۱)=۶$

۲۱= مقدار ماکسیمم مطلق تابع $\qquad$ $\frac{۱۴}{۳}$ = مقدار مینیمم مطلق تابع $\Rightarrow$

x		$\frac{۱}{۳}$	
$f'(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	↘	مینیمم نسبی	↗

($\frac{۱۴}{۳}$ و $\frac{۱}{۳}$) = نقطه مینیمم نسبی تابع

ب)

$f(x)=x^۳-۳x \qquad [-۱,۲]$

$f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \quad \rightarrow \quad x=\pm۱ \quad \rightarrow$ نقاط بحرانی $x=\pm۱$ و ۲

$f(-۱)=۲ \quad , \quad f(۱)=-۲ \quad , \quad f(۲)=۲$

۲= مقدار ماکسیمم مطلق تابع $\qquad$ ۲−= مقدار مینیمم مطلق تابع $\Rightarrow$

x	-۱		۱		۲
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$	۲	↘	-۲ مینیمم نسبی	↗	۲

(۱,−۲) = نقطهٔ مینیمم نسبی تابع

پ)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ۰\le x<۲\\ ۴-x & x\ge ۲\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\sqrt{۲}\end{array}\right\}$$ تابع f در ۲ پیوسته نیست $\Rightarrow$ تابع f در ۲ مشتق ندارد

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} & ۰<x<۲\\ -۱ & x>۲\end{cases}$$ $\rightarrow$ در تمام نقاط $(۲,+\infty)\cup(۰,۲)$ داریم $f'(x)\neq ۰$

بنابراین :

نقاط بحرانی : $x=۲$

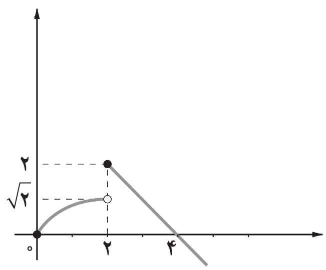
$f(۰)=۰$ $\qquad$ $f(۲)=۲$

مقدار ماکسیمم مطلق تابع $=۲$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(۴-x)=-\infty$ $\rightarrow$ تابع f مینیمم مطلق ندارد.

ماکسیمم نسبی تابع $=۲$ $\qquad$ $(۲,۲)$ = نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع

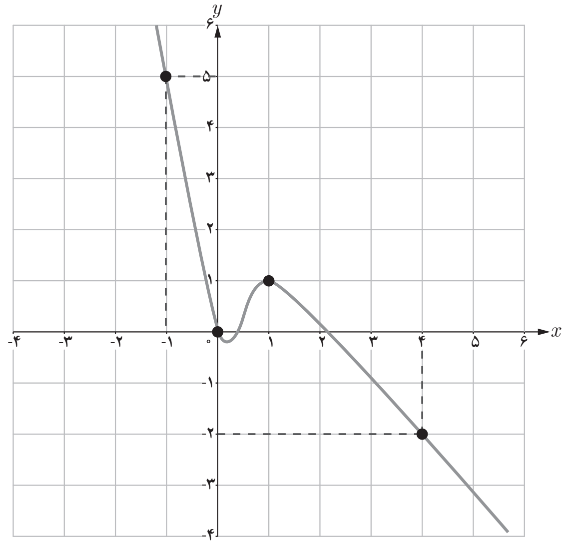
توجه شود که نمودار این تابع به‌صورت زیر می‌باشد :



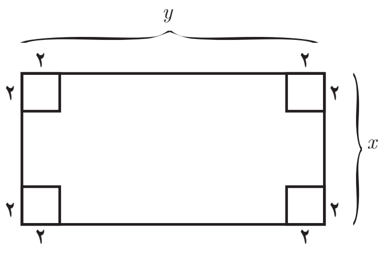
$$f(x)=۳x^۲+a$$

۷ $$\begin{cases} f(۱)=۲\rightarrow ۱^۳+a(۱)+b=۲\rightarrow a+b=۱\\ f'(۱)=۰\rightarrow ۳(۱)^۲+a=۰\rightarrow a=-۳\end{cases}\Rightarrow b=۴$$

۸



۹ فرض کنید y طول و x عرض مستطیل باشد.



$$\text{حجم مکعب حاصل} = ۲(x-۴)(y-۴) \xrightarrow{xy=۱۰۰}$$

$$\text{تابع حجم مکعب} = f(x) = ۲(x-۴)(\frac{۱۰۰}{x}-۴) = ۲۳۲-۸x-\frac{۸۰۰}{x} \quad x \in [۴\,,۱۰]$$

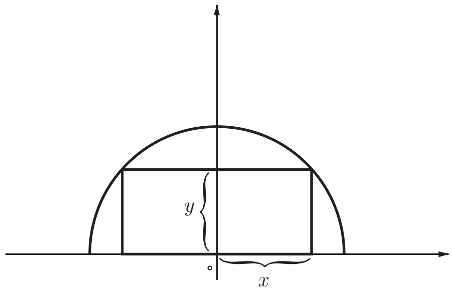
$f'(x) = -۸+\frac{۸۰۰}{x^۲} = ۰ \to -۸x^۲+۸۰۰ = ۰ \to x = ۱۰ \to$ **نقطهٔ بحرانی تابع** : $x = ۱۰$ و ۴ و ۱۰

$f(۱۰) = ۷۲ \quad , \quad f(۴) = ۰$

$\Rightarrow$ **مقدار ماکسیمم مطلق تابع = ۷۲**

به ازای $x = ۱۰$ و $y = \frac{۱۰۰}{x} = \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۱۰$ ماکسیمم مطلق حاصل می‌شود.

۱۰



$$\text{معادله دایره} = x^{۲} + y^{۲} = ۱۶ \rightarrow y = \sqrt{۱۶ - x^{۲}}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = ۲xy$$

$$\text{تابع مساحت مستطیل} = f(x) = ۲x\sqrt{۱۶ - x^{۲}} \quad x \in [۰,۴]$$

$$f'(x) = ۲\sqrt{۱۶ - x^{۲}} + ۲x\frac{-x}{\sqrt{۱۶ - x^{۲}}} = ۰ \rightarrow \frac{۲(۱۶ - x^{۲}) - ۲x^{۲}}{\sqrt{۱۶ - x^{۲}}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳۲ - ۴x^{۲} = ۰ \rightarrow x = \sqrt{۸}$$

$$\text{نقطه بحرانی تابع} : \quad x = \sqrt{۸}$$

$$f(۰) = ۰ \ , \ f(\sqrt{۸}) = ۱۶ \ , f(۴) = ۰$$

مقدار ماکسیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[۰ \ , ۴]$ برابر ۱۶ می‌باشد که به ازای طول $۲\sqrt{۸}$ و عرض $\sqrt{۸}$ حاصل می‌شود.

۱۱ الف) $f'(x) = ۶x^{۲} - ۶x - ۱۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$

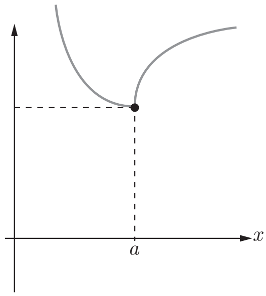
x		-۱		۲	
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ب) $f'(x) = \dfrac{x - ۲ - x}{(x - ۲)^{۲}} = \dfrac{-۲}{(x - ۲)^{۲}}$

$f'(x)$ در $x = ۲$ وجود ندارد و در $\mathbb{R} - \{۲\}$ همواره منفی است پس تابع f در $\mathbb{R} - \{۲\}$ نزولی است.

تمرین ص ۱۳۶

۱



۲

الف) $f'(x) = x^۲ - ۲x - ۳$

$f''(x) = ۲x - ۲ = ۰ \to x = ۱$

x		۱	
$f''(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

عطف

$x = ۱$: نقطهٔ عطف

ب) $f'(x) = \dfrac{-۲}{(x-۱)^۲}$

$f''(x) = \dfrac{۴}{(x-۱)^۳}$

x		۱	
$f''(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

$x = ۱$ عضو دامنه تابع نمی‌باشد بنابراین تابع f فاقد نقطهٔ عطف می‌باشد.

پ) $f'(x) = \dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}$

$f''(x) = \dfrac{-۲(x+۱)}{۹\sqrt[۳]{(x+۱)^۸}} = \dfrac{-۲}{۹\sqrt[۳]{(x+۱)^۵}}$

x		-۱	
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{\sqrt[۳]{x+۱} - ۰}{x+۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{۱}{\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}} = +\infty$$

چون جهت تقعر تابع در $x = -۱$ عوض شده و خط مماس در $x = -۱$ وجود دارد (به‌صورت قائم است) پس $x = -۱$ نقطهٔ عطف تابع می‌باشد.

۳

الف)

$$f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d \quad (a \neq ۰)$$

$$f(۰) = ۰ \rightarrow d = ۰$$

$$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx + c$$

$$f''(x) = ۶ax + ۲b$$

$$f''(۰) = ۰ \rightarrow b = ۰$$

$$f(x) = ax^{۳} + cx \xrightarrow[c=۱ \,,\, a=۱]{\text{به دلخواه}} f(x) = x^{۳} + x$$

ب)

$$f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d \quad (a \neq ۰)$$

$$f(۱) = ۰ \rightarrow a + b + c + d = ۰$$

$$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx + c$$

$$f''(x) = ۶ax + ۲b$$

$$f''(۱) = ۰ \rightarrow ۶a + ۲b = ۰ \rightarrow b = -۳a$$

به دلخواه قرار می‌دهیم $a = ۱$ و $c = ۰$ داریم : $d = ۲$ و $b = -۳$ پس $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۲$

پ)

$$f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d \quad (a \neq ۰)$$

$$f(۰) = ۱ \rightarrow d = ۱$$

$$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx + c$$

$$f''(x) = ۶ax + ۲b$$

$$f''(۰) = ۰ \rightarrow b = ۰$$

به دلخواه قرار می‌دهیم $a = ۱$ و $c = ۱$ داریم : $f(x) = x^{۳} + x + ۱$

ت)

$$f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d \qquad (a \neq ۰)$$

$$f(۲) = ۲ \rightarrow ۸a + ۴b + ۲c + d = ۲$$

$$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx + c$$

$$f''(x) = ۶ax + ۲b$$

$$f''(۲) = ۰ \rightarrow ۱۲a + ۲b = ۰ \rightarrow b = -۶a$$

به دلخواه قرار می‌دهیم $a = ۱$ و $c = ۰$ داریم : $b = -۶$ و $d = ۱۸$ بنابراین $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۸$

۴

$$f(\circ) = ۱ \rightarrow c = ۱$$

$$f(۱) = ۲ \rightarrow a + b + c = ۲ \xrightarrow{c=۱} a + b = ۱$$

$$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx$$

$$f''(x) = ۶ax + ۲b$$

$$f''(\frac{۱}{۲}) = \circ \rightarrow ۳a + ۲b = \circ$$

$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ ۳a + ۲b = \circ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۳ \end{cases}$$

۵

۲ و ۲– نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ می‌باشند بنابراین

$$f'(۲) = \circ \quad , \quad f'(-۲) = \circ$$

چون $(\circ , \circ)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ است پس $f''(\circ) = \circ$

چون تابع $f(x)$ از نقطهٔ $(\circ , \circ)$ عبور کرده است پس $f(\circ) = \circ$

$$f(\circ) = \circ \rightarrow c = \circ$$

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۲ax + b$$

$$f'(-۲) = \circ \rightarrow ۱۲ - ۴a + b = \circ$$

$$f'(۲) = \circ \rightarrow ۱۲ + ۴a + b = \circ$$

$$f''(x) = ۶x + ۲a$$

$$f''(\circ) = \circ \rightarrow \mathrm{a} = \circ \Rightarrow b = -۱۲$$

تمرین ص ۱۴۴

۱

الف)

$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$f(0) = 1$ نمودار در نقطهٔ $(1\,,\,0)$ محور yها را قطع می‌کند

$f(x) = 0 \to 2x^2 - 4x + 1 = 0 \to x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

پس نمودار در نقاط $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\,,\,0\right)$ و $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\,,\,0\right)$ محور xها را قطع می‌کند.

$f'(x) = 4x - 4 = 0 \to x = 1$

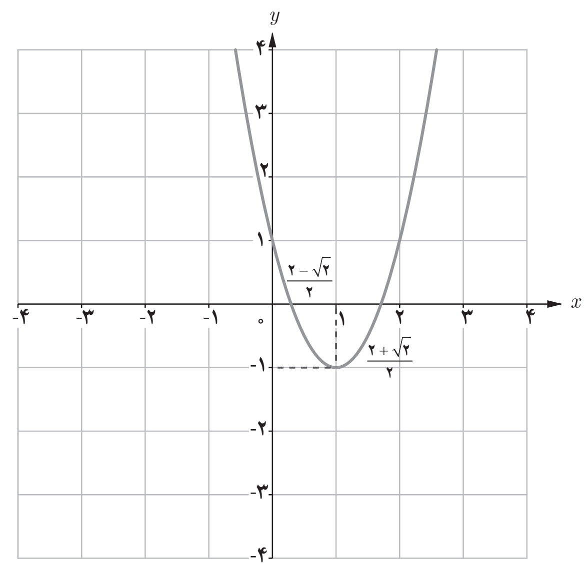
$f(1) = -1$

$f''(x) = 4$ بنابراین نقطهٔ $(1\,,\,-1)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

بنابراین f'' همواره مثبت است و در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود پس تابع نقطهٔ عطف ندارد.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y''		$+$		$+$	
y	↘		-1		↗

مینیمم نسبی



ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5$

$D_f = \mathbb{R}$

$f(0) = 5 \to$ نمودار در نقطهٔ $(0, 5)$ محور yها را قطع می‌کند

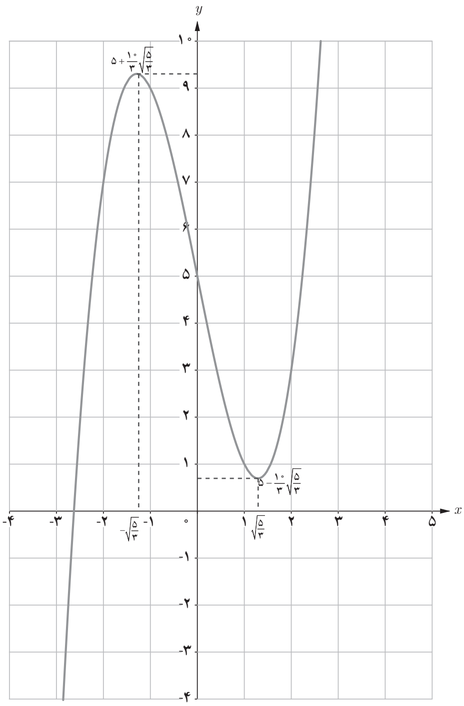
$f(x) = 0 \to x^3 - 5x + 5 = 0 \to$ حل این معادله با روش‌های معمول امکان‌پذیر نیست.

$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

پس نقاط $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, 5 - \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ و $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, 5 + \frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند.

$f''(x) = 6x = 0 \to x = 0$ نقطهٔ $(0, 5)$ نقطهٔ عطف تابع است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	5	$\searrow$		$\nearrow$	



پ)

$f(x) = -x(x+۲)^۲$

$D_f = \mathbb{R}$

$f(۰) = ۰ \rightarrow$ تابع در نقطهٔ $(۰ , ۰)$ محور yها را قطع می‌کند.

$$f(x) = ۰ \rightarrow -x(x+۲)^۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۲ \end{cases}$$

پس تابع در نقاط $(۰ , ۰)$ و $(-۲ , ۰)$ محور xها را قطع می‌کند.

$$f'(x) = -(x+۲)^۲ - ۲x(x+۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = -\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

پس نقاط $(-۲ , ۰)$ و $(-\frac{۲}{۳} , \frac{۳۲}{۲۷})$ اکسترمم‌های نسبی تابع f می‌باشند.

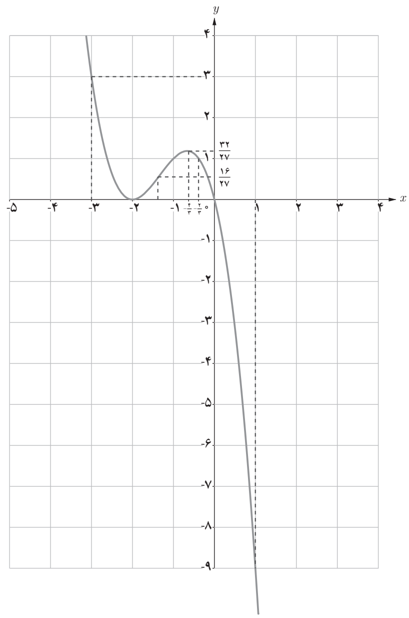
$$f''(x) = -۶x - ۸ = ۰ \rightarrow x = -\frac{۴}{۳}$$

نقطهٔ $(-\frac{۴}{۳} , \frac{۱۶}{۲۷})$ نقطه عطف تابع می‌باشد.

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۴}{۳}$		$-\frac{۲}{۳}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
y''		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	
y		↘	۰	↗	$\frac{۱۶}{۲۷}$	↗	$\frac{۳۲}{۲۷}$	↘	

نقاط کمکی

x	-۳	۱
y	۳	-۹



ت)

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۲}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x-۱}{x-۲}=+\infty$$

$$\Rightarrow$$ خط ۲ = x مجانب عمودی تابع می‌باشد.

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲x-۱}{x-۲}=-\infty$$

$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=۲ \rightarrow$ خط ۲ = y مجانب افقی تابع می‌باشد.

$$f(۰)=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع در نقطهٔ $(۰,\frac{۱}{۲})$ محور yها را قطع می‌کند.

$$f(x)=۰\rightarrow\frac{۲x-۱}{x-۲}=۰\rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

پس تابع در نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۰)$ محور xها را قطع می‌کند.

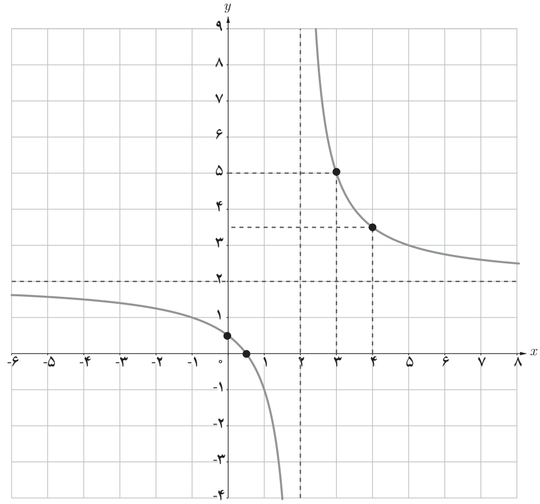
$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۲)^۲}$$

$$f''(x)=\frac{۶}{(x-۲)^۳}$$

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		−		−	
y''		−		+	
y	۲	↘ $-\infty$	$+\infty$	↘	۲

نقاط کمکی

x	۳	۴
y	۵	۳/۵



ث)

$$f(x)=\frac{-x}{x+۳}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

$f(۰)=۰ \rightarrow$ تابع در $(۰\,,\,۰)$ محور yها را قطع می‌کند.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x+۳}=-۱$$

بنابراین خط $y=-۱$ مجانب افقی تابع f می‌باشد.

$$\lim_{x\to -۳^{+}} f(x)=+\infty$$

$\Rightarrow$ خط $x=-۳$ مجانب قائم تابع f می‌باشد.

$$\lim_{x\to -۳^{-}} f(x)=-\infty$$

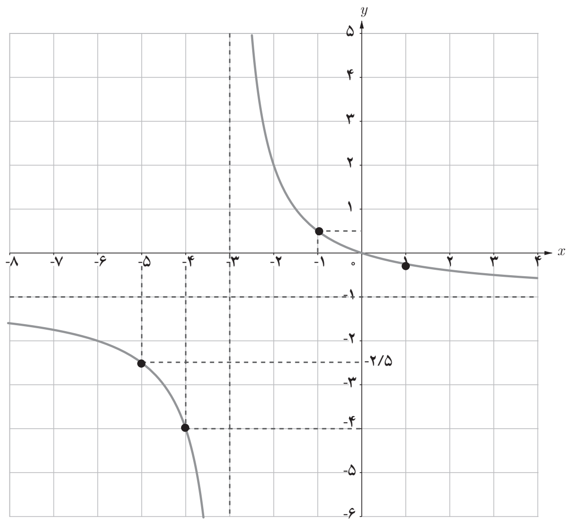
$$f'(x)=\frac{-۳}{(x+۳)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۶}{(x+۳)^{۳}}$$

x	$-\infty$		-۳		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y''		$\frown$ $-$		$\smile$ $+$	
y	-۱	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	-۱

نقاط کمکی

x	-۴	-۵	-۱	۱
y	-۴	$-۲/۵$	$۰/۵$	$-\frac{۱}{۴}$



ج)

$$f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۱$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(۰) = ۱$$

بنابراین تابع f در نقطهٔ $(۰ , ۱)$ محور yها را قطع می‌کند.

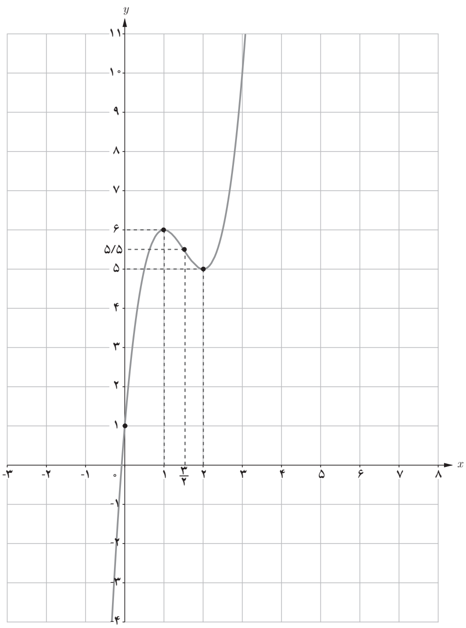
$$f'(x) = ۶x^۲ - ۱۸x + ۱۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

پس نقاط $(۱ , ۶)$ و $(۲ , ۵)$ نقاط اکسترمم نسبی f می‌باشند.

$$f''(x) = ۱۲x - ۱۸ = ۰ \rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

نقطهٔ $(\frac{۳}{۲}, \frac{۱۱}{۲})$ نقطهٔ عطف تابع f می‌باشد.

x	$-\infty$		۱		$\frac{۳}{۲}$		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y''		$\frown$ −		$\frown$ −	۰	$\smile$ +		$\smile$ +	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۶	$\searrow$	$\frac{۱۱}{۲}$	$\searrow$	۵	$\nearrow$	$+\infty$



۲ خط $x=۲$ مجانب قائم و خط $y=۱$ مجانب افقی تابع f می‌باشد بنابراین :

$$-\frac{d}{c}=۲ \to c=-\frac{۱}{۲}d$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}=۱ \to a=c$$

$$f(-۱)=۰ \Rightarrow \frac{a(-۱)+b}{c(-۱)+d}=۰ \to a=b$$

با انتخاب دلخواه $d=۲$ داریم : $a=b=c=-۱$ پس

$$f(x)=\frac{-x-۱}{-x+۲}$$

۳ داریم $f(۰)=-۲$ پس نمودار تابع از نقطهٔ $(۰ ,-۲)$ می‌گذرد.

$$f'(x)=۳x^۲+۱$$

معادله $f'(x)=۰$ فاقد جواب می‌باشد پس تابع دارای اکسترمم‌های نسبی نمی‌باشد یعنی گزینه‌های پ و ت رد می‌شوند.

$$f''(x)=۶x=۰ \to x=۰$$

نقطهٔ $x=۰$ نقطهٔ عطف تابع می‌باشد بنابراین گزینه الف رد می‌شود (نقطهٔ عطف گزینه الف نقطه $x=۱$ است)

بنابراین گزینه ب صحیح می‌باشد.

منابع

۱ استوارت، جیمز، (۲۰۰۲)، حسابگان عام، دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ محمدحسین علامت ساز و علی‌اکبر محمدی‌حسن‌آبادی، چاپ اول، تهران، انتشارات آبیژ، ۱۳۸۹.

۲ استوارت، جیمز، (۲۰۱۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ ارشک حمیدی، جلد اول، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۹۵.

۳ اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید، حسابان (کد کتاب۲۵۸/۱). تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش،۱۳۹۵.

۴ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید، ریاضیات ۲ (کد کتاب ۲۳۴/۲). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش،۱۳۹۴.

۵ ایوز، هاوارد و، (۱۹۸۳). آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، تهران : مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

۶ تورنس، نلسون. (۲۰۰۳)، ریاضیات در عمل، ترجمهٔ فاطمه معصومه راعی، تهران : کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.

۷ سافیر، فرد، (۲۰۰۲). ریاضیات سری شومز جلد۱. ترجمهٔ محمد مازوچی، تهران : کانون فرهنگی آموزش،۱۳۸۴.

۸ سیلورمن، ریچارد، (۱۹۶۹)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، جلد اول، تهران انتشارات علمی و فنی،۱۳۹۰.

۹ Adams, R.A. Essex, C.(2010) Calculus: A Complete Course. Toronto. Onario: Pearson Education, Inc.

۱۰ Barnett, R. Ziegler, M. Byleen, K. and Sobecki, D. (2008). College Algebra with Trigonometry (g[th] Eduition). Mc Graw – Hill Education.

۱۱ Beecher, J.A. Penna, J.A.& Bittinger, M.L. (2012). Precalculus. A Right Triangle Approach (4[th] Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۲ Crauder, B. Evans, B. & Noell, A. (2008). Functions and change, a modeling approach to college algebra and trigonometry. Boston. AM. Houghton Mifflin.

۱۳ Hungerford, T. W. Shaw, D. J. (2008). Contemporary Precalculus: A Graphing approach.(5[th] Edition). Belmont, CA. Thomson Brooks/Cole.

۱۴ Larson, R. Hostetler, R.P. Edwards, B.H. (2004). College algebra. a graphing approach. New Jersey. Brooks Cole.

۱۵ Rockswold, K. (2011) Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization (4th Edition) Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۶ Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. New Jersey. Pearson Education. Inc.

۱۷ Sullivan, M. (2012). Precalculus (9th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۸ Sullivan, M. Sullivan III, M. (2015). Precalculus Concepts Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry (3[th] Edition). Upper Saddle River, New Jersey. Pearson Education, Inc

۱۹ Swokowski, E.W. Cole, J. A. (2009). Cole–algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition. New Jersey. Brooks Cole.

۲۰ Swokowski, E.W.Cole, J.A. (2012).Precalculus, functions and graphs. Belmont, CA.Cengage Learning.