بسم الله الرحمن الرحیم

حسابان (۱)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

راهنمای معلم

پایهٔ یازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای معلم حسابان (۱) پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۱۳۸۱

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)

محمدباقر اسدی، مهدی ایزدی، سعید حق‌جو، علی رنجبری، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری‌تنجانی، مجتبی قربانی‌آرانی و هادی‌مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف) ـ جعفر ربانی (ویراستار ادبی)

مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی(مدیر امورفنی‌وچاپ) ـ جواد صفری(مدیرهنری) ـ شهرزاد قنبری(صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ فاطمه باقری‌مهر، علیرضا کاهه، علیرضا ملکان، سپیده ملک‌ایزدی و حمید ثابت‌کلاچاهی (امور آماده‌سازی)

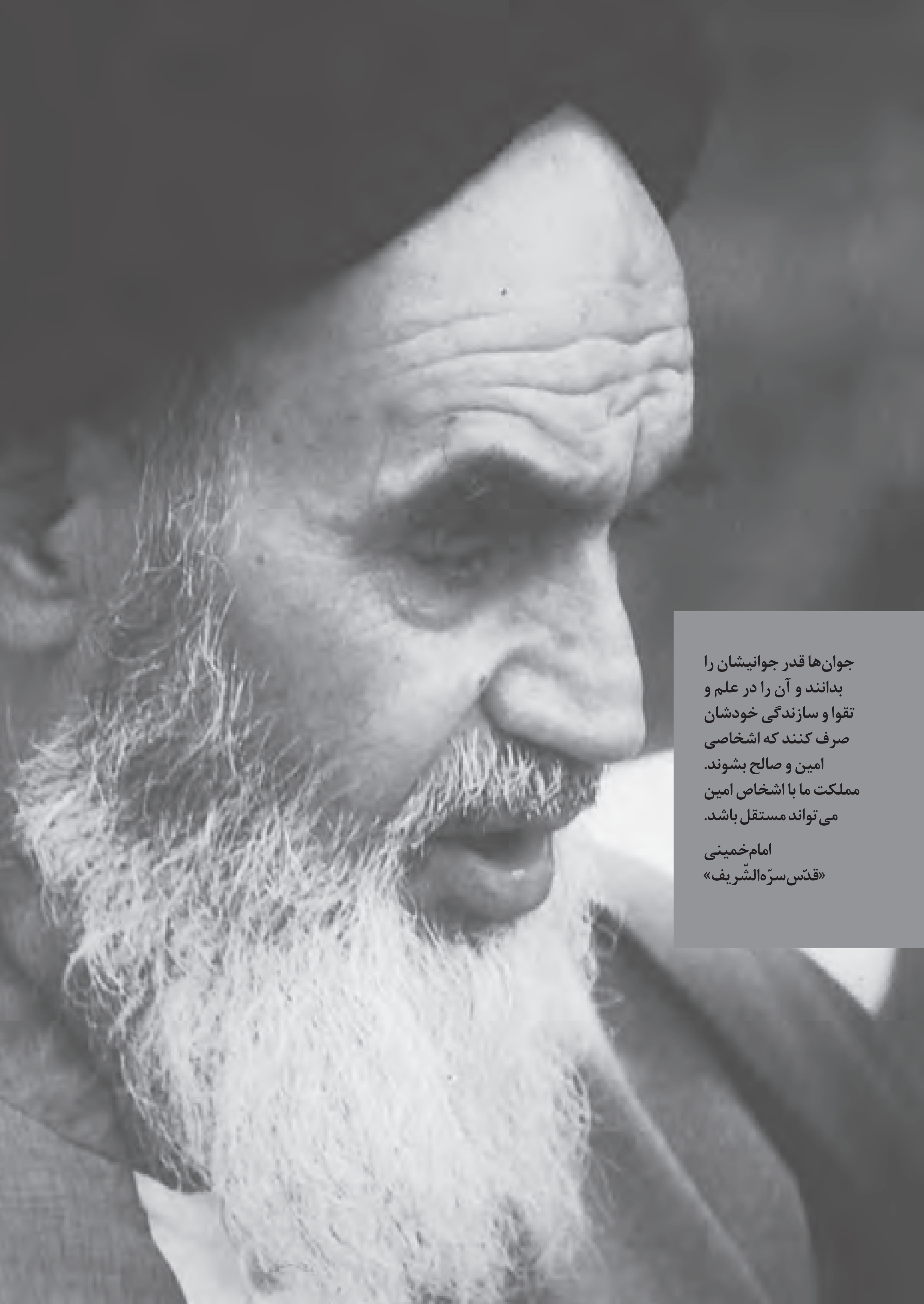
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۶

شابک ۴ـ۳۰۱۸ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3018-4



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدّس‌سرّه‌الشّریف»

فهرست

مقدمه

ساختار کتاب درسی حسابان (۱) براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین طراحی شده است. فعالیت‌ها و موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم ریاضی فراهم می‌کنند و مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان هستند. معلم در این میان نقش مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها برعهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با در نظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها توسط معلم وجود دارد. راهنمای حاضر براساس آن تنظیم شده است که کتاب درسی محور اصلی در فرایند آموزش باشد. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

برای تصویر عنوانی هر فصل اطلاعاتی مناسب و مرتبط با آن در کتاب راهنما آمده است. اهداف هر فصل و اهداف هر درس در کتاب حاضر توضیح داده شده است. همچنین در روش تدریس ارائه شده برای هر درس، نحوه اجرای هر فعالیت و چالش‌های پیش‌رو، پیشنهادهایی برای غنی‌سازی هر فعالیت، بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان در آن فعالیت و نیز توصیه‌هایی برای ارزشیابی نیز ارائه شده است. علاوه‌بر این در مورد پاسخ بیشتر فعالیت‌ها و تمرینات، راهنمایی به‌عمل آمده است. در کنار این بحث‌هایی نیز به‌عنوان دانستنی‌هایی برای معلم و همچنین نمونه سؤال‌هایی برای ارزشیابی ارائه شده است.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس باشند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حدود و ثغوری در کتاب مشخص شده است. رعایت این حد و مرزها، در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی الزامی است. روند کتاب نشان می‌دهد که حتی ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

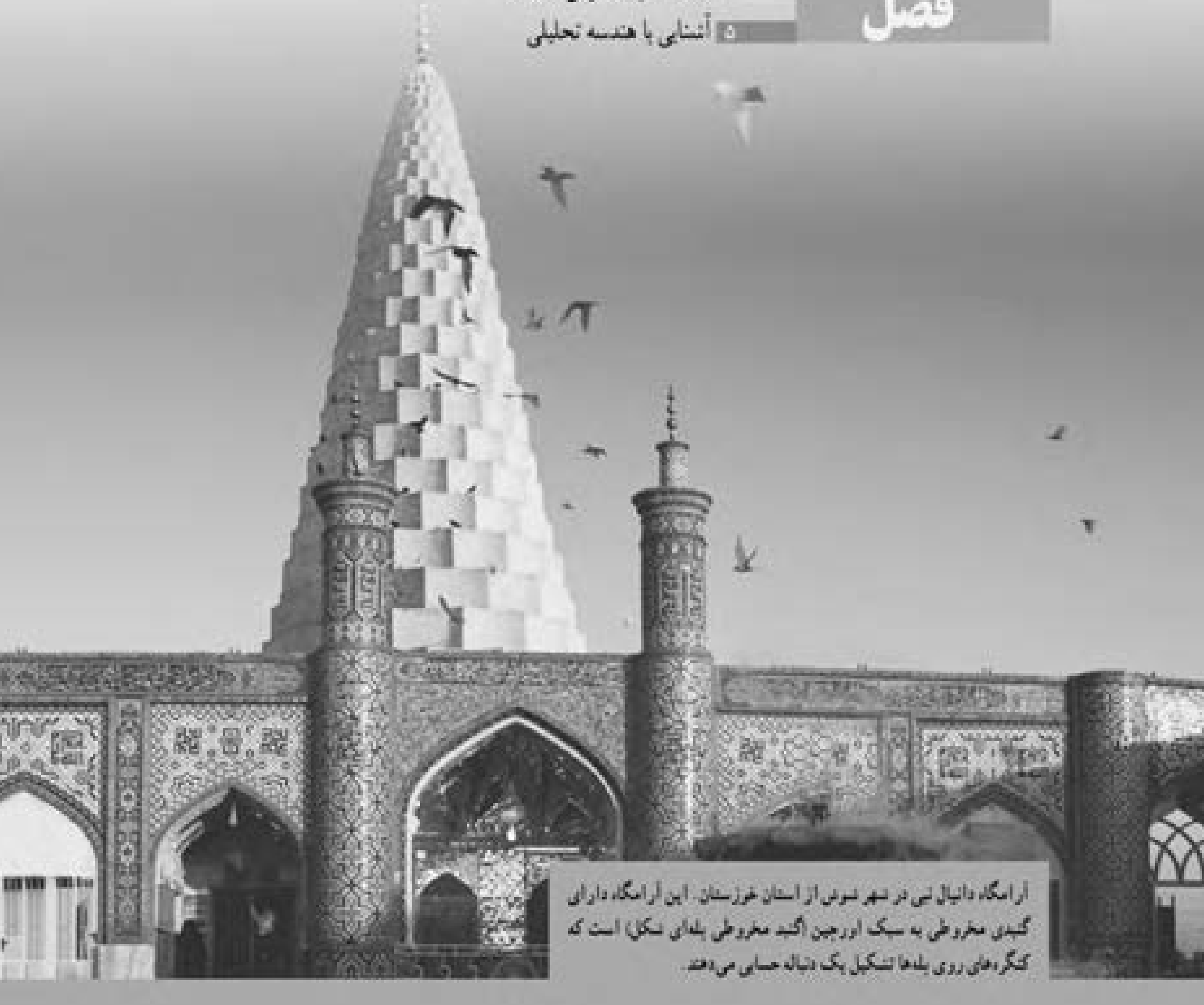
ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای آن در زندگی واقعی، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به‌صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که این موضوع باید مدنظر معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درسی را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان

جبر و معادله

فصل ۱



آرامگاه دانیال نبی در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

جبر و معادله

اهداف کلی فصل ۱

۱ آشنایی با مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۲ تعمیق کار با معادلات درجه دوم و آشنایی با روابط بین ضرایب و ریشه‌ها
۳ آشنایی با صفرهای تابع و حل معادلات دو مجذوری
۴ استفاده از معادله درجه دوم در مدل‌سازی برخی از پدیده‌های طبیعی
۵ آشنایی با معادلات شامل عبارت‌های گویا و گنگ و استفاده از آنها در حل مسائل
۶ آشنایی بیشتر با قدر مطلق و ویژگی‌های آن
۷ رسم نمودار توابع قدر مطلقی و حل معادلات قدر مطلقی
۸ آشنایی با روش هندسی در حل برخی از معادلات
۹ آشنایی بیشتر با هندسه مختصاتی و استفاده از آن در حل مسائل
۱۰ فرمول‌بندی کردن مسائل واقعی با زبان ریاضی (مدل‌سازی)

عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان

دانش‌آموزان باید بتوانند :

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی را به‌دست آورند و در حل مسائل از آنها استفاده کنند.

۲ روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله درجه دوم را بشناسند و با استفاده از آنها معادلات درجه دوم را حل کنند و ارتباط بین آنها و نمودار هندسی درجه دوم را درک کنند.

۳ مسائل واقعی را به زبان معادلات بنویسند و معادلات شامل عبارت‌های گویا و گنگ را به روش جبری حل کنند و جواب‌های به‌دست آمده را تفسیر کنند.

۴ ویژگی‌های قدر مطلق را بشناسند و در حل مسائل از آنها استفاده کنند.

۵ توابع قدر مطلقی را رسم کنند.

۶ معادلات قدر مطلقی ساده را حل کنند.

۷ از طریق نمودار؛ تعداد و مقدار تقریبی جواب‌های معادلاتی که با رسم تابع آن آشنایی دارند را پیدا کنند.

۸ در مواجههٔ با مسائل جدید از تجربیات خود استفاده کنند و استراتژی‌هایی مانند رسم شکل، حل مسائل در حالات خاص و تعمیم آن را به‌کار ببرند و مسائل را به روش‌های مختلف مورد بررسی قرار دهند.

پیش‌نیازها

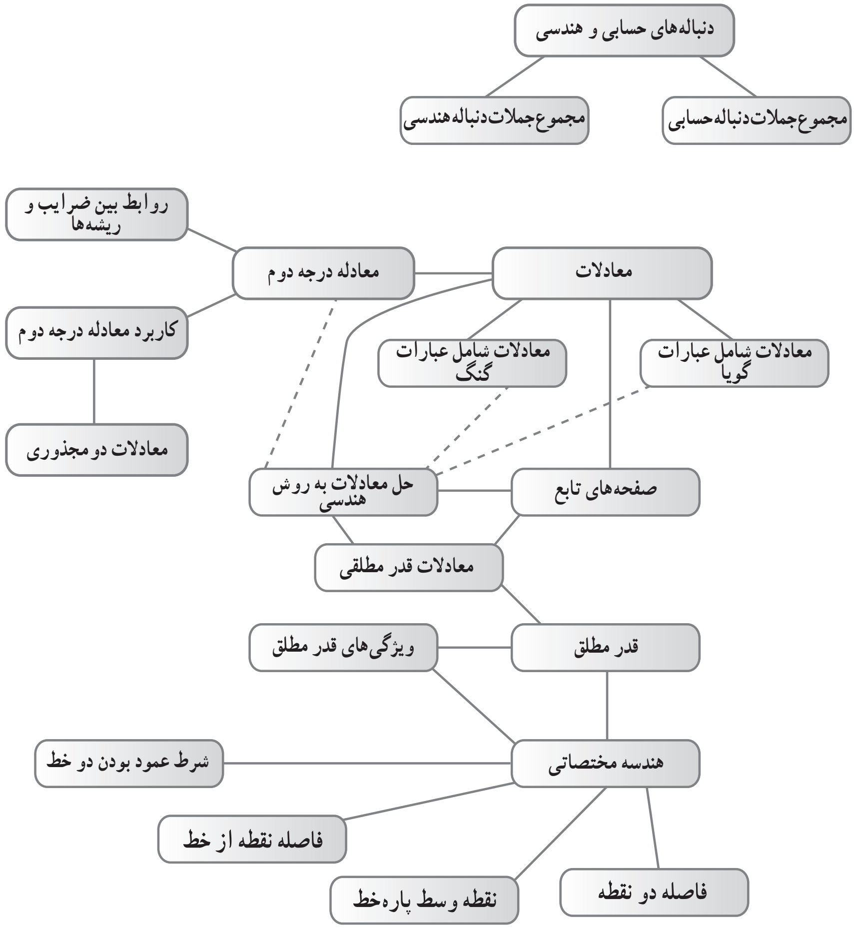
۱ آشنایی با محاسبات جبری

۲ آشنایی با دنباله‌های حسابی و هندسی

۳ آشنایی با قدر مطلق و مفهوم آن

۴ آشنایی با معادله درجه اول و دوم و روش‌های حل آنها.

نقشه مفهومی فصل ۱



زمان‌بندی پیشنهادی

پیشنهاد می‌شود این فصل در ۶ هفته آموزشی تدریس و تمرین شود.

نگاه کلی به فصل

هدف اصلی این فصل ایجاد مهارت‌های محاسباتی لازم در محاسبات جبری و حل معادلات است. با این حال روش‌های آموزشی انتخاب شده در این فصل به گونه‌ای نیست که دانش‌آموزان صرفاً محاسبات صوری انجام دهند و جواب‌هایی برای معادلات به‌دست آورند بلکه درک روش‌ها و ارتباط آنها با دنیای واقعی از اهداف مهم این فصل و سایر فصول است.

روش آموزشی این فصل بر مبنای فعالیت و طرح مسائل مناسب و راهنمایی قدم به قدم دانش‌آموز برای حل مسائل است. با این روش دانش‌آموزان علاوه بر آنکه مجبور خواهند بود خودشان عملیات جبری را انجام دهند، معنای آن را درک می‌کنند. بنابراین قوام و دوام مفاهیم بیشتر خواهد بود. لذا در برخی از موارد خواسته شده است مسائل را به روش‌های مختلف حل کنند تا با بازنمایی‌های مختلف از مطلب مورد نظر روبه‌رو شوند.

هر چند مباحث این فصل به نظر می‌رسد که ساختمانی جدا از هم دارند امّا در بستر تعریف جبر همگی قرار خواهند گرفت. این مطالب در راستای نیازهای علمی دانش‌آموزان در این پایه می‌باشند و طرح آنها الزامی بوده است.

درس ۱
مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

اهداف درس

۱ مجموع جملات دنباله حسابی متناهی

۲ مجموع جملات دنباله هندسی متناهی

روش تدریس

دانش‌آموزان در سال قبل با دنباله حسابی و هندسی آشنا شده‌اند. ضمن یادآوری آنها با تمرکز روی محاسبه مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n به ایده مناسبی برای مجموع جملات دنباله حسابی می‌رسیم. در فعالیت ابتدایی این درس با چینش‌های مختلف مجموع تعدادی دکمه را محاسبه می‌کنیم و به یک فرمول برای محاسبه این مجموع می‌رسیم سپس وارد دنباله حسابی به‌صورت کلی‌تر می‌شویم و در فعالیت صفحه ۳ به فرمول مربوط به مجموع جملات دنباله حسابی می‌پردازیم.

کار در کلاس صفحه ۴ دو هدف عمده دارد. نخست در قسمت اول به بازنمایی دیگری از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌پردازیم و در قسمت دوم به یک کاربرد از فرمول پرداخته می‌شود. مثال حل نشده در صفحه ۴ می‌تواند نحوهٔ مدل‌سازی و حل یک نمونه از مسائل مربوط به این قسمت را مورد بررسی قرار دهد.

فعالیت صفحه ۴ برای محاسبه مجموع جملات دنباله هندسی است. البته در بند (۱) حالت خاص آن را که قدر نسبت دنباله برابر یک است، استثنا کرده‌ایم و در ادامه روند فعالیت دانش‌آموزان به دلیل این استثنا پی خواهند برد (در فرمول؛ مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد).

سپس با مشابهتی که با بخش قبل دارد دانش‌آموزان فرمول مورد نظر را استخراج می‌کنند. در کار در کلاس صفحه ۵ یک مسئله ساده محاسباتی برای تثبیت فرمول آمده است.

در ادامه یک مسئله کاربردی آورده شده و هدف ضمنی آن نحوه مدل‌سازی کردن و حل نامعادله ساده و جزئیات محاسباتی است که به دانش‌آموزان گوشزد می‌شود.

یک نکته اینکه هنگام معکوس کردن کسرها در طرفین نامعادله جهت آن تغییر می‌کند و دیگر روش آزمایش و خطا برای حل نامعادله است.

در کار در کلاس صفحه ۶ با تمرکز روی داستان مخترع شطرنج که در خواندنی صفحه ۵ آمده است با یک تکنیک محاسباتی دیگر در تخمین جواب یک مسئله آشنا خواهند شد.

تمرینات این درس چند نمونه از مسائل متنوع است که دانش‌آموزان در منزل به حل آنها پرداخته و در جلسه حل تمرین، نکات ضروری در حل مسائل گوشزد خواهند شد.

توصیه آموزشی

همکاران محترم توجه دارند که بحث دنباله‌های حسابی و هندسی (و در قبل‌تر تصاعد حسابی و هندسی) از مباحث قدیمی است که از آنها سؤالات متنوع و بسیار سختی می‌توان طرح کرد.

هدف آموزشی کتاب درسی در حد شناخت مجموع و محاسبات معمولی و تمرکز بر مدل‌سازی و شهود است و توصیه می‌شود دانش‌آموزان را درگیر محاسبات پیچیده نکنیم و از طرح مسائل دشوار در کلاس خودداری شود.

درس ۲
معادلات درجه دوم

اهداف درس

۱ آشنایی با روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم
۲ آشنایی با صفر تابع و تعیین صفرهای توابع درجه دوم
۳ آشنایی با نمودار تابع درجه دوم و تعبیر هندسی آن
۴ حل معادلات دو مجذوری
۵ آشنایی با روش هندسی (نموداری) حل معادلات

روش تدریس

با یادآوری معادله درجه اول و درجه دوم و روش حل آنها؛ کار در کلاس صفحه ۷ با هدف یادآوری حل معادله درجه دوم به مطلب ورود پیدا می‌کنیم.

در فعالیت صفحه ۸ ابتدا با استفاده از حل معادله درجه دوم روابط بین ریشه‌ها و جواب‌ها را حدس می‌زنند. البته از این چهار معادله اطلاعات یکی به‌صورت کامل آمده است و یکی از معادلات در کار در کلاس قبل حل شده است. معادله سوم را نیز از طریق مربع کامل به جواب مضاعف ۱ می‌رسند که در جدول این عدد یک دو بار تکرار می‌شود. یعنی ریشه مکرر دارد تنها معادله ردیف چهارم نیاز به حل دارد. پس از یافتن ارتباط بین ستون‌های جدول در بند (۳) حدسی که زده شده است به‌صورت کلی اثبات می‌شود و به یک جمع‌بندی نهایی در این رابطه خواهیم رسید که در کادر مشخص شده است. مثالی که بعد آن زده شده است تکرار بند (۲) کار در کلاس صفحه قبل است که با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها حل شده

است که می‌تواند با تطابق جواب‌ها از کار در کلاس قبل و جواب‌های این مثال باشد و به تسلط بیشتر در حل مسئله منجر شود.

در فعالیت صفحه ۹ به دنبال رابطه‌ای بین حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد و ضریب یک معادله درجه دوم هستیم. در بند (۱) ساخت یک معادله درجه دوم با دانستن جواب‌های آن است که از دانش‌آموزان می‌خواهیم، روند کار را توضیح دهند و در بند (۲) تعمیم مطلب قسمت قبل مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتیجهٔ این فعالیت در کادر پایین آن آمده است. کار در کلاس صفحه ۹ با هدف تثبیت مطالب آموخته شده انجام می‌شود. سپس در یک مثال کاربردی استفاده دیگری از نتیجه فعالیت قبل خواهد شد. در فعالیت صفحه ۱۰ هدف معرفی صفرهای تابع است.

در بند (۱) از طریق جبری معادله $f(x)=0$ حل می‌شود. سپس جواب‌های به‌دست آمده را با جواب‌های طول تلاقی نمودار یا محور xها تطبیق داده و ارتباط بین این دو مطلب درک خواهد شد و در یک کادر ضمن معرفی صفرهای یک تابع به یک جمع‌بندی برای فعالیت فوق خواهیم پرداخت.

در کار در کلاس صفحه ۱۰ حالات دیگری از تابع و صفرهای آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. حالاتی که تابع هیچ صفری ندارد و یا دقیقاً یک صفر دارد. به دنبال آن مثال صفحه ۱۱ به یادآوری تجزیه یک عبارت درجه دوم و ارتباط آن با ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم می‌پردازد. از این مثال برای تجزیه عبارت‌های درجه دوم می‌توان استفاده کرد.

مثال دیگر صفحه ۱۱ یافتن معادله یک تابع درجه دوم (سهمی) از طریق نمودار آن است که به چند روش می‌توان این کار را انجام داد.

در روش اول استفاده از صفرهای تابع و نتیجه مثال قبل و در روش دوم استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله درجه دوم یک بازنمایی دیگر از مطلب است. البته روش سومی هم وجود دارد که به دلیل کمبود زمان تدریس به آن نپرداخته‌ایم ولی در صورت امکان می‌توان از آن استفاده کرد و آن روش ساخت سه معادله و سه مجهول براساس سه نقطه خاص (نقاط تلاقی با محورها) می‌باشد که از حل دستگاه پارامترهای عبارت درجه دوم به‌دست خواهند آمد.

کار در کلاس صفحه ۱۲ یک جمع‌بندی کامل از کلیه مطالبی است که در این بخش مورد مطالعه قرار گرفته است. در بند (۱) با توجه به نمودارها و صفرهای تابع به وضعیت ریشه‌های معادله درجه دوم و علامت آنها می‌پردازیم.

در بند (۲) با استفاده از نمودارها به علامت‌های پارامترهای a، b و c خواهیم پرداخت. لازم است مشابه تذکری که در زیر جدول آمده است برای تکمیل هر ستون جدول استدلالی مشابه انجام شود.

این کار در کلاس علاوه بر تثبیت مطالب به تعمیق مفاهیم آموخته شده نیز می‌پردازد و به یک جمع‌بندی از تابع درجه دوم؛ صفرهای آن و تعبیر هندسی نمایش آن خواهد پرداخت.

در صفحه ۱۳ ابتدا یک مثال آمده است که هدف آن یافتن صفرهای یک تابع از طریق دانستن یکی از صفرهای آن می‌باشد. هدف اصلی این مثال تذکر این مطلب است که اگر چند جمله‌ای $p(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد آن‌گاه $p(a)=0$، از این مطلب در جاهایی که نیاز به تجزیه یک چند جمله‌ای است استفاده می‌شود. خصوصاً در بخش حد تابع در حالت ÷ وقتی $x \to a$ که نیازمند عامل $x-a$ در صورت و مخرج کسر و حذف آنها خواهیم بود.

البته با محدودیت‌هایی که در بخش حد آمده است کمتر از این نکته استفاده خواهد شد ولی به‌عنوان یک نکته اساسی در جبر توابع به آن توجه خواهیم کرد. یادآور می‌شویم که ذکر این مطلب در همین حد باشد و وارد مسائل بخش‌پذیری چند جمله‌ای که در عمده کتاب‌های قبل وجود دارد نشویم و شاخ و برگ اضافی به مطلب ندهیم.

کار در کلاس صفحه ۱۳ با هدف روش حل معادلات دو مجذوری می‌باشد و به‌عنوان یک هدف اصلی با محوریت صفرهای تابع بیان شده است. در این مثال به روش حل معادلاتی که می‌توان آنها را به معادلات درجه دوم تبدیل کرد خواهیم پرداخت و در کار در کلاس انتهایی این صفحه به تثبیت این مطلب پرداخته می‌شود. در فعالیت صفحه ۱۴ به روش هندسی حل معادلات می‌پردازیم. در بند (۱) یک معادله درجه دوم آمده است که ابتدا آن را به روش جبری حل می‌کنیم و در بند (۲) با رسم توابع داده شده به ارتباط بین جواب‌های جبری و طول نقاط تلاقی نمودارها می‌پردازیم و در پایان ضمن جمع‌بندی فعالیت روش هندسی (نموداری) حل معادلات در یک کادر به‌عنوان نتیجه فعالیت آمده است.

حل مثال بعدی به برخی از جزئیات این روش مربوط می‌شود.

توجه داشته باشیم که به علت محدودیت در نوع توابعی که تا اینجا می‌شناسند از مثال‌های محدودی می‌توانیم استفاده کنیم مثال‌هایی از جنس درجه اول، درجه دوم و قدر مطلق امّا با جلوتر رفتن در فصل‌های بعد امکان آوردن مثال‌هایی که توابع رادیکالی کسری، نمایی و لگاریتمی و مثلثاتی نیز وجود داشته باشد می‌باشد.

درس ۳
معادلات گویا و گنگ

اهداف درس

۱ آشنایی با معادلات شامل عبارت‌های گویا و حل آنها و یافتن مجموعه جواب
۲ آشنایی با معادلات شامل عبارت‌های گنگ و حل آنها و یافتن مجموعه جواب
۳ توانایی مدل‌سازی مسائل با استفاده از معادلات گویا و گنگ

روش تدریس

رویکرد کلی این بخش با طرح یک مسئله و یافتن حالات مختلف برای جواب آن است. مثال حل شده ابتدای درس ضمن مدل‌سازی یک پدیده طبیعی (پیرامونی) به حالات مختلف حل مسئله می‌پردازد. در دو حالت مسئله حل شده است و حالت سوم به عنوان کار در کلاس با هدف تکمیل مطلب مطرح می‌شود. سپس به یک جمع‌بندی برای حل معادلات شامل عبارت‌های گویا در صورت و مخرج کسرها و روش حل آن می‌پردازیم. به دانش‌آموزان متذکر می‌شویم که ممکن است برخی از جواب‌های حل معادله مورد قبول نباشند (در دامنه مورد بحث نباشند) در مثال بعد ضمن توضیح روش حل به اینکه جواب‌های معادله نباید مخرج کسرها را صفر کنند توجه می‌شود.

در کار در کلاس صفحه ۱۹ در بند (۱) این مطلب تثبیت می‌شود. در بند (۲) با معرفی نسبت طلایی به حل یک مسئله در این مورد می‌پردازیم. در خواندنی کنار مسئله با مفهوم نسبت طلایی و کاربرد آن در ساخت بناهای مختلف پرداخته شده است. از آنجا که عدد طلایی یک عدد گنگ است لذا در مسائل واقعی تقریبی از جواب، مورد نظر است.

در صفحه ۲۰ با طرح یک مسئله به معادلات گنگ می‌رسیم. مدل‌سازی مسئله از مهم‌ترین اهداف این قسمت است که با جزئیات مطرح شده است و پس از حل و بررسی این مسئله به معرفی معادلات گنگ و روش حل آن پرداخته می‌شود. در حل معادلات گنگ تا مجبور نباشیم به تعیین دامنه نمی‌پردازیم. روش متداول، حل مسئله و کنترل جواب‌های به‌دست آمده در معادله اولیه است.

از آنجا که در فرایند حل مسئله گاهی طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم ممکن است علامت یک طرف حذف شود و جواب به‌دست آمده مورد قبول نباشد (جواب خارجی). البته در برخی موارد توجه به دامنه مسئله می‌تواند حل مسئله را کوتاه‌تر کند.

کار در کلاس صفحه ۲۱ به تثبیت و تعمیق مطلب می‌انجامد. در بند (۱) با مدل‌سازی یک مسئله ساده و تشکیل معادله گنگ به حل آن می‌پردازیم و در بند (۲) توجه به این نکته که بدون حل معادله نیز جواب‌ها مشخص بود. (جمع دو عبارت نامنفی وقتی صفر است که تک‌تک صفر باشند) تأکید روی این مطلب است که گاهی روش‌های میانبر برای حل مسئله لازم است و هر چند به روش کلی می‌توان مسئله را حل کرد امّا با توجه به فرم معادله می‌توان از نکات دیگری نیز برای حل استفاده نمود.

توصیه آموزشی

در حل معادلات گنگ توجه به نکات زیر و مطرح کردن آنها در بین حل سؤالات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۱ **تعیین دامنه عبارت** : با تعیین دامنه عبارت‌ها می‌توان محدوده مقادیر مجاز را مشخص کرد به‌ویژه اگر $\sqrt{P(x)} = Q(x)$. دو نتیجه می‌گیریم $P(x) \geq 0$ و $Q(x) \geq 0$.

۲ **تغییر متغیر** : در معادلات گنگ نیز مانند معادلات دو مجذوری تغییر متغیر مناسب در موارد حضور عبارت‌های یکسان می‌تواند معادله را بسیار ساده کند.

۳ **صفر شدن جمع چند عبارت نامنفی** : وقتی جمع چند عبارت نامنفی صفر می‌شود حتماً همهٔ آنها باید صفر باشند.

درس ۴
قدر مطلق و ویژگی‌های آن

اهداف درس

۱ آشنایی بیشتر با قدر مطلق و ویژگی‌های آن
۲ رسم توابع قدر مطلقی
۳ حل معادلات و نامعادلات ساده قدر مطلقی

روش تدریس

دانش‌آموزان با قدر مطلق و برخی از ویژگی‌های آن در سال‌های قبل آشنا شده‌اند. در این درس به درک بالاتر از قدر مطلق و ویژگی‌های آن خواهند رسید. شروع درس با یک کار در کلاس با هدف یادآوری مطالب و توجه به تعریف قدر مطلق یک عدد می‌باشد. در بند (۲) کار در کلاس از این مطلب که $\sqrt{x^2}=|x|$ استفاده می‌کنیم و از ورود به رادیکال‌های مرکب پرهیز می‌کنیم. در بند (۲) با راهنمایی در سؤال به مربع کامل کردن عبارت زیر رادیکال توجه شده است.

در فعالیت صفحه ۲۴ با هدف رسم تابع قدر مطلقی، در بند (۱) روش انتقال نمودار موردنظر است و در روش دوم استفاده از تعیین علامت و تابع چند ضابطه‌ای هدف اساسی است. تأکید می‌شود به هیچ وجه هدف طرح مسائلی نظیر نمودار گلدانی و آبشاری و... نمی‌باشد و اجازه می‌دهیم دانش‌آموزان خودشان درگیر رسم این‌گونه توابع شوند و اگر نکاتی مورد نظر ماست را دانش‌آموزان کشف کنند.

در صفحه ۲۵ ویژگی‌های قدر مطلق مورد بررسی قرار می‌گیرد. با برخی از ویژگی‌ها در سال‌های گذشته آشنا شده‌اند، آنها را یادآوری کرده‌ایم. جهت درک بیشتر، مثال‌های عددی می‌تواند برای یادآوری نکات مفید باشد. با مرور این نکات به تکمیل ویژگی‌های قدر مطلق می‌پردازیم.

در فعالیت صفحه ۲۵ دو ویژگی اساسی قدر مطلق مورد توجه است. در بند (۱) با استفاده از $|a| = \sqrt{a^2}$ عبارت $|ab|$ را به‌صورت $\sqrt{a^2b^2}$ نوشته و حکم را استخراج می‌کنیم و در بند (۲) از این ویژگی که $\left|\frac{a}{b}\right|$ را می‌توان به‌صورت $\left|a\times\frac{1}{b}\right|$ نوشت و استفاده از بند (۱) مطلب ثابت می‌شود. از این دو ویژگی در حل مسائل زیاد استفاده می‌شود.

البته در مورد بند (۱) مطلب تعمیم هم دارد و می‌توان برای بیش از دو عدد نیز مطلب را تعمیم داد.

در فعالیت پایین صفحه ۲۵ به برخی دیگر از ویژگی‌های قدر مطلق پرداخته می‌شود. در بند (۱) به‌صورت شهودی حالت‌های مختلف جواب نامعادله را مطرح می‌کنیم. اثبات جبری هر یک از موارد ساده است ولی به جهت کمبود زمان تدریس از اثبات آنها صرف نظر شده است و درک به صورت شهودی مورد نظر می‌باشد با بررسی بند (۲) و (۳) به بررسی بند (۳) که نامساوی مثلثی است می‌پردازیم.

مراحل هر یک از این قسمت‌ها در بخش حل فعالیت‌ها آمده است.

در صفحه ۲۶ با مدل‌سازی یک مسئله به استقبال معادلات قدر مطلقی و معرفی آنها و چگونگی حل آنها خواهیم پرداخت. برای حل معادلات قدر مطلقی با استفاده از سه روش ویژگی‌های قدر مطلق، توان دو رساندن، و روش هندسی می‌توان مسئله را حل کرد. در مثال و کار در کلاس صفحه ۲۶ به این مطالب پرداخته شده است.

در فعالیت صفحه ۲۷ یک روش هندسی برای رسم تابع $y = |f(x)|$ از روی نمودار $y = f(x)$ مطرح می‌شود. در جمع‌بندی فعالیت این روش مطرح شده است.

در کار در کلاس صفحه ۲۷ علاوه بر رسم توابع قدر مطلقی با توجه به فعالیت بالای آن می‌توان به روش هندسی نیز معادله قدر مطلقی را مورد بررسی قرار داد.

با آموزش قدر مطلق در این بخش نمونه‌های زیادتری از روش هندسی حل معادلات می‌تواند مطرح شود.

درس ۵
آشنایی با هندسه تحلیلی

اهداف درس

۱ آشنایی بیشتر با هندسه مختصاتی نظیر فاصله بین دو نقطه، مختصات نقطه وسط پاره‌خط و فاصله نقطه از خط

۲ آشنایی با شیب دو خط عمود بر هم و استفاده از آن در حل مسائل

روش تدریس

با هندسه مختصاتی در سال‌های قبل تا حد زیادی آشنا شده‌اند. محورهای مختصات و جایگاه نقطه در صفحه را می‌شناسند. در این درس با برخی از نکات تکمیلی آشنا می‌شوند. در فعالیت صفحه **۲۹** ابتدا با فاصله دو نقطه روی یک محور آشنا می‌شوند سپس در فعالیت صفحه ۳۰ به فاصله دو نقطه و یافتن فرمولی برای آن می‌رسیم که با استفاده از رابطه فیثاغورس و مختصات نقاط دو سر یک پاره‌خط، طول پاره‌خط را مشخص می کنند.

در کار در کلاس صفحه ۳۰ علاوه بر تثبیت مطالب آموخته شده به ارتباط بین شیب‌های دو خط عمود بر هم می‌رسیم و در ادامه با مثال صفحه **۳۱** قاعده کلی بین شیب‌های دو خط عمود بر هم بیان می‌شوند. ما در این کتاب به اثبات این قاعده نپرداخته‌ایم بلکه با استدلال استقرایی و حالات خاص این ارتباط کشف شده و از آن استفاده می‌شود.

در کار در کلاس صفحه ۳۱ به یک کاربرد از شیب‌های دو خط عمود بر هم برای تثبیت مطلب مطرح می‌شود. هنوز به مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط نپرداخته‌ایم لذا برای حل این مسئله در کلاس باید مانند مثال حل شده همین صفحه عمل شود ولی این مسئله بعد از بیان فرمول نقطه وسط پاره‌خط نیز می‌تواند به روش دیگری حل شود.

در فعالیت صفحه ۳۲ مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط در حالتی که دو نقطه روی یک محور هستند مطرح می‌شود و در کار در کلاس همین صفحه حالت کلی‌تر آن با یک مثال مورد بررسی قرار گرفته و نتیجه این کار در کلاس و فعالیت در یک کادر بیان می‌شود.

مهم‌ترین بخش از این درس فاصله یک نقطه از یک خط در صفحه است. ابتدا با یادآوری عمود و مایل، تعریفی از فاصله نقطه از خط ارائه می‌شود. در فعالیت صفحه ۳۲ با یک حالت خاص روند نتیجه‌گیری و به‌دست آوردن فرمول کلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هر چند این مراحل می‌تواند در یک حالت کلی نیز مورد بررسی قرار گیرد اما، به علت شلوغ شدن حل دستگاه دو معادله و دو مجهول و پارامترها از اثبات کلی آن صرف نظر شده است. در ارزشیابی‌های رسمی هم از اثبات فرمول خودداری شود. البته یک اثبات شهودی و بدون توضیح در خواندنی صفحه ۳۴ آمده است که به‌عنوان مطالعه آزاد توصیه می‌شود.

حل دو مثال از نحوه به‌کارگیری فرمول فاصله نقطه از خط در صفحه ۳۴ آمده است. کار در کلاس صفحه ۳۴ آخرین کار در کلاس این فصل است که به کاربرد فاصله نقطه از خط در حل مسائل می‌پردازد و به نوعی به جزئیات استفاده از این فرمول در بررسی مسائل هندسی مختصاتی می‌پردازد.

هرچند هندسه مختصاتی از محتوای آموزشی است که سابقه طولانی در ریاضیات مدرسه‌ای دارد، آنچه مهم است یک تسلط نسبی روی این مطالب برای فصول آینده مانند مثلثات در این کتاب و حد و مشتق و کاربرد مشتق در کتاب سال بعد خواهد بود.

سؤالات نمونه جهت ارزشیابی فصل ۱

در کتاب درسی به دلیل محدودیت زمان تدریس و تفاوت فردی دانش‌آموزان از تمرینات محدودی استفاده شده است. این مجموعه سؤالات برای دانش‌آموزان به صلاحدید همکاران محترم در کنار تدریس، پایان تدریس و یا ارزشیابی‌های پایانی این فصل توصیه می‌شود.

مجموع دنباله‌های حسابی و هندسی

۱ در یک دنباله حسابی جمله اول ۵ و جمله سوم آن ۱۳ است. مجموع ۶۵ جمله اول این دنباله را به‌دست آورید (جواب نهایی : ۸۶۴۵)

۲ در یک دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = ۱ + ۴n$ مجموع بیست جمله اول آن را به‌دست آورید (جواب نهایی : ۸۶۰).

۳ در یک دنباله حسابی اگر؛ مجموع ۱۵ جمله اول آن ۵۷۰ و $a_۵ = ۲۳$ باشد، نشان دهید جمله عمومی دنباله $a_n = ۸ + ۵n$ است.

۴ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A = ۲۰۰^۲ - ۱۹۹^۲ + ۱۹۸^۲ - ۱۹۷^۲ + \ldots + ۲^۲ - ۱$$

(جواب نهایی : ۲۰۰۷۹)

۵ در یک دنباله حسابی اگر $S_{۱۱} = S_{۱۵}$ باشد، ثابت کنید $S_{۲۶} = ۰$

۶ در هر دنباله حسابی متناهی، ثابت کنید میانگین جملات و میانه آنها برابر است.

۷ مجموع چند جمله از دنباله هندسی که جمله عمومی آن به صورت $a_n = ۲^{n-۱}$ است برابر ۲۵۵ می‌باشد تعداد جملات را به‌دست آورید (جواب : $n = ۸$)

۸ چند جمله از دنباله هندسی $\ldots , ۲^{n-۱}, ۲^n, ۲^{n+۱}$ را با هم جمع کنیم تا مجموع جملات ۱۰۲۰ شود ($n \in \mathbb{N}$ ،($n = ۸$))

۹ چهاروجهی منتظمی داریم که در هر رأس آن یک گلوله و روی هر یال ۱۰ گلوله قرار گرفته است. اگر کل حجم آن پر از گلوله‌های یکسان باشد، تعداد گلوله‌ها چندتاست؟ (جواب : ۲۸۰)

۱۰ کارفرمایی با یک کارگر مبتدی قرار گذاشت که حقوق روز اول او ۶۴۰۰ تومان باشد و هر روز ۵۰ درصد حقوق روز قبل او به حقوقش اضافه شود. حقوق ده روز اول کار کردن این کارگر چند تومان است؟

معادلات درجه دوم

۱ معادله درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ بوده و مجموع ضرایب آن برابر ۶- باشد (جواب نهایی : $3x^2-12x+3=0$).

۲ معادله $x^2-3x+1=0$ مفروض است. معادله درجه دومی بنویسید که :

الف) جواب‌های آن از نصف جواب‌های معادله فوق یک واحد بیشتر باشد.

(جواب : $x^2-\frac{7}{2}x+\frac{11}{4}=0$).

ب) جواب‌های آن مکعب جواب‌های معادله فوق باشد (جواب : $x^2-18x+1=0$).

۳ تابع $f(x)=2x^2-4x+m-3$ داده شده است. در هر حالت m را طوری بیابید که :

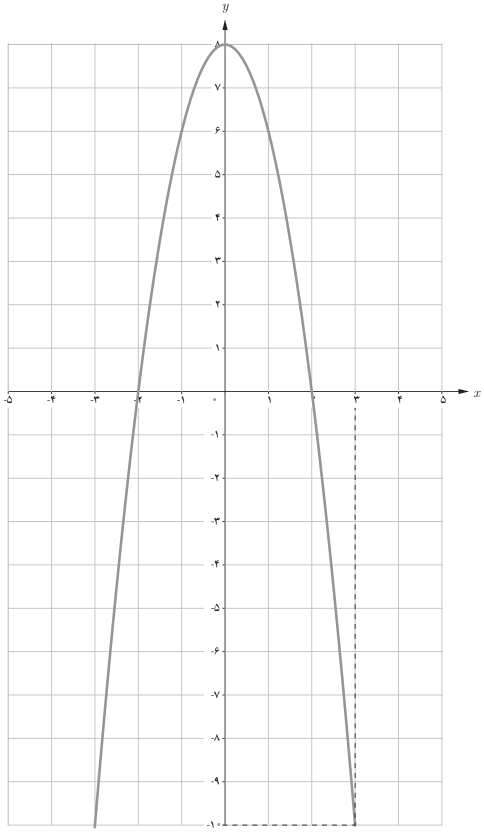
الف) تابع f دقیقاً یک صفر داشته باشد. (جواب : $m=5$)

ب) منحنی f از هر چهار ناحیه مختصات بگذرد. (جواب : $m<3$).

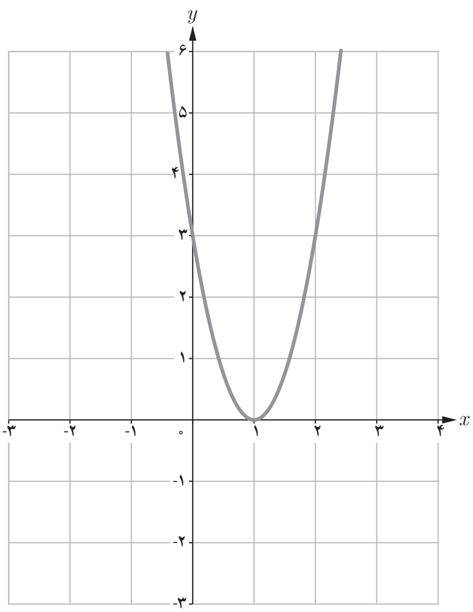
۴ هر یک از نمودارهای مقابل مربوط به یک تابع درجه دوم به معادله $f(x)=ax^2+bx+c$ می‌باشد، در هر حالت ضابطه را مشخص کنید.

(جواب نهایی الف : $f(x)=-2x^2+8$)

(جواب نهایی ب : $f(x)=3x^2-6x+3$)



(الف)



(ب)

۵ کدام عدد (مثبت) است که چون یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دو حاصل جمع را در هم ضرب کنیم برابر ۲۰ شود (مسئله از کتاب جبر و مقابله خوارزمی).

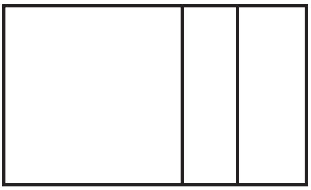
۶ از دبیر ریاضی کلاس حسابان سنش را پرسیدند. پاسخ داد : ۲۱ سال بعد سنّ من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال دارد؟

۷ بدون حل معادله و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت ریشه‌های معادله $۵x^۲-۷x-۵=۰$ بحث کنید.

۸ معادله $x^۴-۵x^۲+۱=۰$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این معادله چهار جواب دارد.

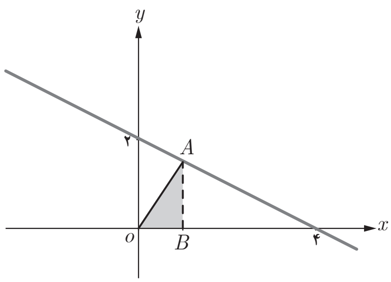
ب) ثابت کنید مجموع مجذور جواب‌ها برابر ۱۰ می‌باشد.



۹ سیمی به طول ۸ متر را به شکل روبه‌رو درآورده‌ایم. اگر مساحت بزرگ‌ترین مستطیل ۲ متر مربع باشد، مجموع طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

(جواب نهایی : ۳ متر)

۱۰ خط d به‌صورت زیر رسم شده است. نقطه A روی این خط را به گونه‌ای تعیین کنید که مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB ماکزیمم باشد.



معادلات گویا و گنگ

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x}=۱$ (مجموعه جواب: $\{۰, ۱\}$)

ب) $(x^۲+\sqrt{x}+۱)^۲+(x^۲+\sqrt{x}-۱)=۰$ (مجموعه جواب: $\{۰\}$)

پ) $\dfrac{۱}{x^۲+x}+\dfrac{x^۲}{x^۲-۱}=\dfrac{۵x-۱}{x^۳-x}$ (مجموعه جواب: $\{-۲, ۲\}$)

۲ موتورسیکلت‌سواری از A به سمت B و دوچرخه‌سواری از B به سمت A حرکت می‌کنند و پس از ۳۰ دقیقه یکدیگر را در بین راه ملاقات می‌کنند. اگر هر یک از این دو به راه خود ادامه دهند موتورسیکلت‌سوار ۲۰ دقیقه زودتر از دوچرخه‌سوار به مقصد می‌رسد. موتورسوار و دوچرخه‌سوار هر یک این فاصله را در چه مدت طی می‌کنند؟

(جواب نهایی : موتور سوار $۱۰\sqrt{۱۰}+۲۰$ دقیقه و دوچرخه سوار $۱۰\sqrt{۱۰}+۴۰$ دقیقه)

۳ مقداری محلول آب و الکل را که غلظت الکل آن ۸۰ درصد است به ۵ لیتر محلول آب و الکل با غلظت الکل ۲۰ درصد اضافه می‌کنیم. محلول به‌دست آمده ۵۰ درصد الکل دارد. حجم محلول اولیه چقدر بوده است؟ (جواب نهایی : ۵ لیتر)

۴ معادله $(x-\sqrt{x})^{۳}-۵(x-\sqrt{x})+۶=۰$ را حل کنید.

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۱ اگر $x\in\mathbb{R}$ و $a\geq ۰$ ثابت کنید.

الف) $|x|\leq a \to -a\leq x\leq a$

ب) $|x|\geq a \to x\geq a$ یا $x\leq -a$

۲ برای هر دو عدد حقیقی x را ثابت کنید.

$$|x-y|\leq|x|+|y|$$

۳ منحنی‌های $f(x)=|x-۲|+|x-۱|$ و $g(x)=x$ را رسم کنید و با توجه به آن سطح محصور بین دو منحنی را به‌دست آورید. (جواب نهایی : $S=۱$)

۴ معادله قدر مطلقی $|x+۱|+x=۲$ را به روش هندسی حل کنید و محدودهٔ جواب آن را به‌دست آورید سپس به روش جبری آن را حل کنید.

۵ به روش هندسی و جبری معادله $x^{۲}-۴|x|+۳=۰$ را حل کنید.

هندسه مختصاتی

۱ نقطه‌ای روی محور xها بیابید که فاصله آن تا نقطه $A\,(۱\,,\,۲)$ برابر $\sqrt{۱۰}$ شود (مسئله چند جواب دارد؟)

۲ مثلث ABC به رئوس $A\,(۱\,,\,۱)$ و $B\,(-۱\,,\,-۳)$ و $C\,(۲\,,\,۰)$ مفروض است. به دو روش مختلف نشان دهید مثلث قائم‌الزاویه است.

۳ ثابت کنید نقاط $A\,(۴\,,\,۷)$ و $B\,(۲\,,\,۳)$ و $C\,(۴\,,\,-۱)$ و $D\,(۶\,,\,۳)$ رئوس یک لوزی هستند سپس مساحت آن را محاسبه کنید.

۴ اگر $ABCD$ یک مستطیلی به رئوس $A\,(۳\,,\,۲)$ و $B\,(۳\,,\,-۱)$ و $C\,(-۲\,,\,-۱)$ و $D\,(-۲\,,\,۲)$ باشد ثابت کنید دو قطر AC و BD نصف یکدیگرند.

۵ خط $d:\ ۳x+۴y=۵$ و دایره c به مرکز $O\,(-۳\,,\,۲)$ و $M(۵\,,\,-۴)$ از محیط آن داده شده است. فاصله مرکز دایره تا خط d را به‌دست آورید و وضعیت خط d نسبت به دایره c را مشخص کنید.

۶ نقاطی روی خط $y=۲x-۱$ بیابید که فاصلهٔ آنها از مبدأ مختصات با فاصلهٔ آنها از خط $۳y-۴x=۲$ برابر باشد.

۷ اگر $M(a\,,\,b)$ نقطه‌ای روی سهمی $y=x^{۲}$ باشد که از دو نقطه $A\,(-۲\,,\,۱)$ و $B\,(۱\,,\,-۲)$ به یک فاصله باشد مختصات M را مشخص کنید. (جواب نهایی : $M\,(-۳\,,\,۴)$).

پرسش‌های مروری از کل فصل

الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱ حاصل عبارت $۲۰۰+\ldots+۶+۴+۲$ برابر ۱۰۱۰۰ است. ( )

۲ اگر نمودار سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ از همه نواحی محورهای مختصات بگذرد آن‌گاه $\frac{c}{a}<۰$ است. ( )

۳ مقدار ماکزیمم سهمی $y=-۲x^{۲}+x-۵$ برابر $\frac{۱}{۴}$ است. ( )

۴ جواب‌های معادله $A=B$ و $A^{۲}=B^{۲}$ یکسان هستند. ( )

۵ دامنه معادله $\frac{x+۵}{x+۵}=۱$ برابر $\mathbb{R}$ است. ( )

۶ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند $|a+b|=|a|+|b|$. ( )

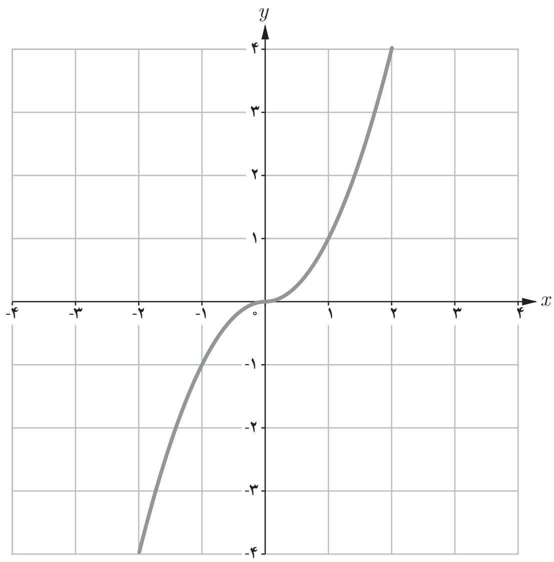
۷ معادله $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x^{۲}-۱}=۰$ فقط یک جواب دارد. ( )

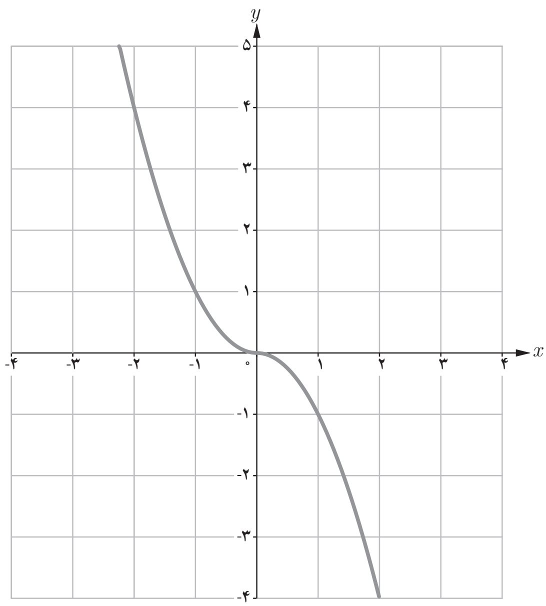
ب) پاسخ صحیح هر سؤال را مشخص کنید.

۱ اگر $|a| < |b|$ و $b^2 < 0$ آن‌گاه همواره :

■ $a < b$ ■ $a > b$

۲ نمودار تابع $f(x) = -x|x|$ شبیه کدام نمودار زیر است؟

■ 

■ 

۳ میانگین ۱۰ جمله اول دنباله ... و ۴ و ۷ و ۱۰ برابر است با :

■ ۸/۵− ■ ۸−

۴ تابع $F(x) = x^4 - 1$ چند صفر دارد؟

■ دو تا ■ یکی

۵ اگر $\frac{3x}{x^2-4} = \frac{B}{x^2-4} + \frac{A}{x-2}$ باشد، مقدار B کدام است؟

■ ۴ ■ ۶−

۶ اگر وسط پاره‌خط AB که دارای $A(-1 , 2)$ و $B(\alpha , \beta)$ برابر $(3 , 0)$ باشد، $\alpha + \beta$ کدام است؟

■ ۵ ■ ۴

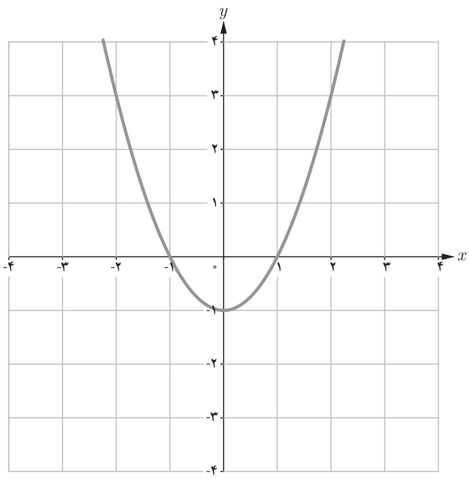
۷ فاصله نقطه $M(-1$ و $3)$ از خط $4x - 3y = 7$ کدام است؟

■ ۵ ■ ۴

پ) گزاره‌های زیر را با یک عبارت مناسب تکمیل کنید تا به گزاره‌ای درست تبدیل شوند.

۱ اگر $P(x) = 3x^4 - 7x^2 + Kx + 1$ و $P(x)$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد مقدار K برابر ...... می‌باشد.

۲ با توجه به شکل زیر که برای سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد نتیجه می‌گیریم که علامت‌های a و b و c به ترتیب ......، ...... و ..... می‌باشد.



۳ اگر خط d بر خط $2x + 3y - 5 = 0$ عمود باشد، شیب آن برابر ..... می‌باشد.

۴ مجموع جواب‌های معادله $|x| + |x - 1| = 4$ برابر ..... می‌باشد.

۵ مجموع اعداد فرد طبیعی ۱ تا ۱۰۱ برابر ..... است.

پاسخ : فعالیت‌ها ، کار در کلاس‌ها ، تمرین‌های پایان درس

فعالیت ص ۲

۱ ۵۵

۲ تعداد ردیف‌ها ۱۰ و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف ۱۱ پس تعداد کل دگمه‌ها برابر $۱۱ \times ۱۰ = ۱۱۰$

$$\text{تعداد دگمه‌های آبی} = \frac{۱۱۰}{۲} = ۵۵$$

۳ جملات S را یکبار دیگر از آخر به اوّل می‌نویسیم و جفت، جفت آنها را با هم جمع می‌کنیم تعداد n جفت تشکیل می‌شود که مجموع هر جفت $n+۱$ است پس $۲S=n(n+۱)$ و از آنجا با تقسیم طرفین بر ۲ به $S=\frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌رسیم.

فعالیت ص ۳

۱

$$S_n = a+(a+d)+(a+۲d)+\dots+(a+(n-۲)d)+(a+(n-۱)d)$$

$$S_n = (a+(n-۱)d)+(a+(n-۲)d)+\dots+(a+d)+a$$

$$۲S_n = (۲a+(n-۱)d)+(۲a+(n-۱)d)+\dots+(۲a+(n-۱)d)+(۲a+(n-۱)d)$$

$$۲S_n = n[۲a+(n-۱)d]$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$$

کار در کلاس ص ۴

۱ $$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}\left[a_1+\underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}\right]=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

۲ اولین مضرب دورقمی ۴ برابر ۱۲ و آخرین آن ۹۶ است. ابتدا تعداد آنها را به‌دست آورید.

$$a_n=a_1+(n-1)\,d$$

$$96=12+(n-1)\times 4\Rightarrow n=22$$

$$S_n=\frac{22}{2}(12+96)=1180$$

فعالیت ص ۴

۱ قدر نسبت ۱ و مجموع n جمله آن a_n

۲ الف) $a_n=aq^{n-1}$

ب) $S_n-S_nq=a-aq^n$

$$S_n(1-q)=a(1-q^n)\Rightarrow S_n=a\frac{1-q^n}{1-q}$$

کار در کلاس ص ۵

$$S_{10}=\frac{1}{8}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}\times\frac{1-\frac{1}{1024}}{1}=\frac{1023}{8192}$$

کار در کلاس ص ۶

الف) $S=1\times\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1$ گرم

$$2^{64}-1>2^{63}=(2^7)^9>128^9>100^9=10^{18}$$

هر تن 10^6 گرم است. 10^{18} گرم برابر 10^{12} تن گندم خواهد بود پس تعداد گندم‌ها از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر است.

تمرین ص ۶

۱
$$۵+۸+۱۱+\ldots+(۵+(n-۱)۳)>۴۹۳$$
$$\frac{n}{۲}(۱۰+(n-۱)\times ۳)>۴۹۳$$
$$n(۷+۳n)>۹۸۶$$

عبارت $۳n^۲+۷n-۹۸۶=۰$ به‌ازای $n=۱۷$ جواب دارد پس حداقل ۱۸ جمله باید جمع شود تا به منظورمان برسیم.

۲ الف)
$$۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱)=n^۲$$

ب)
$$S=\frac{n}{۲}(۲+(n-۱)\times ۲)=n^۲$$

۳ اولین عدد طبیعی سه‌رقمی که مضرب ۶ باشد برابر ۱۰۲ و آخرین عدد سه‌رقمی مضرب ۶ برابر ۹۹۶ است.

$$۹۹۶=۱۰۲+(n-۱)۶\Rightarrow n=۱۵۰$$
$$S=\frac{۱۵۰}{۲}(۱۰۲+۹۹۶)=۸۲۳۵۰$$

۴
$$\begin{cases}a_۱+a_۳+\ldots+a_{۱۹}=۱۳۵\\ a_۲+a_۴+\ldots+a_{۲۰}=۱۵۰\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}} S_{۲۰}=۲۸۵$$
$$\Rightarrow ۲۸۵=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)\Rightarrow ۲۸/۵=۲a_۱+۱۹d$$
$$(a_۲-a_۱)+(a_۴-a_۳)+\ldots+(a_{۲۰}-a_{۱۹})=۱۵\Rightarrow ۱۰d=۱۵\Rightarrow\begin{cases}d=۱/۵\\ a_۱=۰\end{cases}$$

۵
$$a_۱=۱\ ,\ a_۲=۲\ ,\ a_۳=۴$$

جملات دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ خواهند بود.

$$S_n=۲۵۵$$
$$۱\times\frac{۱-۲^n}{۱-۲}=۲۵۵\Rightarrow ۲^n=۲۵۶\Rightarrow ۲^n=۲^۸\Rightarrow n=۸$$

۶

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} \geq 0/99$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100}$$

$\Rightarrow 2^n \geq 100$ با آزمایش $n = 7$

۷ الف)

$$S = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = 1\times\frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n - 1}{a-1}$$

ب)

$$(a-1)(1 + a + a^2 + \ldots + a^n) = a^n - 1$$

کار در کلاس ص ۷

۱

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

۲

$$x = -1 \Rightarrow 4 + m - 7 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$4x^2 - 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+112}}{8} = \frac{3 \pm 11}{8} \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ x = -1 \end{cases}$$

فعالیت ص ۸

۱

$ax^2 + bx + c = 0$	مقدار ریشه‌ها		S	p	a	b	c	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$3x^2 - 5x + 2 = 0$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	-5	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
$4x^2 - 3x - 7 = 0$	-1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	4	-3	-7	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	1	1	2	1	1	-2	1	2	1
$5x^2 + 6x - 8 = 0$	-2	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	5	6	-8	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$

۲ الف) در ستون جمع ریشه‌ها و ستون $-\frac{b}{a}$ نظیر به نظیر جملات برابر است پس : $S=-\frac{b}{a}$

ب) در ستون ضرب ریشه‌ها و ستون $\frac{c}{a}$ نظیر به نظیر جملات برابر است پس : $p=\frac{c}{a}$

۳
$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{۲a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_۱x_۲=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a})(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a})=\frac{(-b)^۲-\Delta}{۴a}=\frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a}=\frac{c}{a}$$

فعالیت ص ۹

۱ الف) با هریک از ریشه‌ها معادله‌ای ساخته و طرفین درهم ضرب شده و به یک معادله درجه دوم رسیده‌ایم.

ب)

$$\begin{matrix} x=\alpha \\ x=\beta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x-\alpha=۰ \\ x-\beta=۰ \end{matrix} \Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=۰ \Rightarrow x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰$$

کار در کلاس ص ۹

$$\begin{matrix} S=۴ \\ P=(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=-۱ \end{matrix} \Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰$$

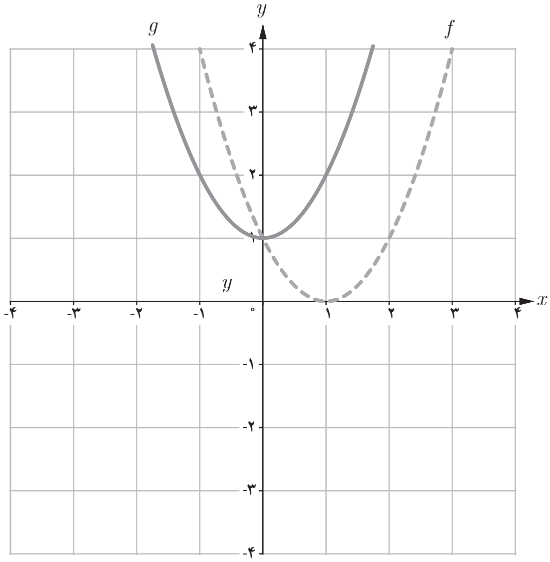
فعالیت ص ۱۰

۱
$$f(x)=۰ \Rightarrow x^۲+۴x+۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=-۳ \end{cases}$$

۲ طول‌های نقاط تلاقی جواب‌های معادله $f(x)=۰$ هستند.

کار در کلاس ص ۱۰

۱ $f(x) = (x-1)^2$



۲ منحنی f در نقطه $x = 1$ محور طول‌ها را قطع کرده است پس معادله $f(x) = 0$ یک جواب دارد
منحنی g محور xها را قطع نکرده است پس معادله $g(x) = 0$ جواب ندارد.

کار در کلاس ص۱۲

۱ الف) (۹ ,۸) ب) (۴) پ) (۲,۱) ت) (۷,۵)
ث) (۷) ج) (۳) چ) (۹,۸,۳) ح) (۶, ۴,۲,۱)

ویژگی / شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۰	۲	۲
علامت a	+	−	+	+	+	−	−	−	+
علامت b	+	−	−	+	−	−	+	+	−
علامت c	−	+	+	+	+	بی‌علامت $c = 0$	−	−	+

کار در کلاس ص ۱۳

$$x=-۲ \Rightarrow -۸+۴k+۲-۲=۰ \Rightarrow k=۲$$

$$f(x)=x^۳+۲x^۲-x-۲$$

$$f(x)=(x+۲)(x^۲-۱)$$

$$f(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ & \Rightarrow x=-۲ \\ x^۲-۱=۰ & \Rightarrow x=\pm۱ \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۲x^۲-x-۲ & x+۲ \\ \hline x^۳+۲x^۲ & x^۲-۱ \\ \hline ۰-x-۲ & \\ -x-۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

کار در کلاس ص ۱۳

با فرض $u=x^۲$ داریم :

$$u^۲-۱۰u+۱۶=۰ \Rightarrow (u-۲)(u-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} u=۲ \\ u=۸ \end{cases}$$

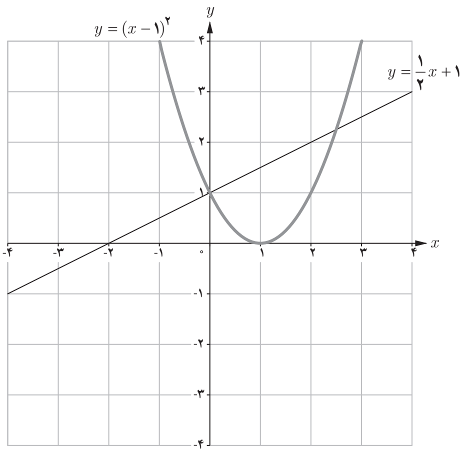
$$u=۲ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

$$u=۸ \Rightarrow x^۲=۸ \Rightarrow x=\pm ۲\sqrt{۲}$$

فعالیت ص ۱۴

۱ $$x^۲-۲x+۱=\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۲}x=۰ \Rightarrow x(x-\frac{۵}{۲})=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۲



۳ طول‌های نقاط تلاقی همان جواب‌های معادله مذکور هستند.

تمرین ص ۱۵

۱ الف) $S=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}=۱ \quad , \quad P=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹} \Rightarrow x^۲-x+\frac{۲}{۹}=۰$

ب) فرض کنیم یکی از ریشه‌ها a باشد پس ریشه دیگر آن a ۲ است و داریم :

$$\begin{matrix} S=a+۲a=۳a \\ P=a\times۲a=۲a^۲ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^۲-Sx+P=۰ \\ x^۲-۳ax+۲a^۲=۰ \end{matrix}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود معادله بی‌شمار جواب دارد کافی است به‌جای a مقادیر مختلف قرار دهیم.

۲ الف) صفر تابع ۲ $=x$ است.

$$P(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)=a(x-۲)^۲$$

$$P(۰)=-۲ \Rightarrow -۲=a(-۲)^۲ \Rightarrow a=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow P(x)=-\frac{۱}{۲}(x-۲)^۲$$

ب) صفرها ۱ $=x$ و ۳$-=x$ هستند.

$$P(x)=a(x-۱)(x+۳)$$

$$P(-۱)=-۲ \Rightarrow -۲=a(-۲)(۲) \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$P(x)=\frac{۱}{۲}(x-۱)(x+۳)=\frac{۱}{۲}x^۲+x-\frac{۳}{۲}$$

الف) وقتی توپ به زمین می‌خورد که $h(x)=۰$ در این‌صورت معادله دو جواب $x_۱=۰$ و $x_۲=۳۶$ را دارد که اولی مربوط به نقطه اولیه و دیگری مربوط به نقطه پایانی است بنابراین توپ ۲۶ متر فاصله افقی را طی می‌کند.

ب) باید بیشترین مقدار تابع h را بیابیم که در نقطه طول رأس سهمی رخ می‌دهد.

$$h(x)=-۰/۰۳x^۲+۱/۰۸x$$

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱/۰۸}{-۰/۰۶}=۱۸$$

بیشترین ارتفاع توپ برحسب متر $h(۱۸)=-۹/۷۲+۱۹/۴۴=۹/۷۲$

۴ الف) $f(x)=x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$

ب) $g(x)=2x^3+x^2+3x=0 \Rightarrow x(\underbrace{2x^2+x+3}_{\Delta\ \text{منفی}})=0 \Rightarrow x=0$

پ) $h(x)=x^4+3x^2+5\ ,\ \Delta=9-20<0 \Rightarrow$ جواب ندارد $\Rightarrow$ تابع هیچ صفری ندارد

۵ الف) $x^4-3x^2-4=0$

$$x^2=u \Rightarrow u^2-3u-4=0 \Rightarrow \begin{cases} u=-1 \Rightarrow x^2=-1 & \text{جواب ندارد} \\ u=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

ب)

$$\frac{x^2}{3}-2=u \Rightarrow u^2-7u+6=0 \Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3}-2=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \\ u=6 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3}-2=6 \Rightarrow x^2=24 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

پ)

$$4-x^2=u \Rightarrow u^2-4u-12=0 \Rightarrow (u+2)(u-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=-2 \\ u=6 \end{cases}$$

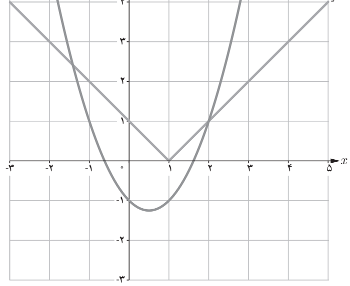
$$\begin{cases} u^2=-2 \Rightarrow 4-x^2=-2 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6} \\ u^2=6 \Rightarrow 4-x^2=6 \Rightarrow x^2=-2 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۶ $f(x)=|x-1|\ \ ,\ \ g(x)=x^2-x-1$

تعداد جواب‌ها دوتاست.

یکی $x=2$ و دیگری عددی بین -1 و -2

(جواب دقیق $-\sqrt{2}$ خواهد بود که با شکل نمی‌توان به آن رسید.)



۷ الف) تابع صفر ندارد و $a=۱$ در نتیجه $f(x)=x^{۲}+bx+c$ و چون نقطه $(-۳،۵)$ نقطه مینیمم تابع است پس $\frac{-b}{۲a}=-۳$ و از آنجا $b=۶$ و چون $f(-۳)=۵$ پس :

$$۹-۳b+c=۵\Rightarrow ۹-۱۸+c=۵\Rightarrow c=۱۴\quad f(x)=x^{۲}+۶x+۱۴$$

ب) تابع دو صفر دارد و چون دهانه سهمی روبه پایین است پس $a=-۱$ و در نتیجه $f(x)=-x^{۲}+bx+c$

نقطه $(-۲،۲)$ نقطه ماکزیمم تابع است پس $x=\frac{-b}{۲a}$ و در نتیجه $\frac{-b}{-۲}=-۲$ و $b=-۴$ از طرفی

$$f(-۲)=۲\Rightarrow -۴-۲b+c=۲\Rightarrow c=-۲\Rightarrow f(x)=x^{۲}-۴x-۲$$

پ) تابع دو صفر دارد و $a=۱$ در نتیجه $f(x)=x^{۲}+bx+c$ و $x=۳$ طول نقطه مینیمم است

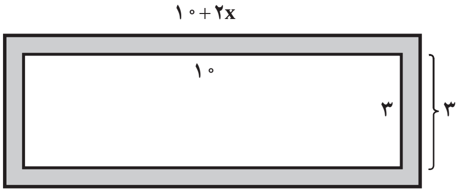
$$۳=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow b=-۶\Rightarrow f(۳)=-۳\Rightarrow -۳=۹-۱۸+c\Rightarrow c=۶\Rightarrow f(x)=x^{۲}-۶x+۶$$

ت) تابع هیچ صفری ندارد و $a=-۱$ لذا $f(x)=-x^{۲}+bx+c$ و $x=-۲$ نقطه ماکزیمم پس

$$-۲=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow b=-۴\Rightarrow f(x)=-x^{۲}-۴x+c, f(-۲)=-۱\Rightarrow -۴+۸+c=-۱\Rightarrow c=-۵$$

$$f(x)=-x^{۲}-۴x-۵$$

۸ پهنای آبراه را x درنظر می‌گیریم.



$$\text{مساحت آبراه}=۲\left(x(۱۰+۲x)+۲(۳\times x)\right)$$

$$۱۴=۴x^{۲}+۲۶x$$

$$۲x^{۲}+۱۳x-۷=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۷ & \text{غ ق ق}\\ x=\frac{۱}{۲} & \text{متر}\end{cases}$$

۹ اگر عرض کف‌پوش را x درنظر بگیریم طول کف‌پوش $۴x+۱$ می‌باشد و مساحت هر کف‌پوش $۴x^{۲}+x$ خواهد بود

$$۲۰۰۰\,(۴x^{۲}+x)=۵۲/۸\times ۱۰^{۴}\Rightarrow ۴x^{۲}+x=۲۶۴$$

$$۴x^{۲}+x-۲۶۴=۰\Rightarrow x=\frac{-۱\pm ۶۵}{۸}\begin{cases}x=۸ & \text{سانتی‌متر}\\ x=\frac{-۳۳}{۴} & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

طول کف‌پوش $۳۳=۱+۴\times ۸$ سانتی‌متر خواهد بود.

کار در کلاس ص ۱۸

$$\frac{۸+۵}{۲۰۰+۵-y}=\frac{۷}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱۳}{۲۰۵-y}=\frac{۷}{۱۰۰}\Rightarrow ۱۳۰۰=۱۴۳۵-۷y$$

$$\Rightarrow y=۱۹/۲۸$$

تقریباً ۱۹/۲۸ کیلوگرم از آب محلول باید تبخیر شود.

کار در کلاس ص ۱۹

۱

$$۱+۲(x-۲)=۳(x-۲)^۲\Rightarrow ۳x^۲-۱۴x+۱۵=۰$$

$$x=\frac{۱۴\pm۱۶}{۶}\quad x=۵ \text{ مورد قبول},\quad x=\frac{-۱}{۳} \text{ مورد قبول}$$

۲

$$۲(w+L)=۱۴۴$$

$$w=۷۲-L$$

$$\frac{L}{۷۲-L}=\frac{۷۲}{L}\Rightarrow L^۲+۷۲L-۵۱۴۸=۰$$

$$\Delta=(۷۲)^۲+۴(۵۱۴۸)=۵\times ۷۲^۲$$

$$L=\frac{-۷۲\pm۷۲\sqrt{۵}}{۲}$$

$$L=۳۶(-۱\pm\sqrt{۵})\qquad L\simeq ۴۴/۵$$

طول تقریباً ۴۴/۵ و عرض ۲۷/۵ می‌باشد.

کار در کلاس ص ۲۱

۱ فرض کنیم عدد صحیح موردنظر x باشد داریم :

$$x+\sqrt{x}=۶\Rightarrow\sqrt{x}=۶-x\xrightarrow{\text{توان ۲}}x=۳۶+x^۲-۱۲x$$

$$x^۲-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow x=\frac{۱۳\pm۵}{۲}\quad x=۹ \text{ قبول},\quad x=۴ \text{ غیرقابل قبول}$$

۲

$$\sqrt{x^۲+۴}=-۲\sqrt{x}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲+۴=۴x\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰$$

$$\Rightarrow x=۲$$

با آزمایش جواب، $x=۲$ غیرقابل قبول است.

بدون حل معادله چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است پس تک‌تک عبارات صفر هستند و :

$$\begin{cases} x^{۲}-۴=۰ \\ x=۰ \end{cases} \Rightarrow x=\pm ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک}}$$ جواب ندارد.

تمرین ص۲۲

۱

$$۶(x+۱)=۲x(x+۱)^{۲}+(x-۳)x \Rightarrow ۳x^{۲}-۷x-۶=۰ \Rightarrow x=\frac{۷\pm ۱۱}{۶} \begin{cases} x=۳ & \text{ق ق} \\ x=\frac{-۲}{۳} & \text{ق ق} \end{cases}$$

۲

$$۲p^{۲}+۴(۲-p)=-۳p(۲-p) \Rightarrow p^{۲}-۲p-۸=۰ \Rightarrow (p-۴)(p+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۴ & \text{ق ق} \\ p=-۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۳

$$۳y+۵+y(y+۴)=(y+۱)(y+۵)$$
$$۳y+۵+y^{۲}+۴y=y^{۲}+۶y+۵$$
$\Rightarrow y=۰$ غیرقابل قبول

۴

$۴x=۳x+۴ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow$ آزمایش $۲\sqrt{۴}\overset{?}{=}\sqrt{۱۲+۴} \Rightarrow ۴=۴$ ✓. $x=۴$ قابل قبول است.

۵

$$\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x}) \xrightarrow{\text{با فرض } ۱-\sqrt{x}\neq ۰} \frac{۱}{۱+\sqrt{x}}=۱+\sqrt{x} \Rightarrow (۱+\sqrt{x})^{۲}=۰$$

$۱+\sqrt{x}=۰$ جواب ندارد $\qquad ۱-\sqrt{x}=۰ \Rightarrow x=۱$ قابل قبول است

۶ با ضرب طرفین معادله در $(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)$ داریم :

$$۵(\sqrt{x}-۲)=۲(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)-(\sqrt{x}+۲)$$

$$۵\sqrt{x}-۱۰=۲(x-۴)-\sqrt{x}-۲$$

$$۶\sqrt{x}=۲x \Rightarrow ۳۶x=۴x^{۲} \Rightarrow ۴x(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{ق ق} \\ x=۹ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۷

$$\sqrt{x+۳}=۴-\sqrt{۳x+۱}$$

$$x+۳=۱۶+۳x+۱-۸\sqrt{۳x+۱}$$

$$۲x+۱۴=۸\sqrt{۳x}+۱$$

$$x+۷=۴\sqrt{۳x}+۱$$

$$x \quad +۱۴x+۴۹=۱۶(۳x+۱)$$

$$x^{۲}-۳۴x+۳۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{قابل قبول} \\ x=۳۳ & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۸ x : قیمت یک اسباب‌بازی قبل از تخفیف

$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}$ = تعداد اسباب‌بازی قبل از تخفیف

$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}$ = تعداد اسباب‌بازی بعد از تخفیف

$$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}+۴=\frac{۱۲۰۰۰۰}{x-۱۰۰۰}$$

$$-x^{۲}+۱۰۰۰x+۳۰\times۱۰^{۶}=۰$$

$$\Delta=۱۲۱\times۱۰^{۶}$$

$$\sqrt{\Delta}=۱۱۰۰۰$$

$$\begin{cases} x=۶۰۰۰ & \\ x=-۵۰۰۰ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۹ x : سرعت در مسیر خلاف جریان آب

$$\frac{۱۴۴}{x+۸}+\frac{۱۴۴}{x}=۱۵$$

$$۱۵x^{۲}-۱۶۸x-۱۱۵۲=۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=۳۱۲ \quad , \quad x=۱۶$$

سرعت در جریان آب ۲۴ = ۸ + ۱۶ کیلومتر بر ساعت

۱۰ اگر کل کار را V درنظر بگیریم و ماشین A کار را در x ساعت انجام دهد ماشین B کار را در x+۱۵ ساعت انجام می‌دهد.

$$\frac{V}{x}+\frac{V}{x+۱۵}=\frac{V}{۱۸}\Rightarrow\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$۱۸(x+۱۵)+۱۸x=x(x+۱۵)$$

$$۱۸x+۲۷۰+۱۸x=x^{۲}+۱۵x$$

$$x^{۲}-۲۱x-۲۷۰=۰$$

$$\Delta=۱۵۲۱\Rightarrow\sqrt{\Delta}=۳۹$$

$$x=\frac{۲۱\pm ۳۹}{۲}\quad\begin{cases}x=۳۰\\ x=-۹ \ \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

ماشین A در ۳۰ ساعت و ماشین B در ۴۵ ساعت کار را به‌تنهایی انجام می‌دهند.

کار در کلاس ص ۲۳

۱

الف) $|-۵-(-۳)|=|-۵+۳|=|-۲|=۲$

ب) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

پ) $|۰|=۰$

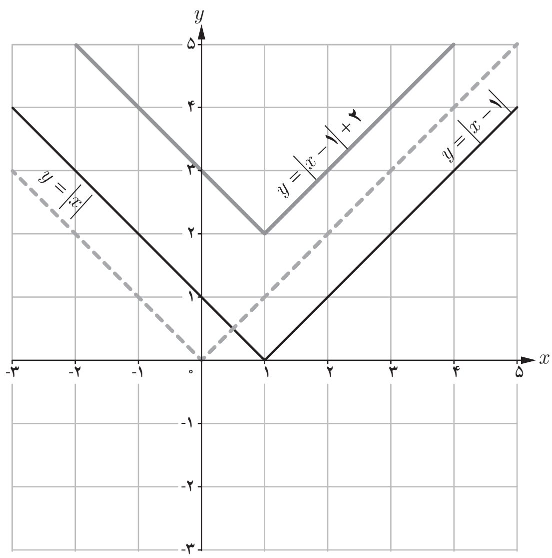
۲

الف) $\sqrt{a^{۴}+۲a^{۲}+۱}=\sqrt{(a^{۲}+۱)^{۲}}=|a^{۲}+۱|=a^{۲}+۱$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(\sqrt{۳}-۲)^{۲}}=|\sqrt{۳}-۲|=۲-\sqrt{۳}$

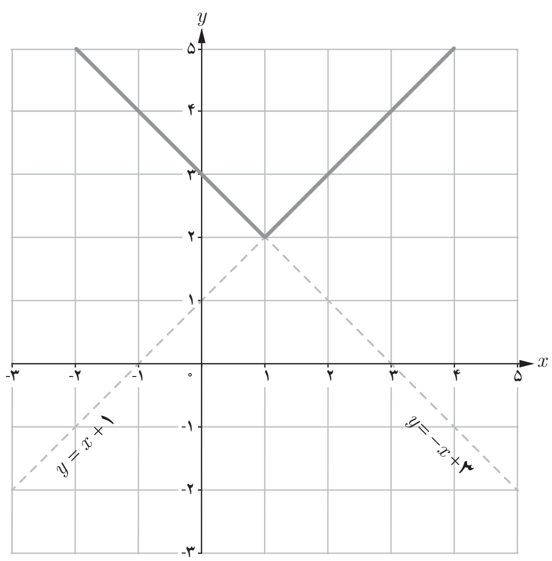
فعالیت ص ۲۴

روش اول



روش دوم

$$y=|x-۱|+۲=\begin{cases}x+۱ & , \quad x\geq ۱\\ -x+۳ & , \quad x<۱\end{cases}$$



فعالیت ص ۲۵

۱

$$|ab|=\sqrt{a^{۲}b^{۲}}=\sqrt{a^{۲}}\times\sqrt{b^{۲}}=|a|\times|b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|a\times\frac{۱}{b}\right|=|a|\times\left|\frac{۱}{b}\right|=|a|\times\frac{۱}{|b|}=\frac{|a|}{|b|}$$

فعالیت ص ۲۵

۱ (الف) $\leftrightarrow$ (۲)

(ب) $\leftrightarrow$ (۳)

(پ) $\leftrightarrow$ (۱)

(ت) $\leftrightarrow$ (۴)

۲ اگر $a\geq ۰$ آن‌گاه $-a\leq a\leq a$ بدیهی است اگر $a<۰$ آن‌گاه $a\leq a\leq -a$

$(a<۰\Rightarrow -a>۰)$

۳

$$\begin{cases}-|a|\leq a\leq |a| \\ -|b|\leq b\leq |b|\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}}\Rightarrow -|a|-|b|\leq a+b\leq |a|+|b|$$

۴

$$-|a|-|b|\leq a+b\leq |a|+|b|\Rightarrow -(|a|+|b|)\leq a+b\leq (|a|+|b|)$$
$$\Rightarrow |a+b|\leq |a|+|b|$$

تذکر : به‌صورت مستقیم نیز می‌توانیم حکم را نتیجه بگیریم

$$(|x|+|y|)^{۲}=|x|^{۲}+|y|^{۲}+۲|x||y|\geq x^{۲}+y^{۲}+۲xy=(x+y)^{۲}$$
$$\Rightarrow (|a|+|y|)\geq |x+y|$$

از طرفی $||a|+|b||=|a|+|b|$ پس $|x|+|y|\geq |x+y|$

کار در کلاس ص ۲۶

۱ روش اول

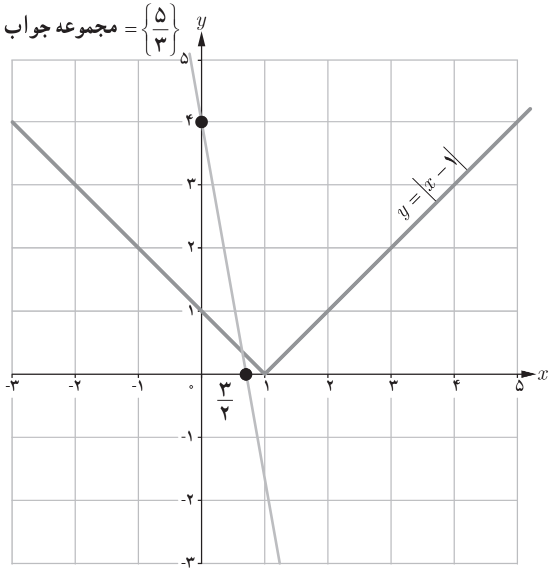
$$|x-۱| = \begin{cases} x-۱ & , \quad x \geq ۱ \\ -x+۱ & , \quad x < ۱ \end{cases}$$

حالت اول : $x \geq ۱ \Rightarrow x-۱ = ۴-۳x \Rightarrow x = \frac{۵}{۳}$ قابل قبول

حالت دوم : $x < ۱ \Rightarrow -x+۱ = ۴-۳x \Rightarrow ۲x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$ غیرقابل قبول

روش دوم

مجموعه جواب $= \left\{\frac{۵}{۳}\right\}$



روش سوم

$$(|x-۱|)^{۲} = (۴-۳x)^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۲x + ۱ = ۱۶ - ۲۴x + ۹x^{۲}$$

$$۸x^{۲} - ۲۲x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳}{۲} & \text{قابل قبول} \\ x = \frac{-۵}{۴} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

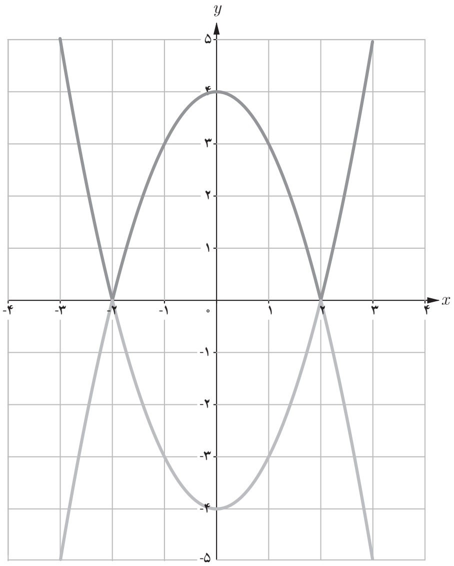
(در معادله اولیه صدق نمی‌کند.)

فعالیت ص ۲۷

۱ $y = x^{۲} - ۴$

x		-۲		۲	
$x^{۲}-۴$	+	۰	−	۰	+

۲



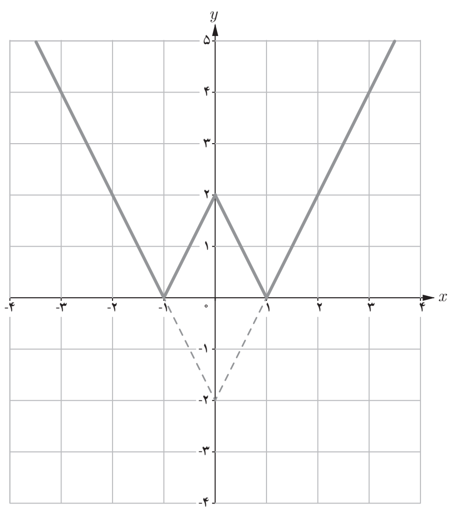
$$y = \left|x^{۲} - ۴\right| = \begin{cases} x^{۲} - ۴ & , \quad x \geq ۲ \\ -x^{۲} + ۴ & , \quad -۲ < x < ۲ \\ x^{۲} - ۴ & , \quad x < -۲ \end{cases}$$

۳

$$y = \left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & f(x) > ۰ \\ -f(x) & f(x) < ۰ \end{cases}$$

۴ نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم بخشی از نمودار که پایین محور xهاست را آینه‌وار به بالای محور xها منتقل می‌کنیم.

۵



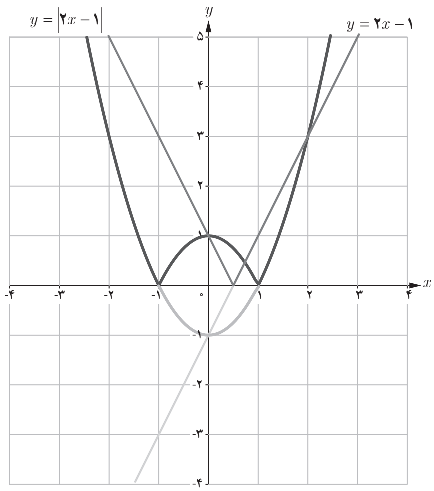
کار در کلاس ص ۲۷

۱ تعداد جواب = ۴

یک جواب $x=\circ$ یکی $x=۲$

یک جواب بین ۲− و ۳−

یک جواب بین ۰ و۱



۲

$$x^{۲}-۱=-۲x+۱ \Rightarrow x^{۲}+۲x-۲=\circ \Rightarrow x=\frac{-۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۳}$$

تمرین ص ۲۸

۱ الف)

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^{۲} & , \quad x\geq\circ \\ -x^{۲} & , \quad x<\circ \end{cases}$$

ب)

$$g(x)=|x^{۲}-۱|=\begin{cases} x^{۲}-۱ & , \quad x\geq۱ \\ -x^{۲}+۱ & , \quad -۱<x<۱ \\ x^{۲}-۱ & , \quad x\leq-۱ \end{cases}$$

پ)

$$h(x)=|x-۱|+|x+۱|$$

	-۱		۱	
$x-۱$	$-$		$-$	$\circ$	$+$
$x+۱$	$-$	$\circ$	$+$		$+$
	(۱)		(۲)		(۳)

$$x<-۱\Rightarrow h(x)=-(x-۱)-(x+۱)=-۲x$$

$$-۱\le x\le ۱\Rightarrow h(x)=-(x-۱)+(x+۱)\Rightarrow h(x)=\begin{cases}۲x & , \quad x>۱\\ ۲ & , \quad -۱\le x\le ۱\\ -۲x & , \quad x<-۱\end{cases}$$

$$۱<x\Rightarrow h(x)=x-۱+x+۱=۲x$$

۲ فرض کنیم نقاط موردنظر روی محور طول‌ها به طول x باشند.

$$|x+۱|+|x-۳|=۶$$

$x>۳\Rightarrow x+۱+x-۳=۶\Rightarrow ۲x=۸\Rightarrow x=۴$ مورد قبول

$-۱\le x\le ۳\Rightarrow x+۱-(x-۳)=۶\Rightarrow ۴=۶$ غیرممکن

$x<-۱\Rightarrow -(x+۱)-(x-۳)=۶\Rightarrow -۲x=۴\Rightarrow x=-۲$ قابل قبول

دو نقطه به طول‌های ۲- و ۴ جواب‌های مسئله‌اند.

۳ الف)

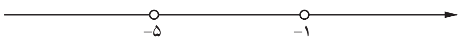
$$|x-۳|=۷\Rightarrow\begin{cases}x-۳=۷\Rightarrow x=۱۰\\ x-۳=-۷\Rightarrow x=-۴\end{cases}$$

ب)

$$۲|x-۶|=۴\Rightarrow |x-۶|=۲\Rightarrow\begin{cases}x-۶=۲\Rightarrow x=۸\\ x-۶=-۲\Rightarrow x=۴\end{cases}$$

پ)

$$|x+۳|>۲\Rightarrow\begin{cases}x+۳>۲\Rightarrow x>-۱\\ x+۳<-۲\Rightarrow x<-۵\end{cases}$$



۴

الف) $x>۳\Rightarrow \dfrac{۲-x}{x-۳}=۱\Rightarrow ۲-x=x-۳\Rightarrow x=\dfrac{۵}{۲}$ غیرقابل قبول

ب) $x<۳\Rightarrow \dfrac{۲-x}{-x+۳}=۱\Rightarrow ۲-x=-x+۳\Rightarrow ۲=۳$ غیرممکن

این معادله جواب ندارد.

$$\sqrt{(x-۱)^{۲}}=۲x+۱\Rightarrow |x-۱|=۲x+۱$$

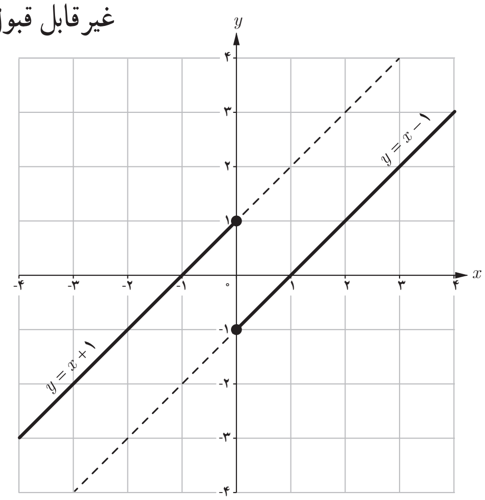
$x\ge ۱\Rightarrow x-۱=۲x+۱\Rightarrow x=-۲$ غیرقابل قبول

$x<۱\Rightarrow -x+۱=۲x+۱\Rightarrow x=۰$ قابل قبول

۵ الف)

$$y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - ۱ & , \quad x > ۰ \\ x + ۱ & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

$$y = ۳ \Rightarrow \begin{cases} x > ۰ \Rightarrow ۳ = x - ۱ \Rightarrow x = ۴ & \text{قابل قبول} \\ x < ۰ \Rightarrow x + ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲ & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

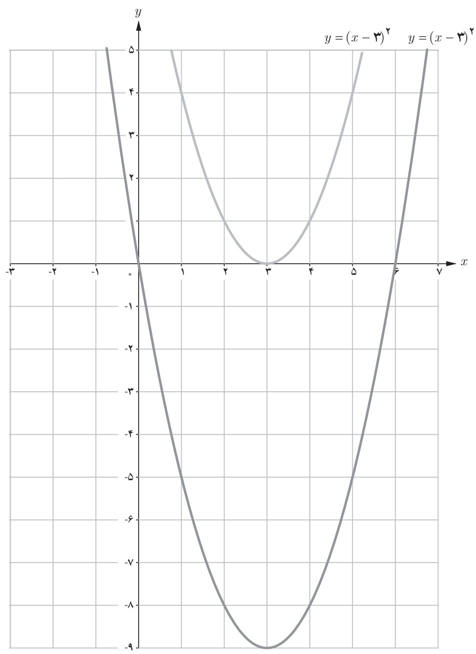


ب)

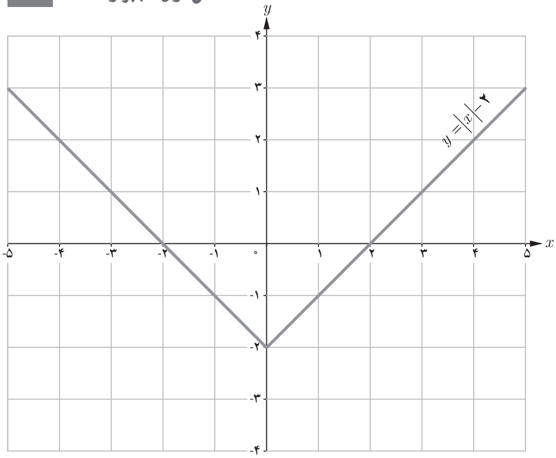
$$y = x^{۲} - ۶x = (x - ۳)^{۲} - ۹$$

$$y = ۳ \Rightarrow (x - ۳)^{۲} - ۹ = ۳ \Rightarrow (x - ۳)^{۲} = ۱۲$$

$$x - ۳ = \pm\sqrt{۱۲} \Rightarrow x = ۳ \pm \sqrt{۱۲}$$

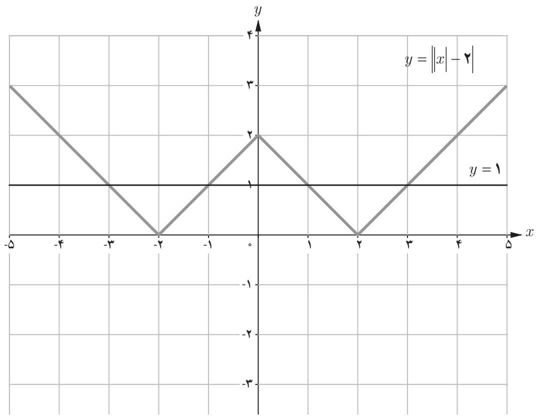


۶ **روش هندسی**



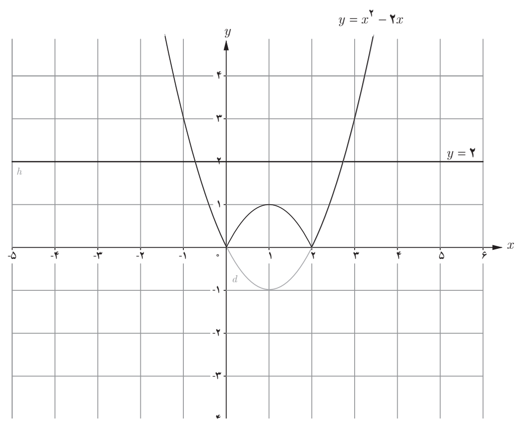
معادله دارای ۴ جواب است.

$$\left||x|-۲\right|=۱ \Rightarrow |x|-۲=\pm۱ \quad \begin{array}{l} |x|-۲=۱ \Rightarrow |x|=۳ \Rightarrow x=\pm۳ \\ |x|-۲=-۱ \Rightarrow |x|=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \end{array}$$



۷

$$y=x^{۲}-۲x=(x-۱)^{۲}-۱$$



خط ۲ $y=$ معادله نمودار $y=\left|x^{۲}-۲x\right|$ را در دو نقطه قطع کرده است و دو جواب دارد.

$$\left|x^{۲}-۲x\right|=۲\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}-۲x=۲\Rightarrow x^{۲}-۲x-۲=۰\Rightarrow x=\dfrac{۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}\Rightarrow x=۱\pm\sqrt{۳}\\ x^{۲}-۲x=-۲\Rightarrow x^{۲}-۲x+۲=۰\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

فعالیت ص ۲۹

۱ OA = ۴ و OB = −۳

۲ ۴−(−۳) = ۷

۳ ۷

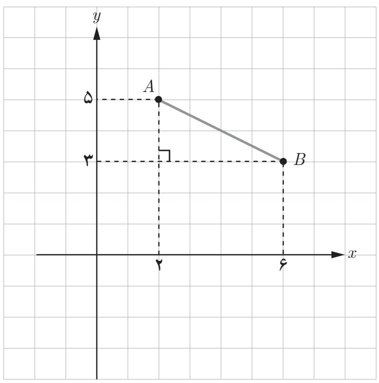
۴ فاصله بین دو نقطه روی یک محور، قدر مطلق تفاضل طول‌های آن دو نقطه است.

فعالیت ص ۳۰

۱ الف

$$AB^{۲}=\left|x_B-x_A\right|^{۲}+\left|y_B-y_A\right|^{۲}$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^{۲}+(y_B-y_A)^{۲}}$$



کار در کلاس ص ۳۰

الف)

ب)

$$AB=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=۵$$

$$AC=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}$$

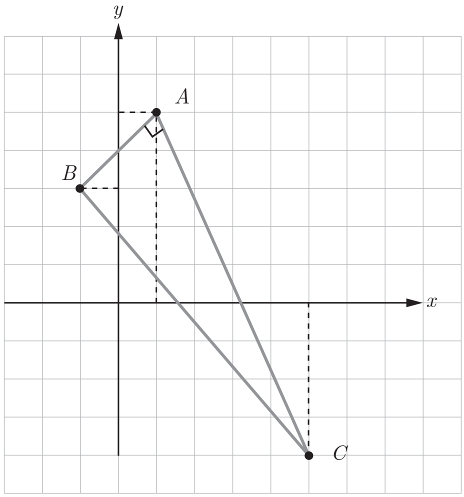
$$BC=\sqrt{۳۶+۴۹}=\sqrt{۸۵}$$

پ) از آنجا که $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

ت) شیب‌ها عکس قرینه هم هستند.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۲-۳}{-۱-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$m_{AC}=\frac{-۵-۳}{۵-۱}=-۲$$



کار در کلاس ص۳۱

فرض کنیم $P(x,y)$ نقطه دلخواهی در عمودمنصف AB باشد داریم :

$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{x^{۲}+(y+۳)^{۲}}=\sqrt{(x-۶)^{۲}+(y-۱۵)^{۲}}$$

$$x^{۲}+(y+۳)^{۲}=(x-۶)^{۲}+(y-۱۵)^{۲}$$

$$x^{۲}+y^{۲}+۶y+۹=x^{۲}+۳۶-۱۲x+y^{۲}-۳۰y+۲۲۵$$

$$۱۲x+۳۶y=۲۵۲$$

$$x+۳y=۲۱$$

از آنجا که مختصات نقطه P در معادله عمودمنصف صدق می‌کند پس نقطه P روی عمودمنصف قرار دارد.

$$-۱۲+۳(۱۱)=۲۱$$

فعالیت ص ۳۵

۱ $x_M=۲$

۲ طول نقطه M معدل طول‌های دو نقطه A و B است.

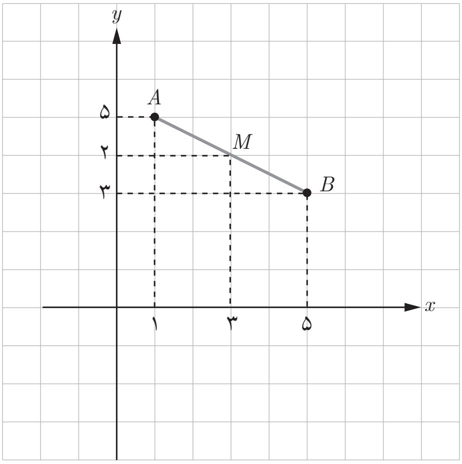
۳

$$AM=MB \Rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M \Rightarrow ۲x_M=x_A+x_B \Rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

۴ مشابه کاری که در قسمت قبل انجام شد می‌توان نوشت :

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

کار در کلاس ص ۳۲



الف)

ب)

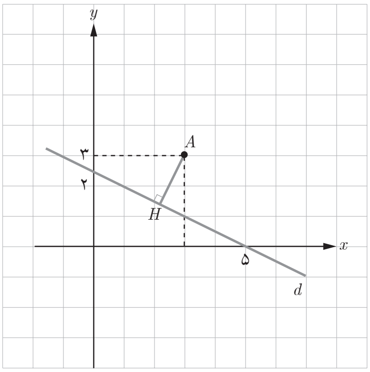
$$x_M = \frac{۱+۵}{۲} = ۳$$

$$y_M = \frac{۵+۳}{۲} = ۴$$

M (۳،۴)

فعالیت ص۳۳

۱



۲ $m_{AH} = \frac{-۱}{m_d}$ $\quad m_d = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow m_{AH} = ۲$

۳ معادله AH : $y - ۳ = ۲(x - ۴) \Rightarrow ۲x - y = ۵$

۴ $\begin{cases} ۲y + x = ۵ \\ ۲x - y = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲y + x = ۵ \\ ۴x - ۲y = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۵x = ۱۵ \Rightarrow x = ۳ \ , \ y = ۱ \Rightarrow H(۳,۱)$

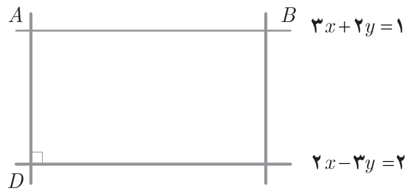
۵ $AH = \sqrt{(۴-۳)^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۵}$

کار در کلاس ص ۳۴

۱ فاصله A تا ضلع داده شده، طول ضلع مربع را به ما می‌دهد.

$$AH = a = \frac{|۶-۱۲-۹|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \Rightarrow$$ مساحت مربع $= a^۲ = ۹$ واحد مربع

۲ چون دو خط موازی نیستند پس دو ضلع مجاور مستطیل‌اند و چون $A(۲،۵)$ روی هیچ یک از خطوط داده شده نیست پس A رأس مستطیل است که مقابل دو ضلع قرار دارد. فاصله A تا دو ضلع، طول و عرض مستطیل را به ما می‌دهد.



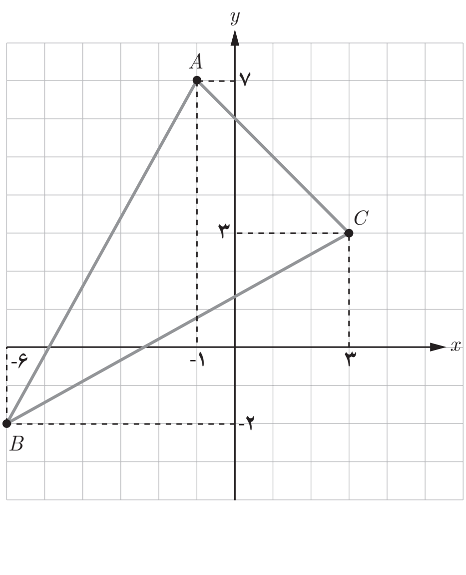
$$AB = \frac{|۴-۱۵-۲|}{\sqrt{۴+۹}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

$$AB = \frac{|۶+۶-۱|}{\sqrt{۹+۴}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$$

مساحت مستطیل $= AB \times AD = \sqrt{۱۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۱۳}} = ۱$ (واحد مربع)

تمرین ص ۳۵

۱ الف)



ب) ABC متساوی‌الساقین است $\Rightarrow \left.\begin{matrix} AB=\sqrt{۲۵+۸۱}=\sqrt{۱۲۶} \\ BC=\sqrt{۸۱+۲۵}=\sqrt{۱۲۶} \end{matrix}\right\}$

پ) $M(\frac{-۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ وسط BC

$$m_{BC}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=\frac{-۹}{۵}\Rightarrow \text{معادله عمودمنصف}\ \ y-\frac{۱}{۲}=\frac{-۹}{۵}(x+\frac{۳}{۲})$$

$$۱۰y-۵=-۱۸x-۲۷\Rightarrow ۱۸x+۱۰y=-۲۲$$

معادله ضلع BC: $y-۳=\frac{۵}{۹}(x-۳)\Rightarrow ۹y-۲۷=۵x-۱۵\Rightarrow ۵x-۹y+۱۲=۰$

$$AH=\frac{|-۵-۹(-۲)-۱۲|}{\sqrt{۲۵+۸۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰۶}}$$

۲ وسط قطر مرکز دایره است اگر M وسط BC باشد $x_m=۴$ و $y_m=-۱$ در نیمه $M(۴,-۱)$

شعاع دایره فاصله مرکز تا نقطه A است.

$$MA=R=\sqrt{۱۶+۴۹}=\sqrt{۶۵}$$

۳

الف) $x^۲-۸x-۲۰=۰\Rightarrow (x-۱۰)(x+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۲\Rightarrow x_A=-۲ \\ x=۱۰\Rightarrow x_B=۱۰ \end{cases}$

ب) $AB=|x_B-x_A|=|۱۰+۲|=۱۲cm$

پ) اندازه عرض نقطه مینیمم برابر ضخامت عدسی است.

طول نقطه ماکزیمم $=\frac{۸}{۲}=۴\Rightarrow y=۴^۲-۸(۴)-۲۰=-۳۶$

ضخامت عدسی ۳۶ میلی‌متر است.

۴ یک نقطه دلخواه روی یکی درنظر گرفته و فاصله‌اش را تا خط دیگر محاسبه می‌کنیم.

$$A(۰,\frac{-c}{b})$$

$$AH=\frac{|۰+(-c)+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۵ شعاع بر خط مماس در نقطه تماس عمود است.

$$OA=R=\frac{|-۴+۶-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۳}{۵}$$

۶ الف) $R=۱۰\Rightarrow OS=۱۰\Rightarrow \sqrt{x^{۲}+۶۴}=۱۰\Rightarrow x=۶$

ب) $m_{PS}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}\qquad S(۶,۸)\quad,\quad Q(۱۰,۰)\quad,\quad P(-۱۰,۰)$

$m_{QS}=\frac{۸}{-۴}=-۲$

پ) $m_{PS}\times m_{QS}=\frac{۱}{۲}\times -۲=-۱\Rightarrow PS\perp QS$

۷ $ax+۴y-۱=۰\Rightarrow AH=۲$

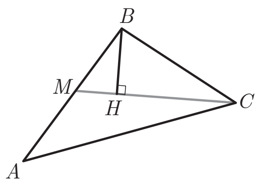
$$۲=\frac{|a+۸-۱|}{\sqrt{a^{۲}+۱۶}}\Rightarrow |a+۷|=۲\sqrt{a^{۲}+۱۶}\Rightarrow a^{۲}+۱۴a+۴۹=۴a^{۲}+۶۴$$

$$\Rightarrow ۳a\quad -۱۴a+۱۵=۰\Rightarrow a=\frac{۱۴\pm\sqrt{۱۶}}{}\begin{cases} \qquad\quad \text{ق ق} \\ - \qquad \text{ق ق} \end{cases}$$

۸ الف) $M(-۷,۵)$

$m_{MC}=\frac{۴}{-۱۰}=\frac{-۲}{۵}$

معادله MC: $y-۱=-\frac{۲}{۵}(x-۳)\Rightarrow ۵y-۵=-۲x+۶$



$۲x+۵y-۱۱=۰$

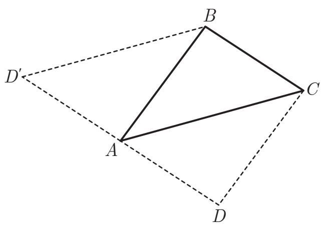
$BH=\frac{|-۶+۱۵-۱۱|}{\sqrt{۴+۲۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$

ب)
$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -۱۱+۳=-۳+x_D\Rightarrow x_D=-۵ \\ -۱۳+۳=۱+y_D\Rightarrow y_D=-۱۱ \end{cases}$$

مسئله دو جواب دارد $ABCD$ و $ACBD'$

در حالت دوم

$$\begin{cases} x_A+x_B=x_C+x_{D'} \\ y_A+y_B=y_C+y_{D'} \end{cases}$$

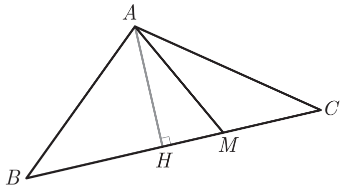


۹ فرض کنیم نقطه $M(a\text{، }۲a)$ در خط $y=۲x$ باشد.

$$OM+MA=۵\Rightarrow\sqrt{a^{۲}+۴a^{۲}}+\sqrt{(a-۲)^{۲}+(۲a-۴)^{۲}}$$

$$۵a^{۲}=a^{۲}-۴a+۴+۴a^{۲}-۱۶a+۱۶$$

$$۲۰a=۲۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow M(۱,۲)$$



$$HM^{۲}=AM^{۲}-AH^{۲}$$

$$m_{BC}=\frac{۱}{-۷}$$

BC **معادله:** $y+۱=-\frac{۱}{۷}(x-۱)$

$$۷y+۷=-x+۱\Rightarrow x+۷y+۶=۰$$

$$AH=\frac{|۴+۱۴+۶|}{\sqrt{۱+۴۹}}=\frac{۲۴}{\sqrt{۵۰}}$$

BC **وسط** $M(\frac{۹}{۲},-\frac{۳}{۲})\Rightarrow AM=\sqrt{(\frac{۹}{۲}-۴)^{۲}+(-\frac{۳}{۲}-۲)^{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۴۹}{۴}}=\sqrt{\frac{۵۰}{۴}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

$$HM^{۲}=(\frac{۵\sqrt{۲}}{۲})^{۲}-(\frac{۲۴}{\sqrt{۵۰}})^{۲}=\frac{۲۵}{۲}-\frac{۵۷۶}{۵۰}=\frac{۴۹}{۵۰}$$

تابع

فصل ۲

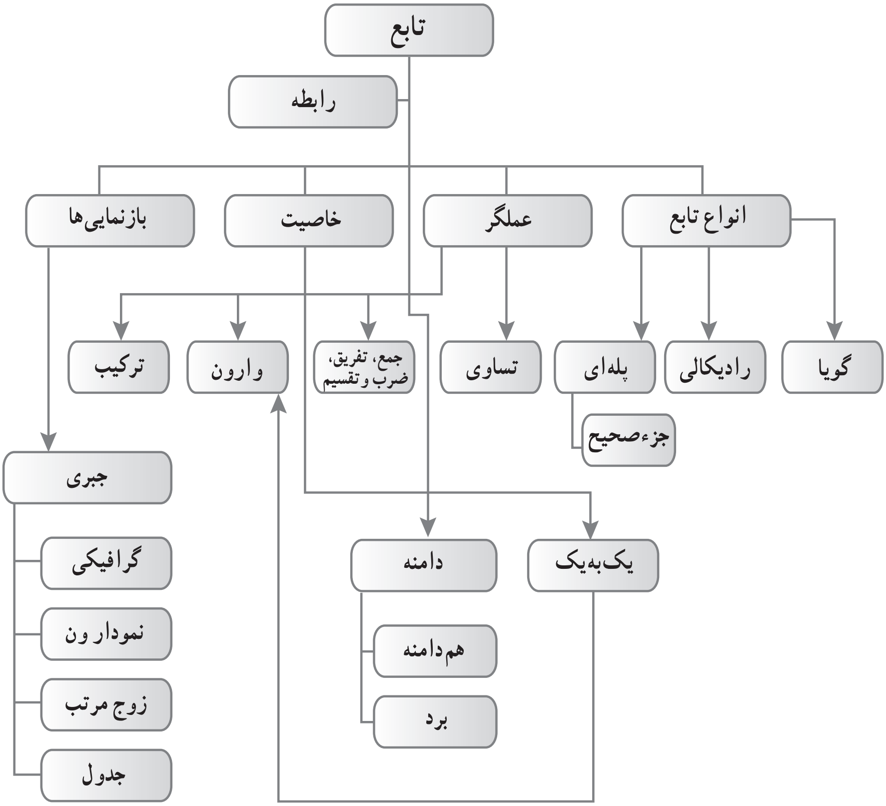
مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x)=7\sqrt{x}+50$ نمایش داد.

تابع

تصویر عنوانی راجع به قد متوسط کودکان است که به‌وسیله یک تابع رادیکالی قابل بیان است و در متن درس فعالیتی در این مورد آورده شده است. و تصاویر متعلق به فرزندان شهدای مدافع حرم است و به عنوان مثالی از کاربرد در دنیای واقعی است معمولاً توابعی که در دنیای واقعی دارای کاربرد هستند، ظاهر پیچیده ندارند. بنابراین توصیه می‌شود که از طرح مباحث دشوار که کاربردی هم در دنیای واقعی ندارند خودداری شود.

مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x) = ۷\sqrt{x} + ۵۰$ نمایش داد.

نقشه مفهومی فصل ۲



مقدمه‌ای در مورد آموزش تابع

- سیر تکامل مفهوم تابع
- تعریف در ریاضیات
- تعریف تابع
- ویژگی اساسی تابع
- بازنمایی‌های تابع و ارتباط بین آنها

سیر تکامل مفهوم تابع

(دوره اولیه) : مفهوم تابع و مثال‌هایی خاصه از آن را از هزاران سال قبل می‌توان دنبال کرد؛ به‌طور مثال شمردن، چهار عمل اصلی (که توابعی از دو متغیرند)، ریشه‌های دوم، مکعب‌ها و ریشه‌های سوم و موارد زیادی از این دست همگی دربردارنده مفهوم تابع هستند. اگرچه سیر تکامل تابع به ۴۰۰۰ سال قبل برمی‌گردد، اما ریاضی‌دان‌ها تنها طی ۵۰۰ سال گذشته تلاش‌های خود را برای ارائهٔ یک تعریف دقیق از تابع آغاز کرده‌اند.

تسلط ایده‌های هندسی سیر تکامل مفهوم تابع

(دوره دوم) : مطالعه دقیق و ریاضی‌گونه در مورد تابع در پایان قرن هفدهم انجام گرفت. لایپ نیتز (۱۷۱۶ـ۱۶۴۶) اولین کسی بود که اصطلاح تابع را در سال ۱۶۷۳ به کار برد. لایپ نیتز این عبارت را برای توصیف یک کمیت یا مقدار وابسته به یک منحنی، مثلاً طول یک نقطه روی منحنی یا شیب منحنی به کار برد.

اصطلاحات «ثابت»، «متغیر» و «پارامتر» نیز توسط لایپ نیتز معرفی شد.

حساب دیفرانسیل اولیه، حساب دیفرانسیلی از منحنی‌های هندسی بود تا حساب دیفرانسیلی از توابع. در حقیقت بیشتر حساب دیفرانسیل اولیه، با مسائلی در مورد منحنی‌ها و خواص منحنی‌ها از قبیل خط مماس و مساحت‌های تحت آنها سر و کار داشت (جونز ۲۰۰۶ به نقل از کلینر).

دوره ایده‌های جبری

(دوره سوم) : هم‌زمان با تغییر دیدگاه‌های ریاضی‌دانان از ایده‌های هندسی به ایده‌های جبری نماد تابع نیز دستخوش دگرگونی شد.

در سال ۱۷۱۸ برنویی اولین تعریف رسمی از تابع را ارائه کرد. برنویی یک تابع از یک متغیر را یک

کمیت ترکیب شده به هر شیوهٔ دلخواه از این متغیر و تعدادی ثابت می‌داند. اگرچه وی توضیح نمی‌دهد «به هر شیوهٔ دلخواه» به چه معنی است؟ تعاریفی که از تابع تا قرن نوزدهم بیان شد تعاریف دقیقی نیستند و تعاریف جامع و مانع به حساب نمی‌آیند ولی سیر تکامل تعریف را نشان می‌دهد و در تدریس بهتر است در نظر گرفته شود.

اویلر در سال ۱۷۴۸ تعریف زیر را ارائه کرد :

یک تابع از یک کمیت متغیر، عبارتی تحلیلی ترکیب شده به شکل دلخواه از آن کمیت متغیر و اعداد یا کمیت‌های ثابت است.

اویلر اولین کسی است که نماد $f(x)$ را به کار برد. تعریف اویلر تلاشی برای استفاده از جبر در جهت نمایش موضوعات هندسی بود. مشاهدات اویلر به یک دیدگاه وسیع‌تر از تابع منجر شد.

استفاده از جبر در جهت نمایش موضوعات هندسی

تعریف اویلر شبیه تعریف برنویی است. اضافه شدن اصطلاح «عبارت تحلیلی» بااهمیت است، زیرا اندیشه را از هندسه به جبر تغییر می‌دهد. گرچه اویلر به صراحت عبارت تحلیلی را معرفی نمی‌کند ولی از نظر وی عبارت تحلیلی قابل قبول شامل چهار عمل جبری، ریشه‌ها، نماها، لگاریتم‌ها، توابع مثلثاتی، مشتق‌ها و انتگرال‌هاست. به هر حال، روشن است که اویلر عبارت $f(x)=\begin{cases}x & ,x\geq 0\\ -x & ,x<0\end{cases}$ را به عنوان دو تابع و نه یک تابع در نظر می‌گرفته است.

ورود نظریهٔ مجموعه‌ها : (دورهٔ چهارم)

در سال ۱۸۲۹ دیریکله مثالی از یک تابع ارائه کرد که در آن یک مقدار به همه اعداد گویا و مقداری دیگر به همه اعداد گنگ نسبت داده می‌شود. این اولین مثال صریح از یک تابع بود که نه قابل نمایش به‌وسیلهٔ یک عبارت تحلیلی بود و نه یک منحنی قابل رسم بدون ابزار بود. این اولین مثال از یک تابع همه جا ناپیوسته بود.

مقارن با پایان قرن نوزدهم، ریاضی‌دان‌ها تلاشی را برای صورت‌بندی همهٔ ریاضیات با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها کردند.

دیریکله (۱۸۵۹ـ۱۸۰۵) در سال ۱۸۳۷ چهارچوب تعریف یک تابع را برحسب یک تناظر قراردادی بین متغیرهایی که با مجموعه‌های عددی نمایش داده شده‌اند، پی‌ریزی کرد. کلینر (۱۹۸۹) به نقل از لوزین تعریف دیریکله را چنین ذکر می‌کند : y تابعی از متغیر x تعریف شده روی بازه $a<x<b$ است، هرگاه به هر مقدار متغیر x از این بازه یک مقدار معین از متغیر y نظیر شود. دیریکله اولین کسی بود که به‌صورت جدی مفهوم تابع را به عنوان یک تناظر دلخواه در نظر گرفت.

در سال ۱۹۳۹ یک گروه از ریاضی‌دانان با نام مستعار بورباکی تابع را به شیوهٔ زیر تعریف کردند:
فرض کنید که E و F دو مجموعه باشند که ممکن است مجزا یا غیرمجزا باشند. یک رابطه بین یک متغیر x از E و یک متغیر y از F یک رابطهٔ تابع‌گونه در y نامیده می‌شود، هرگاه برای هر x در E، یک y یکتا در F وجود داشته باشد که در رابطه داده شده با x باشد. بورباکی بعداً همچنین تعریف تابع را به عنوان یک زیرمجموعهٔ خاص از حاصل‌ضرب دکارتی E و F داد.

تعریف بورباکی را می‌توان اولین تعریف تابع به عنوان یک مجموعه از زوج‌های مرتب دانست. این دوره را می‌توان حضور یک دیدگاه جدید یعنی مفهوم منطقی (مجرد، ترکیبی، اصل موضوعی) جدید از تابع در برابر مفهوم جبری (محسوس، تحلیلی و ساختنی) قبلی از تابع تلقی کرد. (کلینر ۱۹۸۹).

در حقیقت مفهوم تابع یکی از خصیصه‌های متمایزکننده ریاضیات «مدرن» در برابر ریاضیات «کلاسیک» است (کلینر ۱۹۸۹).

ارائهٔ تعریف در آغاز تدریس

گام آخر در علم ریاضی، صورت‌بندی مسائل از طریق اصل موضوعی ساختن آن است. این نقطهٔ پایانی، نباید به عنوان نقطهٔ آغازین تدریس ریاضی به حساب آید (فرودنتال، ۱۹۹۱).

دانش پداگوژیکی محتوا

اتصال دانش اولیه به دانش جدید ــ ارائهٔ تعریف

درحالی‌که می‌توان تعریفی را در قالب یک جمله بیان کرد، باز کردن یک تعریف یک کار شناختی دشوار است (سلدن ۱۹۹۲).

به نظر تال (۱۹۹۰) به عوض سر و کار داشتن در ابتدا با تعاریف رسمی، که شامل عناصر ناآشنا برای یادگیرنده است، بهتر است کوشش شود تا رویکردی پیدا شود که بر مبنای آن ایده‌هایی نباشند که دارای نقش دوگانه آشنا بودن برای دانش‌آموزان و نیز فراهم ساختن پایه‌ای برای رشد ریاضی بعدی باشند. تال چنین ایده‌ای را ریشه‌شناختی می‌نامد.

یک ریشه‌شناختی از یک بنیان ریاضی متفاوت است. درحالی که یک بنیان ریاضی یک نقطهٔ شروع مناسب برای توسعه منطقی یک موضوع است، یک ریشه‌شناختی، مناسب‌تر برای پیشرفت برنامه آموزشی است.

ویژگی اساسی تابع چیست؟

فرودنتال در تحلیل جامع خود (۱۹۸۳) دلخواه بودن و یکتایی (یک بنیانی بودن) را به عنوان ویژگی‌های اساسی تابع، به شکلی که در طول تاریخ تکامل پیدا کرده است در نظر می‌گیرد.

Arbitrariness

طبیعت دلخواه تابع به هم به ارتباط بین دو مجموعه‌ای که به‌وسیلهٔ آنها تابع تعریف می‌شود و هم به خود مجموعه‌ها برمی‌گردد.

Univalence

یکتایی به نوع ارتباط بین اعضای دو مجموعه برمی‌گردد.

بازنمایی‌های مختلف

درک یک مفهوم در یک بازنمایی آن، لزوماً به این معنی نیست که فرد آن را در هر بازنمایی دیگر نیز درک می‌کند. دانش‌آموزان باید مفاهیم را در بازنمایی‌های مختلف آن درک کنند و قادر باشند که آنها را به یکدیگر تبدیل کنند و بین آنها ارتباط برقرار کنند. بازنمایی‌های مختلف بصیرت‌های متفاوتی را به‌دست می‌دهند که امکان یک درک بهتر، عمیق‌تر، نیرومندتر و کامل‌تر از مفهوم را به‌دست می‌دهد.

وقتی فرد با بازنمایی‌های متفاوت یک مفهوم ریاضی سروکار دارد، ممکن است مفهوم را با به چنگ‌آوردن خواص مشترک آن و نادیده گرفتن مشخصه‌های نامربوطی که بر آن بازنمایی به‌خصوص در دسترس تحمیل شده‌اند، انتزاع کند.

اهداف کلی فصل

۱ آشنایی بیشتر با تابع و بازنمایی‌های آن

۲ معرفی برخی از انواع توابع

۳ درک مفهوم وارون تابع و محاسبه تابع وارون

۴ آشنایی با اعمال روی توابع و ترکیب توابع

درس ۱
آشنایی بیشتر با تابع

اهداف درس

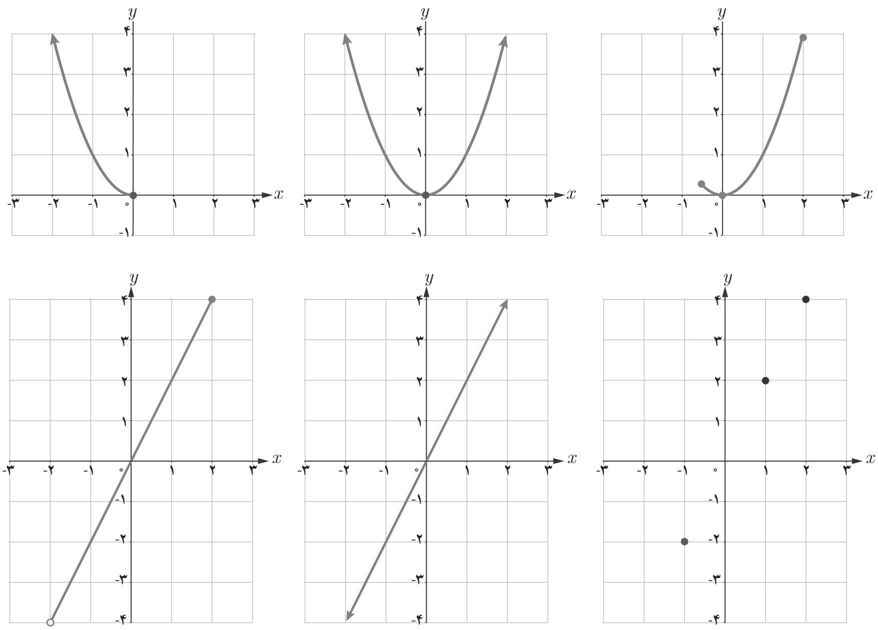
۱ درک ضابطه‌های تابع، دامنه، برد و هم‌دامنه
۲ توانایی در نمایش یک تابع به کمک دامنه، هم‌دامنه و ضابطهٔ تابع
۳ درک تابع به عنوان یک ماشین
۴ توانایی تشخیص تساوی دو تابع
۵ آشنایی با برخی از کاربردهای واقعی تابع

در ابتدا پیش‌نیازهای تابع در کتاب سال قبل را با پرسش و پاسخ مرور کرده و سپس کار در کلاس صفحه ۳۸ را دانش‌آموزان حل نمایند. تأکید بر ارتباط بین دامنه و برد و ضابطه به همراه نمودار در قسمت الف حائز اهمیت است.

کار در کلاس صفحه ۳۸

الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

تابع	$f(x)=2x$	$g(x)=2x$	$h(x)=2x$	$t(x)=x^2$	$s(x)=x^2$	$k(x)=x^2$
دامنه تابع	$\mathbb{R}$	$\{-1,1,2\}$	$(-2,2]$	$\mathbb{R}$	$(-\infty,0]$	$\left[-\frac{1}{2},2\right]$
برد تابع	$\mathbb{R}$	$\{-2,2,4\}$	$(-4,4]$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,4)$



در این کار در کلاس یادآوری مطالبی که در کلاس دهم خوانده‌اند مورد نظر بوده است و همچنین دقت بیشتری در نمایش تابع لحاظ شده است. مطالب این کار در کلاس در کلاس درس باید بحث شود. ممکن است دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤالات دچار اشتباه هم شوند، اشتباهات هم می‌تواند بخشی از مسیر آموزش باشد. صرف پیدا کردن جواب برای ما کفایت نمی‌کند. ما می‌خواهیم دانش‌آموزان درگیر حل مسئله شوند، درگیر بحث و گفت‌وگو شوند، مثال نقض بیاورند، استدلال بیاورند، رد کنند، توجیه کنند که همهٔ اینها

فرایندهایی در آموزش ریاضیات هستند که به اندازهٔ جواب و محصول دارای ارزش هستند و شاید ارزش بالاتری داشته باشند. در این مثال مثلاً باید بچه‌ها استدلال کنند که کدام نمودار دامنهٔ $\{-۱,۱,۲\}$ دارد و سپس برد تابع را به‌دست آورند. در پاسخ‌های اشتباه ممکن است نکاتی نهفته باشد که معلم بتواند اشکالات دانش‌آموزان را دریابد. در قسمت ب این کار در کلاس دو تابع داده شده است که ضابطه مشخص است و ممکن است پاسخ‌های دانش‌آموزان برای دامنه جواب‌های متفاوتی باشد و این سؤال از سؤالات باز پاسخ هستند سپس به طرز نمایش تابع پرداخته می‌شود؛ مثلاً در تابع f در قسمت الف داریم :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=۲x$$

و تابع h به‌صورت زیر است :

$$h: (-۲,۲]\to(-۴,۴]$$

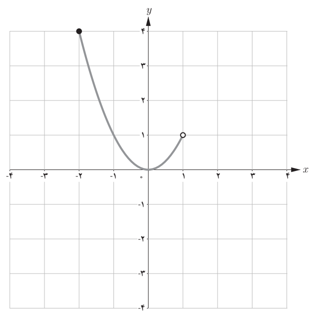
$$h(x)=۲x$$

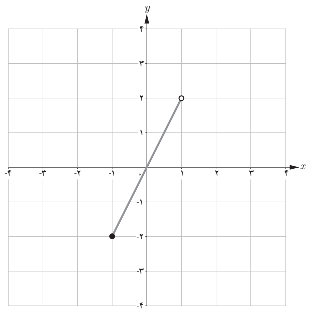
و این نکته باید بیان شود که هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعهٔ دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت. به دانش‌آموزان باید اجازه داد که مثال‌های دیگری را خودشان مطرح کنند. که در کار در کلاس صفحهٔ ۴۰ این موضوع در نظر گرفته شده است و با توجه به سطح کلاس دانش‌آموزان می‌توانند پاسخ‌های جدید را نیز بیاورند.

مطلب بعدی از تابع به عنوان یک ماشین تغییر کرده است که موضوع متغیر وابسته و متغیر مستقل را نیز تداعی می‌کند که دانش‌آموزان از دبستان با این مفهوم آشنا هستند. کار در کلاس صفحهٔ ۴۰ نیز برای تسلط بر این مفهوم است.

ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟

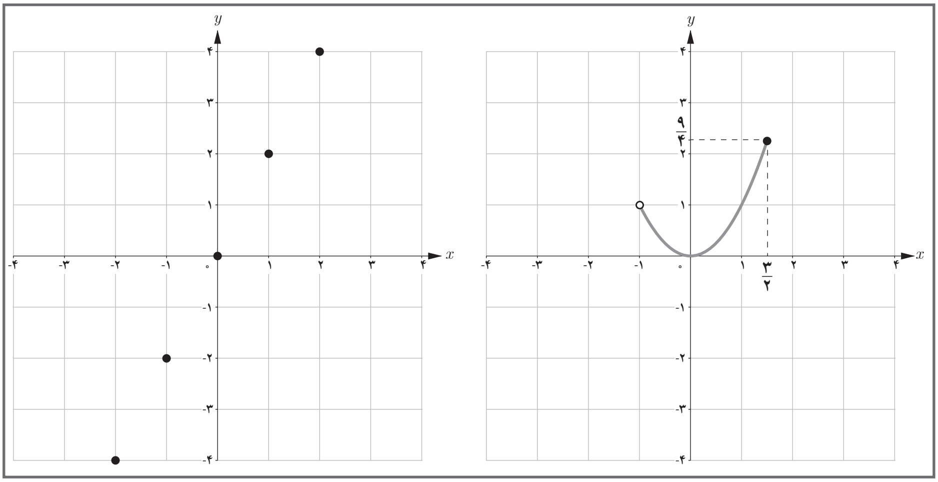
تابع	$f(x)=۲x$	$g(x)=x^۲$
دامنه	$[-۱,۱)$	$[-۲,۱)$
برد	$[-۲,۲)$	$[۰,۴]$





راه‌حل دیگری می‌تواند به‌صورت روبه‌رو باشد :

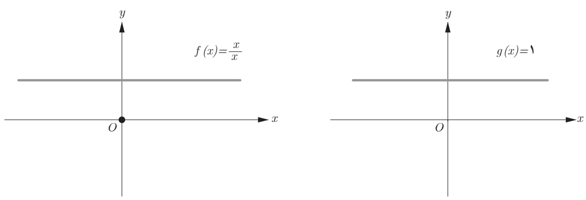
تابع	$f(x)=۲x$	$g(x)=x^۲$
دامنه	$\mathbb{Z}$	$(-۱,\frac{۳}{۲}]$
برد	$\{۲n \mid n\in\mathbb{Z}\}$	$[۰,\frac{۹}{۴}]$



در صفحه ۴۱ تساوی دو تابع ارائه شده و در کار در کلاس و تمرین نیز مثال‌هایی آورده شده است. توصیه می‌شود از مثال‌های خیلی پیچیده خودداری شود تا دانش‌آموزان تساوی دو تابع را با مثال‌های ساده و حتی‌الامکان از روی نمودار و ضابطه درک کنند.

مثال : تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=|x|$ با هم برابرند ولی تابع‌های $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=۱$ برابر نیستند. چرا؟

حل : تابع $f(x)=\frac{x}{x}$ ، دامنهٔ آن $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$ است درحالی‌که تابع $g(x)=۱$ دارای دامنهٔ $D_g=\mathbb{R}$ می‌باشد. بنابراین هرچند ضابطه‌ها به ظاهر برابر هستند ولی دامنه‌ها برابر نیستند، پس دو تابع f و g برابر نمی‌باشند، در نمودار نیز می‌بینید که دو تابع بر هم منطبق نیستند (تعریف نشده $=f(۰)$ و $g(۰)=۱$)



در کار در کلاس زیر مثال‌هایی ساده ولی کمی آشنا برای دانش‌آموزان مطرح شده است که با حل آنها درک تساوی دو تابع به‌دست می‌آید.

کار در کلاس صفحه ۴۱

۱ در جدول زیر کدام‌یک از توابع داده شدهٔ زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید :

۱	$f=\{(۱,۲),(۵,۷)\}$	$g=\{(۱,۷),(۵,۲)\}$	×
۲	$f=\{(a,b),(c,d)\}$	$g=\{(c,d),(a,b)\}$	✓
۳	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=۳x$	$g=\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ $g(x)=۳x$	×
۴	$f(x)=x\lvert x\rvert$	$g(x)=x^{۲}$	×
۵	$f(x)=۴x$	$g(x)=\frac{۸x}{۲}$	✓

حل :

۱ دامنه توابع f و g با هم برابرند $D_f=D_g=\{۱,۵\}$ ، ولی به ازای هر x در دامنه مشترکشان، ضابطه‌ها برابر نیستند؛ مثلاً $f(۱)=۲$ و $g(۱)=۷$ و $f(۱)\neq g(۱)$. پس $f\neq g$.

۲ دامنه دو تابع f و g با هم برابرند و به ازای هر x در دامنه مشترکشان، ضابطه‌ها نیز برابرند، بنابراین دو تابع f و g با هم برابرند ($f(a)=g(a)=b$ و $f(c)=g(c)=d$).

۳ دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}^+$ است، پس دو تابع با هم برابر نیستند، هرچند که ضابطهٔ دو تابع برابرند.

۴ دو تابع دارای دامنهٔ برابر $\mathbb{R}$ ولی ضابطهٔ آنها برابر نمی‌باشد؛ مثلاً $g(-۱)=۱$ و $f(-۱)=-۱$. پس $f\neq g$.

۵ دامنه دو تابع f و g برابر $\mathbb{R}$ است، از طرفی ضابطهٔ آنها نیز برابر است پس دو تابع f و g برابرند.

تمرین ۲ کار در کلاس مثالی از یک پدیده واقعی بیان شده که ضمن حل آن دانش‌آموزان به این نکته توجه می‌کنند که شرط تساوی دو تابع و تأثیر دامنه و برد به چه صورت است.

۲ وقتی در آسمان پدیدهٔ آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t\in[۴,۱۲]$:

الف) جدول را کامل کنید :

t (ثانیه)	۴	$۴\frac{۱}{۲}$	۵	۶	۸	۹	$۱۰\frac{۱}{۵}$	۱۱	۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	۲	$\frac{۸}{۳}$	۳	$\frac{۵۱}{۵}$	$\frac{۱۱}{۳}$	۴

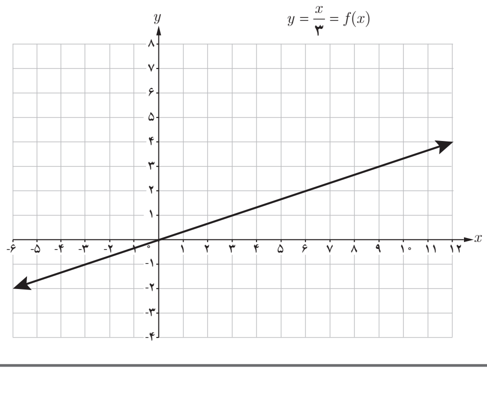
ب) چرا h تابعی از t است؟ آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند و فاصله ما از مکان وقوع آذرخش به زمان وابسته است.

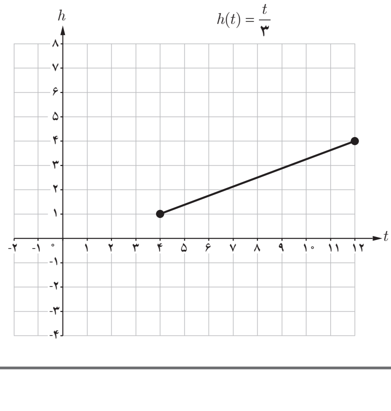
پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید. $D=[۴\,,۱۲]\;,\; R=[\frac{۴}{۳}\,,۴]$

ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید :

$$\begin{cases} h:[۴\,,۱۲]\to[\frac{۴}{۳}\,,۴] \\ h(t)=\frac{t}{۳} \end{cases}$$

ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید.





شباهت‌ها

- ضابطهٔ هر دو تابع برابر است. (یک سوم متغیر مستقل برابر متغیر وابسته است.)
- دو تابع در بازهٔ $[۴,۱۲]$ با هم برابر هستند.
- نمودار h بخشی از نمودار $y=\frac{x}{۳}$ است.

تفاوت‌ها

- دامنه دو تابع با هم برابر نیستند. $(D_h=[۴,۱۲]\ ,\ D_f=\mathbb{R})$
- برد دو تابع با هم برابر نیست. $(R_h=[\frac{۴}{۳},۴]\ ,\ R_f=\mathbb{R})$۱۳

درس ۲
انواع توابع

اهداف درس

۱ آشنایی با توابع گویا، رسم تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در دامنه‌های متفاوت

۲ آشنایی با توابع رادیکالی به شکل $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و رسم نمودار آنها

۳ تعیین دامنه و برد توابع $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و رسم نمودار توابع رادیکالی به کمک انتقال

۴ آشنایی با معادلات ساده‌ای که یک تابع را نمایش می‌دهند.

۵ آشنایی با توابع پله‌ای و جزء صحیح و رسم آنها

روش تدریس: انواع توابع

این درس با تعریف تابع گویا شروع می‌شود و سپس در کار در کلاس صفحه ۴۵ مثالی ساده از تابع گویا ارائه شده است که بیشتر در این قسمت توجه به دامنه و آشنایی مختصر با رسم چنین توابعی است. توصیه می‌شود از بیان مثال‌های پیچیده و رسم آنها در این قسمت خودداری شود و سطح سؤالات در همین حد باشد.

کار در کلاس صفحه ۴۵

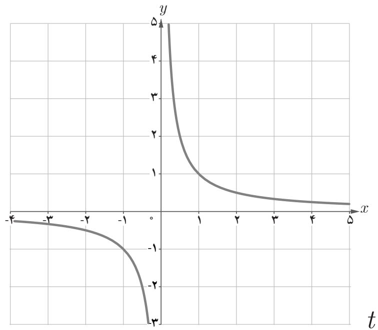
مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

(الف) $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

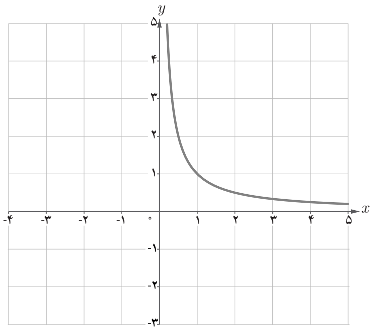
(ب) $\begin{cases} g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

(پ) $\begin{cases} h:\{1,2,3\}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

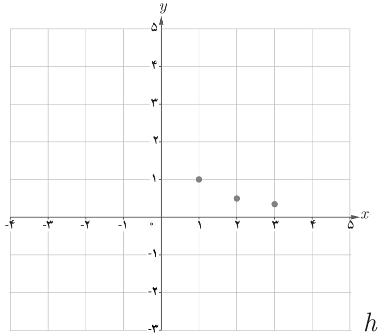
(ت) $\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$



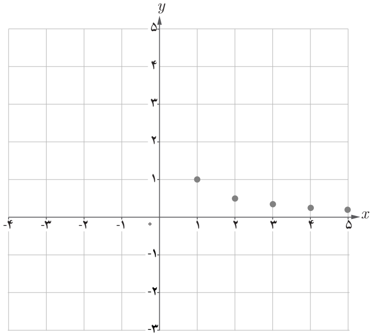
t



g

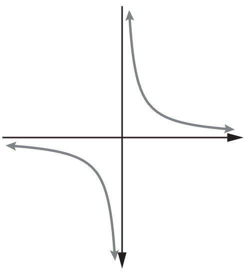


h



f

ضابطهٔ همهٔ توابع یکی است ولی دامنهٔ آنها با هم برابر نیستند، لذا نمودارهای متفاوتی دیده می‌شود. پایه رسم این توابع، تابع گویای $\begin{cases} f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$ است که نمودار آن به‌صورت روبه‌رو است :



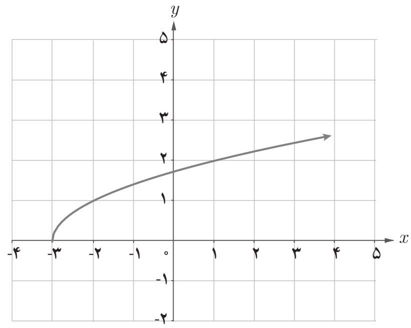
در ادامه با معرفی تابع رادیکالی که زیر رادیکال یک تابع خطی می‌باشد، سعی بر توجه دانش‌آموزان به رسم توابع و پیدا کردن دامنه و برد آنها شده است. رسم این توابع به کمک نقطه‌یابی و انتقال از دیگر اهداف کار در کلاس‌های صفحه ۴۶ و صفحه ۴۷ می‌باشد.

کار در کلاس صفحه ۴۶

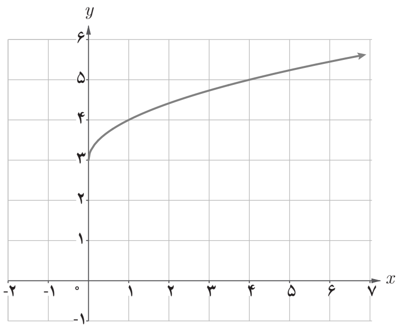
به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار چهار تابع :

الف) $f(x)=\sqrt{x}+۳$ ، ب) $h(x)=\sqrt{x}-۳$ ، پ) $g(x)=\sqrt{x-۳}$ ، ت) $r(x)=\sqrt{x+۳}$

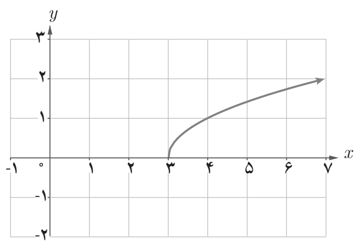
رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



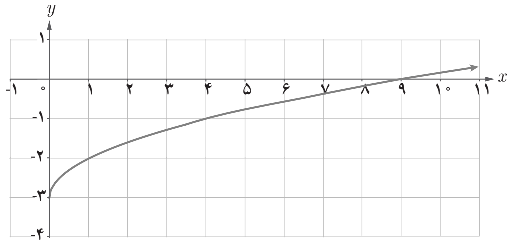
$r(x)=\sqrt{x+۳}$; $D_f=[-۳,+\infty)$, $R_f=[۰,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x}+۳$; $D_f=[-۳,+\infty)$, $R_f=[۳,+\infty)$



$g(x)=\sqrt{x-۳}$; $D_g=[۳,+\infty)$, $R_g=[۰,+\infty)$



$h(x)=\sqrt{x}-۳$; $D_h=[۰,+\infty)$, $R_h=[-۳,+\infty)$

دانش‌آموزان در این کار در کلاس، استدلال می‌کنند که اولاً نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به چه صورت است (در سال گذشته خوانده‌اند)، ثانیاً اگر به کمک انتقال آن را رسم کنند، کدام یک از نمودارهای رسم شده متناظر با صورت سؤال است یعنی با بازنمایی‌های مختلف آن آشنا می‌شوند و در نهایت پس از انتخاب

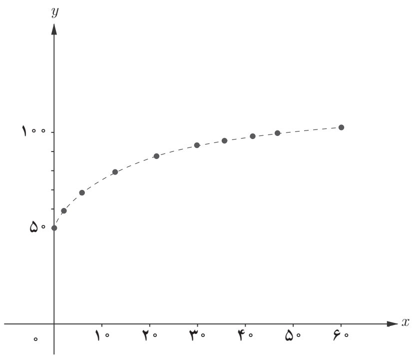
صحیح نمودار، دامنه و برد چگونه از روی نمودار به‌دست می‌آید. پاسخ‌های نادرست آنها در کلاس مورد بررسی قرار گیرد. حدود و ثغور این مطلب نیز در حد انتقال افقی و عمودی است.

دانش‌آموزان باید قادر باشند توابعی به‌صورت $f(x)=\sqrt{ax+b}$ را رسم کنند و دامنه را هم با توجه به نمودار آن و هم با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال تعیین کنند و برد آن را نیز از روی نمودار مشخص نمایند.

فعالیت صفحه ۴۷

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲/۱	۷۸	۸۵	۸۸/۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲



ب) برد این تابع چیست؟
پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟
ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید که کودکی با قد ۷۵ سانتی‌متر حدوداً چند ماهه است.

ب) برد تابع، مجموعه مقادیر $f(x)$ می‌باشد که با توجه به جدول داریم : $R=[۵۰,۱۰۴/۲]$

پ) هدف این سؤال، تفسیر دانش‌آموزان از نمودارها می‌باشد و اینکه چگونه از روی بازنمایی جدول و نمودار می‌توان مقادیر خواسته شده را پیدا کرد. کودک چهار ساله حدوداً ۴۹ ماه دارد (با توجه به جدول داده شده که برای ۴۹ ماه، ۹۹ سانتی‌متر است) پس حدوداً ۹۹ سانتی‌متر می‌باشد.

ت) ضابطهٔ تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ است. پس : $f(x)=۷۵ \Rightarrow ۷\sqrt{x}+۵۰=۷۵$

$$\Rightarrow ۷\sqrt{x}=۲۵ \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۲۵}{۷}$$

$$\Rightarrow x=(\frac{۲۵}{۷})^{۲} \cong ۱۲/۷۶cm$$

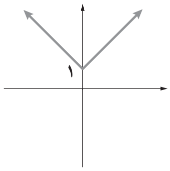
بنابراین حدوداً ۱۳ ماهه است. انتظار می‌رود که دانش‌آموز بتواند نمودار را تجزیه و تحلیل کند.

رابطه بین معادلات و توابع در ادامه صفحه ۴۸ و صفحه ۴۹ آورده شده است که توصیه به مثال‌های خیلی سخت نمی‌شود. اینکه هر معادله‌ای بر حسب x و y لزوماً تابع نیست، کافی است. معمولاً برای تأیید تابع بودن از نمودار کمک گرفته و برای رد آن از عددگذاری استفاده می‌کنیم. اثبات تابع بودن از طریق ضابطه در کلاس درس معمولی لزومی ندارد. کار در کلاس صفحه ۴۹ گویای این مطلب است و تشخیص با استفاده از نمودار کفایت می‌کند.

کار در کلاس صفحه ۴۹

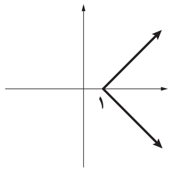
کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y=|x|+۱$ ✓



(تابع است زیرا هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند).

ب) $x=|y|+۱$ ×



تابع نیست.

روش اول : به کمک نمودار

روش دوم : به ازای یک x، دو مقدار برای y به‌دست می‌آید.

$$|y|=x-۱ \Rightarrow y=\pm(x-۱)$$

روش سوم : مثال نقض : فرض کنید $x=۲$، در این صورت $|y|=۱$ پس $y=\pm ۱$، یعنی به ازای یک مقدار x دو مقدار برای y به دست آمده است.

تابع پله‌ای با بیان یک فعالیت در دنیای واقعی (صفحه ۴۹) و سپس کار در کلاس (صفحه ۵۰) به‌طور کامل معرفی شده است. این نوع تابع در مسائل واقعی نمونه‌های بسیاری دارند که دو نمونه از آنها بیان شده است. نوشتن ضابطه و حل مسائل به کمک آنها و رسم چنین توابعی در فعالیت و کار در کلاس حائز اهمیت می‌باشد. استفاده از مثال‌های مثبت و منفی، یادگیری این مفهوم را آسان‌تر می‌کند.

فعالیت صفحه ۴۹

هزینه ارسال یک بستهٔ پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

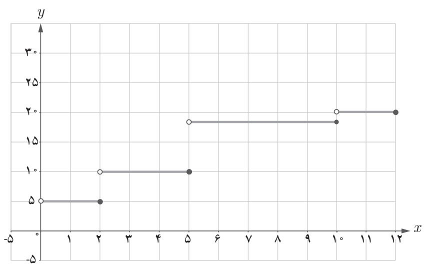
اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطهٔ تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید :

$$f(x)=\begin{cases} 5 & 0 < x \leq 2 \\ 10 & 2 < x \leq 5 \\ 17 & 5 < x \leq 10 \\ 20 & 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و ۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟

پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.



توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به‌گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.

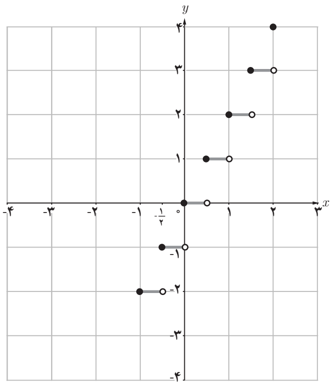
سپس تابع جزءصحیح به عنوان حالت خاص تابع پله‌ای معرفی گردیده است. در کار در کلاس صفحه ۵۱ مثالی ساده و مهم از چگونگی رسم این توابع داده شده است. توصیه می‌شود از بیان تمام ویژگی‌های تابع جزء صحیح و تمام حالت‌های رسم آن در کلاس خودداری شود. البته متناسب با سطح دانش‌آموزان می‌توان برخی ویژگی‌ها را بیان کرد ولی جزء اهداف کتاب نمی‌باشد. برای رسم تابع جزء صحیح ابتدا با توجه به بازه داده شده x را در بازه قرار داده و عبارت درون جزء صحیح را به کمک این بازه تولید می‌کنیم. سپس آنچه به‌وجود آمده را یک واحد یک واحد در بازه‌های مجزا قرار داده و جزء صحیح آن عبارت را محاسبه می‌کنیم و در نهایت بازه‌ها را دوباره به محدوده x تبدیل کرده و نمودار را در این بازه رسم می‌کنیم.

کار در کلاس صفحه ۵۱

۱ نمودار تابع $f(x) = [۲x]$ را در بازهٔ $[-۱, ۲]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$$-۱ \le x \le ۲ \Rightarrow -۲ \le ۲x \le ۴$$

$۲x$	$-۲ \le ۲x < -۱$	$-۱ \le ۲x < ۰$	$۰ \le ۲x < ۱$	$۱ \le ۲x < ۲$	$۲ \le ۲x < ۳$	$۳ \le ۲x < ۴$	$۲x = ۴$
$[۲x]$	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	$-۱ \le x < -\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲} \le x < ۰$	$۰ \le x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲} \le x < ۱$	$۱ \le x < \frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲} \le x < ۲$	$x = ۲$



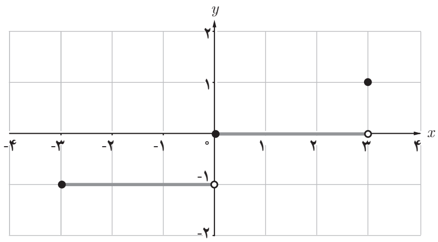
۲ نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازهٔ $[-۳, ۳]$ رسم کنید (کامل کنید).

$$-۱ \le \frac{۱}{۳}x < ۰ \Rightarrow \begin{cases} [\frac{۱}{۳}x] = -۱ \\ -۳ \le x < ۰ \end{cases}$$

$$۰ \le \frac{۱}{۳} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{۱}{۳}x\right] = ۰ \\ ۰ \le x < ۳ \end{cases}$$

$$۰ \le \frac{۱}{۳}x < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{۱}{۳}x\right] = ۰ \\ ۰ \le x < ۳ \end{cases}$$

$$\frac{۱}{۳}x = ۱ \Rightarrow \begin{cases} [\frac{۱}{۳}x] = ۱ \\ x = ۳ \end{cases}$$



درس ۳

وارون تابع

اهداف درس

۱ درک مفهوم وارون یک تابع (رابطه)

۲ محاسبه تابع وارون برخی از توابع

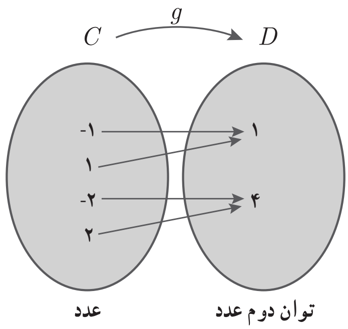
۳ آشنایی با توابع یک به یک

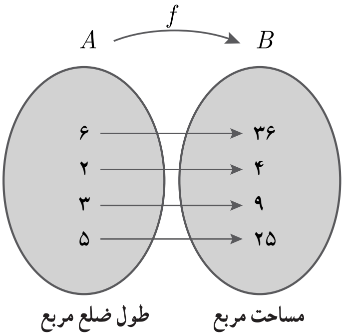
۴ رسم نمودار تابع وارون و ارتباط آن با تابع ابتدایی

فعالیت ص ۵۵ به معرفی وارون یک تابع و تابع وارون پرداخته است که با انجام آن، دانش‌آموزان به دامنه و برد تابع و وارون یک تابع و شرط وارون‌پذیری یک تابع به کمک شما معلمان گرامی پی می‌برند. انجام فعالیت به کمک خود دانش‌آموزان به درک بهتر این موضوع کمک بسزایی می‌کند. با توجه به سطح کلاس می‌توانید این فعالیت را غنی‌تر کنید. ولی نکتهٔ مهم این است که دانش‌آموز فعالیت را حل کند.

فعالیت ص ۵۵

دو تابع f و g را در نظر بگیرید :





الف) f و g را به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

f = {(۶,۳۶) , (۲,۴) , (۳,۹) , (۵,۲۵)}

g = {(−۱,۱) , (۱,۱) , (−۲,۴) , (۲,۴)}

D_f = {۲, ۳ , ۵ , ۶}　　　D_g = {−۲, −۱ , ۱ , ۲}

R_f = {۴, ۹ , ۲۵ , ۳۶}　　　R_g = {۱, ۴}

ب) اگر جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به‌دست می‌آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

h = {(۳۶,۶) , (۴,۲) , (۹,۳) , (۲۵,۵)}

k = {(۱,−۱) , (۱,۱) , (۴,−۲) , (۴,۲)}

کدام‌یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید.

h تابع است زیرا مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب همگی متمایز هستند. اما k تابع نیست زیرا $k\ni$(۱,−۱) و $k\ni$(۱,۱) یعنی به ازای یک x، دو مقدار برای y وجود دارد پس تابع نیست. همچنین می‌توان در مورد $k\ni$(۴,۲) و $k\ni$(۴,−۲) صحبت کرد که باز هم نشان می‌دهد k تابع نیست.

فعالیت و کار در کلاس ص ۵۶ و ص ۵۷ نیز جهت تثبیت یادگیری معنادار مفهوم تابع یک به یک ارائه شده است. تصمیم‌گیری دانش‌آموز در مورد اینکه چه تابعی وارون‌پذیر است و گفتمان در مورد اینکه چه ویژگی‌های مشترکی وجود دارد از اهداف این فعالیت است.

با انجام کار در کلاس زیر (ص ۵۶)، درک دانش‌آموزان از تابع یک به یک به کمک بازنمایی نمودار بررسی می‌شود و سپس یک کاربرد واقعی از مفهوم تابع یک به یک یاد می‌گیرد.

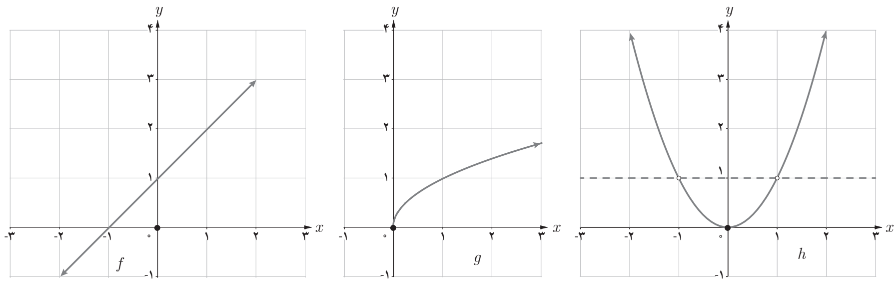
توصیه آموزشی : در این قسمت از بیان تمام نکات در مورد تابع یک به یک در کلاس درس پرهیز شود و فقط به بازنمایی از طریق نمودار بسنده کنید. البته بستگی به شرایط کلاس، بازنمایی‌های دیگر تابع یک به یک را هم می‌توانید ارائه کنید ولی از اهداف کتاب نمی‌باشد.

کار در کلاس ص ۵۶

۱ کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند؟

خط موازی محور xها ($y=1$)، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند پس یک به یک نمی‌باشد.

× ✓ ✓



$\checkmark\ k=\{(۱,۲),(۳,۴),(۸,۹)\}$ $\quad\quad$ $\times\ l=\{(۳,۷),(۲,۵),(۱,۵)\}$

$$\left.\begin{array}{l}(۲,۵)\in l\\(۱,۵)\in l\end{array}\right\} \Rightarrow$$ l یک به یک نیست

۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطهٔ بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

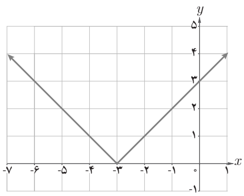
هر شخص فقط دارای یک کد ملی است و به ازای هر کد ملی، یک نفر مشخص می‌شود پس تابعی یک‌به‌یک بین افراد و کد ملی وجود دارد.

در ادامهٔ بحث تابع یک به یک به این نکته توجه شود که برخی توابع یک به یک نیستند ولی می‌توان دامنه آنها را طوری محدود کرد که یک به یک شوند. از دانش‌آموزان بخواهید که در ابتدا خودشان روی محدود کردن دامنه بحث کنند و پاسخ‌های آنها را در کلاس با هم مقایسه کنید.

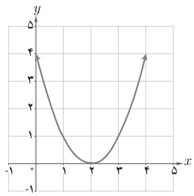
کار در کلاس ص ۵۷

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هریک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

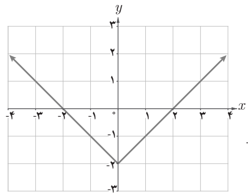
الف) $y=|x+۳|$



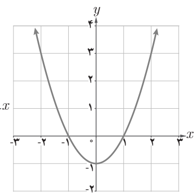
ب) $y=(x-۲)^۲$



پ) $y=|x|-۲$



ت) $y=x^۲-۱$



این مسئلهٔ جالب نیز باز پاسخ است و جواب‌های متفاوتی ممکن است داده شود.

الف) تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x)=|x+۳| \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} f_۱: A \to \mathbb{R} \\ f_۱(x)=|x+۳| \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[-۳,+\infty)$ یا $(-\infty,-۳]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع $f_۱$، یک‌به‌یک می‌شود.

ب) تابع $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x)=(x-۲)^۲ \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} g_۱: A \to \mathbb{R} \\ g_۱(x)=(x-۲)^۲ \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,۲]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع $g_۱$، یک‌به‌یک می‌شود.

پ) تابع $\begin{cases} K: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ K(x)=|x|-۲ \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} K_۱: A \to \mathbb{R} \\ K_۱(x)=|x|-۲ \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع $K_۱$، یک‌به‌یک می‌شود.

ت) تابع $\begin{cases} L: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ L(x)=x^۲-۱ \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} L_۱: A \to \mathbb{R} \\ L_۱(x)=x^۲-۱ \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع $L_۱$، یک‌به‌یک می‌شود.

تذکر : در مورد انتخاب بازه‌هایی که تابع در آن بازه‌ها یک به یک می‌شود، می‌توان از روی نمودار در حالت کلی آنها را پیدا کرد و یا در توابع درجه دوم به طول رأس سهمی و در توابع قدر مطلقی به ریشه سادهٔ درون قدر مطلق توجه کرد.

محاسبه وارون یک تابع در صورت یک به یک بودن به کمک نمودار ص ۵۷ از زیبایی‌های این فصل است. با انجام این فعالیت ص ۵۷ به کمک دانش‌آموزان روش محاسبه تابع وارون درک می‌شود.

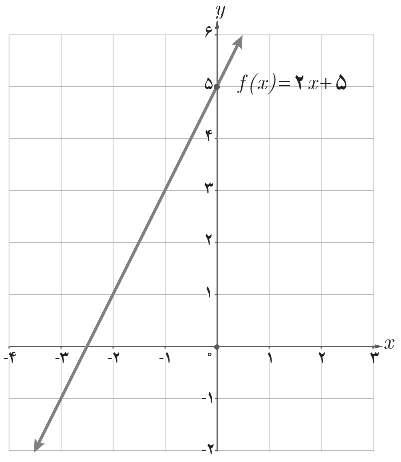
قسمت الف این فعالیت نیز با رسم خط موازی محور xها قابل انجام است.

فعالیت ص ۵۷

تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۲x+۵ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

هر خط موازی محور xها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین نمودار یک تابع یک به یک است.



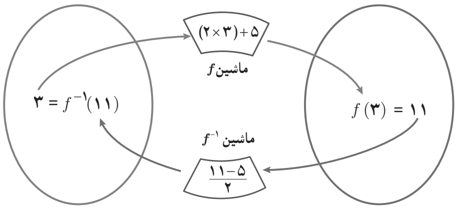
برای اینکه دانش‌آموزان درک کنند که کار تابع وارون چیست و با تابع چه ارتباطی دارد، انجام ادامه فعالیت توسط خود او حائز اهمیت است. درصورتی‌که دانش‌آموزان تشخیص ندادند، با راهنمایی سعی کنید خود آنها به پاسخ صحیح برسند.

ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید :

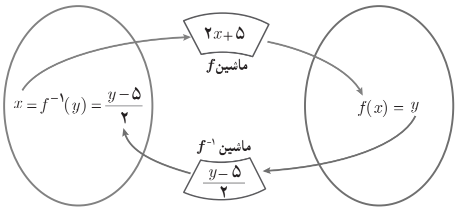
$(۱۱,۳) \in f^{-۱}$ و $(۳,۱۱) \in f$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$

اگر به ماشین f، عدد ۳ را بدهیم، آن را ۲ برابر کرده و سپس به‌علاوه ۵ می‌کند و عدد ۱۱ در برد می‌دهد. حال اگر بخواهیم بدانیم عدد ۱۱ توسط ماشین f به ازای چه عددی در دامنه آورده شده است، کافی است عدد ۱۱ را منهای ۵ و تقسیم بر ۲ کنیم که حاصل ۳ می‌شود یعنی $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$. این توضیحات باید با راهنمایی و هدایت معلم توسط دانش‌آموز گفته شود.



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.



این فعالیت طوری طراحی شده است که قسمت‌هایی را دانش‌آموز بنویسد و به‌صورت مکاشفه‌ای از حل آن لذت ببرد.

در این قسمت روش محاسبه تابع وارون و بازنمایی‌های مختلف جبری آن متذکر شده است. دانش‌آموزان در پایان محاسبه تابع وارون اکثراً این پرسش را می‌کنند که چرا به‌جای y، x قرار می‌دهید. در این فعالیت به آن پاسخ داده شده است و متذکر شوید که این یک نمایش است و محدوده xها می‌تواند متفاوت باشد.

ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} f(x) = ۲x+۵ & (x \in D_f) \\ f^{-۱}(y) = \dfrac{y-۵}{۲} & (y \in R_f) \end{cases}$$

$f^{-۱}$ را به‌صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(t) = \dfrac{t-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(y) = \dfrac{y-۵}{۲} \end{cases}$$

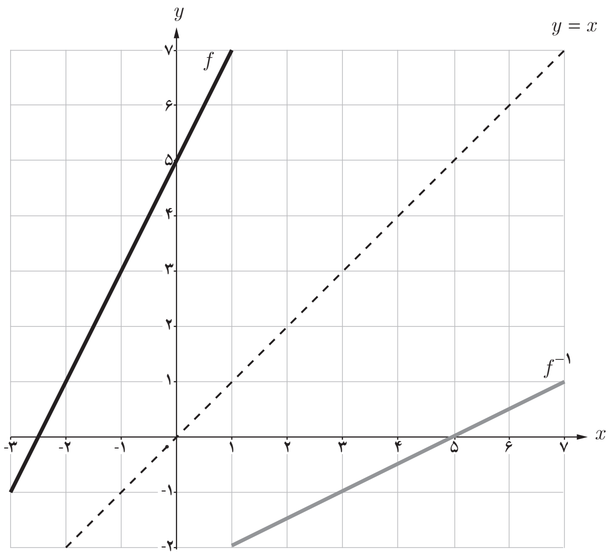
انتظار می‌رود که در نهایت $f^{-۱}(x)$ را بنویسند ولی درک کنند که این x همان xهای دامنه نیست.
آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} f^{-۱}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f^{-۱}(x)=\dfrac{x-۵}{۲} \end{cases}$$

سپس در کار در کلاس ص ۵۹ روش محاسبه تابع وارون به کمک جبری و نموداری در کلاس تثبیت می‌شود. توجه به رسم تابع و تابع وارون در یک دستگاه و ارتباط آن با نیم‌ساز ناحیه اول و سوم از اهمیت بالایی برخوردار است.

کار در کلاس ص ۵۹

۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x)=۲x+۵$، نمودار f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



۲ اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ، دامنه و برد f را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

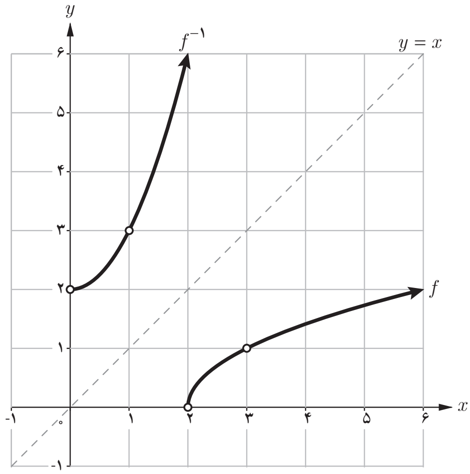
$D_f=[۲,+\infty)$ و $R_f=[۰,+\infty)$

در معادلهٔ $y=\sqrt{x-۲}$ ضابطه $f^{-۱}$ را بنویسید. نمودار $f^{-۱}$ را رسم و دامنه و برد $f^{-۱}$ را معلوم کنید.

$$y^۲=x-۲ \longrightarrow x=y^۲+۲ \longrightarrow f^{-۱}(x)=x^۲+۲$$

$$D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$$

$$R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$$

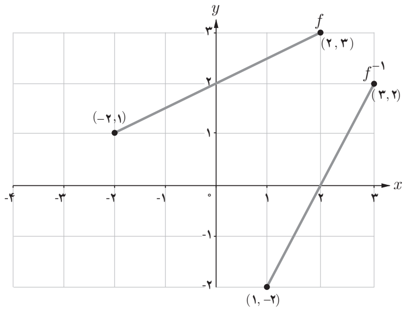


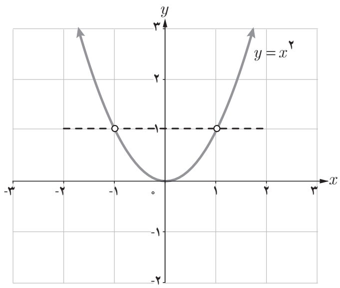
توجه شود که جای دامنه و برد تابع و تابع وارون با هم عوض می‌شود.

کار در کلاس ص ۵۹

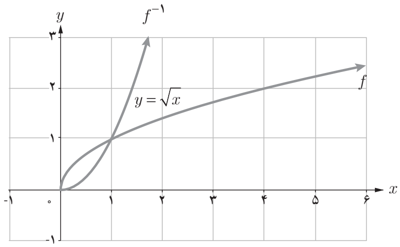
با انجام این کار در کلاس بازنمایی نموداری تابع وارون برای دانش‌آموزان تثبیت می‌گردد.

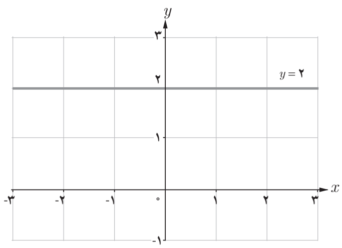
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.





تابع یک به یک نیست زیرا خط y=۱ نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس وارون‌پذیر نمی‌باشد.





تابع یک به یک نمی‌باشد زیرا خط y=۲ نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، پس وارون‌پذیر نیست.

برای رسم بهتر تابع وارون بدون داشتن ضابطه، کافی است خط y=x را رسم کنید و نمودار تابع f را نسبت به خط y=x قرینه می‌کنیم.

حل مثال ص ۶۱ برای درک معنادار تابع وارون دانش‌آموزان در کلاس ضروری می‌باشد.

سطح دشواری مثال‌ها توابع خطی، توابع درجه ۲ و توابع ساده رادیکالی است. اگر دشواری فقط در سطح تکنیک‌ها باشد و درک خاصی توسط دانش‌آموز انجام نشود ارزش خاصی ندارد.

درس ۴

اعمال روی توابع

اهداف درس

۱ درک اعمال روی توابع شامل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع

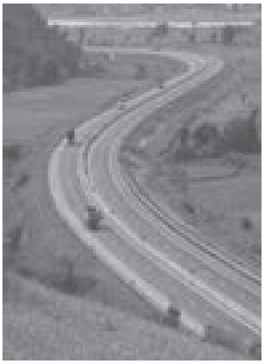
۲ درک مفهوم ترکیب دو تابع و محاسبهٔ آن

روش تدریس

مفهوم جمع دو تابع با انجام فعالیت ص ۶۳ طرح شده است. مثالی کاربردی در دنیای واقعی با اهداف درک مدل‌سازی و مفهوم جمع دو تابع بیان شده است. سعی شود خود دانش‌آموزان مسئله را حل کنند و معلم نقش راهنما را داشته باشد.

فعالیت ص ۶۳

فاصله زمانی لحظه‌ای که راننده با یک مانع روبه‌رو می‌شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس‌العمل» می‌نامند.



مجموع فاصلهٔ طی شده در طول زمان عکس‌العمل و فاصله طی شده پس از ترمزکردن را «فاصله دید توقف[1]» می‌نامند. این فاصله در طراحی جاده‌ها و بزرگراه‌ها کاربرد دارد.

فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی درحال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس‌العمل» طی می‌کند از تابع $f(x)=\frac{۷}{۱۰}x$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است.

همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می‌کند از تابع $g(x)=\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است و x سرعت اتومبیل برحسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر برساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می‌شود؟

$f(۱۰۰)+g(۱۰۰)=$

$(\frac{۷}{۱۰}\times ۱۰۰)+(\frac{۱}{۱۰۰}\times ۱۰۰^{۲})=۱۷۰m$

ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.

$$h(x)=f(x)+g(x)=\frac{۷}{۱۰}x+\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}$$

پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی درحال حرکت بوده است؟

$$h(x)=\frac{۷}{۱۰}x+\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}=۶۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۷۰x=۶۰۰۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۷۰x-۶۰۰۰=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۴۹۰۰+۲۴۰۰۰=۲۸۹۰۰$$

$$\Rightarrow x_{۱,۲}=\frac{-۷۰\pm ۱۷۰}{۲}\rightarrow x=\frac{-۷۰+۱۷۰}{۲}=۵۰\,\mathrm{km/h}$$

۱ــ برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس‌العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب کاهنده ۳/۴ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فعالیت ص ۶۵

الف) دامنهٔ تابع g بازهٔ $[-۴,۵]$ و ضابطهٔ آن به‌صورت $g(x) = x+۲$ می‌باشد.

ب) $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۴,۵]$ $\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+۵$

$D_{f-g}=D_f\cap D_g=[-۴,۵]$ $\quad (f-g)(x)=f(x)-g(x)=۱-x$

$D_{f.g}=D_f\cap D_g=[-۴,۵]$ $\quad (f.g)(x)=f(x).g(x)=۳x+۶$

$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=[-۴,۵]-\{-۲\}$ $\quad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۳}{x+۲}$

پ)

روش اول : برای رسم تابع $f+g$، ابتدا دامنه مشترک آنها را پیدا می‌کنیم، سپس نقاطی در دامنه مشترکشان انتخاب کرده و عرض آنها را با هم جمع می‌کنیم. به دلیل اینکه f و g خطی هستند پس مجموع آنها نیز تابع خطی القا و بنابراین با داشتن دو نقطه از مجموع می‌توان نمودارش را رسم کرد.

روش دوم : ضابطه $f+g$ را پیدا کرده و در دامنه مشترک آنها رسم می‌کنیم.

ت) می‌توان به روش اول که در بالا توضیح داده شد، بقیه توابع را نیز مشابه روش بالا رسم کرد و یا اینکه از طریق پیدا کردن ضابطهٔ آنها رسم کنیم.

کار در کلاس ص ۶۶

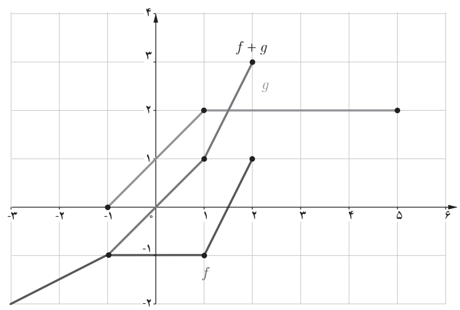
نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(۱)$ و $(f+g)(-۱)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ و f ، g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطهٔ آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.



الف)
$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=-۱+۲=۱$
$(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=-۱+۰=-۱$

ب) ابتدا دامنه مشترک f و g را پیدا می‌کنیم. $D_f \cap D_g=[-۱,۲]$

سپس در این دامنه مشترک با پیدا کردن چند نقطه و محاسبه مجموع، نمودار را رسم می‌کنیم.

$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۱+۲=۳$ $\quad$ $(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=۱-۱=۰$

پ)

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & -۱\le x\le ۱\\ ۲x-۳ & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+۱ & -۱\le x\le ۱\\ ۲ & ۱<x\le ۵\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}x & -۱\le x\le ۱\\ ۲x-۱ & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

ت) نمودار هردو یکی است. البته در حالت کلی رسم نمودار به کمک ضابطه دقیق‌تر از رسم به کمک چند نقطه است.

مفهوم ترکیب دو تابع با انجام فعالیت ص ۶۶ به خوبی بیان شده است. کار در کلاس و مثال ص ۶۸ نیز به تثبیت این مفهوم کمک می‌کند.

توصیه آموزشی : مفهوم ترکیب دو تابع و پیدا کردن دامنه برای دانش‌آموزان در ابتدا شاید کمی مشکل باشد. بهتر است با مثال‌های ساده این مفهوم برای دانش‌آموزان روشن شود و از بیان مثال‌های پیچیده در کلاس خودداری گردد.

فعالیت ص ۶۶

تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

الف) $f(۳۲)=۰$ به چه معنی است؟ ۵۰ درجهٔ فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟ ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است.

ب) تابع $g(x)=x+۲۷۳$ درجه سانتی‌گراد را به درجهٔ کلوین تبدیل می‌کند. $g(۰)=۲۷۳$ به چه معنی است؟

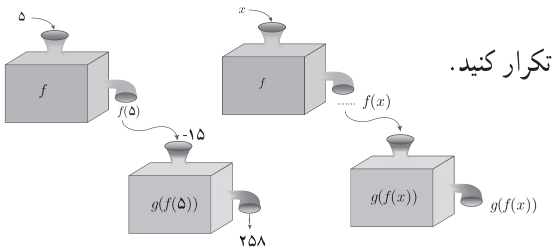
پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین درنظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلوین تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که

۵ درجهٔ فارنهایت معادل چند درجهٔ کلوین است؟

$$f(۵)=\frac{۵}{۹}(۵-۳۲)=\frac{۵}{۹}\times(-۲۷)=-۱۵$$
$$g(f(۵))=g(-۱۵)=۲۵۸$$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر ورودی تابع g، $f(x)$ باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



الف) $f(۳۲)=۰$ یعنی ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است. بنابراین ۵۰ درجه فارنهایت معادل ۱۰ درجه سانتی‌گراد است. $f(۵۰)=\frac{۵}{۹}(۵۰-۳۲)=\frac{۵}{۹}\times۱۸=۱۰ \Rightarrow$

ب) یعنی صفر درجه سانتی‌گراد معادل ۲۷۳ درجه کلوین است.

پ) بنابراین ۵ درجه فارنهایت معادل ۲۵۸ درجه کلوین است.

کار در کلاس ص ۶۸

اگر $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=۲x+۳$

الف) دامنه و ضابطه تابع‌های fog و gof را به‌دست آورید.

ب) آیا تابع‌های gof و fog مساوی‌اند؟

حل الف)

$$(fog)(x)=f(g(x))=(۲x+۳)^۲+۱=۴x^۲+۱۲x+۱۰$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R} \mid ۲x+۳\in \mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=۲(x^۲+۱)+۳=۲x^۲+۵$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in \mathbb{R} \mid x^۲+۱\in \mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

ب) دو تابع fog و gof با هم برابر نیستند زیرا ضابطهٔ آنها متفاوت است.

کار در کلاس ص ۶۸

اگر $f=\{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(-۵,-۲)\}$ و $g=\{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$، ابتدا D_{fog} و D_{gof} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{۲,۴,۶,۳\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{-۲\}$

$fog=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$

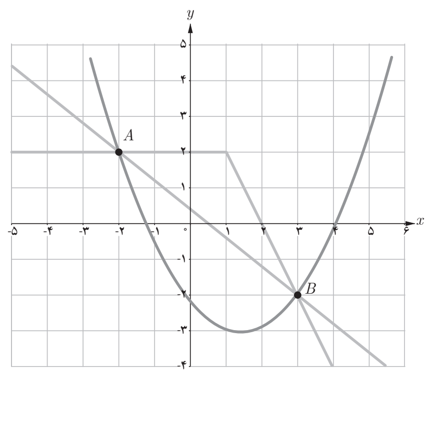
$gof=\{(-۲,-۲)\}$

برای یافتن ضابطه fog، ابتدا به سراغ دامنه آن می‌رویم، مثلاً $x=۲$. سپس در تابع g، ببینیم $(۲,۱۱)$ داریم پس عدد ۲ توسط تابع g به عدد ۱۱ می‌رود و سپس به سراغ تابع f می‌رویم و می‌بینیم که عدد ۱۱ توسط f به عدد ۷ می‌رود. بنابراین در تابع fog، عدد ۲ به ۷ می‌رود یعنی $(۲,۷)\in fog$. به همین ترتیب برای عضوهای دیگر بررسی می‌کنیم.

حل تمرین‌های فصل تابع

الف) درس ۱ : تمرین ص ۴۲

۱ در صفحه مختصات زیر تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟



حل : این یک مسئله بازپاسخ است و می‌تواند بی‌شمار جواب صحیح داشته باشد. پاسخ‌های دانش‌آموزان را می‌توان با یکدیگر در یک فرصت مناسب بررسی کرد. به‌عنوان نمونه، سه نوع تابع رسم شده است.

۲ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.
الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.
ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.
پ) هم‌دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.
ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[۰,۳]$ است.

حل : الف نادرست است.

مثال : ۱

$$D_f = D_g = \{۱,۳\} \qquad R_f = R_g = \{۲,۵\} \qquad \begin{cases} f = \{(۱,۲),(۳,۵)\} \\ g = \{(۱,۵),(۳,۲)\} \end{cases} \text{ ولی } f \neq g$$

مثال : ۲ تابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^۳$ دارای دامنه و برد برابر $\mathbb{R}$ هستند ولی با هم برابر نیستند.

ب) درست است. هم‌دامنه هر تابع می‌تواند مجموعهٔ برد یا هر مجموعهٔ دیگری شامل برد باشد.

پ) نادرست است. برد یک تابع نهایتاً می‌تواند برابر هم‌دامنه شود و نمی‌تواند هم‌دامنه زیرمجموعه برد باشد.

ت) درست است. به‌عنوان نمونه :

$$\begin{cases} f_۱ : [۰,۳] \to \mathbb{R} \\ f_۱(x) = \sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} f_۲ : [۰,۳] \to \mathbb{R} \\ f_۲(x) = ۲\sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} f_۳ : [۰,۳] \to \mathbb{R} \\ f_۳(x) = ۳\sqrt{x} \end{cases} \text{ و } \ldots$$

$$\begin{cases} g_۱ : [۰,۳] \to \mathbb{R} \\ g_۱(x) = x \end{cases} ، \begin{cases} g_۲ : [۰,۳] \to \mathbb{R} \\ g_۲(x) = ۲x \end{cases} ، \begin{cases} g_۳ : [۰,۳] \to \mathbb{R} \\ g_۳(x) = ۳x \end{cases} \text{ و } \ldots$$

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

حل : به‌عنوان نمونه :

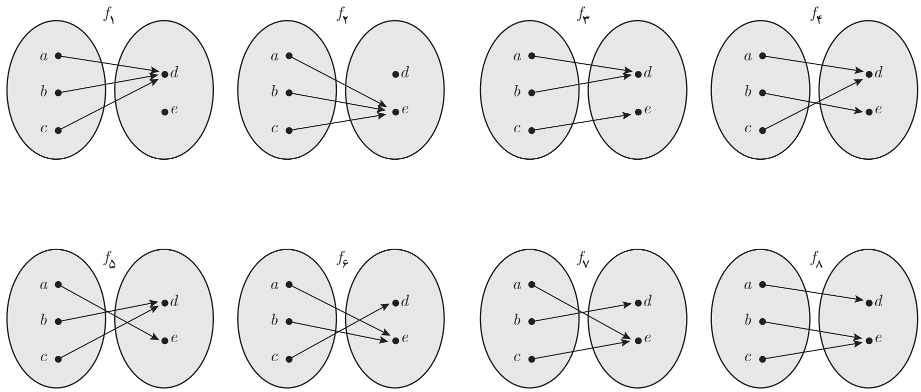
$$\begin{cases} f_۱ : \mathbb{R} \geq ۰ \to \mathbb{R} \\ f_۱(x) = x \end{cases} ، \begin{cases} f_۲ : \mathbb{R} \geq ۰ \to \mathbb{R} \\ f_۲(x) = x^۲ \end{cases} ، \begin{cases} f_۳ : \mathbb{R} \geq ۰ \to \mathbb{R} \\ f_۳(x) = x^۳ \end{cases} \text{ و } \ldots$$

$$\begin{cases} g_۱ : \mathbb{R} \geq ۰ \to \mathbb{R} \\ g_۱(x) = -|x| \end{cases} ، \begin{cases} g_۲ : \mathbb{R} \geq ۰ \to \mathbb{R} \\ g_۲(x) = \sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} g_۳ : \mathbb{R} \geq ۰ \to \mathbb{R} \\ g_۳(x) = ۲ \end{cases} \text{ و } \ldots$$

بی‌شمار از این نوع توابع وجود دارد. این سؤال نیز بازپاسخ است و پاسخ‌های متفاوتی از دانش‌آموزان خواهید دید.

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید (از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

حل : تعداد توابع از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با n^m. بنابراین در این تمرین $۸=۲^{۳}$ تابع وجود دارد.



۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\lvert x\rvert \end{cases}$	$\begin{cases} r:[0,+\infty)\to\mathbb{R} \\ r(a)=5a \end{cases}$
$\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=5x \end{cases}$	$\begin{cases} s:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ s(a)=5a \end{cases}$
$\begin{cases} h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=5x \end{cases}$

حل : تابع‌های $f=h$ و $g=s$ توابع مساوی هستند و تابع t با هیچ‌کدام برابر نیست.

۶ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲) = ۳$ و $f(-۵) = -۲$

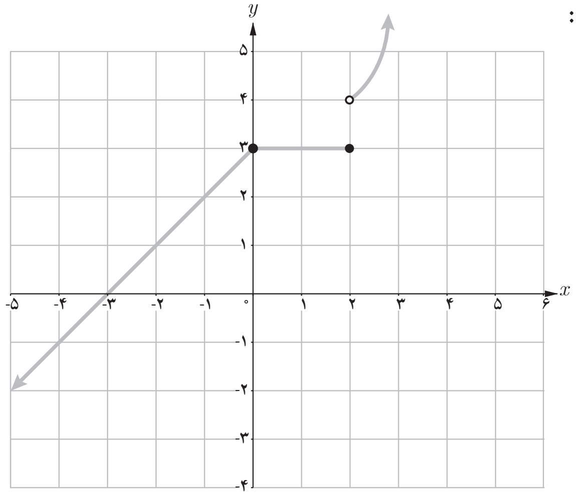
ب) f در بازه $[۰,۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳− قطع می‌کند.

حل:

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۲ \\ ۳ & ۰ \le x \le ۲ \\ x + ۳ & x < ۰ \end{cases}$$



۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد:

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

حل :

الف) $M(۳۵) = (۲/۸۹\times۳۵) + ۷۰/۶۴ = ۱۷۱/۷۹\ \text{cm}$

ب) $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴ = ۱۸۵$

$$\Rightarrow ۲/۸۹x = ۱۱۴/۳۶ \Rightarrow x = \frac{۱۱۴/۳۶}{۲/۸۹} \cong ۳۹/۵۷$$

مثال فوق یک مثال کاربردی از توابع خطی می‌باشد که برای محاسبهٔ طول قد به‌کار می‌رود.

ب) درس ۲ :

تمرین ص ۵۲

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x-۱}{۲-x}$ ب) $f(x) = \frac{-۳x}{x^۲+۱}$ پ) $f(x) = \frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

ت) $f(x) = \sqrt{۳x+۱}$ ث) $f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳$ ج) $f(x) = \sqrt{۸-x}$

الف) $۲-x=۰ \longrightarrow x=۲ \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{۲\}$

ب) $x^۲+۱\neq۰ \Rightarrow D=\mathbb{R}$

پ) $x^۲+x-۱۲=۰ \longrightarrow (x+۴)(x-۳)=۰ \longrightarrow \begin{cases} x=-۴ \\ x=۳ \end{cases}$

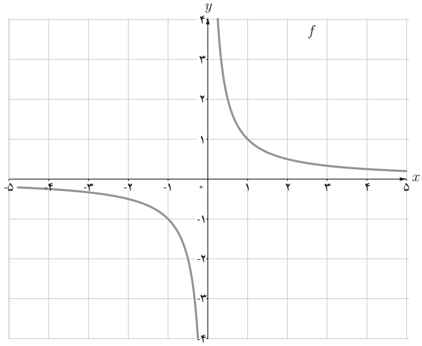
$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۴,۳\}$

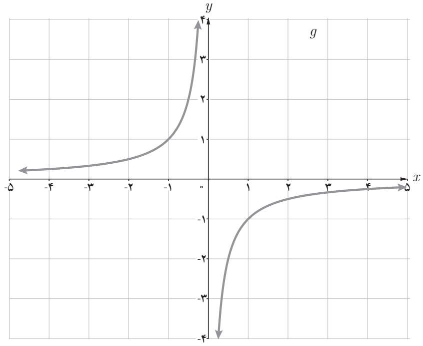
ت) $۳x+۱\geq۰ \Rightarrow x\geq-\frac{۱}{۳} \Rightarrow D=[-\frac{۱}{۳},+\infty)$

ث) $x\geq۰ \Rightarrow D=[۰,+\infty)$

ج) $۸-x\geq۰ \Rightarrow x\leq۸ \Rightarrow D=(-\infty,۸]$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.

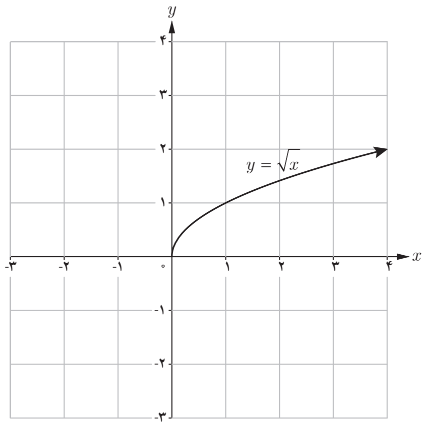


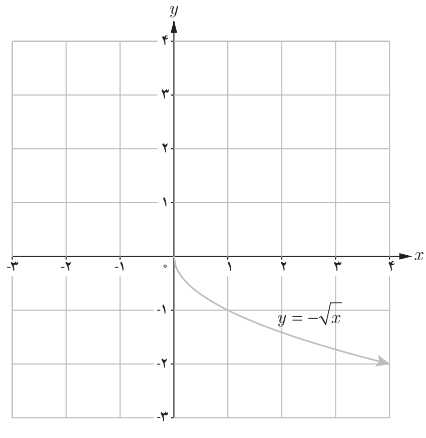


حل : دامنه توابع f و g با هم برابر هستند ولی عرض‌ها قرینه شده‌اند. پس برای رسم با معلوم بودن تابع f، کافی است نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

حل : کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم تا نمودار $y=-\sqrt{x}$ رسم شود.





۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$

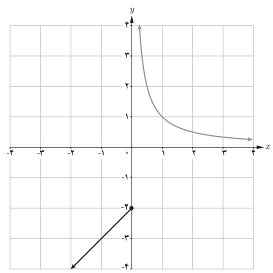
ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\leq x\leq ۰\end{cases}$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\geq ۰\end{cases}$

حل :

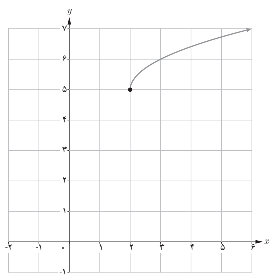
الف)



$D=\mathbb{R}$

$R=(-\infty,-۲]\cup(۰,+\infty)$

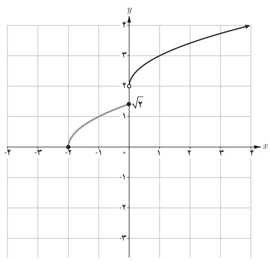
ب)



$D=[۲,+\infty)$

$R=[۵,+\infty)$

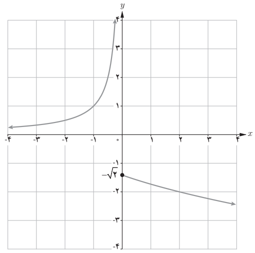
پ)



$D=[-۲,+\infty)$

$R=[۰,+\infty)-(\sqrt{۲},۲]$

ت)



$D=\mathbb{R}$

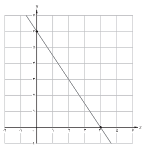
$R=(-\infty,-\sqrt{2}\,]\cup(0,+\infty)$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

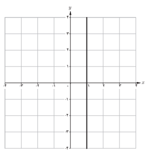
الف) $3x+2y=12$ ✓   ب) $x=1$ ×   پ) $y=-2$ ✓

ت) $f(x)=\begin{cases} x+3 & x\leq 0 \\ x-1 & x\geq 0 \end{cases}$ ×   ث) $y^2=x^2$ ×   ج) $y=|x|$ ✓

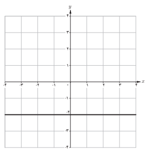
حل



الف) y تابعی از x می‌باشد و $y=\dfrac{12-3x}{2}$ زیرا هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

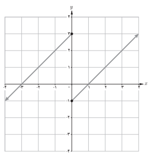


ب) خط $x=1$ به‌عنوان تابع y از x نمی‌باشد زیرا به ازای $x=1$، حداقل ۲ مقدار $y=\pm 1$ وجود دارد پس تابع نیست و یا خط $x=1$ موازی محور yها، نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

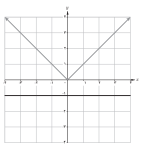


پ) خط $y=-2$، به‌عنوان یک تابع y برحسب x می‌باشد و به آن تابع ثابت گوییم.

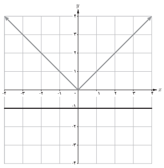
دو خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



ت) با توجه به نمودار خط $x=0$، نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس تابع y برحسب x نیست و یا طبق ضابطه به ازای $x=0$، دو مقدار ۳ به‌دست می‌آید پس تابع نیست.



ث) $y^2=x^2 \longrightarrow y=\pm x$ یعنی به ازای یک x دو مقدار برای y است پس تابع نیست و یا نمودار آن به‌صورت روبه‌رو می‌باشد و تابع نیست.



ج) y تابعی از x است زیرا نمودار آن به‌صورت روبه‌رو است و هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

حل :

الف) میلیون تومان $f(۵۰) = ۲۵۵$ ب) $[۰,۱۰۰)$

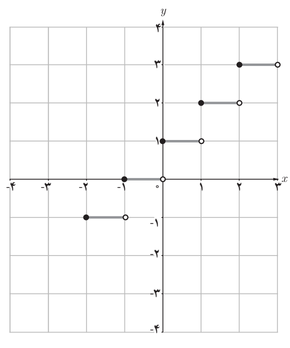
۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x]+۱ \quad , \quad -۲\leq x<۳$ ب) $f(x) = [\frac{۱}{۲}x] \quad , \quad -۴ \leq x< ۴$

حل :

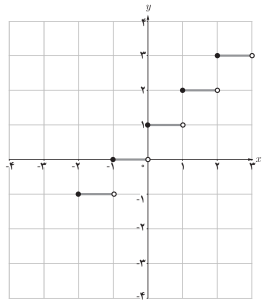
الف)

$$-۲\leq x<۳ \to \begin{cases} -۲\leq x<-۱ \to [x]=-۲ \to y=-۲+۱=-۱ \\ -۱\leq x<۰ \to [x]=-۱ \to y=-۱+۱=۰ \\ ۰\leq x<۱ \to [x]=۰ \to y=۰+۱=۱ \\ ۱\leq x<۲ \to [x]=۱ \to y=۱+۱=۲ \\ ۲\leq x<۳ \to [x]=۲ \to y=۲+۱=۳ \end{cases}$$

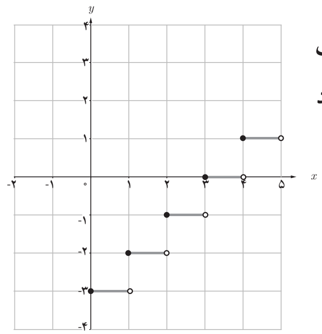


ب)

$$-۴\leq x<۴\rightarrow -۲\leq \frac{x}{۲}<۲\rightarrow \begin{cases} -۲\leq \frac{x}{۲}<-۱\rightarrow [\frac{x}{۲}]=-۲\rightarrow y=-۲ & (-۴\leq x<-۲) \\ -۱\leq \frac{x}{۲}<۰ \rightarrow [\frac{x}{۲}]=-۱\rightarrow y=-۱ & (-۲\leq x<۰) \\ ۰\leq \frac{x}{۲}<۱ \rightarrow [\frac{x}{۲}]=۰ \rightarrow y=۰ & (۰\leq x<۲) \\ ۱\leq \frac{x}{۲}<۲ \rightarrow [\frac{x}{۲}]=۱ \rightarrow y=۱ & (۲\leq x<۴) \end{cases}$$



۸ نمودارهای دو تابع $y=[x-۳]$ و $y=[x]-۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟



حل : دو تابع با هم برابرند.

نتیجه : $[x]-۳=[x-۳]$

۹ اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t)=\frac{۹۵۰۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$ به‌دست آید که در آن $t>۰$ زمان برحسب ماه است :

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

حل :

الف) ۵۰۵۶ نفر

$$n(۵)=\frac{۹۵۰۰\times ۵-۲۰۰۰}{۴+۵}=۵۰۵۵/۵$$

ب) $۵۵۰۰=\frac{۹۵۰۰t-۲۰۰۰}{t+۵}\rightarrow t=۶$

پ) درس ۳ :

تمرین ص ۶۲

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

حل : تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد که یک به یک نیستند.

ـ فرض کنید علی و فاطمه فرزند رضا هستند پس {(رضا و فاطمه),(رضا و علی)}=f یک تابعی است که یک به یک نمی‌باشد.

ـ دمای هوا و ساعات روز یک تابع است که ممکن است دمای ساعت ۷ صبح با دمای ساعت ۲۰ شب با هم برابر باشند. در این صورت این تابع یک به یک نمی‌باشد.

۲ آیا تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۵}{۲}$ است؟

حل : خیر. تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ یک تابع ثابت با دامنه $\mathbb{R}$ است و یک به یک نمی‌باشد بنابراین وارون‌پذیر هم نیست.

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید :

الف) $f(x)=(x+۵)^۲ \quad , \quad x\geq -۵$ ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad , \quad x\geq ۲$

پ) $f(x)=(x-۳)^۲$ ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

حل : الف) تابعی یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.

$y=(x+۵)^۲ \qquad x\geq -۵$

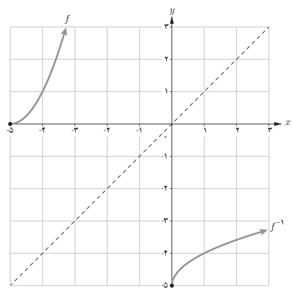
$$x+۵=\pm\sqrt{y}\xrightarrow{x\geq -۵}x+۵=\sqrt{y}$$

$$\to x=\sqrt{y}-۵$$

$$\to f^{-۱}(x)=\sqrt{x}-۵$$

$$D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$$

$$R_{f^{-۱}}=[-۵,+\infty)$$



ب) تابعی یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.

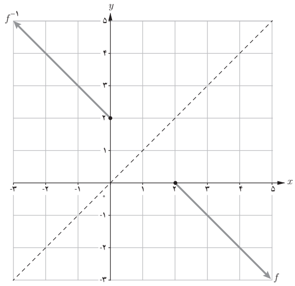
$y=-|x-۱|+۱ \qquad x\geq ۲$

$y=-(x-۱)+۱=-x+۲$

$x=-y+۲ \longrightarrow f^{-۱}(x)=-x+۲$

$D_{f^{-۱}}=(-\infty,۰]$

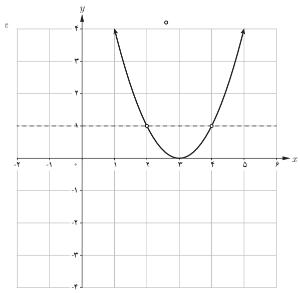
$R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$



پ) این تابع یک به یک نیست زیرا خط $y=۱$ نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس وارون‌پذیر هم نمی‌باشد.

$y=(x-۳)^۲$

$(x-۳)^۲=۱ \longrightarrow x-۳=\pm ۱ \longrightarrow \begin{cases} x=۴ \\ \text{یا} \\ x=۲ \end{cases}$



ت) تابع f یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.

$y=\sqrt{x+۲}-۳ \rightarrow \sqrt{x+۲}=y+۳$

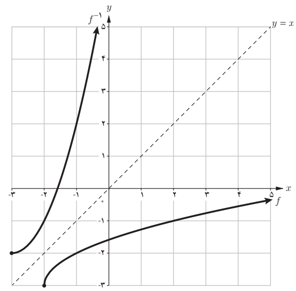
$\longrightarrow x+۲=(y+۳)^۲$

$\longrightarrow x=(y+۳)^۲-۲$

$\longrightarrow f^{-۱}(x)=(x+۳)^۲-۲$

$D_{f^{-۱}}=[-۳,+\infty)$

$R_{f^{-۱}}=[-۲,+\infty)$



۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-۵t^۲$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید.

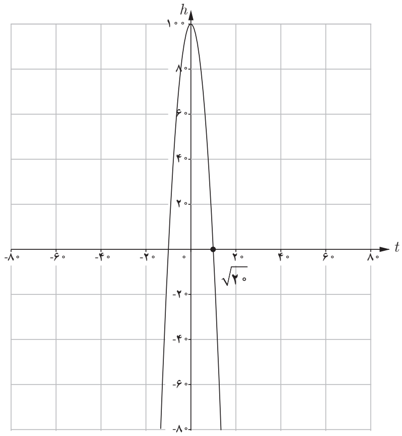
ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

حل : الف) $D=[0,\sqrt{20}\,]$ و $R=[0,100]$

ب) زیرا سنگ در هر زمان یک ارتفاع منحصربه‌فرد دارد پس تابع ارتفاع برحسب زمان یک‌به‌یک است.

پ)



$$y=100-5t^2$$

$$5t^2=100-y$$

$$t^2=\frac{100-y}{5}$$

$$t=\pm\sqrt{\frac{100-y}{5}}$$

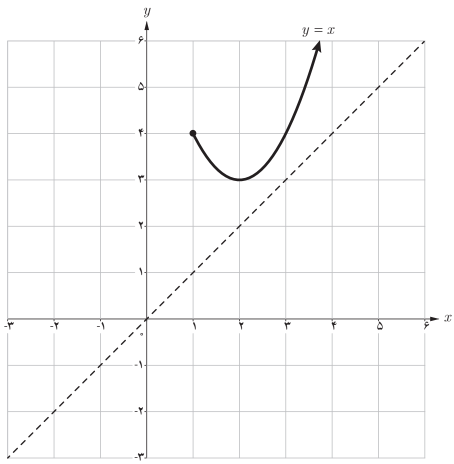
از طرفی $t>0$ پس $t=\sqrt{\frac{100-y}{5}}$ یعنی $\sqrt{\frac{100}{\quad}}\quad(t)\quad h$.

$$D_{h^{-1}}=[0,100]$$

$$R_{h^{-1}}=[0,\sqrt{20}\,]$$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x<f(x)$.

حل : این سؤال بازپاسخ می‌باشد و بی‌شمار تابع می‌توان مثال زد. برای پاسخ‌گویی بهتر، می‌توان خط $y=x$ را رسم کرد و سپس تابع را طوری بالای خط $y=x$ رسم کنید که یک به یک نباشد. به‌عنوان یک نمونه به صورت روبه‌رو است.



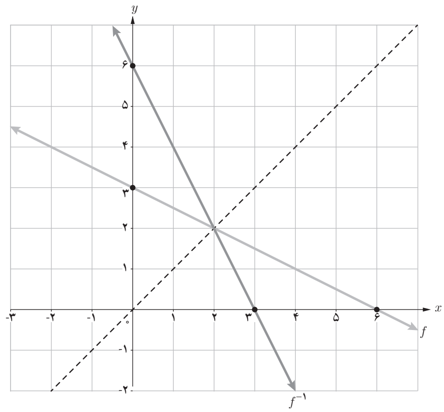
۶ وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

حل : تابع خطی $y=-\frac{۱}{۲}x+۳$ یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.

$$y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \rightarrow y-۳=\frac{۱}{۲}x \rightarrow x=-۲y+۶$$

$$\longrightarrow f^{-۱}(x)=-۲x+۶$$

$$D_{f^{-۱}}=\mathbb{R} \quad , \quad R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$



تمرین ص ۶۹

۱ اگر $f(x)=۴x$ و $g(x)=۲-x$، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید.

حل : $D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۴x}{۲-x} \qquad D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۴x-(۲-x)=۵x-۲ \qquad D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=۴(۲-x)=۸-۴x$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R} \mid ۲-x\in \mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

۲ برای دو تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\dfrac{۴}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید.

حل :

$$(fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{۱}{\dfrac{۴}{x}-۳}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R}-\{۰\} \mid \dfrac{۴}{x}\in \mathbb{R}-\{۳\}\}=\mathbb{R}-\{۰,\dfrac{۴}{۳}\}$$

$$\dfrac{۴}{x}\neq ۳$$

$$x\neq \dfrac{۴}{۳}$$

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(۴)=۷$ و $f(۷)=۵$، آن‌گاه $(fog)(۴)=۳۵$

ب) اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$، آن‌گاه $(\dfrac{f}{g})(۲)=۱$

پ) اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم : $fog=gof$

ث) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم : $fg=gf$

حل : الف) نادرست است زیرا : $(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۷)=۵\neq ۳۵$

ب) درست است زیرا : $(\dfrac{f}{g})(۲)=\dfrac{f(۲)}{g(۲)}=\dfrac{۲+۴}{۳(۲)}=\dfrac{۶}{۶}=۱$

پ) درست است زیرا : $(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۹)=۳=g(۲)$

ت) نادرست است زیرا اگر $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، آن‌گاه :

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^۲+۱=x+۱$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^۲+۱}$$
$$\Rightarrow fog\neq gof$$

ث) نادرست است زیرا :

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x^۲-۴})^۲-۴=x^۲-۸\neq -x^۲$$

ج) درست است زیرا : $(fg)(x)=f(x)g(x)=g(x)f(x)=(gf)(x)\longrightarrow fg=gf$

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ g(n) = ۲n \end{cases}$ و $f: A \to \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود :

$f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ که در آن : $A = \{۱,۲,۳,۴\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

حل : برای تعریف تابع $f+g$، ابتدا بایستی دامنهٔ g را محدود کنیم زیرا دامنه f برابر $\{۱,۲,۳,۴\}$ است پس :

$$g = \{(۱,۲) , (۲,۴) , (۳,۶) , (۴,۸)\}$$

$$\Rightarrow f+g = \{(۱,۴) , (۲,۷) , (۳,۱۱) , (۴,۱۵)\}$$

در مورد تابع gof داریم :

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{۱,۲,۳,۴\}$$

$$gof = \{(۱,۴) , (۲,۶) , (۳,۱۰) , (۴,۱۴)\}$$

۵ اگر $f = \{(-۴,۱۳) , (-۱,۷) , (۰,۵) , (\frac{۵}{۲},۰) , (۳,-۵)\}$ و

$g = \{(-۴,-۷) , (-۲,-۵) , (۰,-۳) , (۳,۰) , (۵,۲) , (۹,۶)\}$

توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

حل : برای محاسبه $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ ابتدا بایستی دامنه اشتراک آنها را بیابیم.

$$D_f \cap D_g = \{-۴,۰,۳\}$$

$$f+g = \{(-۴,۶) , (۰,۲) , (۳,-۵)\}$$

$$f-g = \{(-۴,۲۰) , (۰,۸) , (۳,-۵)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(-۴,\frac{-۱۳}{۷}),(۰,\frac{-۵}{۳})\}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x) = \sqrt{۴-x^۲}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

حل :

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۲,۲] \mid \sqrt{۴-x^۲}\in\mathbb{R}\}=[-۲,۲]$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{۴-x^۲+۵}=\sqrt{۹-x^۲}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{x^۲+۵}\in[-۲,۲]\}=\varnothing$$

بنابراین gof تعریف نمی‌شود.

$$۰\le\sqrt{x^۲+۵}\le ۲$$

$$x^۲+۵\le ۴$$

$$x^۲\le -۱$$

۷ اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=x+۳$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳ \quad , \quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

حل : $x+۳$ ساده شده است درحالی‌که اجازه ساده کردن را نداریم. در حالی می‌توان $x+۳$ را در صورت و مخرج یک کسر ساده کرد که $x\neq -۳$. بنابراین راه حل درست به‌صورت زیر است :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳ \qquad x\neq -۳$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

۸ اگر $f(x)=۲x+۵$ ، $f^{-۱}(x)$ ، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید.

حل :

$$y=۲x+۵\rightarrow ۲x=y-۵\rightarrow x=\frac{y-۵}{۲}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

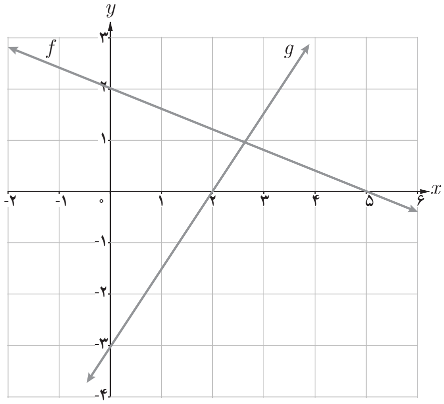
$$(fof^{-۱})(x)=f(f^{-۱}(x))=۲(\frac{x-۵}{۲})+۵=x \quad ; \quad x\in D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$

$$(f^{-۱}of)(x)=f^{-۱}(f(x))=\frac{۲x+۵-۵}{۲}=x \quad ; \quad x\in D_f=\mathbb{R}$$

بنابراین $fof^{-۱}=f^{-۱}of$.

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.

حل :



$$f(x)=۲-\frac{۲}{۵}x \quad ; \quad D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=-۳+\frac{۳}{۲}x \quad ; \quad D_g=\mathbb{R}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-۱+\frac{۱۱}{۱۰}x$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۵-\frac{۱۹}{۱۰}x$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(۲-\frac{۲}{۵}x)(-۳+\frac{۳}{۲}x)$$

$$D_{f\pm g}=D_f\bigcap D_g=\mathbb{R}$$

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$

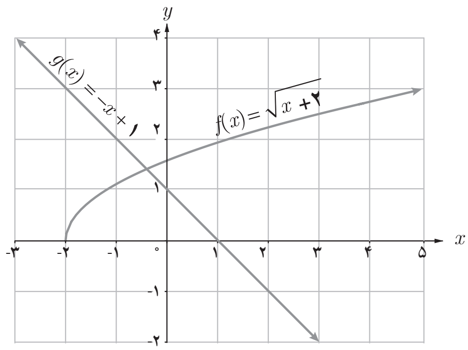
ب) $(f+g)(-۳)$

پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$

ث) $(\frac{f}{g})(۰)$

ج) $(gof)(-۱)$



حل : الف) $(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۲+(-۱)=۱$

ب) $(f+g)(-۳)=f(-۳)+g(-۳)=$ تعریف نشده

پ) $(f.g)(\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲}).g(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۵}{۲}}.\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

ت) $(fog)(-۴)=f(g(-۴))=$ تعریف نشده

ث) $(\frac{f}{g})(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۲}$

ج) $(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=۰$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ ($a \neq ۰$) باز هم یک تابع خطی است.

حل : تابع خطی $y = ax + b$ که $a \neq ۰$ در نظر بگیرید.

$$ax = y - b \rightarrow x = \frac{۱}{a}y - \frac{b}{a} \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{a}x - \frac{b}{a}$$

بنابراین $f^{-۱}$ نیز یک تابع خطی است.

۱۲ تابع $f(x) = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

حل : برای این منظور بایستی تابع وارون f را پیدا کنیم.

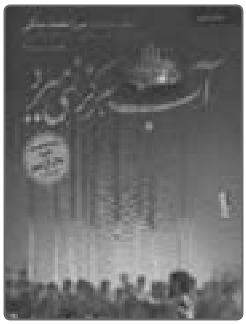
$$y = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲) \rightarrow x - ۳۲ = \frac{۹}{۵}y$$

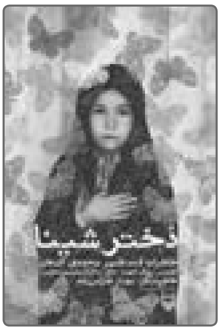
$$\rightarrow x = \frac{۹}{۵}y + ۳۲ \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۹}{۵}x + ۳۲$$

x : برحسب درجه سانتی‌گراد

$f^{-۱}(x)$: برحسب درجه فارنهایت

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید :





یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

حل :

الف) $f(x)=10000+(x-1)(7000) \qquad x\geq 1$

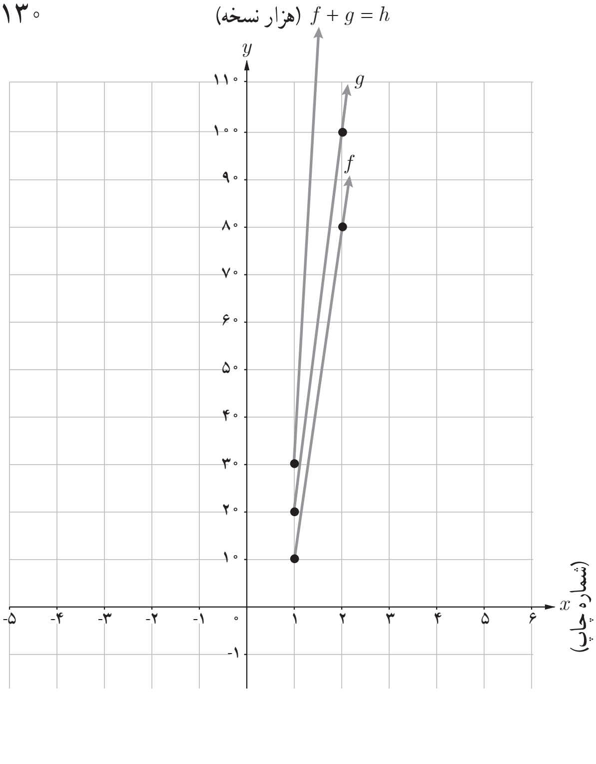
$g(x)=20000+(x-1)(9000) \qquad x\geq 1$

ب) $h(x)=f(x)+g(x)=30000+16000(x-1) \qquad x\geq 1$

پ) $y=f(x)=70x-70+10=70x-60$

$y=20+90x-90=90x-70$

$y=30+160x-160=160x-130$



نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۲

۱ نمایشی دیگر برای تابع $\begin{cases} f:[-1,2]\to\mathbb{R} \\ f(x)=\dfrac{5x-3}{2} \end{cases}$ بنویسید.

۲ دو تابع بنویسید که دامنه یکی $(-2,1]$ و دامنه دیگری $[-1,2]$ باشد. سپس هریک را جداگانه رسم کنید و برد آنها را به‌دست آورید.

۳ کدام دسته توابع زیر با هم مساوی‌اند؟ دلیل بیاورید.

الف) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3} \\ g(x)=x+3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-2} \\ g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-2x} \\ g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-2} \end{cases}$

و) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} \\ g(x)=x^2+x+1 \end{cases}$

ی) $\begin{cases} f(x)=|x| \\ g(x)=\sqrt{x^2} \end{cases}$

ل) $\begin{cases} f(x)=\left[\dfrac{x^2}{x^2+1}\right] \\ g(x)=0 \end{cases}$

۴ آیا دو تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{2+\sqrt{4+x^2}}$ و $g(x)=\sqrt{4+x^2}-2$ با هم مساوی‌اند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۵ دو تابع مساوی تابع $f(x)=|x-2|$ بنویسید.

۶ اگر $f(x)=x+1$ و $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ 3k^2 & x=1 \end{cases}$ ، مقدار k چقدر باشد تا به ازای هر x داشته باشیم $f(x)=g(x)$ ؟

۷ کدام درست و کدام نادرست است؟ برای هرکدام دلیل بیاورید.

الف) دامنه و هم‌دامنه تابع باید با هم برابر باشند.

ب) از مجموعهٔ $\{a,b,c\}$ به مجموعه $\{d,e\}$ تابعی یک به یک وجود دارد.

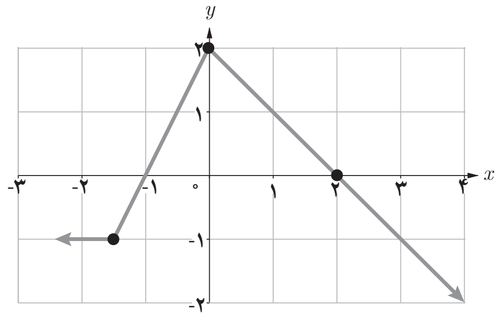
ج) هم‌دامنهٔ تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

د) اگر f و g دو تابع یک به یک باشند، $f+g$ یک به یک است.

۸ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲ & x\le ۰ \\ -۴ & ۰<x<۲ \\ x+۳ & x\ge ۲ \end{cases}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

۹ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x} & x<۰ \\ \sqrt{x-۱}+۲ & x\ge ۱ \end{cases}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۰ ضابطهٔ نمودار روبه‌رو را بنویسید.



۱۱ در کدام معادلهٔ زیر y، تابعی از x است؟ دلیل بیاورید.

الف) $x^۲+y^۲=۱۰$

ب) $xy=۲$

ج) $|x-۱|+y=۳$

د) $x^۲-y^۲=۱۰$

هـ) $|x-۱|+|y|=۰$

و) $|x^۲-۴|+|y-۱|=۰$

ز) $|x|+|y^۲-۱|=۰$

ر) $\sqrt{x-۱}+\sqrt{y}=۰$

س) $[x]+y=۰$

ش) $|[x]|+|y|=۰$

ص) $x^y=y^x$

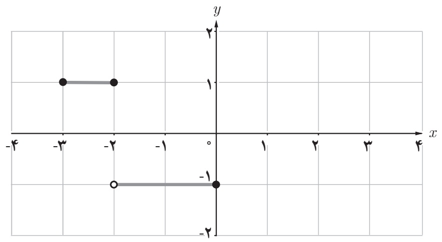
ض) $\sqrt{x^۲-۹}+\sqrt{y+۱}=۰$

ط) $x^۲+(y-۳)^۲=۰$

ظ) $(x-۱)y=۰$

ع) $|x|+|y|=۱$

غ) $[y]=x$



۱۲ نمودار روبه‌رو را در بازهٔ $[-۳,۵)$ به دلخواه کامل کرده و سپس ضابطهٔ آن را بنویسید و دامنه و برد مشخص کنید.

۱۳ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۲[x]-۱ \quad -۱\le x<۲$

ب) $y=[۲x]-۱ \quad -۱\le x<۲$

ج) $y=[۲x-۱] \quad -۱\le x<۲$

د) $y=[\frac{x}{۳}] \quad -۳\le x\le ۳$

هـ) $y=x+[x] \quad -۱\le x<۲$

و) $y=x-[x] \quad ۰\le x\le ۳$

۱۴ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $f(x)=[x-۳]$ باشد، در این صورت حاصل $f(-۱+\sqrt{۲})$ برابر .... است.

ب) حاصل $\left[\frac{x}{x+۱}\right]$ به ازای $x=\frac{۱}{۵}$ برابر .... است.

ج) اگر $f(x)=[x]$ باشد، حاصل $f(x-f(x))$ برابر .... است.

د) اگر $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\left[\sqrt{۴n^۲+۴n}\right]$ برابر .... است.

۱۵ الف) آیا تابع $f(x)=x^۲-۴x$ یک به یک است؟ چرا؟

ب) آیا می‌توانید دامنه آن را طوری محدود کنید که یک به یک شود؟ در صورت این عمل، وارون آن را بیابید.

۱۶ در صورت یک به یک بودن تابع $f(x)=-(x-۲)^۲$ برای $x\le ۲$، وارون آن را بیابید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

۱۷ وارون تابع $f(x)=\sqrt{۳x-۱}$ را در صورت وجود بیابید و نمودار تابع و تابع وارون را رسم کنید.

۱۸ وارون تابع $(x\neq ۱)$ $f(x)=\frac{x-۲}{x-۱}$، تابع .... است.

۱۹ آیا دو تابع $f(x)=۵+\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۵}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

۲۰ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱}+۲ & x\ge ۱\\ x+k & x<۱\end{cases}$ معکوس‌پذیر باشد، بیشترین مقدار k را بیابید.

۲۱ اگر خروجی ماشین زیر ۱۴ باشد، ورودی آن را بیابید.

$$x \rightarrow \boxed{۲\sqrt{x+۱}-۳} \rightarrow \boxed{۵x-۱} \rightarrow y$$

۲۲ اگر $\begin{cases} f:[a,+\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x)=۲|x-۳|+۱ \end{cases}$ معکوس‌پذیر باشد، کمترین مقدار a را بیابید.

۲۳ وارون تابع $y=x+[x]$ را در صورتی که بدانیم یک به یک است، پیدا کنید.

۲۴ اگر $f=\{(-۲,۱),(۳,۵),(۱,۴),(۶,۰)\}$ و

$g=\{(۱,۹),(۵,۰),(۷,۳),(۲,-۲),(۶,\sqrt{۲})\}$ دو تابع باشند، مطلوب است :

الف) $f+g$ ب) $۲f-۳g$ ج) fog

د) $(f-g)of$ هـ) $\frac{g}{f}$ و) fof

۲۵ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}+۵$ مطلوب است :

الف) دامنه $f-g$ ب) ضابطه $f-g$

۲۶ اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ باشد،

الف) مقدار $(f+g)(۳)$ را محاسبه کنید. ب) دامنه $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

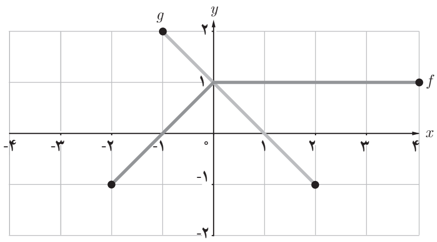
۲۷ اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ باشد، مطلوب است :

الف) دامنه gof بدون محاسبهٔ $(gof)(x)$

ب) ضابطه $(gof)(x)$ را بنویسید.

ج) $(\frac{۲f+g}{g})(۱)$ را به‌دست آورید.

۲۸ با توجه به نمودارهای f و g، نمودار $f+g$ را رسم کنید.



۲۹ اگر $f(x)=\frac{x}{۲x-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{x+۲}$ باشد، مطلوب است :

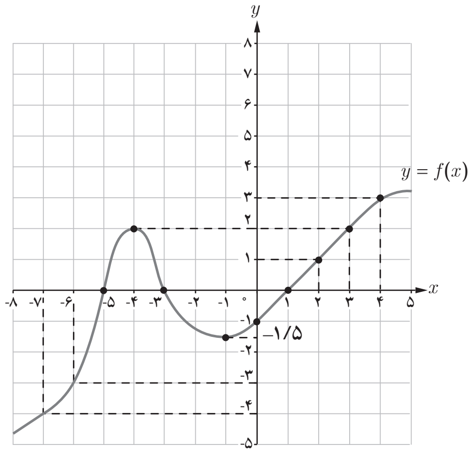
الف) دامنه fog بدون محاسبه ضابطه $(fog)(x)$.

ب) ضابطه $(fog)(x)$

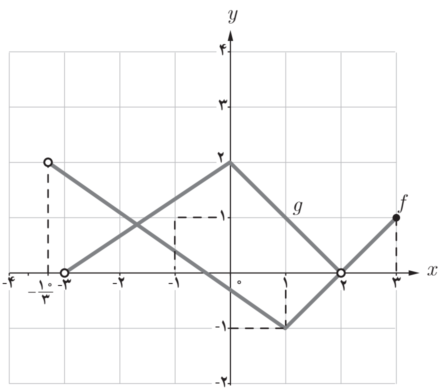
۳۰ اگر $f(x)=\sqrt{x-1}+1$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ باشد، مطلوب است :

الف) دامنه $\dfrac{f}{g}$ ب) $(f+g)(-1)$ ج) ضابطه $(\dfrac{f}{g})(x)$

۳۱ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، جواب معادلهٔ $(fof)(x)=0$ را به‌دست آورید.



۳۲ اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورت روبه‌رو باشد. نمودار $f-g$ را رسم کنید و دامنه تابع $y=\dfrac{1}{f-g}$ را به‌دست آورید.



۳۳ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ باشد. دامنه تابع $(f-g)og$ را بیابید.

۳۴ اگر $f=\{(1,4),(2,3),(5,1)\}$ و $g=2|x|+1$ باشد و $f^{-1}(g(a))=2$، a را بیابید.

۳۵ اگر $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}+1 & x\geq 2\\ x-2 & x<1\end{cases}$ ، مطلوب است $f^{-1}(x)$.

فصل ۳

توابع نمایی و لگاریتمی

توابع نمایی در تخمین قدمت اشیای باستانی کاربرد دارند

توابع نمایی و لگاریتم

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل ۳ درس است. در درس اوّل، توابع نمایی و رفتار نمایی معرفی می‌شوند و به بررسی خواص این توابع پرداخته می‌شود. در درس دوم ابتدا مفهوم تابع لگاریتمی معرفی می‌شود و به دنبال آن لگاریتم تعریف می‌شود. پس رابطه بین توان و لگاریتم بیان می‌شود و در ادامه برخی از ویژگی‌های تابع لگاریتم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در درس سوم، ویژگی‌های لگاریتم را بیان می‌کنیم و در ادامه یک معادله لگاریتمی را تعریف می‌کنیم. در انتهای این فصل، برخی از کاربردهای لگاریتم در حل مسائل بیان می‌شوند.

با توجه به اینکه در ابتدای فصل توضیحاتی در مورد قدمت اشیای باستانی یا پیدا کردن سن یک فسیل مطرح می‌شود و در لابه‌لای فصل، کاربردهای زیادی از توابع نمایی و لگاریتمی بیان می‌شود، از این رو تصویر عنوانی که یکی از بناهای تاریخی کشور عزیزمان می‌باشد، یادآور اهمیت و نقش توابع نمایی، در پیدا کردن سن این بناهاست.

دانستنی‌هایی برای معلم

مفهوم لگاریتم برای اولین بار در این کتاب مطرح می‌شود و تابع لگاریتم به عنوان معکوس تابع نمایی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بسیاری از مسائل روزمره، برای مدل‌سازی یک مسئله می‌توان از توابع نمایی استفاده کرد. برخی از این مسائل همانند محاسبه نیمه عمر، جرم توده باکتری، مقدار دارو در بدن انسان، محاسبه انرژی آزاد شده در یک زلزله و تابع جمعیت در این فصل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

دانش‌آموزان برای آنکه بتوانند درک درستی از لگاریتم داشته باشند و از آن به‌طور مناسب در محاسباتشان استفاده کنند، نیاز به درک مناسب از سه مفهوم تابع نمایی، تابع لگاریتمی و لگاریتم دارند.

علاوه بر درک جنبه‌های مختلف مفاهیم توابع نمایی و لگاریتمی توسط دانش‌آموزان به این نکته باید توجه شود که در معرفی هر مفهوم موارد زیر نیز به همراه آن ارائه شود :

۱ به‌کارگیری توابع نمایی و لگاریتمی در حل مسائل کاربردی،

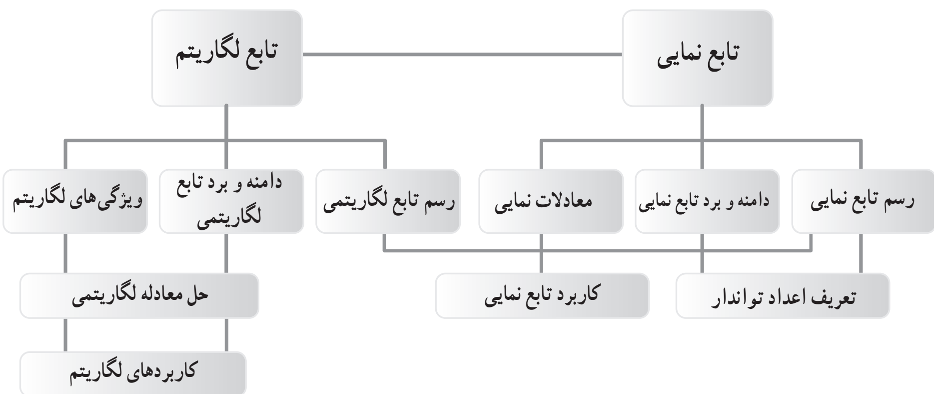
۲ استفاده از ماشین حساب برای حل مسائل واقعی،

۳ مقایسه توابع نمایی در حالت‌های مختلف که پایه بیشتر از یک و یا کمتر از یک است.

۴ مقایسه تابع نمایی با تابع چند جمله‌ای

۵ پیدا کردن مقدار تقریبی تابع $f(x)=a^x$ برای نقاط اصم

نقشه مفهومی فصل ۳



در این فصل، اگر چه دانش‌آموز با مفاهیم توابع نمایی و لگاریتمی آشنا می‌شود، اما مهم‌تر از آن ابعاد درک و تصویر درست از روابط بین آنهاست. دانش‌آموز باید درک کند که تابع نمایی رشد سریع‌تری نسبت به توابعی مثل چند جمله‌ای‌ها دارد. دانش‌آموز باید بتواند از مفهوم لگاریتم برای حل مسائل استفاده کند.

مشابه مثال نمک حل نشده در آب یا مثال زلزله یا جرم کربن ۱۴ می‌توان مسائلی از این قبیل را طرح کرد و با محاسبات ساده به نتایجی مهم دست پیدا کرد. در بسیاری از کتاب‌ها سن برخی از موجودات زنده با مدل‌سازی‌هایی که در همه آنها توابع رفتار نمایی وجود دارد صورت گرفته است و نتایجی که به‌دست آمده است همچون سن جسد یک انسان ما قبل تاریخ، سن یک ماموت و... ارزش فراوانی دارد.

در قسمت لگاریتم نیز می‌توان از مسایلی همچون تعیین pH یک محلول که معیاری از میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول است استفاده کرد که دانش‌آموزان در درس شیمی با آنها سرو کار دارند. همچنین برای این قسمت مطرح کردن مسایلی ساده در ریاضیات مالی که به نوعی به رشد و زوال مربوط است حائز اهمیت است. مشابه نمونه های ذکر شده در کتاب، مثال‌های فراوانی از کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و فناوری نانو می‌توان یافت.

استفاده از ابزار و تکنولوژی

استفاده از ماشین‌حساب برای انجام محاسبات تقریبی یا دقیق با عددهای بزرگ و یا اصم بخشی از کار می‌باشد. می‌توان مسایل خاصی در این ارتباط برای دانش‌آموزان با هوش‌تر طرح کرد برای مثال، دانش‌آموز باید بداند چگونه از ماشین حساب برای محاسبه مقدار تقریبی $۳^{\sqrt{۵}}$ استفاده کند. همچنین او باید بتواند مقدار تقریبی $log_{۷}۵۰$ یا $\log_{۳}^{\sqrt{۲}}$ را پیدا کند.

توصیه می‌شود، دانش‌آموزان در این کتاب و به‌خصوص در این فصل با نرم‌افزار جئوجبرا آشنایی داشته باشند. استفاده از این نرم‌افزار برای رسم توابع نمایی و لگاریتمی بسیار ارزشمند است در فرصت کم می‌توان توابع زیادی را برای دانش‌آموز رسم کرد و همچنین می‌توان با مقایسه آنها نتایج لازم را به صورت تصویری به‌دست آورد. به عنوان مثال، می‌توان تابع $f(x)=a^x$ را برای مقادیر مختلف $a>1$ یا $0<a<1$ رسم کرد و دانش‌آموزان با مشاهده نمودار آنها در کنار هم می‌توانند در نهایت درک کنند کدام تابع صعودی است و کدام نزولی یا اگر $a>b>1$ آن‌گاه $f(x)=a^x$ و $g(x)=b^x$ چه ارتباطی با هم دارند.

تاریخچه لگاریتم

لگاریتم طبیعی، لگاریتم بر مبنای عدد e است و این عدد توسط نپر و بریگز کشف شد ولی اهمیت آن را نیکولاس مرکاتور در سال ۱۶۸۸ نشان داد. عدد e که یک گنگ است (یعنی نمی‌توان آن را به صورت یک کسر نشان داد) تا چندین رقم بعد از اعشار محاسبه شده است و تا ۵ رقم بعد از اعشار این عدد مساوی ۲/۷۱۸۲۸ است. این عدد مبنایی برای انجام محاسبات پیچیده مانند محاسبه سرعت واپاشی هسته‌ای یک ایزوتوپ رادیواکتیو می‌باشد. این عدد در طبیعت هم دیده می‌شود، مثلاً در اشیاء یا نظام‌هایی که دستخوش روند رشد ثابت یا نمایی می‌شود. در سال ۱۶۱۴ جان نپر، کتابی با عنوان «توضیح قانون حیرت‌آور لگاریتم‌ها منتشر کرد در آن به توضیح اصول محاسبه با لگاریتم‌ها پرداخت. نپر دریافته بود که هر عددی را می‌توان به صورت توانی از ۱۰ را نشان داد که او آن را لگاریتم نامید. او همچنین افزود اگر لگاریتم دو عدد با هم جمع شوند، نتیجه حاصل‌ضرب آن دو عدد می‌شود.

درس ۱
تابع نمایی

اهداف درس

۱ رسم تابع $y=a^x$ برای دو حالت $a>1$ و $0<a<1$

۲ پیدا کردن مقدار تقریبی اعدادی مثل $3^{\sqrt{2}}$ و $2^{\sqrt{5}}$ روی نمودار توابع مربوطه.

۳ پیدا کردن دامنه و برد توابع نمایی

۴ درک مفهوم تابع نمایی و تابع رفتار نمایی و به‌کارگیری آنها در حل مسایل

۵ تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع $y=a^x$ برای دو حالت $a>1$ و $0<a<1$

۶ مقایسه تابع نمایی با توابع چند جمله‌ای

روش تدریس

درس اول با یک فعالیت در مورد جرم توده باکتری شروع می‌شود. برای معرفی تابع $y=2^x$ سه مرحله در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم دامنه اعداد x همه اعداد طبیعی‌اند. برای این منظور جرم توده باکتری مثال خیلی خوبی است، زیرا در هر مرحله جرم دو برابر می‌شود و از این رو مقدار تابع در مرحله nام از رابطه $f(x)=2^n$ پیروی می‌کند.

از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا جرم باکتری‌ها را در مرحله ۱۱ یا بالاتر پیدا کند که به‌طور تجربی او به این نتیجه خواهد رسید که باید از ضابطه تابع برای یافتن این مقدار استفاده کند که در فعالیت قبل آن را پیدا کرده است اما هنوز نمی‌توانیم تابع را رسم کنیم زیرا دامنه تابع $f(x)=2^x$ کل اعداد حقیقی است. بنابراین در پایان فعالیت اول تنها به رسم نقاط با دامنه اعداد طبیعی اکتفا شده است.

فعالیت ص ۷۲

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(۰)=۱$، آن‌گاه باتوجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

جدول (۱)

t زمان (ساعت)	$m(t)$ جرم باکتری‌ها
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
?=۴	۱۶
۵	? = ۳۲
۶	?= ۶۴
⋮	⋮
?=۱۰	۱۰۲۴

الف) در زمان‌های ۶ $=t$ و ۵ $=t$ جرم باکتری‌ها را به‌دست آورید.

$m(۵)=۳۲$

$m(۶)=۶۴$

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟

$۶۴ \xrightarrow{\times ۲} ۱۲۸ \xrightarrow{\times ۲} ۲۵۶$

با توجه به جدول، پس از ۸ ساعت جرم باکتری‌ها به ۲۵۶ گرم می‌رسد.

و پس از ۱۰ ثانیه نیز جرم باکتری‌ها به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد.

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به‌دست آورد؟

در هر مرحله جرم باکتری‌ها دو برابر مرحله قبل است.

جدول (۲)

t	$m(t)$
۰	$۲^{۰}=۱$
۱	$۲^{۱}=۲$
۲	$۲^{۲}=۴$
۳	$۲^{۳}=۸$
⋮	⋮
?=۹	$۲^{۹}=۵۱۲$

در فعالیت بعدی، هدف گسترش دامنه این تابع است، بنابراین با پرکردن اعداد جدول نقاط بیشتری از نمودار تابع $y=۲^x$ نمایان می‌شوند. سرانجام، به‌صورت دستوری به دانش‌آموز آموزش داده می‌شود که اگر نقاط بیشتری از این تابع را داشته باشد که این نقاط شامل نقاط گویا و اصم است شکل این تابع شبیه نموداری است که در صفحه ۷۴ رسم شده است. برای اینکه دانش‌آموز متوجه باشد که دامنه این تابع اعداد حقیقی است، در ادامه این فعالیت از وی خواسته می‌شود تا مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کند. همچنین یکی از اهداف دیگر این فعالیت، آموزش این مطلب است که نمودار تابع $y=a^x$ هرگز محورxها را قطع نمی‌کند.

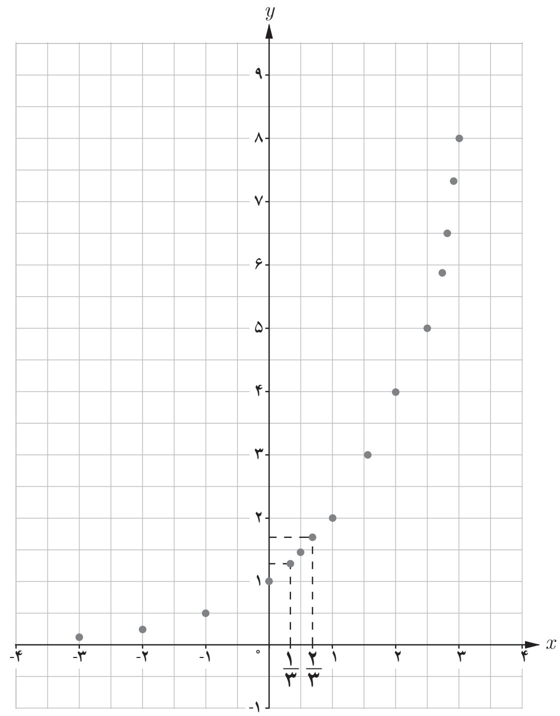
فعالیت ص ۷۳

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به‌دست آورد.

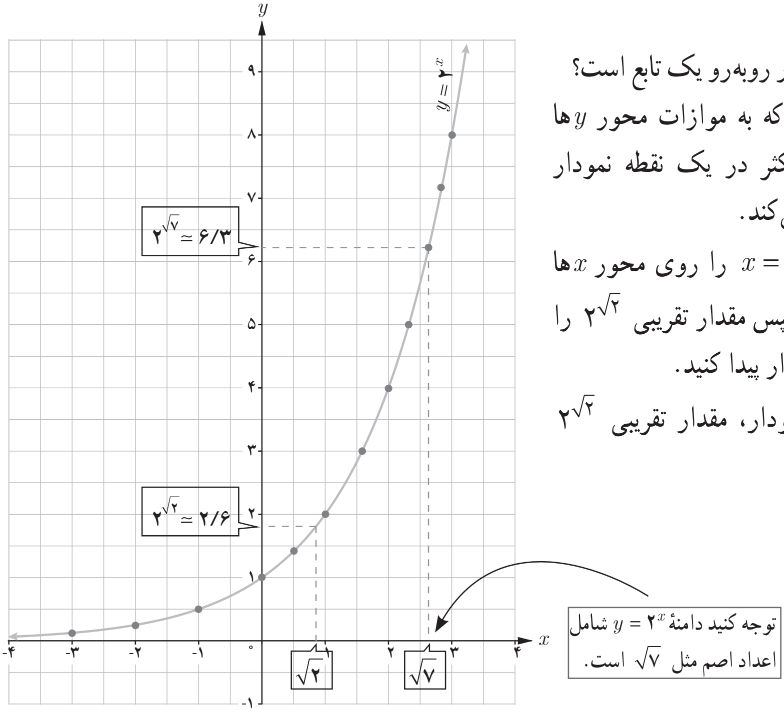
الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
۲^x	$۲^{-۳}$	$۲^{-۲}$	$۲^{-۱}$	$۲^{۰}$	$۲^{\frac{۱}{۳}}$	$۲^{\frac{۱}{۲}}$	$۲^{\frac{۲}{۳}}$	$۲^{۱}$	$۲^{\frac{۳}{۲}}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\sqrt[۳]{۲} \simeq ۱/۲۶$	$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$	$\sqrt[۳]{۴} \simeq ۱/۵۶$	۲	$\sqrt{۸} \simeq ۲/۸۳$	۴	۸

ب) نقاط به‌دست آمده را در یک صفحهٔ شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنهٔ تابع $y=۲^x$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.
اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار زیر حاصل می‌شود.



پ) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟

زیرا هر خط که به موازات محور yها رسم شود، حداکثر در یک نقطه نمودار روبه‌رو را قطع می‌کند.

ت) نقطهٔ $x=\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

با توجه به نمودار، مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ برابر ۲/۶ است.

ث) کدام‌یک از اعداد زیر، بین دو عدد $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارد؟

$$۲^{\frac{۵}{۲}} \qquad ۲^{\frac{۳}{۲}} \qquad ۲^۵ \qquad ۲^{-۱}$$

عدد $\frac{۵}{۲}$ بین دو عدد ۲ و ۳ قرار دارد. از این رو عدد $۲^{\frac{۵}{۲}}$ بین دو عدد $۲^۲$ و $۲^۳$ قرار دارد.

ج) چرا نمودار تابع $y=۲^x$ محور xها را قطع نمی‌کند؟

با توجه به نمودار $y=۲^m$، مقدار این تابع به ازای هر عدد حقیقی همواره بزرگ‌تر از صفر است و هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که به ازای آن ۲^m برابر صفر شود بنابراین نمودار این تابع هرگز محور xها را قطع نمی‌کند.

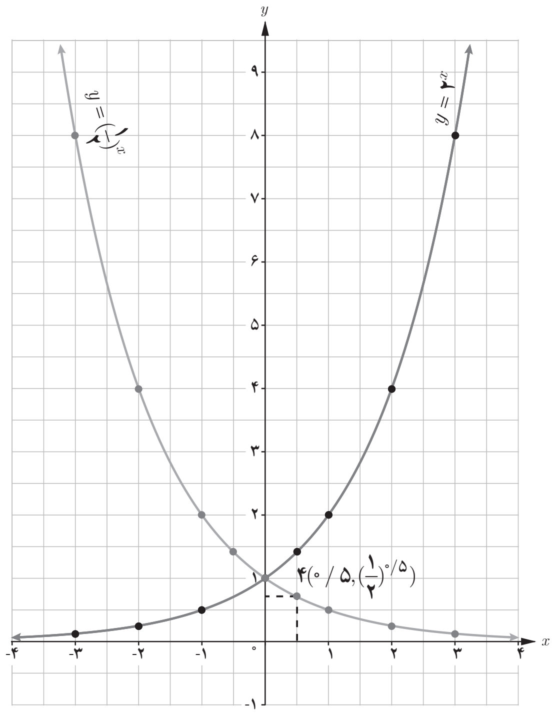
هدف کار در کلاس آشنایی با توابع $f(x)=a^{-x}$ و کشف رابطه $f(x)=a^{-x}=(\frac{۱}{a})^x$ است و در ادامه از دانش‌آموز انتظار می‌رود بتواند دو تابع $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ را با هم مقایسه کند و دامنه و برد هریک را به‌دست آورد.

کار در کلاس ص ۷۵

الف) نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y=۲^x$ مقایسه کنید.

هر دو تابع دو نقطه $(۰,۱)$ محور yها را قطع می‌کنند.

در تابع $y=۲^x$ با افزایش x، مقدار تابع افزایش می‌یابد و در تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ با افزایش x، مقدار تابع کاهش می‌یابد.



ب) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

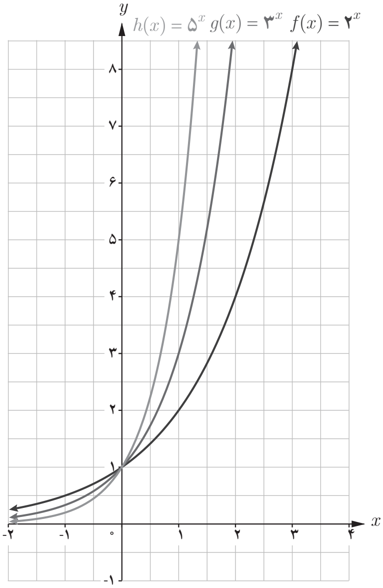
با توجه به نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ ، دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

پ) نقطه $\left(۰/۵\,,\,(\frac{۱}{۲})^{۰/۵}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.

بعد از کار درکلاس مثال‌هایی برای کاربرد مفهوم تابع نمایی و استفاده از آن در حل مسایل آورده شده است که انتظار می‌رود، در این قسمت مثال‌های بیشتری ارائه شود.

هدف کار در کلاس صفحه ۷۶، مقایسه نمودار تابع $f(x)=a^x$، $y(x)=b^x$ و $h(x)=c^x$ است که در آن $۱<a<b<c$ یا $۰<c<b<a<۱$ است. سؤال پنجم این کار درکلاس در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع نمایی $y=a^x$ بحث می‌کند.

کار در کلاس ص ۷۶



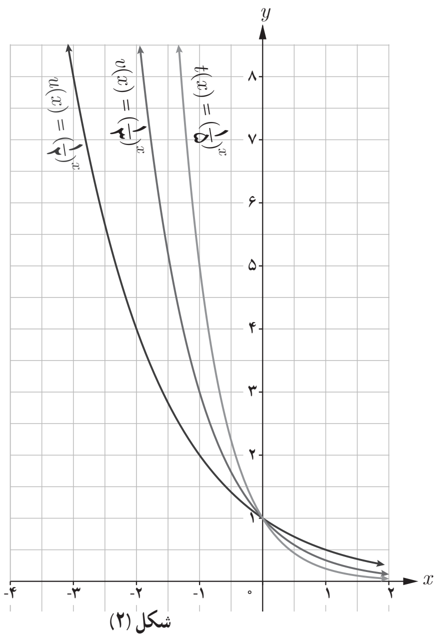
شکل (۱)

۱ نمودارهای سه تابع $f(x)=۲^x$، $g(x)=۳^x$ و $h(x)=۵^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید.
دامنه هر سه تابع، مجموعه اعداد حقیقی و برد آنها مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟ بله
زیرا هر خط موازی محور yها نمودار توابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۴ نمودارهای توابع $u(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$، $v(x)=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{۱}{۵}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به‌دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟



شکل (۲)

با توجه به نمودار توابع، دامنه در همه موارد مجموعه اعداد حقیقی و برد مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.
این توابع یک به یک هستند. زیرا به ازای هر خط موازی محور xها، نمودار هر یک از توابع، حداکثر در یک نقطه قطع می‌شود.

۵ــ الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$۲^۴, (\frac{۱}{۲})^۲, ۲^۲, ۲^۳, (\frac{۱}{۲})^۴, (\frac{۱}{۲})^۳ \rightarrow ۲^{-۴}, ۲^{-۳}, ۲^{-۲}, ۲^۲, ۲^۳, ۲^۴$

ب) جاهای خالی را پر کنید :
در تابع $f(x)=a^x$ ،
ــ اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر f افزایش می‌یابند.
ــ اگر $۰<a<۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f کاهش می‌یابند.

توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شودکه از دادن تمرین‌های زیاد پرهیز شود و در عوض تمرین‌ها و مثال‌های کتاب با دقت بیشتری مورد بحث و بررسی قرار گیرد. بسیاری از اهداف و مسایلی که در کتاب‌های کمک آموزشی مورد بررسی قرار می‌گیرند از اهداف این فصل نیست و از مطرح کردن آنها در کلاس جداً خودداری شود. همچنین توصیه می‌شود برای یادگیری و تعمیق و تثبیت مفاهیم مربوط به رسم تابع نمایی چندین مثال از رسم توابع رفتار نمایی نیز در کلاس مطرح شود.

تمرین ص ۷۷

۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

$$g(t)=۱۰۰\times۲^{t}$$

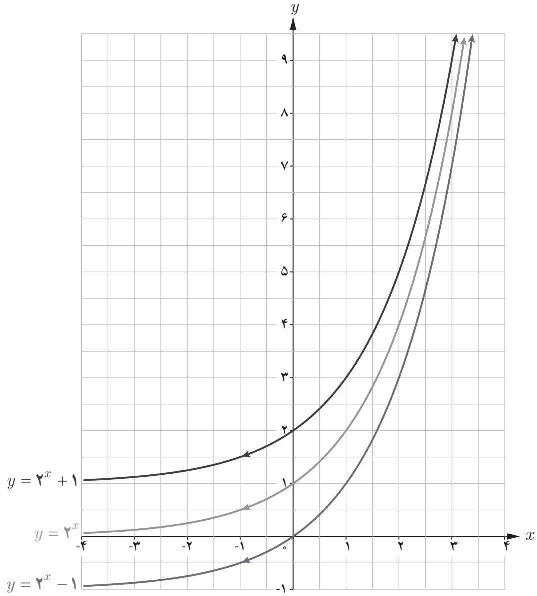
gجرم توده پس از t ساعت است.

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

$$g(۲۰)=۱۰۰\times۲^{۲۰}$$

۲ نمودار توابع $y=۲^{x}$، $y=۲^{x}+۱$ و $y=۲^{x}-۱$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y=a^{x}$ ، $y=a^{x}+۲$ و $y=a^{x}-۲$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a>۱$).

این تمرین، در مورد انتقال تابع $y=a^{x}$ است. دانش‌آموزان قبلاً برای تابع $y=f(x)$ در حالت کلی، با این مسئله آشنا شده‌اند.



نمودار تابع $y=a^x+۲$ از انتقال دو واحد به بالای همه نقاط نمودار $y=a^x$ و نمودار تابع $y=a^x-۲$، از انتقال دو واحد به پایین نمودار تابع $y=a^x$، حاصل می‌شود.

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t)=۱۰(۰/۸)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

حل :

الف) $A(۸)=۱۰(۰/۸)^۸ \simeq ۱/۶۷$

ب)

میزان از بین رفتن دارو در هر ساعت : $B(t)=۱۰-۱۰(۰/۸)^t$

$$=۱۰^۲(۱-(۰/۸)^t)$$

پس به مقدار $۱۰^۲(۱-(۰/۸)^t)$ درصد از دارو در هر ساعت از بین می‌رود.

۴ الف) سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

$$۳^{۲/۵}<۳^{۲/۶}<۳^{۲/۷}<۳^{۲/۷۱}<۳^{۲/۸}<\ldots<۳^{\sqrt{۱۰}}$$

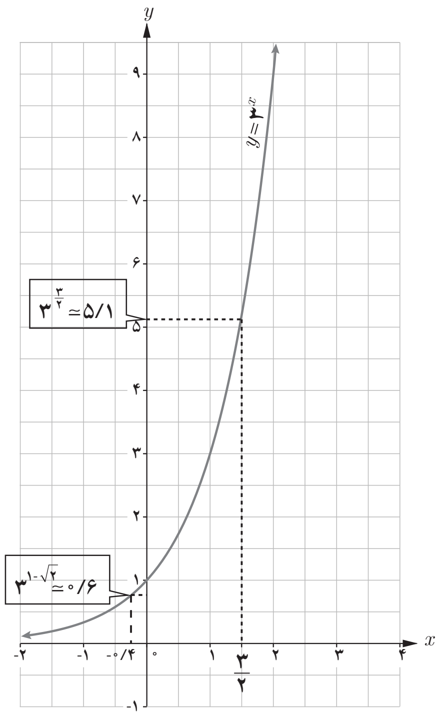
ب) نامعادلهٔ توانی $۴^{۲x-۱}>\frac{۱}{۱۰۲۴}$ را حل کنید.

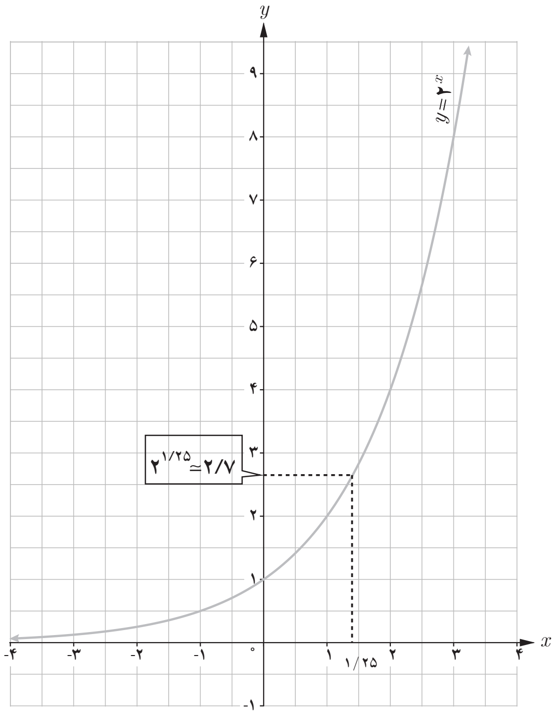
$$۲^{۴x-۲}>۲^{-۱۰}\rightarrow ۴x-۲>-۱۰\rightarrow x>-۲$$

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x>a^y>a^z$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a>۱$).

چون $a>۱$ و $a^x>a^y>a^z$ پس $x>y>z$.

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.





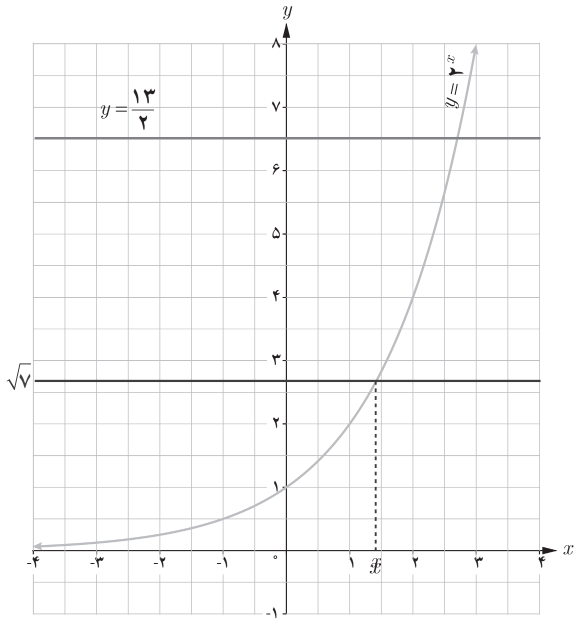
الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}} \simeq ۰/۶۳$

ب) $۲^{۱/۲۵} \simeq ۲/۸۲$

پ) $۳^{\frac{۳}{۲}} \simeq ۵/۱۹$

۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=۲^x$ راقطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟چرا؟

با توجه به نمودار $۲^۳ > ۲^{\frac{۱۳}{۲}} > ۲^۲$ ، پس طول نقطه برخورد بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ است.



ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

با توجه به نمودار $۲^۲>۲^x>۲^۱$

پس طول نقطه برخورد بین دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آن‌گاه $۰/۴۹ = ۰/۷ \times ۰/۷$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟ $f(t)=۱۰۰(۰/۷)^t$

t تعداد لایه فیلتر مورد استفاده است.

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

رابطه درصد ناخالصی آب که به ازای تعداد فیلتر t از بین می‌رود : $h(t)=۱۰۰(۰/۳)^t$

$۱۰۰(۰/۳)^t < ۴ \rightarrow (۰/۳)^t < ۰/۰۴ \rightarrow t=۳$

درس ۲
تابع لگاریتمی و لگاریتم

اهداف درس

۱ درک مفهوم تابع لگاریتمی و لگاریتم

۲ رسم تابع لگاریتمی

۳ ارتباط بین دامنه و برد تابع نمایی و تابع لگاریتمی به عنوان تابع وارون

۴ پیدا کردن مقدار تقریبی لگاریتم اعداد با استفاده از ماشین حساب

۵ مقایسه تابع لگاریتمی با سایر توابع مثل چند جمله‌ای‌ها

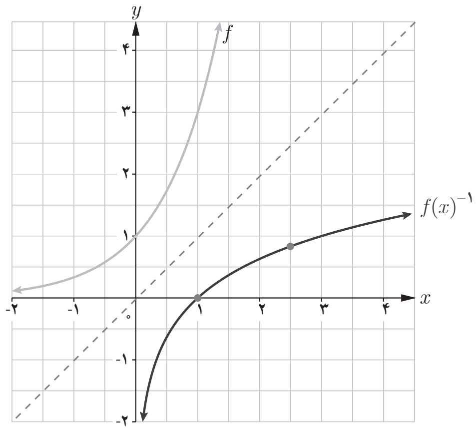
روش تدریس

در درس دوم از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا بار دیگر مسئله ابتدای فصل در مورد رشد توده باکتری را در نظر بگیرد. هدف این قسمت و فعالیت اول این درس معرفی تابع لگاریتمی به عنوان معکوس تابع نمایی و ارتباط این دو تابع است. برای این منظور، در پایان صفحه ۸۰، دامنه و برد این دو تابع با هم مقایسه شده است. در فعالیت ۱، دانش‌آموز مقدار تابع $y=3^x$ را در نقاط مختلف به‌دست می‌آورد و با استفاده از مفهوم تابع معکوس، قرینه هر نقطه نسبت به خط $y=x$ را به‌دست می‌آورد تا با استفاده از آن نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ را رسم کند و در انتهای آن تعریف تابع لگاریتمی آمده است.

فعالیت ص ۸۱

۱ باتوجه به نمودار تابع $f(x) = 3^x$ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.

$f^{-1}(\frac{1}{9}) = -2$	$\Leftrightarrow$	$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$
$f^{-1}(\frac{1}{3}) = -1$	$\Leftrightarrow$	$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
$f^{-1}(1) = 0$	$\Leftrightarrow$	$f(0) = 3^{0} = 1$
$f^{-1}(3) = 1$	$\Leftrightarrow$	$f(1) = 3^{1} = 3$
$f^{-1}(3^{3/2}) = \frac{3}{2}$	$\Leftrightarrow$	$f(\frac{3}{2}) = 3^{\frac{3}{2}} \simeq 5/1$
$f^{-1}(9) = 2$	$\Leftrightarrow$	$f(2) = 3^{2} = 9$



۲ گزینهٔ درست را با ✓ و گزینه غلط را با × علامت بزنید.

ـ نقطهٔ ($\frac{1}{9}$ و ۲−) روی نمودار f قرار دارد. ✓

ـ نقطه ($\frac{1}{3}$ و ۱−) روی نمودار f^{-1} قرار دارد. ×

ـ نقطهٔ (۰ و ۱) روی نمودار f قرار دارد. ×

ـ نقطه (۲− و $\frac{1}{9}$) روی نمودار f^{-1} قرار دارد. ✓

ـ تابع f^{-1} یک به یک است. ✓

مثال‌های بعد، سعی دارد تا با استفاده از مقدار تابع لگاریتمی در یک نقطه مفهوم لگاریتم را معرفی کند و آن را با توان‌های اعداد مقایسه کند از آنجایی که رسم این توابع مستلزم پیدا کردن نقاط زیادی می‌باشد، پیشنهاد می‌شود اگر تمرین اضافه‌ای برای این قسمت در نظر گرفته می‌شود، نمودار آنها رسم شود. در این قسمت ویژگی‌های لگاریتم گفته نشده است و در مثال‌های داده شده، انتظار می‌رود تا دانش‌آموز فقط با استفاده از تعریف، بتواند لگاریتم برخی از اعداد را پیدا کند.

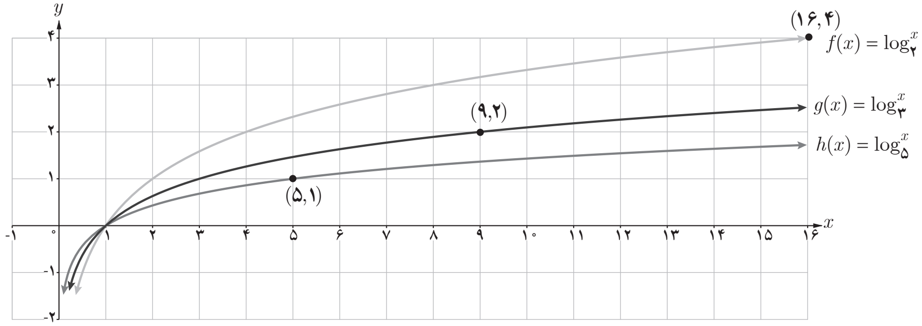
کار در کلاس ص ۸۳

۱

الف) نمودار سه تابع $f(x)=\log_{۲} x$ ، $g(x)=\log_{۳} x$ و $h(x)=\log_{۵} x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

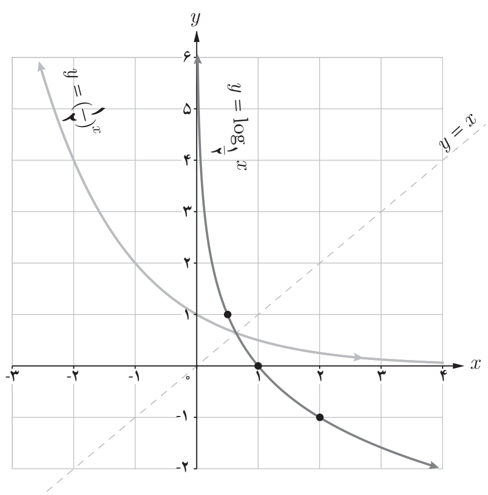
(۱۶ , ۴) و (۹ , ۲) و (۵ , ۱)



هدف این سؤال، ۱ مقایسه توابع لگاریتمی $f(x)=\log_a^x$ ، $g(x)=\log_b^x$ و $h(x)=\log_c^x$ در حالت مختلف a,b,c است که $a,b,c\neq ۱$.

پ) با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

نمودار تابع $y=\log_{۱/۳}^{x}$ قرینه نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ نسبت به خط $y=x$ است.



۲ مشخص کنید هر یک از نمودارهای زیر به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

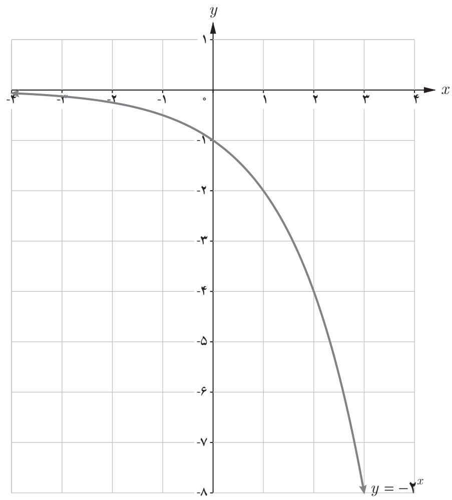
در این سؤال، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود تا بتوانند، نمودار توابع نمایی و لگاریتمی را با هم مقایسه کنند.

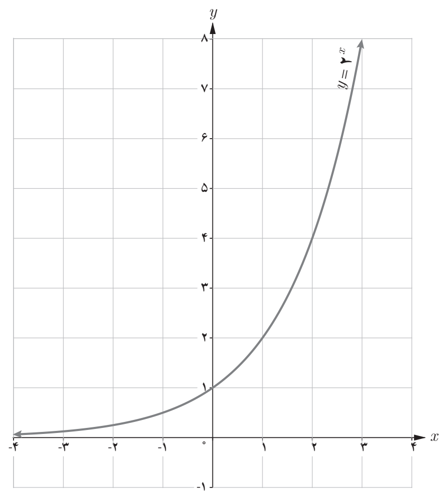
نکته :

در کاردرکلاس ۲، دانش‌آموز به‌راحتی می‌تواند با استفاده از نقطه‌یابی نیز ضابطه هر تابع را پیدا کند و این کار منعی ندارد ولی هدف اصلی این کاردرکلاس، استفاده از خواص توابع می‌باشد.

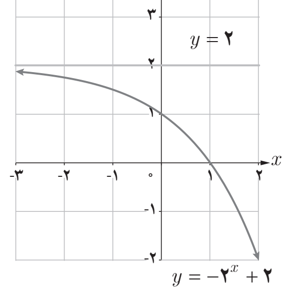
حل :

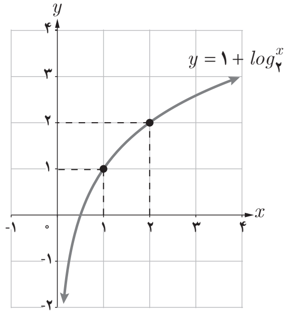
الف) $y=-۲^x+۲$، ابتدا تابع $y=۲^x$ را رسم می‌کنیم و سپس با استفاده از تعریف، قرینه آن نسبت به محور xها را رسم می‌کنیم.





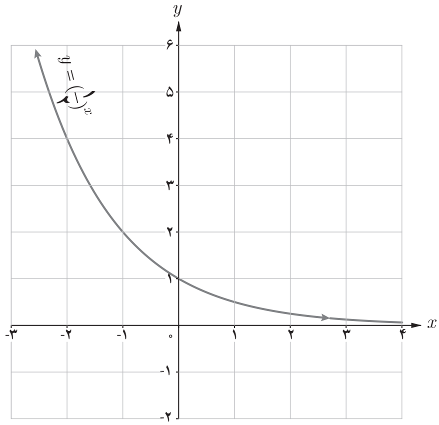
سپس تابع $y=-۲^x$ را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا شکل زیر حاصل شود.

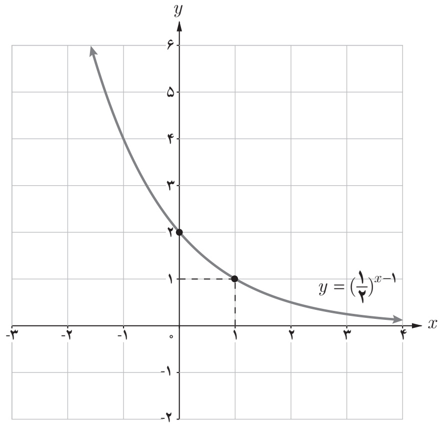




ب) برای رسم تابع $y=(\log x)+1$، با استفاده از مطالب فصل تابع می‌دانیم کافی است ابتدا نمودار $y=\log_2 x$ را رسم کنیم سپس، شکل آن را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم. دقت کنید که پرانتز اضافی است و تابع $y=1+\log_2 x$ صحیح است که شکل آن به‌صورت روبه‌رو است :

پ) سرانجام برای رسم نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^{x-1}$ کافی است ابتدا نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کرده و سپس نمودار آن را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.





۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_3^{81}$ — اگر $a=\log_3^{81}$، آن‌گاه $3^a=81$ در نتیجه $a=4$

ب) $\log_{1/6}^{\frac{1}{6}}$ — اگر $b=\log_{1/6}^{\frac{1}{6}}$، آن‌گاه $(1/6)^b = 1/6$ در نتیجه $b=1$

پ) $\log_2^8$ — اگر $c=\log_2^8$، آن‌گاه $2^c=8$ در نتیجه $c=3$

توصیه‌های آموزشی

۱ در این درس، از حل تمرین‌ها یا مسائلی که به استفاده از ویژگی لگاریتم منجر می‌شود، خودداری شود.

۲ استفاده از ماشین‌حساب برای رسم دقیق نمودارها توصیه می‌شود.

۳ استفاده از کاغذ لگاریتمی یا شطرنجی برای رسم نمودارهای دقیق توصیه می‌شود.

۴ دانش‌آموز باید به درستی درک کند که چرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

تمرین ص ۸۵

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$a=\log_{۱۰} ۰/۰۱ \rightarrow ۱۰^a=۰/۰۱ \rightarrow a=-۲$

$b=\log_۶^{\frac{۱}{۶}} \rightarrow ۶^b=\frac{۱}{۶} \rightarrow b=-۱$

$c=\log_۲^{\sqrt{۲}} \rightarrow ۲^c=\sqrt{۲} \rightarrow c=\frac{۱}{۲}$

$d=\log_۷^{\sqrt[۳]{۷^۲}} \rightarrow ۷^d=\sqrt[۳]{۷^۲} \rightarrow d=\frac{۲}{۳}$

۲ نمودار تابع $y=\log_a x$ را برای دو حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$ با هم مقایسه کنید.

در نمودار تابع $y=\log_a x$ اگر $a>۱$ ، با افزایش x مقدار y افزایش می‌یابد.

و در نمودار تابع $y=\log_a x$ اگر $۰<a<۱$ ، با افزایش x مقدار y کاهش می‌یابد.

همچنین هر دو نمودار در نقطه $x=۱$، محور xها را قطع می‌کنند.

۳

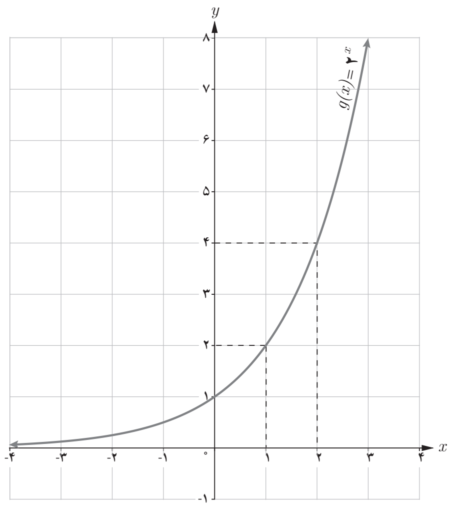
الف) خط $y=۲۷$ نمودار تابع $y=۳^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

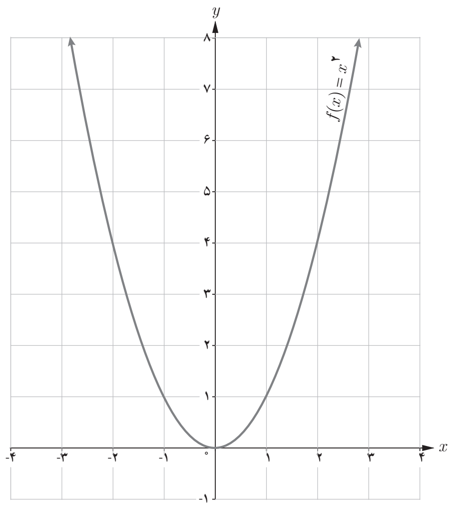
$۲۷=۳^x$ در نتیجه $x=۳$

ب) خط $y=۱۰$ نمودار تابع $y=(۰/۰۱)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

اگر $(۰/۰۱)^x=۱۰$ آن‌گاه $-۲x=۱$ و در نتیجه $x=-\frac{۱}{۲}$.

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.





تابع $y=x^۲$ نسبت به محور yها متقارن است، یک به یک نیست و یک نقطه مینیمم دارد و به ازای $x=۰$، دارای عرض صفر است.

تابع $y=۲^x$ یک به یک است و با افزایش مقدار x، مقدار تابع افزایش می‌یابد. این تابع در هیچ نقطه‌ای محور xها را قطع نمی‌کند و اصطلاحاً صفر ندارد.

دامنه هر دو تـابع مجموعه اعداد حقیقی و برد تابع $y=x^۲$ بازه $[۰,+\infty)$ و برد تابع $y=۲^x$ بازه $(۰,+\infty)$ است.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

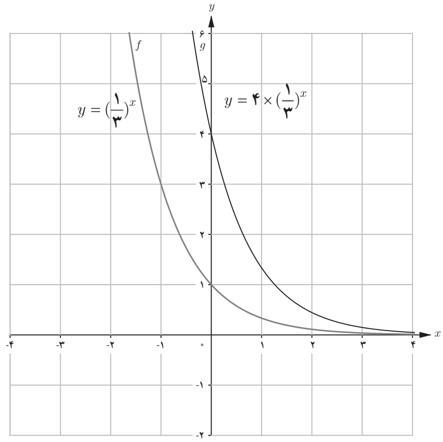
- لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. ✓
- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓
- تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است. ✓
- تابع لگاریتم محور yها را قطع می‌کند. ×
- اگر نقطه (b,d) روی نمودار $y=a^x$ قرار داشته باشد، آن‌گاه (d,b) روی نمودار $y=\log_a x$ قرار دارد. ✓
- اگر $a>b>۰$ آن‌گاه $\log_{۱۰} a < \log_{۱۰} b$. ×

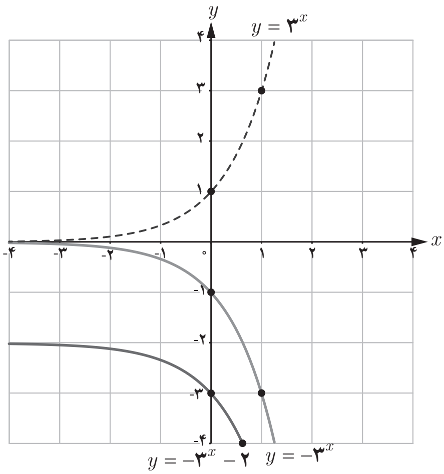
۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

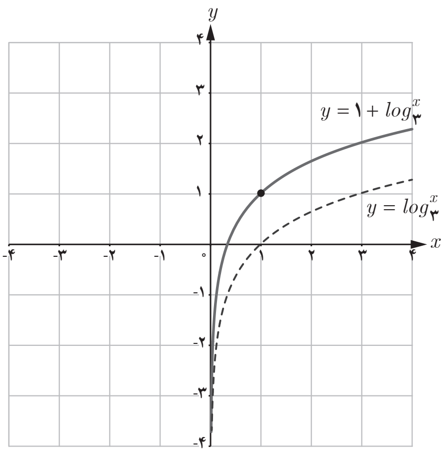
الف) $y = ۱ + \log_۳ x$

ب) $y = -۳^x - ۲$

پ) $y = ۴(\frac{۱}{۳})^x$







درس ۳
ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

اهداف درس

۱ آموزش ویژگی‌های اصلی لگاریتم مثل لگاریتم ضرب و تقسیم
۲ استفاده از ویژگی‌های لگاریتمی در حل معادلات لگاریتمی
۳ بررسی کردن جواب‌های یک معادله لگاریتمی برای پیدا کردن جواب درست
۴ تعمیم برخی از ویژگی‌های لگاریتم که از خواص داده شده در این درس به‌دست می‌آیند.

روش تدریس

این درس با چند مثال و حل آنها شروع می‌شود و در واقع چندین ویژگی ساده ولی پر اهمیت و اساسی لگاریتم آموزش داده می‌شود. در مثال اول دانش‌آموز با استفاده از یافته‌های قبلی به سادگی می‌تواند نشان دهد که $\log_a^{۱} = ۰$ و $\log_a^a = ۱$

در مثال دوم، لگاریتم حاصل‌ضرب دو عدد به‌دست می‌آید و به عنوان تعمیمی از آن در مثال بعد، ثابت می‌شود $\log_a^{b^n} = n\log_a^b$.

هدف کار در کلاس، پیداکردن لگاریتم تقسیم دو عدد و استفاده از آن برای پیدا کردن لگاریتم برخی از اعداد اعشاری است.

کار در کلاس ص ۸۷

۱ نشان دهید که اگر $a\,,b,c>0$ و $c\neq1$، آن‌گاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

حل : فرض کنید $x = \log_c^a$ و $y = \log_c^b$ پس طبق تعریف $a=c^x$ و $b=c^y$.

پس $\log_c^a = x$ و $\log_c^b = y$ و

$$\frac{a}{b} = \frac{c^x}{c^y} = c^{x-y} \Rightarrow \log_c^{\frac{a}{b}} = x-y$$

$$\Rightarrow \log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

۲ اگر $a=\log 2$ و $b=\log 3$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log 0/75 = \log \frac{75}{100} = \log 75 - \log 100 = \log 5^2 \times 3 - \log 10^2$

$$= \log 5^2 + \log 3 - 2\log 10 = 2\log 5 + \log 3 - 2$$
$$= 2(1-a) + b - 2 = b - 2a$$

ب) $3\log^{\sqrt[3]{4}} - \log 250 = 3\log 2^{\frac{2}{3}} - \log 5^2 \times 10$

$$= 3\times\frac{2}{3}\log 2 - (\log 5^2 + \log 10)$$
$$=2\log^2 - 2\log 5 - 1$$
$$=2a - 2(1-a) - 1$$
$$=4a+1$$

پ) $\log 0/005 = \log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 10^3$

$$=\log 5 - 3\log 10$$
$$=1-a-3$$
$$=-(a+2)$$

در بخش معادلات لگاریتمی، پس از معرفی معادلات لگاریتمی، چندین مثال و حل آنها ارائه شده است که نکته مهم در همه آنها این است که به دانش‌آموز یاد داده می‌شود که پس از پیدا کردن جواب‌ها باید همواره جواب‌ها را آزمایش کند و از دبیران محترم تقاضا می‌شود تا در این قسمت معادلات بیشتری حل کرده و همواره درستی جواب‌ها را آزمایش کنند. در ادامه، کاربردهای لگاریتم در حل مسایل مدل شده هستند که هدف اصلی این فصل را دنبال می‌کند. مثال‌هایی از قبیل رشد جمعیت، شدّت زلزله و نیمه عمر مواد هسته‌ای که در همه آنها از توابع لگاریتمی استفاده شده است.

فعالیت ص ۸۸

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید :

الف) $\log_5(2x-1)=\log_5 x$

$2x-1=x \rightarrow \boxed{x=1}$

ب) $\log_3(x-1)+\log_3(\frac{x}{2}+1)=2$

$\log_3(x-1)(\frac{x}{2}+1)$

$=2\times\log_3 3 \Rightarrow (x-1)(\frac{x}{2}+1)=3^2$

$\Rightarrow x=4\ ,\ x=-5$ غ ق

پ) $\log x+\log(x+3)=1$

$\log_{10} x(x+3)=\log_{10}10$

$x(x+3)=10 \Rightarrow x=2\ ,\ x=-5$ غ ق

توصیه‌های آموزشی

۱ برشمردن ویژگی‌های لگاریتم به جز آنچه آموزش داده شده است جزء اهداف این فصل نیست.

۲ حل مسایلی که در آنها از ویژگی‌های مقدماتی لگاریتم استفاده می‌شود اکیداً توصیه می‌شود.

۳ هدف از حل معادله، معادلات ساده لگاریتمی هستند که برای حل آنها از خواص مقدماتی استفاده می‌شود.

۴ از طرح و حل سؤالاتی که جزو اهداف اصلی این فصل است به شدت پرهیز شود.

۵ چنانچه فرصت کافی برای طرح سؤالات اضافی وجود داشته باشد مطرح کردن مسایل رشد و زوال و همچنین سود و زیان اشکالی ندارد ولی در همه آنها اهداف اصلی این فصل مدنظر باشد.

تمرین ص ۹۰

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۴ m^۲ - \log_۴ m - ۳ = ۰$

$$\log_۴ \frac{m^۲}{m-۳} = \log_۴ ۱ \to \frac{m^۲}{m-۳} = ۱ \to m^۲ - m + ۳ = ۰$$
$$\to \Delta < ۰$$

معادله جواب ندارد.

ب) $\log_۲ (۱۲b-۲۱) - \log_۲ (b^۲-۳) = ۲$

$$\log_۲ \frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳}$$

$$= ۲ \times \log_۲ ۲$$

$$\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳} = ۴ \to ۴b^۲ - ۱۲b + ۹ = ۰ \to b = \frac{۳}{۲}$$

چون $۱۲(\frac{۳}{۲}) - ۲۱ = -۴$ پس جواب به‌دست آمده، قابل قبول نیست.

۲

الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = ۲^t$ به‌دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

$m^{-۱}(t) = \log_۲ t$

که دور آن t جرم باکتری و $m^{-۱}(t)$ زمان سپری شده برحسب ساعت است.

ب) با استفاده از وارون تابع $m\,(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$$\log ۲ \simeq ۰/۳۰۱$$

$$\log_{۲} ۵۰۰۰ = \frac{\log_{۱۰} ۵۰۰۰}{\log_{۱۰} ۲} = \frac{\log ۵ \times ۱۰۰۰}{\log ۲} = \frac{\log ۵ + \log ۱۰۰۰}{\log ۲}$$

$$= \frac{\log ۵ + ۳}{\log ۲} \simeq \frac{۱ - ۰/۳۰۱ + ۳}{۰/۳۰۱} \simeq ۱۲/۲۸$$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $a^{\log_b a} = a \quad (b \neq ۱ \,,\, a \,,\, b > ۰)$

نادرست است به عنوان مثال اگر a=۱۰۰ و b=۱۰ آن‌گاه

$$۱۰۰^{\log_{۱۰} ۱۰۰} \overset{?}{=} ۱۰۰^{۲} = ۱۰^{۴} \neq ۱۰۰$$

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad (d \neq ۱ \,,\, a \,,\, b \,,\, c \,,\, d > ۰)$

درست است. تعمیم حالت $\log_d ab = \log_d a + \log_d b$

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$

نادرست. مثال

$$\log ۱۰ \log ۱۰۰ \overset{?}{\neq} \log ۱۰ + \log ۱۰۰$$

$$۱ \times ۲ \quad \neq \quad ۱ + ۲$$

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

نادرست. (به ازای هر x در بازه $(۰,۱)$ $\log_a x < ۰$, $\log_a ۱ = ۰$, $a > ۰$, $a \neq ۱$)

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید. $m(t) = ۱ \times ۲^{\frac{-t}{۴}}$

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟

$$۰/۰۱ = ۲^{\frac{-t}{۴}}$$

$$\log ۰/۰۱ = -\frac{t}{۴} \log ۲ \rightarrow -۲ = -\frac{t}{۴} \log ۲$$

$$t = \frac{۸}{\log ۲} \simeq \frac{۸}{۰/۳} \simeq ۲۶/۶$$

پس طی ۲۷ روز، جرم این عنصر به ۰/۰۱ کاهش می‌یابد.

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log ۳ \simeq ۰/۴۷۷۱\ ,\ \log ۲ \simeq ۰/۳۰۱)$.

الف) $\log(۱۸\times۳۷۵)=\log ۱۸+\log۳۷۵=\log۲+۲\log۳+۳\log۵+\log۳$

$$=\log۲+۳\log۳+۳\log۵$$

$$\simeq ۰/۳+۳\times۰/۴+۳\,(۱-۰/۳)$$

$$=۳/۶$$

ب) $\log\sqrt{۰/۷۵}=\frac{۱}{۲}[\log۷۵-\log۱۰۰]$

$$=\frac{۱}{۲}[\log۳+۲\log۵-۲]$$

$$\simeq\frac{۱}{۲}[۰/۴+۲(۱-۰/۳)-۲]$$

$$=-۰/۱$$

پ) $\log_۲\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}}=\log_۲ ۲^{\frac{۲}{۳}}\div۲^{\frac{۱}{۴}}=\log_۲ ۲^{\frac{۵}{۴}}=\frac{۵}{۴}\log_۲ ۲=\frac{۵}{۴}$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

✓ $\log_b a\times\log_a b=۱$ × $\log ۵=\log ۳+\log ۲$

$$\frac{\log a}{\log b}\times\frac{\log b}{\log a}=۱$$

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$$m(t)=۱۲۸\times۲^{\frac{-t}{۳۰}}$$

$$m(۳۰۰)=۱۲۸\times۲^{-\frac{۳۰۰}{۳۰}}=۱۲۸\times۲^{-۱۰}=۰/۱۲۵$$ میلی گرم

نمونه تمرین‌های حل شده

کدام‌یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است.

الف) $f(x)=(۲x-۱)^{۲}$ ب) $g(x)=\frac{۲^x}{۳^x}$ پ) $h(x)=(۰/۰۰۱)^x$

ت) $t(x)=x^{\frac{۱}{۵}}$ ث) $r(x)=(-۲)^x$

حل : طبق تعریف، هر تابع به‌صورت $y=a^x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابعی نمایی است.

الف) همان‌طور که ملاحظه می‌شود،تابع، صورت کلی تابع نمایی را ندارد. پس $f(x)$ تابع نمایی نیست. چون دانش‌آموزان با تابع درجه ۲ آشنا هستند. برای رد این قسمت، می‌توان از رسم تابع نیز استفاده کرد.

ب) $g(x)=\frac{۲^x}{۳^x}=(\frac{۲}{۳})^x$

$a=\frac{۲}{۳}>۰$ و $a\neq ۱$. پس این تابع نمایی است زیرا به‌صورت $y=a^x$ است.

پ) $h(x)=(۰/۰۰۱)^x$

$a=۰/۰۰۱>۰$ و $a\neq ۱$. پس این تابع نمایی است زیرا به‌صورت $y=a^x$ است.

ت) $t(x)=x^{\frac{۱}{۵}}$

در تعریف تابع نمایی، پایه یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است ولی در تابع $t(x)$، پایه، یک متغیر است. پس این تابع نمایی نیست.

ث) در تابع $r(x)$، $a=-۲$ عددی منفی است پس $r(x)$ شرط لازم در تعریف تابع نمایی را ندارد.

بین اعداد $۲^{۳/۱}$ و $۲^{\sqrt{۷}}$ سه عدد پیدا کنید

می‌دانیم اگر دو عدد حقیقی مثبت توان‌دار پایه‌های برابر داشته باشند، هرچه توان بزرگ‌تر می‌شود، عدد هم بزرگ‌تر می‌شود از این خاصیت در پاسخ این سؤال استفاده می‌کنیم.

$\sqrt{۷}$ عددی گنگ با تقریب ۲/۶ است.

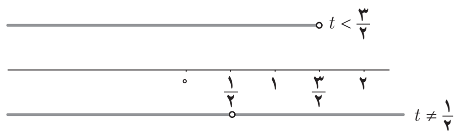
$$۲^{\sqrt{۷}=۲/۶}<۲^{۳/۱}$$

همه اعداد به‌صورت ۲^a که در آن $۲/۶<a<۳/۱$ بین دو عدد مذکور واقع هستند. پس اعداد $۲^{۲/۷}$، $۲^{۲/۸}$ و $۲^{۲/۸۱}$ و $۲^{۲/۸۱۲}$ و ... همگی جواب‌های مسئله‌اند.

■ حدود t را چنان بیابید که تابع $y=(\frac{۳}{۲}-t)^x$ یک تابع نمایی باشد.
طبق تعریف تابع نمایی به‌صورت $y=a^x$، a باید عددی مثبت و مخالف یک باشد پس

$-- >$ و $\frac{۳}{۲}-t\neq ۱$

$\frac{۳}{۲}>t$ و $-\neq$



که از اشتراک جواب‌های حاصل نتیجه می‌شود. $t\in(-\infty,\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$

■ کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ واقع است؟

الف) $(۰/۵,\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ ب) $(۰\ ,\ ۲)$ پ) $(-۲\ ,\ ۴)$

حل :

$$(۵,\frac{\sqrt{۲}}{۲})\to\frac{\sqrt{۲}}{۲}\overset{?}{=}(\frac{۱}{۲})^{۰/۵=\frac{۱}{۲}}$$

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۲]{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=(\frac{۱}{۲})^{۰/۵}$$

و نقطه $(۰/۵,\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ روی نمودار تابع f واقع است.

ب) $(۰,۱)\to ۲\overset{?}{=}(\frac{۱}{۲})^{۰}$

$$(\frac{۱}{۲})^{۰}=۱\Rightarrow ۲\neq(\frac{۱}{۲})^{۰}$$

پس نقطه $(۰\ ,۲)$ روی نمودار تابع f قرار ندارد.

پ) $(-۲,۴)\to ۴\overset{?}{=}(\frac{۱}{۲})^{-۲}$

$$(\frac{۱}{۲})^{-۲}=۲^{۲}=۴\Rightarrow ۴=(\frac{۱}{۲})^{-۲}$$

پس نقطه $(-۲ , ۴)$ روی نمودار تابع f قرار دارد.

نامعادله توانی $۳^{۵x-۲} > \frac{۱}{۷۲۹}$ را حل کنید.

$$۳^{۵x-۲} > \frac{۱}{۷۲۹}$$

از تجزیه ۷۲۹ داریم $۷۲۹ = ۳^{۶}$

پس مسئله به‌صورت $۳^{۵x-۲} > (\frac{۱}{۳})^{۶}$ بازنویسی می‌شود. همچنین $۳^{۵x-۲} > (۳^{-۱})^{۶}$ در نتیجه $۳^{۵x-۲} > ۳^{-۶}$. از آنجا که پایه‌ها مثبت و برابر ۳ هستند. این نامساوی با شرط $۵x-۲>-۶$ صحیح است و

جواب این نامعادله به‌صورت $x > -\frac{۴}{۵}$ است.

ــ اگر سه تابع نمایی به‌صورت $f(x) = ۳^{x}$ و $g(x) = (\frac{۱}{۳})^{x}$ و $h(x) = ۲^{x}$ داشته باشیم حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(\frac{۱}{۲})$ ب) $g(-۳)$ پ) $h(-۲) + g(-۱)$

ت) $(۳g + h)(۱)$ ث) $\frac{۵}{۲}h(۲) + \frac{۱}{۳}g(-۲)$

الف) $f(\frac{۱}{۲}) = ۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$

ب) $g(-۳) = ۳^{-۳} = (۳^{-۱})^{۳} = (\frac{۱}{۳})^{۳} = \frac{۱}{۲۷}$

پ) $h(-۲) + g(-۱) = ۳^{-۲} + (\frac{۱}{۳})^{(-۱)} = (\frac{۱}{۳})^{۲} + ۳ = \frac{۱}{۹} + ۳ = \frac{۲۸}{۹}$

ت) $(۳g + h)(۱) = ۳g(۱) + h(۱) = ۳((\frac{۱}{۳})^{۱}) + ۲^{۱} = ۱ + ۲ = ۳$

ث) $\frac{۵}{۲}h(۲) + \frac{۱}{۳}g(-۲) = \frac{۵}{۲}(۲^{۲}) + \frac{۱}{۳}((\frac{۱}{۳})^{-۲})$

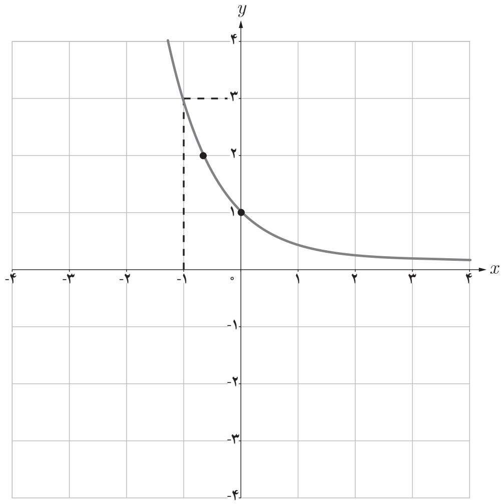
$= ۱۰ + ۳$

$= ۱۳$

■ ضابطه تابع نمایی زیر را به‌دست آورید.

صورت کلی تابع نمایی به‌صورت $y = a^x$ ($a>۰$ و $a\neq۱$) نقطه $(-۱\ ,\ ۳)$ را در معادله قرار می‌دهیم تا مقدار a به‌دست آید.

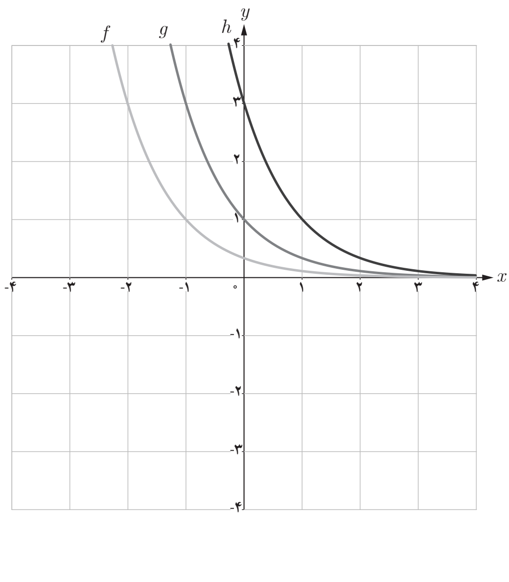
$$۳ = a^{-۱} \to a = \frac{۱}{۳}$$



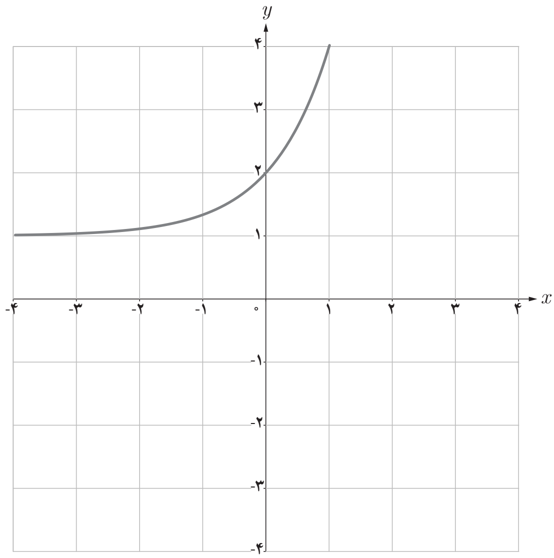
نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۳

۱ نمودار سه تابع نمایی دو دستگاه مختصات رسم شده است. در بین ۵ ضابطه‌ای که می‌بینید ضابطه هر تابع را معلوم کنید.

$$۹^x\ ,\ ۳^{-x}\ ,\ \frac{۱}{۳}\times۳^{-x}\ ,\ ۳^{۱-x}\ ,\ ۳^{۱+x}$$



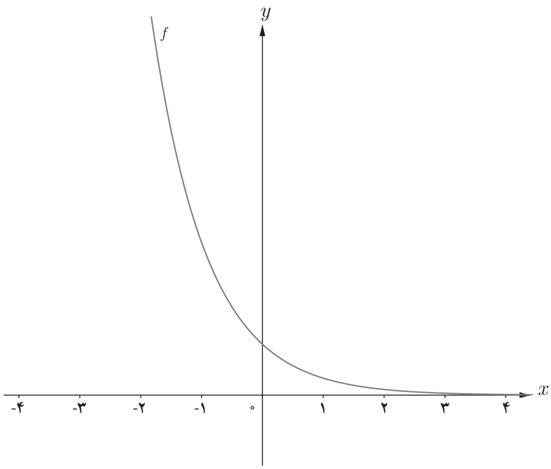
۲ نمودار زیر متعلق به تابعی با ضابطه $y = ۳^{ax} + b$ است. مقدارهای ممکن a را بیابید.



۳ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۲^{x} + ۱$ ب) $y = ۲^{-x} - ۱$ پ) $y = ۲^{x-۳}$

۴ اگر f یک تابع نمایی باشد محل تقاطع نمودار f با محور yها را به‌دست آورید.



۵ اگر $۳۱۲۵ > ۵^{۳a+۲} > \frac{۱}{۶۲۵}$، حدود a را به‌دست آورید.

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۱} = \frac{۱}{۹}$

ب) $(\frac{۱}{۵})^{۱+x} = ۶۲۵$

پ) $۴^{x-۱} = ۸ \times ۱۶^{۳x+۱}$

ت) $۳^{x+۱} + ۳^{x+۲} + ۳^{x+۳} = ۲۷$

ث) $۷^{۲x-۳} \times ۷^{۲x-۳} = ۴۹$

ج) $۲^{x-۵} + ۲^{x-۵} = ۱۶$

۷ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $۱۱^{x+۱} = (۱۲۱)^{x-۳}$

۸ نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ در چند نقطه نمودار تابع $f(x) = x - ۲$ را قطع می‌کند؟

۹ نمودار تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ و وارون آن را رسم کرده و مختصات محل تقاطع هر یک با محورهای مختصات را مشخص کنید. سپس فاصله نقاط تقاطع را از یکدیگر به دست آورید.

۱۰ اگر $f(x) = ۲^x$ و $g(x) = ۵^x$، حاصل $fog(۱)$ را به‌دست آورید.

۱۱ نمودار توابع لگاریتمی زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = -۲ + \log_۲ x$

ب) $g(x) = \log_۲ (x-۱)$

پ) $h(x) = -۲ + \log_۲ (x-۱)$

۱۲

الف) حدود a را در تابع $f(x) = \log_{۳a-۵} ۲$ تعیین کنید.

ب) $g(x) = \log_{۹x-۲} ۳x+۱$ یک تابع لگاریتمی است حدود x را به‌دست آورید.

۱۳ دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x) = \log_۲ \frac{|x|}{|x|+۱}$

ب) $g(x) = \log_۵ (x^۲ + ۲)$

پ) $h(x) = ۱ + ۲^x$

ت) $r(x) = ۲^{x-۱}$

۱۴ اگر $\log_۵ ۳ = x$ و $\log_۵ ۷ = y$ حاصل $\log_{۲۵} ۲۱$ را برحسب x و y بنویسید.

۱۵ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید $(a = \log_{۱۰} ۲)$

الف) $\log_{۱۰} ۴ \times \log_{۱۰} ۱۲۵ + (\log_{۱۰} ۵)^۲$

ب) $\log_{۱۰} \frac{۱۲۵}{۱۰۰۰} - \log_{۱۰} ۰/۲۴ + \log_{۱۰}(\log_{۱۰} ۱۰۰۰۰)$

۱۶ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

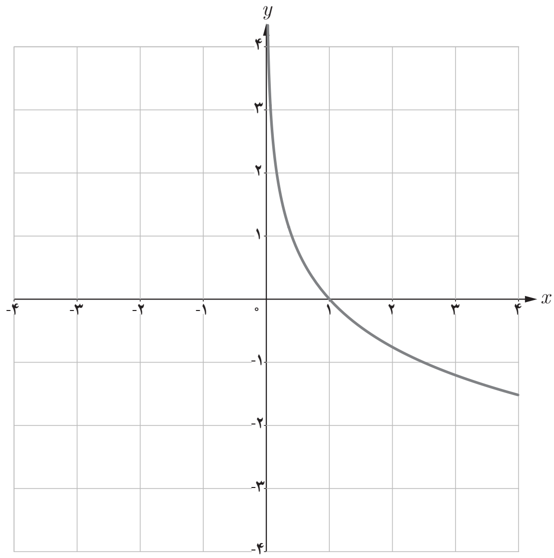
الف) $\log_{۹}(x^{۲}-۳)=\log_{۹} x$ ب) $\log_{x} ۹ = ۲$

پ) $\log_{۶}(x^{۲}-۳x)=۲\log_{۶}\sqrt{۲x+۱۴}$ ت) $\log_{۳} ۳+\log_{۲}(\frac{۲x-۱}{۲x+۱})=۱$

ث) $\log_{۱۰}(۲x-۱)+\log_{۱۰}(x-۱)=۱+۲\log_{۱۰} ۵$ چ) $\log_{۳}\sqrt{x+۲}\times\log_{۳}\sqrt{x-۲}=\frac{۱}{۲}$

ج) $\begin{cases}\log_{۵} a+\log_{۵} b=۰\\ a+b=۷\end{cases}$

۱۷ اگر نمودار تابع $y=\log_{۲a+۱} x$ به‌صورت زیر باشد حدود a را تعیین کنید.



۱۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه تابع $f(x)=\log_{a} x$ با دامنه تابع $g(x)=a^{x}$ برابر است.

ب) تابع $f(x)=\log_{a} x$ یک به یک است.

پ) توابعی به شکل $f(x)=a^{x}+b$ ($a>۰$ و $a\neq۱$) رفتار نمایی دارند.

ت) حاصل $f(x).f(-x)$ با فرض نمایی بودن تابع f برابر ۱ است.

۱۹ نقطه $x=\sqrt{۳}$ را روی محور xها مشخص کنید و سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۳}}$ را با استفاده از نمودار $y=۲^x$ پیدا کنید.

۲۰ تابع $y=۰/۳\times ۳^x$ را رسم کنید.

۲۱ اگر $۰< a<۱$ و x و y و z سه عدد حقیقی باشند به‌طوری که $x>y>z$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین a^x، a^y و a^z برقرار است؟

۲۲ نمودار تابع $y=\log_۳ x$ را رسم کنید و آن را با $y=۳^x$ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

۲۳ نمودار توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲^x$ را رسم کنید و نقطه تقاطع آنها را به‌دست آورید. تعبیر هندسی آن را بیان کنید.

۲۴ اگر $a=\log ۲$ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$\log ۱۰۰۰\ ,\ \log ۰/۰۰۸\ ,\ \log ۵۰۰$

۲۵ معادلات لگاریتمی زیررا حل کنید.

الف) $\log_۳ x+\log_۳(x-۲)=۱$ ب) $\log_۳(x^۳-۱)=\log_۳(x-۱)+۱$

ج) $\log_۲\dfrac{x+۱}{x-۱}=۱$ د) $\log x+\log x^۲+\log x^۳+\cdots+\log x^n=n(n+۱)$

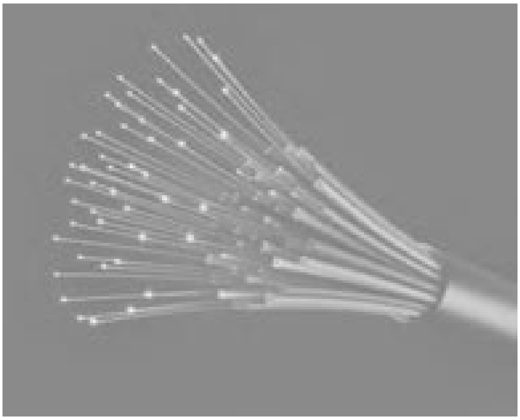
۲۶ نشان دهید $a^{\log_a x}=x$.

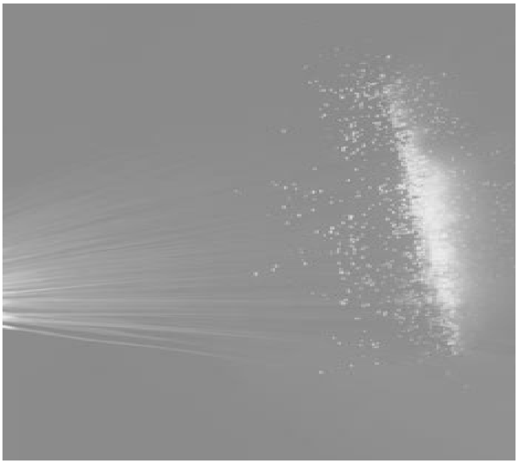
معرفی منابع

آدام هارت دیویس، تاریخ علم از دوران باستان تا انقلاب صنعتی، انتشارات سبزان، مترجمان شادی مشکات السادات، سارا فروغی اصل

مثلثات

فصل ۴





فیبرهای نوری برای انتقال داده‌ها با سرعت بسیار بالا به‌ویژه در خطوط اینترنت استفاده می‌شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی شبیه‌سازی شوند.
معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می‌شود.

نگاه کلی به فصل

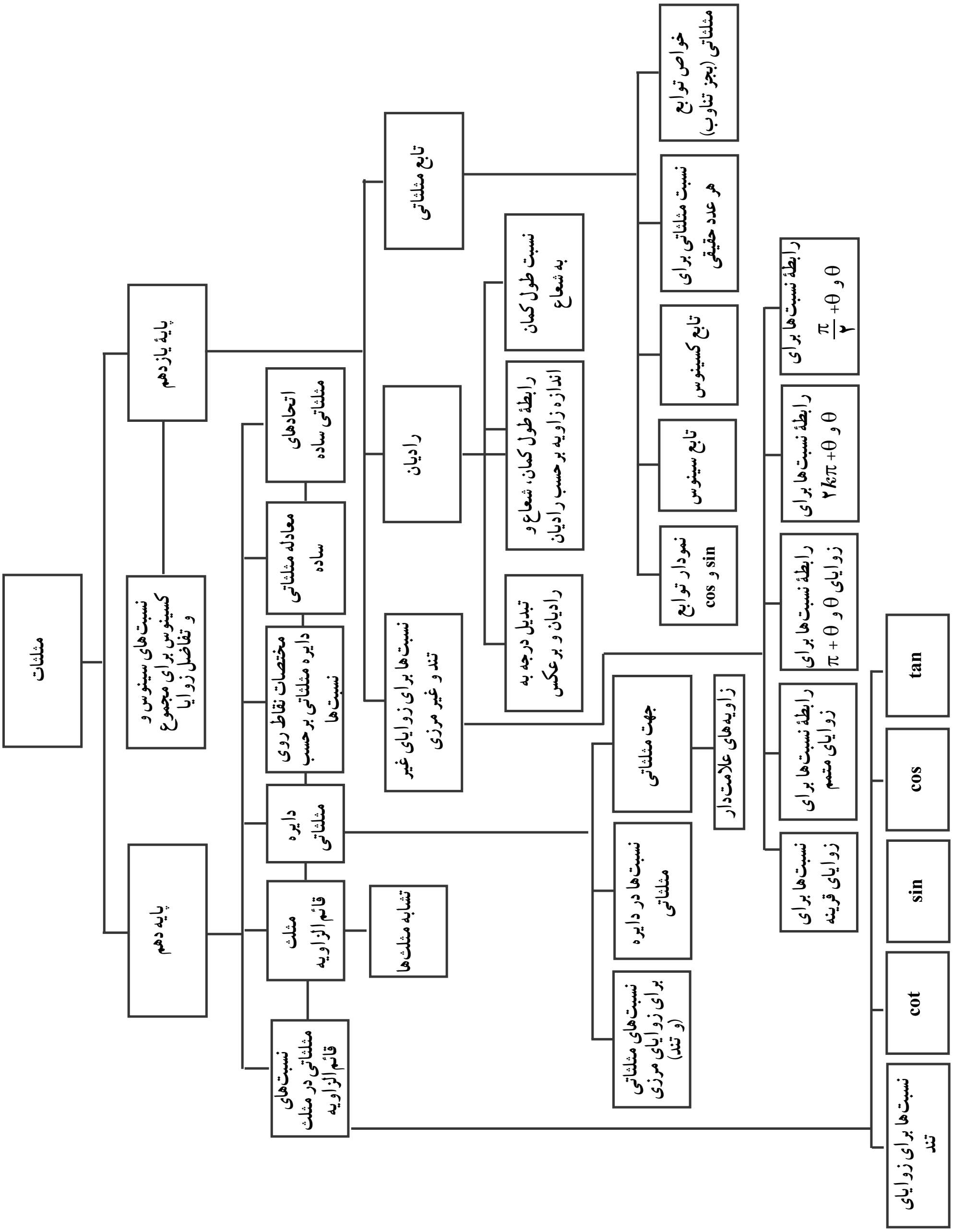
این فصل در ادامه بحث مثلثات کتاب پایهٔ دهم آمده است. در پایهٔ دهم دانش‌آموزان با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شده و سپس به تعریف این نسبت‌ها در دایره مثلثاتی پرداخته شده است. همچنین مفهوم زاویهٔ مثلثاتی و جهت مثلثاتی آموزش داده شده است. در ادامه همان فصل از کتاب دهم، آشنایی مقدماتی با برخی معادلات مثلثاتی و اتحادهای مثلثاتی صورت گرفته است. همه مفاهیم فوق برای زوایای تند ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و زوایای مرزی ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° انجام گرفته است.

در فصل چهارم از کتاب حسابان ۱ پایهٔ یازدهم ادامه مباحث فوق دنبال می‌شود. به‌طورکلی این فصل بر دو مفهوم اصلی «رادیان» و «تابع مثلثاتی» و یک مهارت اصلی «یافتن مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای زوایای غیرتند و غیرمرزی» تمرکز دارد. بدیهی است در خلال یادگیری این دو مفهوم و مهارت اصلی، دانش‌آموز با خرده مفاهیم و مهارت‌های دیگری نیز آشنا می‌شود.

دو مفهوم اساسی گفته شده در بالا به‌ترتیب در درس‌های اول و سوم مطرح شده است. درس دوم به مهارت اساسی مورد اشاره می‌پردازد. از آنجا که مفاهیم مهارت‌های مدنظر این فصل در ارتباط تنگاتنگ با یکدیگر هستند سعی شده است تابه نوعی پیوستگی بین این مفاهیم و مهارت‌ها لحاظ شود. مثلاً تعمداً مهارت فوق‌الذکر را در درس دوم طرح کرده تا از آن در درس سوم که به مفهوم تابع مثلثاتی می‌پردازد استفاده شود. بنابراین رعایت تقدم و تأخر در ارائه ادامه مطالب به صورتی که در کتاب آمده ضروری است. نکته مهم دیگر این است که وصل کردن مفاهیم به یکدیگر گرچه یادگیری را معنادار و ماندگار می‌کند لیکن نباید در این زمینه افراط شود چرا که ضعف احتمالی دانش‌آموز در یک مفهوم در یادگیری مفاهیم دیگر ایجاد مانع می‌کند. بنابراین رعایت اعتدال در اتصالات مفهومی ضروری است. به عنوان مثال رابطه بین طول کمان، شعاع و اندازه زاویه برحسب رادیان ($\theta = \frac{l}{r}$) که در درس اول این فصل مطرح شده گرچه با مفهوم رادیان در ارتباط است لیکن همانطورکه در مثال‌های این درس آمده، دانش‌آموز می‌تواند طول کمان روبه‌رو به یک زاویه را بدون دانستن اندازهٔ زاویه برحسب رادیان و تنها با یک نسبت و تناسب ساده (و بدون تبدیل از درجه به رادیان) به‌دست آورد. بنابراین اصرار برحفظ این فرمول و تبدیل اندازه زاویه از درجه به رادیان و سپس به‌کارگیری فرمول غیرضروری سبب ایجاد درکی ناقص از این رابطه می‌شود.

در توضیح تصویر عنوان فصل باید گفت که توابع مثلثاتی که موضوع اصلی و محوری این فصل می‌باشد در آنالیز فوریه نقش کلیدی دارند. از بسط‌های فوریه که براساس توابع مثلثاتی هستند برای مدل‌سازی امواج نوری در فوتونیک استفاده بسیار می‌شود. یکی از کاربردهای بسط‌های فوریه در مدل‌سازی فیبرهای نوری است.

نقشه مفهومی فصل ۴



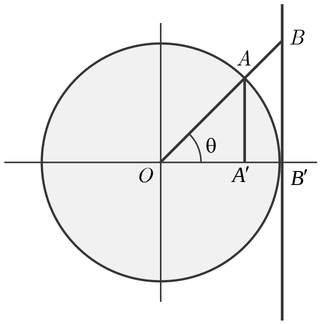
درس ۱
رادیان

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم رادیان
۲ درک و استفاده از رابطه بین طول کمان، شعاع دایره و اندازه زاویه برحسب رادیان
۳ توانایی تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه رادیان) به یکدیگر

یکی از سؤالات اساسی مبحث مثلثات لزوم استفاده از واحد رادیان به‌جای درجه است. این سؤال اغلب از سوی دانش‌آموزان مطرح می‌شود که چرا باید از رادیان به‌جای زاویه استفاده کنیم. از زاویه دید آموزشی گام اول در آموزش یک مفهوم ایجاد انگیزه در یادگیرنده است و چنانچه دانش‌آموز به نحو مناسبی احساس نیاز به یادگیری مفهوم جدید نکرده و برانگیخته نشود در ادامه بحث نیز با کلاس درس همراهی نخواهد کرد. متأسفانه در مورد برخی مفاهیم ریاضی از جمله واحد رادیان امکان پاسخ‌گویی دقیق به این سؤال برای دانش‌آموز وجود ندارد. دلیل این امر نیاز به دانستن برخی مفاهیم دیگر است که هنوز دانش‌آموز با آنها آشنایی ندارد. در واقع عمده مفاهیم زمانی که در یک شبکه مفهومی ارائه می‌شوند معنا پیدا می‌کند و لزوم آموزش هر کدام هویدا می‌شود. ولی در فرایند آموزش ناچاراً باید تقدم و تأخری (ولو مصنوعی) را برای ارائه بخش‌های مختلف یک شبکه مفهومی در پیش گرفت تا دانش‌آموز به یکباره با حجمی زیاد از مفاهیم مواجه نشود. از این رو لزوم یادگیری برخی مفاهیم در زمان آموزش آنها به‌طور کامل قابل بیان نیست. برخی مفاهیم مثلثاتی از جمله رادیان از این دست است. واحد درجه هنگامی که با مسائل هندسی مواجه می‌شویم اغلب کافی و حتی مناسب‌تر است. در این نوع مسائل اغلب بحث از نسبت‌های مثلثاتی است (که معمولاً به‌صورت نسبت اضلاع در یک مسئله هندسی ظاهر می‌شوند) و نه تابع مثلثاتی به مفهومی که در جبر و آنالیز مطرح است. مفهوم رادیان هنگامی که می‌خواهیم عملیات‌های آنالیزی مانند مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بر روی توابع مثلثاتی انجام دهیم مناسب‌تر است و موجب ساده‌تر شدن روابط می‌شود. در این موارد چنانچه تابع مثلثاتی را برحسب درجه تعریف کرده باشیم اغلب هنگام مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ضرایبی تولید می‌شود که در محاسبات آزاردهنده است.

θ برحسب رادیان :



$$\text{برحسب رادیان}\ \theta = \frac{s}{R}$$

$$\frac{\text{رادیان}\ \theta_r}{\pi} = \frac{\text{درجه}\ \theta_O}{۱۸۰}$$

با توجه به اصول هندسی می‌توان نشان داد که (به مساحت مثلث‌ها و قطاع ایجاد شده توجه کنید.)

$$\begin{cases} AA' = \sin\theta \\ BB' = \tan\theta \\ \widehat{AB'} = \text{طول کمان} = \underbrace{\theta}_{\text{زاویه برحسب رادیان}} \underbrace{R''}_{\text{شعاع}} = \theta \end{cases}$$

$$AA' < \widehat{AB'} < BB'$$

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \xrightarrow{\theta\neq ۰ \Rightarrow \sin\theta\neq ۰} \frac{\sin\theta}{\sin\theta} < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{\tan\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow ۱ < \frac{\theta}{\sin\theta} < \cos\theta \overset{\text{معکوس‌سازی}}{\Rightarrow} \frac{۱}{\cos\theta} < \frac{\sin\theta}{\theta} < ۱$$

$$\overset{\text{قضیه فشردگی}}{\Rightarrow} \lim_{\theta\to ۰} \frac{۱}{\cos\theta} < \lim_{\theta\to ۰} \frac{\sin\theta}{\theta} < \lim_{\theta\to ۰} ۱ \Rightarrow ۱ < \lim_{\theta\to ۰} \frac{\sin\theta}{\theta} < ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to ۰} \frac{\sin\theta}{\theta} = ۱$$

θ برحسب درجه :

$$\frac{\text{رادیان}\ \theta_r}{\pi} = \frac{\text{درجه}\ \theta_d}{۱۸۰} \Rightarrow \text{رادیان}\ \theta_r = \frac{\pi}{۱۸۰}\theta_d$$

$$\widehat{AB'} = \text{طول کمان روبه‌رو به}\ \theta = \underset{\text{رادیان}}{\theta} R = \frac{\pi}{۱۸۰}\theta_d R = \frac{\pi}{۱۸۰}\theta_d$$

مشابه قبل داریم :

$$AA' < \widehat{AB'} < BB' \Rightarrow \sin\theta_d < \frac{\pi}{۱۸۰}\theta_d < \tan\theta_d$$

$$\xrightarrow{\theta_d \neq \theta^\circ_\circ \Rightarrow \sin\theta_d \neq ۰} \frac{\sin\theta_d}{\sin\theta_d} < \frac{\pi}{۱۸۰} < \frac{\theta_d}{\sin\theta_d} < \frac{\tan\theta_d}{\sin\theta_d}$$

$$\Rightarrow ۱ < \frac{\pi}{۱۸۰}\frac{\theta_d}{\sin\theta_d} < \cos\theta_d \overset{\text{معکوس‌سازی}}{\Rightarrow} \frac{۱}{\cos\theta_d} < \frac{۱۸۰}{\pi}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} < ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta_d\to ۰}\frac{۱}{\cos\theta_d} < \lim_{\theta_d\to ۰}\frac{۱۸۰}{\pi}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} < \lim_{\theta_d\to ۰} ۱$$

$$\Rightarrow ۱ < \frac{۱۸۰}{\pi}\lim_{\theta_d\to ۰}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} < ۱ \overset{\text{قضیه فشردگی}}{\Rightarrow} \frac{۱۸۰}{\pi}\lim_{\theta_d\to ۰}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} = ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta_d\to ۰}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} = \frac{\pi}{۱۸۰}$$

اکنون به مشتق تابع $y=\sin x$ توجه کنید.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\,\overset{۱}{\cancel{\cos h}} + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{\sin x} + \cos x\sin h - \cancel{\sin x}}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\cos x\sin h}{h} = \cos x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$$

اکنون بسته به اینکه در تابع $y=\sin x$ متغیر x و به تبع آن متغیر h را برحسب رادیان گرفته‌ایم یا درجه حد $\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$ می‌تواند متفاوت باشد و لذا برای مشتق تابع $y=\sin x$ خواهیم داشت

$$\cos x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}\begin{cases} x \text{ و } h \text{ برحسب رادیان} \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\dfrac{\sin h}{h} = ۱ \Rightarrow (\sin x)' = \cos x \\ x \text{ و } h \text{ برحسب درجه} \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\dfrac{\sin h}{h} = \dfrac{\pi}{۱۸۰} \Rightarrow (\sin x)' = \dfrac{\pi}{۱۸۰}\cos x \end{cases}$$

اکنون فرض کنید که بخواهیم از تابعی که شامل توابع مثلثاتی متعدد است مشتق بگیریم. در این صورت ضرایب مختلفی ایجاد خواهد شد که به‌ویژه در مشتقات مراتب بالاتر باعث پیچیده شدن غیرضروری عبارت می‌شوند. به‌هرحال ذکر دلایل فوق برای دانش‌آموزان ممکن نیست و باید به طریق دیگری لزوم استفاده از رادیان مطرح شود.

به‌هرحال باید یادآور شد که در هر مسئله‌ای که بتوان از درجه استفاده کرد قطعاً همان مسئله با مفهوم رادیان نیز قابل حل است و برعکس (از رابطه تبدیل واحدها استفاده کنید) و هدف تنها ساده‌سازی روابط است. این مشابه استفاده از دو واحد سانتی‌گراد و فارنهایت برای دما است. بدیهی است که همه مسائل فیزیکی را با هر دو می‌توان حل کرد اما گاهی استفاده از یکی راحت‌تر است. از آنجا که در درس اول از این فصل هنوز بخشی راجع به تابع مثلثاتی و همچنین مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مطرح نشده، بنابراین بیان دلیل اصلی معرفی و لزوم استفاده از واحد رادیان ساده نیست.

روش تدریس

به هر حال برای ایجاد انگیزه سؤالی در فعالیت اول این درس مطرح شده که از دانش‌آموز کشف رابطه‌ای بین اندازه زاویه و طول کمان روبه‌رو به آن مطالبه شده است و نهایتاً مفهوم رادیان در پایان این فعالیت تولید می‌شود. توصیه می‌شود که قبل از ورود به فعالیت توضیح چندانی راجع به دلیل معرفی رادیان داده نشود و به‌جای آن به فعالیت پرداخته شود.

فعالیت ص ۹۲

در سؤال ۱ از این فعالیت ابتدا از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا طول ضلع PQ را با اطلاعات داده شده در شکل به‌دست آورند. این سؤال فرصتی برای مرور مفاهیم سال گذشته فراهم می‌کند. توصیه می‌شود که چنانچه دانش‌آموز برخی مفاهیم سال گذشته را فراموش کرده در همین‌جا توقف کوتاهی صورت گرفته و در چارچوب این سؤال مفاهیم یادآوری شود.

مثلاً پاسخ این سؤال مستلزم استفاده از نسبت سینوس است. اما معلم می‌تواند از دانش‌آموز طول ضلع OQ را نیز مطالعه کند تا نسبت کسینوس نیز یادآوری شود. همین‌طور می‌توان نسبت‌های دیگر را درخواست کرد و سپس برای زاویه دیگری از شکل یعنی زاویه $O\hat{P}Q$ همان روابط را جویا شد. پس از حصول اطمینان از یادآوری مطالب سال گذشته به‌صورت سریع و اشاره‌وار مجدداً به جریان اصلی فعالیت باز می‌گردیم. در سؤال ۱ محاسبه طول ضلع روبه‌رو به زاویه α خواسته شده بود که با نسبت سینوس قابل محاسبه است. در سؤال ۲ از دانش‌آموز خواسته می‌شود که با همان داده‌ها طول کمان روبه‌رو به همان زاویه را بیابد. گرچه یک دانش‌آموز تیزهوش با دانش قبلی خود و بدون مدد از مفهوم رادیان می‌تواند این رابطه را کشف کند لیکن سطح این مسئله برای دانش‌آموزان متوسط به حد کافی چالشی و برانگیزاننده است و لزوم ارائه مفهوم جدیدی به نام رادیان را در ذهن آنها منطقی جلوه می‌دهد. این فعالیت به‌صورت گام‌به‌گام به سمت معرفی رادیان حرکت می‌کند. این سؤال در ادامه پاسخ داده شده و از دانش‌آموزان خواسته شده تا به‌طور مشابه محاسبات را برای دایره‌های دیگری انجام دهند (قسمت الف سؤال ۲).

محاسبات قسمت ب اندک‌اندک دانش‌آموزان را به این سو سوق می‌دهد که برای کشف رابطهٔ بین اندازه زاویه و طول کمان روبه‌رویش می‌بایست اندازه زاویه را به‌گونه‌ای دیگر بیان کنیم. ادامه فعالیت در واقع به دانش‌آموز پیشنهاد می‌کند که نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه به طول شعاع دایره می‌تواند معیاری جایگزین برای اندازه‌گیری زاویه باشد چرا که مستقل از دایره است و تا زمانی که اندازه زاویه تغییر نکند این نسبت نیز تغییر نمی‌کند (در دایره‌های با شعاع مختلف نسبت یکسان است). دانش‌آموز با تعمیم این نسبت به حالت کلی (یعنی در هر دایره دلخواه) مطمئن می‌شود که مادامی که زاویه تغییر نکند، این نسبت نیز تغییر

نمی‌کند و لذا می‌تواند معیاری برای اندازه‌گیری زاویه باشد که با این نوع اندازه‌گیری، ارتباط بین زاویه و طول کمان روبه‌رو به آن به‌طور طبیعی پیدا می‌شود (البته با وساطت طول شعاع). در پایان فعالیت این نسبت را که برای حالت تعمیم یافته (یعنی در دایره دلخواه) بررسی شد برای زاویه‌ای خاص که همان زاویه یک رادیان است بررسی می‌کنیم. این به آن دلیل است که در ریاضیات رادیان را تعریف نمی‌کنند بلکه «یک رادیان» را تعریف می‌کنند. یادآور می‌شود که سیر فعالیت به‌صورت زیر قابل بخش‌بندی است.

گام اول : یافتن نسبت طول کمان به شعاع برای یک زاویه خاص (برحسب درجه) در یک دایره خاص (به شعاع ۲) : سادگی محاسبات

گام دوم : یافتن نسبت برای همان زاویه (برحسب درجه) در یک دایره تعمیم یافته (شعاع r) : استقلال مفهوم از ابعاد دایره

گام سوم : یافتن نسبت برای یک زاویه خاص (این بار برحسب رادیان است و اندازه آن برحسب درجه داده نشده است) در یک دایره تعمیم یافته : مفهوم یک رادیان.

پس از فعالیت، تعریف ریاضی یک رادیان که پیش از آن در بخش پایانی فعالیت کشف شده است به‌طور صریح آورده شده است. سپس زوایای ۱ تا ۶ رادیان را رسم کرده تا اختلاف بین واحدهای رادیان و درجه برجسته‌تر شود و شهود اولیه دانش‌آموزان از رادیان کامل‌تر شود. در ادامه بر مبنای بحث‌های صورت‌گرفته در فعالیت، رابطه بین اندازه زاویه برحسب رادیان و نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه به شعاع و نیز به رابطه تبدیل درجه به رادیان و برعکس پرداخته شده و مثال‌هایی برای هر کدام آورده شده است. برای پرهیز از حفظ صرف فرمول‌ها ابتدا مثال‌ها آورده شده و برمبنای دانش کسب شده در فعالیت‌ها و مثال‌ها به‌رابطه‌ها پی برده و نهایتاً در پایان تصریح شده است. بنابراین لازم است تا به همین شیوه دانش‌آموزان در مسیر کشف رابطه‌ها هدایت شوند و نه صرفاً با مواجه آنی و تکیه برحفظ کردن مکانیکی روابط، این مفاهیم منتقل شوند.

کار در کلاس ص۹۵

در این کار در کلاس دانش‌آموزان زاویه‌هایی را که در مثلثات پایهٔ دهم فراگرفته مجدداً بررسی می‌کنند و ضمن یادآوری مفاهیم قبلی با تبدیل زاویه‌ها به رادیان مفاهیم فراگرفته شده در این درس را مرور می‌کنند.

در کتاب درسی ممکن است تعداد و تنوع مثال‌ها کافی نباشد. همکاران گرامی می‌توانند با ارائه مثال‌های بیشتر و متناسب با سطح دانش‌آموزان خود و نیز رعایت اصول مدنظر کتاب، این بخش را غنی‌تر کنند. نکته مورد تأکید در اینجا استفاده از مثال‌های کاربردی است.

۱ در زیر برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

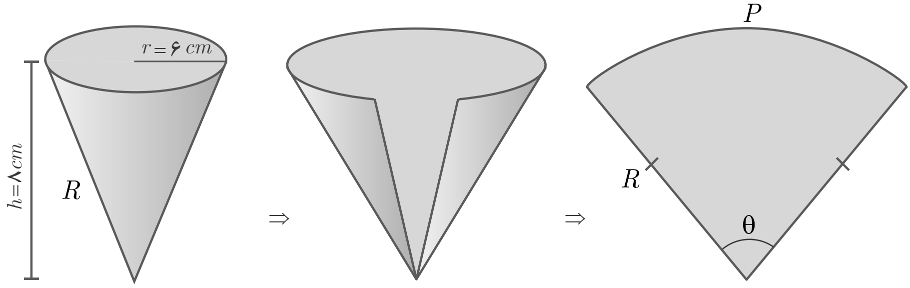
الف) $\frac{۲\pi}{۶} = \theta_۶$ ب) $\frac{۲\pi}{۵} = \theta_۳$ پ) $\frac{۲\pi}{۴} = \theta_۵$ ت) $\frac{۲\pi}{۳} = \theta_۴$ ث) $\frac{۲\pi}{۲} = \theta_۱$

ج) $۲\pi = \theta_۲$ چ) $۳\pi = \theta_۸$ ح) $۴\pi = \theta_۷$ خ) $۵\pi = \theta_۹$ د) $۶\pi = \theta_{۱۰}$

حل تمرین‌های برگزیده

۲ شکل فضایی و گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط r=۶cm و ارتفاع آن h=۸cm می‌باشد. اندازهٔ زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

رابطه فیثاغورس : $\begin{array}{l} R = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰ \\ P = ۲\pi \times ۶ = ۱۲\pi \end{array} \Rightarrow \theta = \frac{P}{R} = \frac{۱۲\pi}{۱۰} = \frac{۶\pi}{۵} rad$



درس ۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

اهداف درس

۱ رابطه مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

۲ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه و مکمل

۳ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{\pi}{۲}+\theta$

گاهی بین دو زاویه ارتباطی وجود دارد، در این صورت معمولاً بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی آنها نیز رابطه‌ای برقرار است. اهمیت درک این ارتباط‌ها به دو دلیل عمده برمی‌گردد. دلیل اول آن است که درک و استفاده از این روابط بعداً در حل معادلات مثلثاتی نیاز می‌شود. از سوی دیگر برای پیدا کردن مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای غیرتند و غیرمرزی (مثلاً زاویه ۱۲۰° که پرکاربرد نیز است) نیاز به دانستن این روابط می‌باشیم.

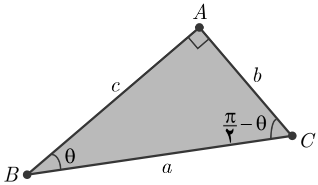
روش تدریس

فعالیت ص ۹۸

این فعالیت به کشف رابطه بین مقادیر نسبت‌های مثلثاتی برای دو زاویه متمم می‌پردازد. دقت شود که در مورد زاویه‌های متمم خود رابطه مهم است و از این رابطه برای محاسبه استفاده نمی‌شود. مثلاً این‌گونه نیست که برای یافتن مقدار $\sin ۶۰^\circ$ ابتدا مقدار $\cos ۳۰^\circ$ را یافته و سپس از طریق رابطهٔ بین این دو به

مقدار $\sin 60^\circ$ دست یابیم! این در حالی است که بقیه روابط مطرح شده در این درس عموماً جهت محاسبه نسبت‌های دیگر زوایا به‌کار گرفته می‌شود. بنابراین رابطه بین نسبت‌های زوایای متمم از این جهت که در محاسبه نسبت‌های دیگر زوایا به‌کار نمی‌رود استثنا است و به همین دلیل آن را در ابتدای این درس مطرح کرده و سپس به بیان دیگر روابط و محاسبات مربوط به آنها پرداخته‌ایم.

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



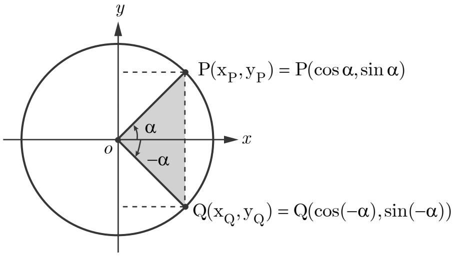
با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$\sin\theta = \frac{b}{a}$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{c}{a}$
$\cos\theta = \frac{c}{a}$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{b}{a}$
$\tan\theta = \frac{b}{c}$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{c}{b}$
$\cot\theta = \frac{c}{b}$	$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{b}{c}$

فعالیت ص ۹۹

در این فعالیت به نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌پردازیم. توجه شود که در مثلثات پایهٔ دهم دانش‌آموزان با محورهای سینوس و کسینوس و نیز نمایش مختصات یک نقطه برحسب زاویه مربوطه آشنا شده‌اند. در اینجا معلم می‌تواند در صورت نیاز مطالب سال قبل را ابتدا مرور کرده و سپس به این فعالیت بپردازد. دقت شودکه نحوهٔ پیدا کردن روابط بین زوایای قرینه از طریق دایره مثلثاتی است در حالی‌که برای یافتن رابطه برای زوایای متمم از مثلث قائم‌الزاویه استفاده شده بود. دلیل این امر آن است که یافتن رابطه برای زوایای متمم از طریق دایره مثلثاتی دشوارتر از مثلث قائم‌الزاویه است و ضمناً به این صورت دو روش مختلف (استفاده از مثلث قائم‌الزاویه و استفاده از دایره مثلثاتی) را به دانش‌آموز آموزش می‌دهیم.

در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور xها نقطه $Q(x_Q, y_Q)=Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.



الف) باتوجه به رابطهٔ بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

فعالیت ص ۱۰۰

روش فعالیت قبل مجدداً برای دو زاویه مکمل در این فعالیت نیز استفاده شده است. سپس روابط برای α و $\pi + \alpha$ مشابهاً توضیح داده شده است. توصیه می‌شودکه برای حالت α و $\pi + \alpha$ نیز دبیر محترم دایره مثلثاتی را رسم و محاسبات را همانند α و $\pi - \alpha$ به کمک دانش‌آموزان به‌دست آورد.

در صفحه ۱۰۱ ابتدا روابط برای زوایای α و $\alpha + ۲\pi$ بحث شده و سپس آن را برای زوایای $\alpha + ۲k\pi$ تعمیم داده‌ایم. توجه می‌شود که برای زوایای مکمل، ضلع پایانی دو زاویه در دایره مثلثاتی بر روی هم قرار

می‌گیرد. بنابراین توصیه می‌شود که در شکل بالایی صفحه ۱۰۱ ابتدا زاویه α به تنهایی در دایره مثلثاتی رسم شود. (پای تابلو یا به کمک نرم‌افزار) و سپس به کمک دانش آموزان زاویه دوم که همان $\alpha + ۲\pi$ است ترسیم گردد تا وجود دو زاویه در شکل برجسته‌تر گردد. آنگاه به یافتن روابط بین نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه پرداخته شود.

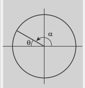
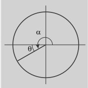
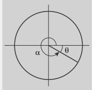
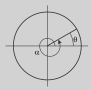
از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $۲\pi - \alpha$ نیز هم انتها هستند با روشی مشابه می‌توان رابطه نسبت‌های مثلثاتی بین آنها را به‌دست آورد. سپس با توجه به رابطه بین زوایای قرینه که پیش‌تر در فعالیت ص ۹۹ به آن پرداخته شده می‌توان رابطه بین $۲\pi - \alpha$ و α را به‌دست آورد.

کار در کلاس ص ۱۰۲

این کار در کلاس به نوعی جمع‌بندی مطالب فرا گرفته شده در فعالیت‌های قبل است. گفتنی است در برخی منابع آموزشی مفهومی به نام «زاویه مرجع»[۱] مطرح می‌شود. این زاویه برخلاف زوایای مثلثاتی جهت (یا علامت) ندارد و همواره یک زاویه تند است. برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه داده شده در این منابع ابتدا نحوه پیدا کردن زاویه مرجع برای زاویه داده شده آموزش داده می‌شود و سپس نشان می‌دهند که مقدار نسبت مثلثاتی برای یک زاویه همواره به کمک مقدار نسبت مثلثاتی برای زاویه مرجع آن به‌دست می‌آید. زاویه مرجع کوچک‌ترین زاویه‌ای است که ضلع پایانی زاویه با محور xها (نه لزوماً بخش مثبت محور) می‌سازد. اگر به جدول داده شده در سؤال ۲ این کار در کلاس دقت شود، زاویه θ در این جدول برای زوایای مختلف همان زاویه مرجع می‌باشد که با یافتن آن می‌توان مقدار نسبت‌های زوایای داده شده را یافت. در این جدول از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا θ که همان زاویه مرجع می‌باشد را نیز مشخص کند. همان‌طور که در نمونه کامل شده آمده برای زاویه θ جهت مشخص نشده است در حالی‌که برای زاویه α داده شده که یک زاویه مثلثاتی است جهت رسم شده است. (به پیکان‌ها دقت کنید). به‌هر حال متذکر می‌شود که آموزش زاویه مرجع جزء اهداف کتاب درسی نیست و بدون ذکر نام آن و با کمک جدول فوق نحوه محاسبه مقدار نسبت‌های مثلثاتی آموزش داده می‌شود. مطالب فوق راجع به زاویه مرجع جهت دانش‌افزایی دبیران محترم مطرح شده است.

۱ـ Reference Angel

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

زاویه / نسبت	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2k\pi - \theta$	$\alpha = 2k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	.....	.....	.....
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها	 نسبت: + / − $\sin\alpha$: ✓ (+) $\cos\alpha$: ✓ (−) $\tan\alpha$: ✓ (−)	 نسبت: + / − $\sin\alpha$: ✓ (−) $\cos\alpha$: ✓ (−) $\tan\alpha$: ✓ (+)	 نسبت: + / − $\sin\alpha$: ✓ (−) $\cos\alpha$: ✓ (+) $\tan\alpha$: ✓ (−)	 نسبت: + / − $\sin\alpha$: ✓ (+) $\cos\alpha$: ✓ (+) $\tan\alpha$: ✓ (+)
$\sin\alpha$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi+\theta) = \sin\theta$
$\cos\alpha$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$	$\cos(2k\pi-\theta) = \cos\theta$	$\cos(2k\pi+\theta) = \cos\theta$
$\tan\alpha$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$	$\tan(2k\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(2k\pi+\theta) = \tan\theta$
$\cot\alpha$	$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$	$\cot(2k\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(2k\pi+\theta) = \cot\theta$

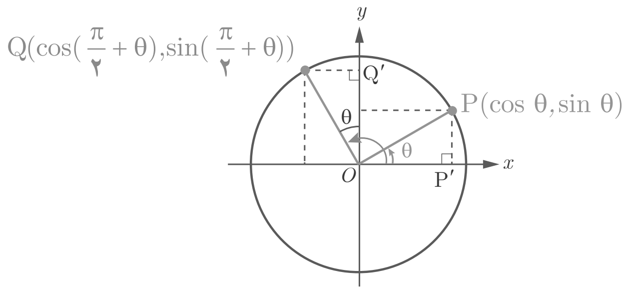
۳ برای زوایای قرینهٔ $(\alpha = -\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟ از ستون $2k\pi - \theta$ چون ضلع انتهایی آنها بر روی هم منطبق می‌شود و لذا مختصات نقطه پایانی کمان‌ها یکسان است.

فعالیت ص ۱۰۳

برای به‌دست آوردن رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2}+\theta$ که هدف این فعالیت است از روشی متفاوت با فعالیت‌های قبلی استفاده شده است. در اینجا ابتدا همنهشتی دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ به حالت وتر (که شعاع دایره است) و یک زاویه تند (θ) به تساوی اضلاع آنها پی می‌بریم. سپس با توجه به اینکه نقطه پایانی هر کدام از دو زاویه در چه قسمتی از صفحه مختصات هستند علامت مختصه‌های x و y برای این نقاط مشخص و از طریق تساوی اضلاع مثلث‌های همنهشت رابطه بین مختصات P و Q کامل می‌شود. با تکمیل رابطه بین مختصه‌های طول و عرض این نقاط و بازنویسی هر کدام برحسب نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس زوایای مربوطه، رابطه‌های مثلثاتی مدنظر برای نسبت‌های سینوس و

کسینوس کشف می‌شوند. در قسمت ب از این روابط برای پیدا کردن روابط دو نسبت تانژانت و کتانژانت استفاده شده است. روش ارائه شده در این فعالیت را می‌توان برای به‌دست آوردن روابط فعالیت‌های قبلی نیز به‌کار برد. معلم محترم می‌تواند از دانش‌آموزان بخواهد تا نحوه به‌دست آوردن روابط قبلی را به کمک این روش بررسی کنند.

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{۲}+\theta$ رسم شده‌اند.



الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ هم‌نهشت هستند.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q=-y_p \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta$$

$$y_Q=x_P \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\cos\theta$$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

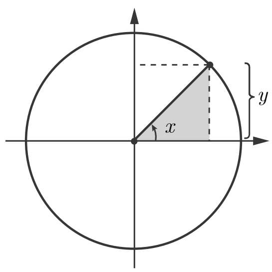
درس ۳ توابع مثلثاتی

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم تابع مثلثاتی
۲ درک رفتار تابع مثلثاتی از روی نمودار
۳ رسم توابع مثلثاتی ساده (فقط سینوسی یا کسینوسی)

تا قبل از این درس دانش‌آموزان با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی به‌خوبی آشنا شده‌اند و می‌توانند مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای زوایای مختلفی بیابند. گذر از مفهوم نسبت مثلثاتی به مفهوم تابع مثلثاتی مستلزم عبور از گردنه «تعریف نسبت مثلثاتی برای هر عدد حقیقی است.» چنانچه دانش‌آموز به این درک برسد که نسبت‌های مثلثاتی برای هر عدد حقیقی قابل تعریف هستند می‌توان ادعا کرد که او به درک نسبتاً روشنی از مفهوم تابع مثلثاتی دست پیدا کرده است. در برخی منابع از مفهوم زاویه در دایره مثلثاتی به‌صورت زیر استفاده می‌کنند.

در دایرهٔ زیر زاویهٔ x داده شده است. اکنون طول ضلع y برحسب x چگونه به‌دست می‌آید؟



در پاسخ به این سؤال دانش‌آموز رابطه‌ای را که قبلاً فراگرفته یعنی $y = \sin x$ را به‌دست می‌آورد و بعد توضیح داده می‌شود که x هر مقداری می‌تواند باشد و y متناسب با سینوس آن تغییر می‌کند. معمولاً روش فوق در قالب یک سناریوی نسبتاً واقعی (یا کاربردی) مانند محاسبه ارتفاع یک نقطه از یک چرخ و فلک یا دیگر اشیای دایره‌ای شکل ارائه می‌شود. به‌هرحال قلب اصلی داستان پیداکردن رابطه‌ای مشابه فوق است.

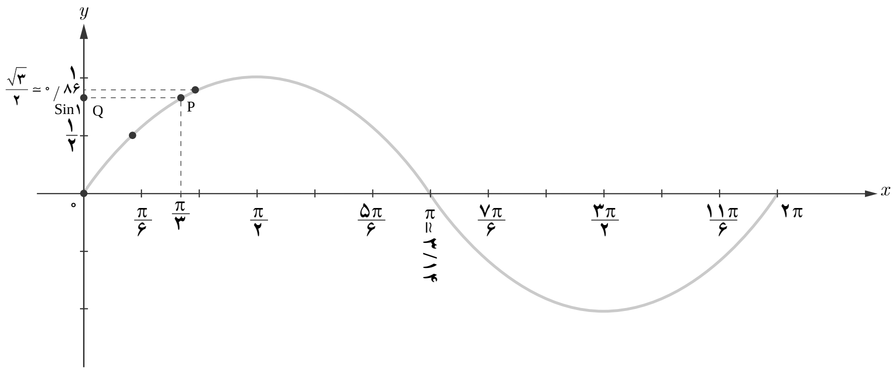
ضعف این شیوه‌ها در این است که دانش‌آموز درک روشنی از اینکه زاویه x می‌تواند اعداد گنگ مانند $\sqrt{۲}$ و یا حتی ساده‌تر از آن اعدادی مانند ۳ و ۵− و ... باشد را پیدا نمی‌کند. ضمناً ارتباط بین تابع مثلثاتی با محور اعداد حقیقی اغلب مغفول می‌ماند.

روش تدریس

فعالیت ص ۱۰۵

در این فعالیت برای آموزش مفهوم تابع مثلثاتی از ساده‌ترین بازنمایی توابع که همان بازنمایی به کمک رسم چند نقطه از تابع (بازنمایی زوج مرتبی) است بهره گرفته شده است. دانش‌آموزان در فصل تابع در پایهٔ دهم با انواع بازنمایی‌های مختلف یک تابع آشنا شده‌اند. در این کتاب توابعی مانند تابع رادیکالی (در فصل ۲) و توابع نمایی (در فصل ۳) نیز به کمک بازنمایی زوج مرتبی تابع، آموزش داده شده است. در این شیوه بازنمایی ابتدا از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا به کمک دانش قبلی خود مقدار تابع را در چند نقطه که قبلاً یادگرفته به‌دست آورد و سپس آنها را در یک دستگاه مختصات مشخص کند. در این فعالیت به همین شیوه از دانش‌آموز خواسته شده تا مقدار سینوس را (بدون ذکر نام تابع سینوس) در یک سری از نقاط در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بیابد و آنها را در یک نمایش زوج مرتبی ارائه دهد. برای راهنمایی بیشتر نمودار تابع به‌صورت کم‌رنگ ترسیم شده تا نقاط برجسته‌تر دیده شوند. پس از نمایش نقاط در دستگاه مختصات دانش‌آموز پی می‌برد که این نقاط بر روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند و لذا به ازای هر نقطه از محور xها در بازه $[۰,۲\pi]$ می‌توان نقطه‌ای از منحنی یافت. در سؤال ۳ به‌طور مشخص از دانش‌آموز خواسته شده تا عدد ۱ را روی محور xها یافته و سپس نقطه $\sin ۱$ را برروی محور yها بیابد. برای این منظور او باید از منحنی داده شده کمک بگیرد. در واقع او ابتدا نقطه ۱ را یافته و موازی با محور yها با خط‌چین به منحنی رسم می‌کند تا نقطه‌ای روی منحنی نظیر عدد ۱ بیابد. آنگاه از آنجا به سمت محور y‌ها عمودی رسم می‌کند. چون منحنی سینوس اعداد را نمایش می‌دهد لذا مکان یافته شده بر روی محور yها متناظر با $\sin ۱$ است. این فرایند ممکن است نیاز به کمک معلم باشد که هرجا دانش‌آموز دچار ابهام شد آن را رفع کند. توصیه می‌شود که معلم این کار را برای اعدادی دیگر (فقط

گویا) دربازه $[\circ,2\pi]$ تکرار نماید. در سؤال ۴ از این فعالیت تمایز بین رادیان و درجه و نسبت‌های مثلثاتی برحسب آنها برجسته شده تا این موضوع که در توابع مثلثاتی همواره (مگر خلاف آن تصریح شود) متغیر برحسب رادیان است. این موضوع در خواندنی مربوط به ماشین حساب نیز اشاره شده است.

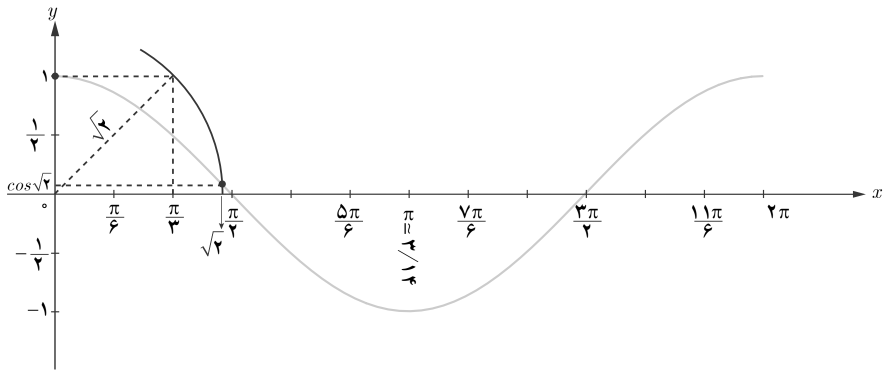


۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y=\sin x$ در بازه $[\circ,2\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار $\sin 1$ کجای محور yها قرار می‌گیرد؟ کافی است به‌طور تقریبی مکان $x=1$ را روی محور xها مشخص کرده و سپس به موازات محور yها به نمودار $\sin x$ وصل کرده تا نقطه P مشخص شود. سپس از نقطه P به موازات محور xها رسم کرده تا محور yها را در نقطه Q قطع کند. نقطه Q روی محور yها متناظر $\sin 1$ است.

فعالیت ص ۱۰۶

گام بعدی و تکمیلی در خصوص تابع مثلثاتی در این فعالیت آورده شده است. در فعالیت قبل تمرکز بر یافتن مقدار توابع مثلثاتی (به‌طور خاص تابع سینوس) برای اعداد ساده مانند $\sin 1$ و $\sin 2$ بود. در این فعالیت مهارت قبلی را برای اعداد گنگ تعمیم می‌دهیم. برای این منظور از منحنی کسینوس استفاده شود تا این منحنی نیز معرفی گردد. در سؤال ۳ از این فعالیت تعمیم مفهوم تابع مثلثاتی به بازه‌های بزرگ‌تر از $[\circ,2\pi]$ مدنظر است. دقت شود که ارائه مفهوم دوره تناوب در اینجا به هیچ وجه مطرح نیست و نباید به‌کار گرفته شود. بحث توابع متناوب در سال آینده مطرح خواهد شد. در اینجا فقط به رفتار تکراری (با همین لفظ) اشاره (و نه تأکید بیش از حد) می‌شود. در سؤال ۴ از این فعالیت به برخی خواص توابع مثلثاتی

سینوس و کسینوس پرداخته شده است.البته این خواص فقط برای تابع کسینوس بحث شده که توصیه می‌شود معلم بررسی این خواص برای تابع سینوس را نیز از دانش آموز مطالبه کند.



۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{۲}$ رادیان را بر روی محور xها یافته و سپس مکان $\cos\sqrt{۲}$ را بر روی محور yها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.
کافی است مربعی به طول ضلع ۱ همانند شکل رسم کنیم. از قضیه فیثاغورث نتیجه می‌شود که طول قطر آن $\sqrt{۲}$ است. اکنون اگر کمانی به شعاع طول این قطر (همانند شکل) رسم کنیم آنگاه محل تقاطع این کمان با محور xها متناظر $x=\sqrt{۲}$ است. ادامه فرایند مشابه سؤال ۳ از فعالیت قبل است.

کار در کلاس ص ۱۰۸

این کار در کلاس درصدد تصحیح بدفهمی‌ها یا رفع نواقص مربوط به مفهوم تابع مثلثاتی است. این کار در کلاس به نوعی به دنبال ایجاد تفاوت بین مفهوم نسبت مثلثاتی و تابع مثلثاتی و ارائه مفهوم تابع مثلثاتی به‌عنوان یک مفهوم مستقل (و البته در ارتباط تنگاتنگ با مفهوم نسبت مثلثاتی) است. لذا در این اینجا هیچ اشاره‌ای به زاویه نشده و همه‌جا صحبت از اعداد حقیقی است. مثلاً در قسمت ث پرسیده شده آیا عددی (و نه زاویه‌ای) می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲− باشد. مشابه همین سؤال در پایه دهم آورده شده بود اما با لفظ زاویه به‌دلیل اینکه آنجا صحبت از نسبت مثلثاتی بود و نه تابع.

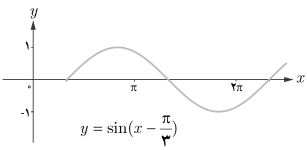
مثال‌های ص ۱۰۸

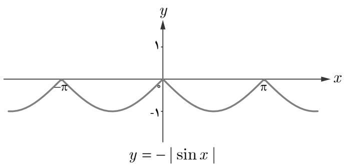
در ادامه فعالیت ص ۱۱۰ چند مثال از نمودارهای مثلثاتی آورده شده که برای سهولت مراحل به‌طور گام به گام و از کم‌رنگ به پررنگ ترسیم شده‌اند و یک کاربرد واقعی از مثلثات در صنایع آورده شده است. حالت تعمیم یافته این مثال کاربردی در آخرین تمرین این درس داده شده است که مشابه این مثال با اندکی تعمیم قابل حل است. به هر حال چنانچه تمرین داده شده برای دانش‌آموزان دشوار است می‌توان از ارائه آن صرف‌نظر کرد.

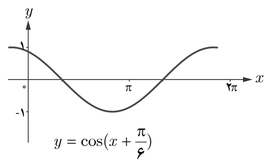
حل تمرین‌های برگزیده

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y = -|\sin x|$　　ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{۶})$　　پ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{۳})$

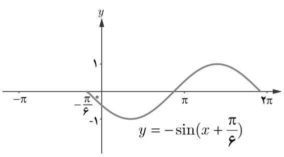


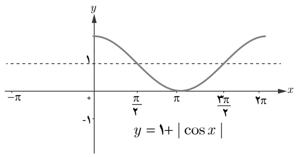


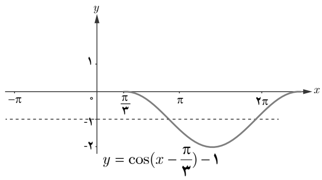


۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{۶})$　　ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۳}) - ۱$　　پ) $y = ۱ + |\cos x|$







۳ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

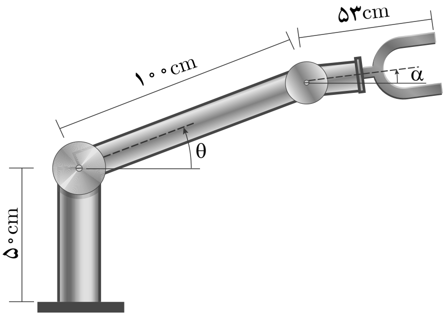
الف) $\min = -۱$, $\max = ۱$

ب) $\min = -۲$, $\max = ۰$

ج) $\min = ۰$, $\max = ۲$

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازهٔ $(۰ , \pi)$ یک به یک است؟

الف) یک به یک نیست　　　ب) یک به یک است　　　ج) یک به یک است



۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

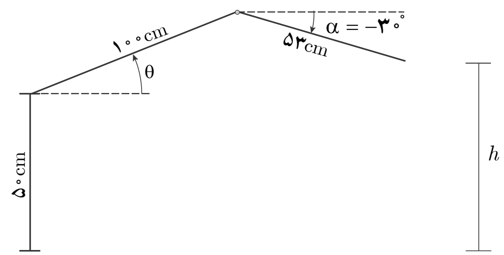
الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید.

$$(-\frac{\pi}{۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۲} \;,\; ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲})$$

$$h = ۵۰ + h_۱ + h_۲ = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta + ۵۳\sin\alpha$$

توجه شود که حل معادلات ساده در پایه دهم مطرح شده است.

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $۲۳/۵\,cm$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -۳۰^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



$$۲۳/۵ = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta + ۵۳\sin(-۳۰^\circ)$$

$$\Rightarrow ۲۳/۵ = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta - ۲۶/۵$$

$$\Rightarrow ۵۰ = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = ۰ \xrightarrow[۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}]{} \theta = ۰$$

درس ۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

اهداف درس

۱ آشنایی با روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا (فقط سینوس و کسینوس)

هدف از این درس صرفاً ارائه روابطی است که در سال آینده برای یافتن مشتق توابع سینوس و کسینوس براساس تعریف حدی مشتق نیاز است، یعنی محاسبه

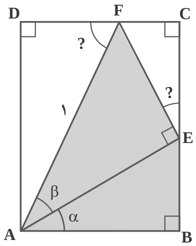
$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x-h)-\sin x}{x-h}$$

بنابراین هدف از این درس را نباید با مبحث مشابهی که در سال‌های گذشته به‌طور سنتی آموزش داده می‌شد یکی گرفت. در گذشته روابط مثلثاتی متنوعی آموزش داده می‌شد که در اینجا هیچکدام از آنها مورد توجه نیست. لذا این درس که سبک‌ترین و ساده‌ترین درس فصل مثلثات است را نباید تبدیل به مفصل‌ترین درس این فصل نمود. رعایت چارچوب ارائه شده در این درس موجب حفظ تناسب در ساعات تخصیص یافته به محتوای ارائه شده در کل کتاب می‌گردد.

روش تدریس

فعالیت ص ۱۱۰

در این فعالیت با تکمیل روابط طولی خواسته شده برحسب نسبت‌های مثلثاتی زوایای گفته شده، به‌سادگی می‌توان درستی هر دو رابطه مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ را به‌دست آورد. برای سادگی در محاسبات ضلع AF ابتدا برابر ۱ فرض می‌شود و در سؤال ۲ از دانش‌آموز خواسته می شود که روابط به دست آمده را در حالتی که این ضلع برابر ۱ نباشد بررسی کند. با این بررسی مشخص می‌شود که اندازه این ضلع هرچه باشد (مثلاً l) در نهایت از طرفین رابطه ساده می‌شود و همان روابط قبل برقرار می‌شوند.



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است و اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $F\hat{E}C$ و $A\hat{F}D$ را برحسب α و β به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{ll} F\hat{E}C+۹۰^\circ+A\hat{E}B=۱۸۰ & \text{: زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \alpha+۹۰^\circ+A\hat{E}B=۱۸۰ & \text{: مجموع زوایای داخلی } ABE \end{array}\right\} \Rightarrow F\hat{E}C=\alpha$$

$A\hat{F}D= \alpha + \beta \Leftarrow$ اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به‌صورت مورب آن را قطع کرده است.

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $A\overset{\Delta}{D}F$ را با توجه به اینکه $AF=۱$، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $D\hat{F}A$ بنویسید.

$AD=\sin(\alpha+\beta)$ $\qquad$ $DF=\cos(\alpha+\beta)$

ج) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF ، که وتر آن برابر ۱ است را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

$EF=\sin(\beta)$ $\qquad$ $AE=\cos(\beta)$

د) اندازهٔ پاره خط‌های BE، EC، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به‌دست آورید.

$EC=EF\times\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $BE=AE\times\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha$

$AB=AE\times\cos\alpha=\cos\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $FC=EF\times\sin\alpha=\sin\beta\sin\alpha$

هـ) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل بالا روابط زیر به‌دست می‌آید. آنها را باتوجه به قسمت‌های الف تا د کامل کنید.

$$AD=BE+EC \Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

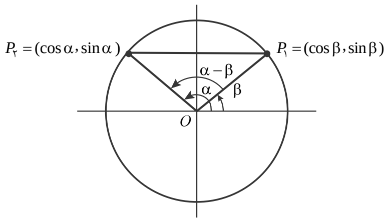
$$DF=AB-FC \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است. اگر $AF=r$ باشد آنگاه مقدار r از طرفین رابطه‌های فوق ساده می‌شود. بررسی کنید.

برای به‌دست آوردن روابط خواسته شده می‌توان فعالیت جایگزین زیر را نیز به کار برد.

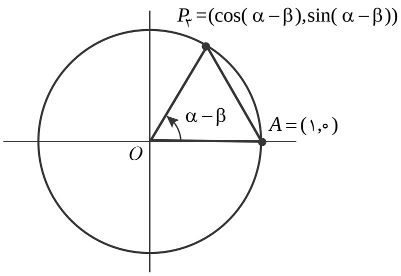
فعالیت جایگزین

در روش زیر ابتدا روابط تفاضل به‌دست می‌آیند و سپس به کمک آنها روابط حاصل جمع زوایا.



در شکل مقابل دو زاویه β و α رسم شده و نقاط انتهایی کمان‌ها را به‌ترتیب P_1 و P_2 نامیده‌ایم. زاویه $\alpha-\beta$ بین این دو زاویه و وتر روبه‌رو به آن نیز رسم شده‌اند.

برای سادگی همهٔ زوایا را به اندازه زاویه β در خلاف جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا شکل زیر به‌دست آید. نقطهٔ A و P_3 به‌ترتیب دوران یافته P_1 و P_2 می‌باشند. با مشاهده مثلث OP_1P_2 از شکل قبل و مثلث OAP_3 از این شکل معلوم می‌شود که این دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویه بین هم نهشت هستند (چرا؟) بنابراین وتر P_1P_2 با وتر AP_3 برابر است. پس فاصله نقطه P_1 تا P_2 برابر فاصله نقطه A تا P_3 است.



اکنون از رابطه فاصله دو نقطه که در فصل اول آمده داریم: $\quad d(A,P_3)=d(P_1,P_2)$

رابطه فاصله دو نقطه:

$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$

به توان ۲ رساندن (دقت شود که عبارات زیر رادیکال همگی بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند و لذا قدر مطلق حذف می‌شود):

$$[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta$$

(اتحاد مربع)

سه بار استفاده از اتحاد $\sin^2x+\cos^2x=1$ $\quad 2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$

ساده کردن ۲ از طرفین $\quad -2\cos(\alpha-\beta)=-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta$

تقسیم طرفین بر ۲ $\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

از رابطه اخیر و با استفاده از $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$ می‌توان رابطه حاصل‌جمع زوایا را نیز به‌دست آورد.

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ زاویه‌های داده شده زیر را برحسب رادیان به‌دست آورید. (تا دو رقم اعشار)

الف) ۶۴°　　ب) ۲۵°　　ج) $۲۰۳/۰۹^\circ$

۲ زاویه‌های داده شده زیر را برحسب درجه به‌دست آورید (تا دو رقم اعشار)

الف) $-۲/۳۵$　　ب) $۳/۰۷$　　ج) ۷

۳ فرض کنید اندازه شعاع چرخ‌های بزرگ و کوچک یک تراکتور به ترتیب ۱۵۰ و ۸۰ سانتی‌متر باشد. اگر این تراکتور نیم متر به سمت جلو حرکت کند آنگاه هر یک از چرخ‌های آن چند رادیان حرکت کرده‌اند؟

۴ مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه‌های داده شده به‌دست آورید.

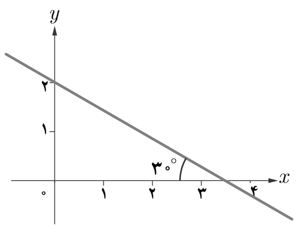
الف) $-\frac{۹\pi}{۲}$　　ب) $\frac{۱۱\pi}{۲}$　　ج) -۱۲۰°　　د) ۳۱۵°

۵ توابع مثلثاتی زیر را رسم کنید.

$$y = \sin(x - \frac{\pi}{۶}) + ۲$$

$$y = -\cos(x + \frac{\pi}{۳})$$

۶ معادله خط زیر را به‌دست آورید.



۷ مقدار نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه‌های زیر به‌دست آورید.

الف) ۷۵°　　ب) -۱۵°　　ج) -۱۰۵°

۸ اگر $\cos y = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$ و $\sin x = -\frac{۲}{۳}$ و x زاویه‌ای در ربع سوم و y زاویه‌ای در ربع چهارم باشد آنگاه مقدار $\sin(x-y)$ را به‌دست آورید.

حد و پیوستگی

فصل ۵

جادهٔ نهبندان ـ شهداد

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل ۵ درس است. در درس اول این فصل، ابتدا در مورد فرایند حدی در قالب فعالیت ارائه شده و سپس ارائهٔ شهودی از حد به کمک جدول مقادیر و رسم نمودار صورت می گیرد. در پایان درس اول مفهوم همسایگی و بر اساس آن، تعریف حد (دو طرفه) تابع در یک نقطه بیان شده است.

در درس سوم، تعریف حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست) تابع در یک نقطه مفهوم‌سازی شده است.

در درس سوم، برخی قضایای حد ارائه شده است که ابزارهایی برای محاسبه سریع‌تر حد به دانش‌آموزان می‌دهد و سپس در درس چهارم، به روش‌های محاسبه حد توابع کسری (حالت ÷)که به کمک قضایا قابل محاسبه نیستند، اشاره شده است.

در درس آخر فصل به مفهوم پیوستگی توابع در یک نقطه و نیز در یک بازه و همچنین مفهوم پیوستگی یک طرفه می‌پردازد.

نمای کلی فصل

دانستنی‌هایی برای معلم

مفهوم حد در ریاضیات برای بیان رفتار یک تابع، دنباله‌ای از اعداد یا یک سری مورد استفاده قرار می‌گیرد. بررسی این رفتار در نقاط روی صفحه یا در بی‌نهایت صورت می‌گیرد. حد همچنین در حساب دیفرانسیل و انتگرال و نیز در آنالیز ریاضی برای تعریف مفهوم پیوستگی، مشتق و انتگرال‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

بسیاری از ریاضی‌دانان در زمان‌های مختلف، در کار با حد، روش‌های مختلفی را ارائه کرده و با موانع و مشکلاتی هم مواجه بوده‌اند که نشان‌دهندهٔ سیر تحول، توسعه و تکامل این مفهوم در طولانی مدت بوده که به‌صورت کنونی درآمده است.

ریاضی‌دان‌ها حتی قبل از اینکه بتوانند مفهوم دقیق حد را بیان کنند، با برخی فرایندهای حدی آشنا

بودند و در مورد آن بحث کرده‌اند. با اینکه عمر شاخه حساب دیفرانسیل، بیش از چند قرن نیست، حتی یونانیان باستان نیز درکی از مفهوم حد داشته‌اند. به‌عنوان مثال، ارشمیدس مقدار تقریبی عدد π (پی) را با استفاده از محیط چند ضلعی‌های منظم محاطی در دایره‌ای به شعاع یک واحد، وقتی که تعداد اضلاع زیاد می‌شوند، به‌دست آورده است (روش افنا).

در قرون وسطی نیز تا زمان رنسانس، مفهوم حد برای به‌دست آوردن مساحت شکل‌های مختلف به‌کار رفته است. نیوتن و لایب‌نیتس در قرن هفدهم، درک شهودی جزئی از حد داشته‌اند و حتی حدهای پیچیده‌ای را نیز محاسبه کرده‌اند، اما نه آنها و نه دانشمندان دیگر در آن قرن، تعریف دقیقی از حد ارائه نکرده‌اند.

کوشی در اوایل قرن نوزدهم، اولین تعریف کامل نسبت به تعریف‌های ارائه شده قبل از آن به‌صورت زیر ارائه کرد:

«وقتی که مقادیر متوالی به یک متغیر نسبت داده می‌شود و مقادیر تابع به عدد ثابتی نزدیک شوند به‌طوری که اختلاف آنها از مقداری ثابت به هر اندازه کوچک قابل انتخاب باشد، این مقدار ثابت را حد همه مقادیر متغیر می‌گویند».

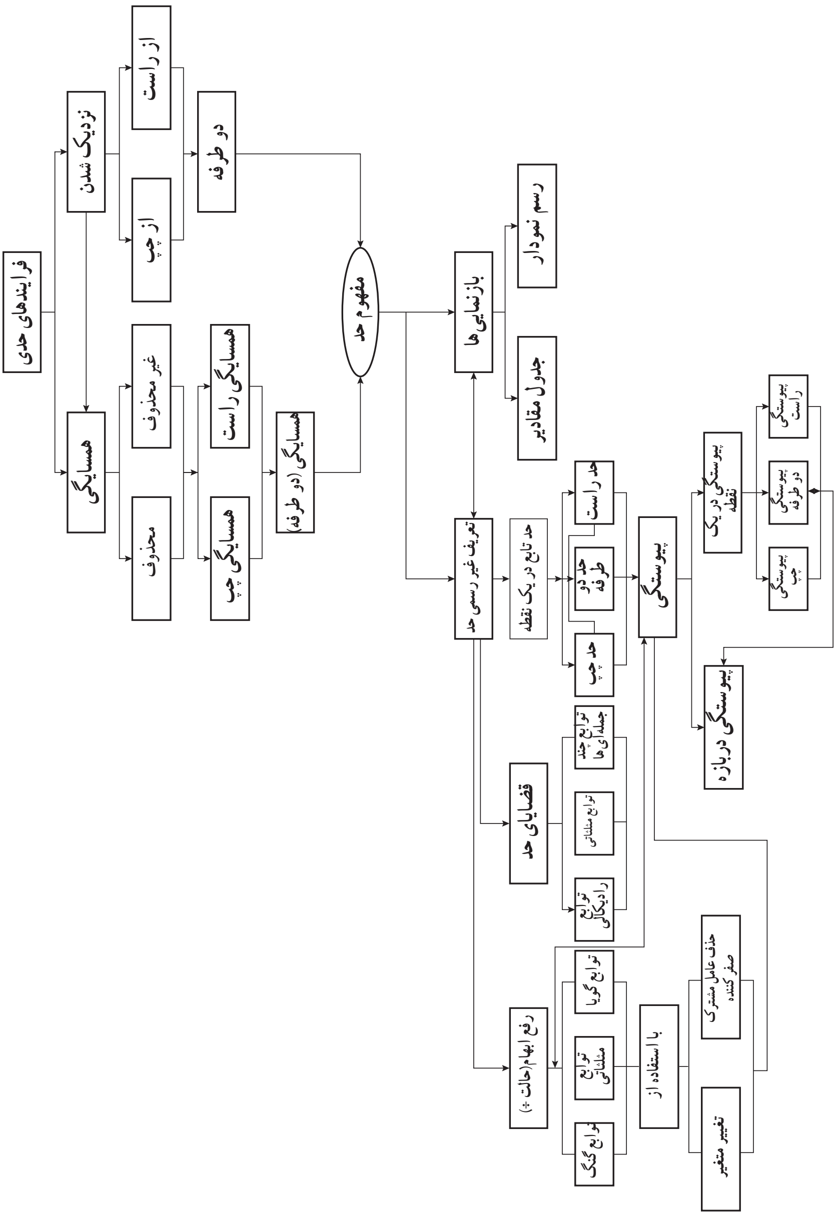
اگرچه تعریف کوشی از حد چندان دقیق نبود، ولی او قدم بزرگی برای رسیدن به تعریف دقیق فعلی برداشت، تا اینکه سرانجام وایرشتراس در قرن نوزدهم، تعریف دقیقی از حد به‌صورت زیر ارائه کرد:

«عدد حقیقی l را حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to a$ (x به سمت a میل می‌کند) می‌نامیم، اگر برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in D_f$ که $|x-a|<\delta$ داشته باشیم $|f(x)-l|<\varepsilon$ و می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$».

این تعریف دقیق وایر شتراس، به‌دلیل متناسب نبودن با سطح درک و انتزاع دانش‌آموزان دوره متوسطه، معمولاً در کتاب‌های درسی ریاضی دوره متوسطه بیان نمی‌شود و به جای آن توصیفی از آن تعریف به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

«حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند برابر l است اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه به l نزدیک کنیم به شرط آنکه x به اندازهٔ کافی به a نزدیک شده باشد و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$».

نقشه مفهومی فصل ۵



درس ۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی

اهداف درس

۱ آشنایی با برخی فرایندهای حدی (نزدیک شدن و میل کردن)
۲ درک شهودی حد به کمک جدول مقادیر و رسم نمودار تابع و آشنایی با نماد حد
۳ درک مفهوم همسایگی (دوطرفه، راست، چپ و محذوف) و نقش آن در وجود حد یک تابع در یک نقطه
۴ درک مفهوم حد تابع در یک نقطه

روش تدریس

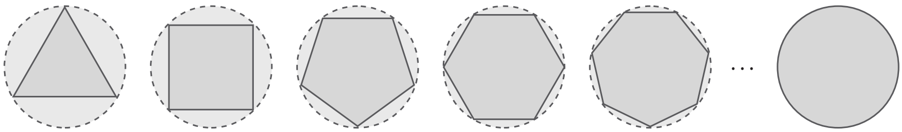
این درس با فعالیتی در خصوص فرایندهای حدی شروع می‌شود که هدف آن، فراهم آوردن تجربیاتی برای دانش‌آموزان تا مفهوم حد در ذهن دانش‌آموز به درستی شکل گیرد و زمینه تعریف ریاضی حد فراهم شود.

برای ورود مناسب به آموزش مفهوم حد، معلم می‌تواند متناسب با دانش و تجربه دانش‌آموزان کلاس خود، از موقعیت‌هایی استفاده کند که در آن مفهوم حد حضور دارد و به روشنی دیده می‌شود (مانند یافتن شیب خط مماس، پیدا کردن سرعت لحظه‌ای و...).

در این درس از دو فرایند هندسی برای ایجادزمینهٔ آشنایی دانش‌آموز با مفاهیم «میل کردن» و «حد» استفاده شده است. در فعالیت اول، که مشابه روش افنای ارشمیدس برای تقریب عدد پی (π) است، دایره‌هایی به شعاع ۱ را درنظر می‌گیریم و درون آنها به‌ترتیب ۳ ضلعی منتظم، ۴ ضلعی منتظم و... را محاط می‌کنیم. هدف فعالیت این است که دانش‌آموزان با نگاه کردن به شکل‌ها و جدول به این نتیجه برسند که وقتی تعداد اضلاع چند ضلعی‌های محاطی زیاد و زیادتر می‌شود، مساحت آنها نیز به مساحت دایره (عدد پی) نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (نزدیک شدن از چپ).

فعالیت ص ۱۱۴

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر **۳/۱۴۱۵۹**=π در نظر بگیریم و مساحت nضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n \in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد... که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به **هر اندازه که بخواهیم**، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به **اندازهٔ کافی** زیاد کنیم.

برای تأیید این نتیجه به‌صورت غیر هندسی، مقدار تقریبی عدد پی تا ۵ رقم اعشار داده شده است و جدولی تنظیم شده است که مساحت n ضلعی‌های منتظم محاطی درون دایره به‌ازای برخی $n \in \mathbb{N}$ داده شده است.

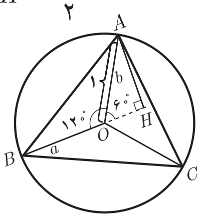
در این فعالیت لازم نیست روش به‌دست آوردن اعداد داده شده در جدول (مقادیر A_n) برای دانش‌آموزان گفته شود ولی متناسب با موقعیت کلاس و سطح توانایی علمی آنان در صورت تشخیص معلم، می‌توان روش محاسبه مساحت n ضلعی‌های محاطی را به کمک ماشین حساب به‌صورت صفحهٔ بعد بیان نمود :

۳ ضلعی منتظم محاطی :

$$\alpha = \frac{۳۶۰^\circ}{۳} = ۱۲۰^\circ$$

$$o\overset{\Delta}{A}H : \hat{H} = ۹۰^\circ \ , \ \hat{o} = ۶۰^\circ \Rightarrow Sin۶۰^\circ = \frac{AH}{oA} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AH}{۱} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

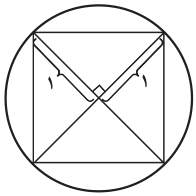
$$S_{A\overset{\Delta}{o}B} = \frac{۱}{۲}.\, a \,.\, AH = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$



۴ ضلعی منتظم محاطی :

$$\alpha = \frac{۳۶۰}{۴} = ۹۰$$

$$\underset{\text{چهارضلعی منتظم (مربع)}}{S} = ۴(\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ \times \sin ۹۰^\circ) = ۲$$



و به‌طور کلی در n ضلعی منتظم محاطی داریم :

$$\alpha = \frac{۳۶۰}{n}$$

(می‌دانیم مساحت مثلثی با دو ضلع a و b و زاویه بین θ برابر است با : $S = \frac{۱}{۲} ab \sin\theta$)

$$S_{n\,\text{ضلعی منتظم محاطی}} = h(\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ \times \sin\frac{۳۶۰}{n}) = \frac{n}{۲} \sin\frac{۳۶۰}{n}$$

در پایان فعالیت نیز تأکید بر اینکه **به هر اندازه که بخواهیم** می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی را به مساحت دایره محیطی نزدیک کنیم به شرط آنکه تعداد اضلاع را به **اندازه کافی** زیاد کنیم.

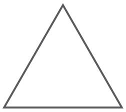
اندازه دلخواه و اندازه دلخواه دو کلید واژهٔ مهمی است که توصیه می‌شود توجه دانش‌آموزان را به آن دو جلب کنیم، چرا که در تعریف حد، این دو کلید واژه نقشی اساسی ایفا می‌کنند.

در فعالیت دوم هم دانش‌آموزان با یک فرایند حدی آشنا می‌شوند که با مشاهده شکل‌ها و تکمیل جدول داده شده، به این نتیجه می‌رسد که با ادامه فرایند نصف کردن اضلاع مثلث‌ها، اندازهٔ هر ضلع و در نتیجه اندازه محیط مثلث‌ها به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

در این فعالیت دانش‌آموزان نزدیک شدن یا میل کردن از سمت چپ را مشاهده و تجربه می‌کنند. در این فعالیت نیز مفید هست که توجه دانش‌آموزان را مجدد به این نکته جلب کنیم که محیط مثلث‌ها را می‌توانیم **به هر اندازه دلخواهی** به صفر نزدیک کنیم به شرط آنکه تعداد مراحل انجام کار **به قدر کافی** زیاد باشد.

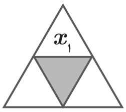
فعالیت ص۱۱۵

یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر۶ می‌باشد.

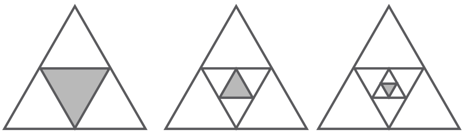


۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را $x_۱$ و اندازه محیط آن را $P_۱$ می‌نامیم.

در این صورت داریم : $x_۱=۱$ و $P_۱=۳$



۲ اگر عمل وصل‌کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله nام طول ضلع مثلث به‌وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید :



(۱) (۲) (۳)

x_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۳۲}$	...	$\frac{۱}{۲^n}$
P_n	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۳}{۳۲}$	...	$\frac{۳}{۲^n}$

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x درنظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x)=۳x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر تابع f، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

در مثال حل شدهٔ صفحه ۱۱۶، رفتار یک تابع در اطراف نقطه $x=۲$ به کمک رسم نمودار و جدول مقادیر بررسی شده است. معلم می‌تواند متناسب با سطح کلاس از مثال‌های جایگزین استفاده نماید. در همین مثال برای اولین بار دانش‌آموزان با نماد حد و نحوه نمایش دادن آن آشنا می‌شوند.

در کار در کلاس صفحه ۱۱۷، سه تابع داده شده که یکی از آنها در $x=۳$ تعریف شده ($g(x)$) و یکی از آنها در نقطه $x=۳$ تعریف شده ولی مقدار تابع در $x=۳$ با مقدار حد تابع در آن نقطه یکسان نمی‌باشد ($h(x)$) و تابع سوم از سه تابع داده شده ($f(x)$) هم در $x=۳$ تعریف شده و هم مقدار تابع در $x=۳$ با حد تابع در آن نقطه برابر است.

کار در کلاس ص ۱۱۷

توابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x)=x+۳$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ و $h(x)=\begin{cases} x+۳ & x\neq ۳ \\ ۴ & x=۳ \end{cases}$ را درنظر بگیرید :

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید :

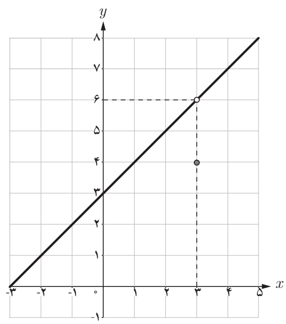
$h(۳)=۴$ $\qquad$ $g(۳)=$ تعریف نشده است $\qquad$ $f(۳)=۶$

۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.

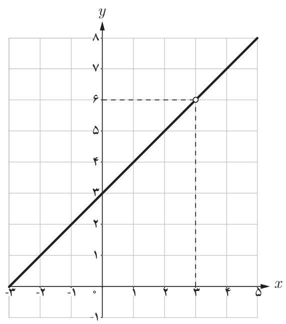
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	→	۳	←	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	۶	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	تعریف نشده	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$h(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	۴	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱

۳ نمودارهای توابع f ، g و h به‌صورت زیر رسم شده است.

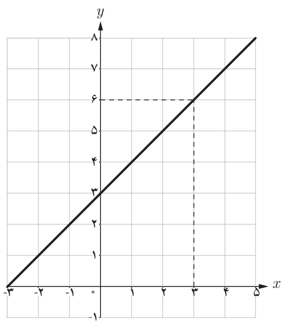
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند. هر سه به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.



نمودار h



نمودار g



نمودار f

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶ است به عبارت دیگر :

$\lim\limits_{x\to ۳} h(x)=۶$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)=۶$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۶$

معلم پس از انجام این کار در کلاس توسط دانش‌آموزان طی بحث کلاسی باید روی دو نتیجه زیر تأکید نماید :

الف) ممکن است یک تابع در نقطه‌ای به طول a تعریف نشده باشد ولی در این نقطه حد داشته باشد.

ب) ممکن است یک تابع در نقطه‌ای به طول a تعریف نشده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

پس از این کار در کلاس، تعریف همسایگی، همسایگی محذوف و نیز همسایگی راست و چپ ارائه شده است. با توجه به اینکه در این کتاب از تعریف دقیق حد (روش ε و δ) برای ارائهٔ حد استفاده نشده است، لذا از ورود به تعریف همسایگی متقارن و محذوف متقارن و نمایش آنها به‌صورت نامعادله قدر مطلقی اجتناب شده است و لزومی به ارائهٔ این تعاریف در کلاس درس نیست.

تعریف

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.

بنابراین اگر $x_0 \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 است.

اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.

به همین ترتیب :

اگر $r>0$، در این صورت بازه (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست و بازهٔ (x_0-r , x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

توجه : با توجه به تعریف، منظور از همسایگی یک نقطه در این کتاب، همسایگی دوطرفه است و هر جا که هدف همسایگی یک‌طرفه باشد، همسایگی راست (یا چپ) ذکر می‌شود.

کار در کلاس بالای صفحه ۱۱۹ پس از ارائهٔ تعریف همسایگی، در خصوص مسائل مرتبط با تمرین همسایگی آورده شده است.

سؤال ۱ : این کار در کلاس، سؤالی باز پاسخ می‌باشد که دانش‌آموزان می‌توانند با توجه به سطح درک خود به آن، پاسخی متفاوت و درست ارائه دهند. به‌عنوان مثال دو نمونه پاسخ برای هر یک از قسمت‌های این سؤال در زیر ارائه شده است :

کار در کلاس ص ۱۱۹

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

همسایگی محذوف ۳ : {۳}ـ(۲,۶) یا {۳}ـ(۱,۴)

همسایگی راست۳ : (۳,۵) یا (۳,۱۰)

همسایگی چپ۳ : (۱,۳) و (۱۰-,۳)

۲ آیا بازهٔ (۲,۳) یک همسایگی ۲ می‌باشد؟ چرا؟ نه چون شامل ۲ نمی‌باشد ولی این بازه یک همسایگی راست ۲ می‌باشد.

پس از این کار در کلاس، تعریف حد براساس تعریف همسایگی ارائه شده است. در این تعریف بر دو واژهٔ به میزان دلخواه و به‌قدر کافی تأکید شده است و اساس این تعریف در واقع این دو واژه می‌باشد به همین دلیل پیشنهاد می‌شود در نمونه‌های قبل از این تعریف و بعد از این تعریف، بر این دو واژه و درک جایگاه آن در مشخص کردن حد داشتن یک تابع یا نداشتن حد تأکید زیادی داشته باشند.

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

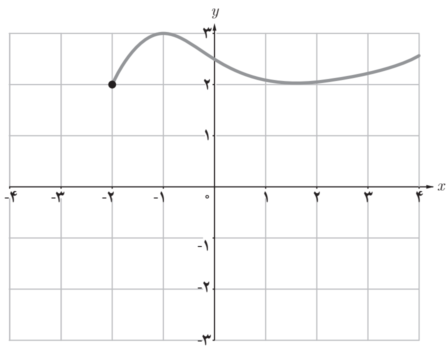
عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

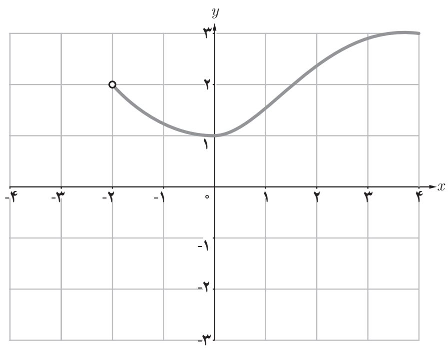
کار در کلاس دوم صفحه ۱۱۹ در خصوص حد توابع می‌باشد که در صفحه بعد حل آنها ارائه می‌شود : ۴ سؤال اول این کار در کلاس سؤال‌های باز پاسخی هستند که دانش‌آموزان می‌توانند پاسخ‌های متفاوت درستی به این سؤال‌ها بدهند.

به‌عنوان نمونه ۲ پاسخ برای هر یک از سؤال‌های ۱ تا ۴ این کار در کلاس به شرح زیر می‌باشد :

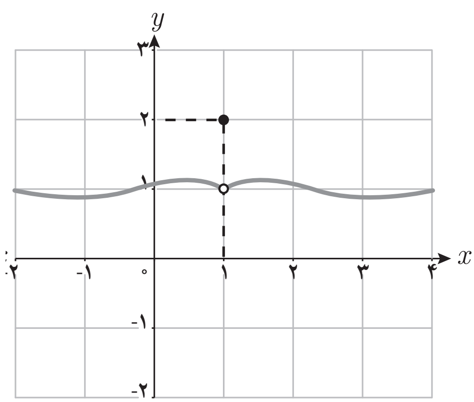
کار در کلاس ص ۱۱۹

۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲− تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

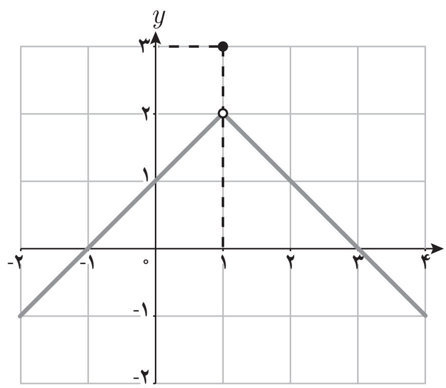




۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

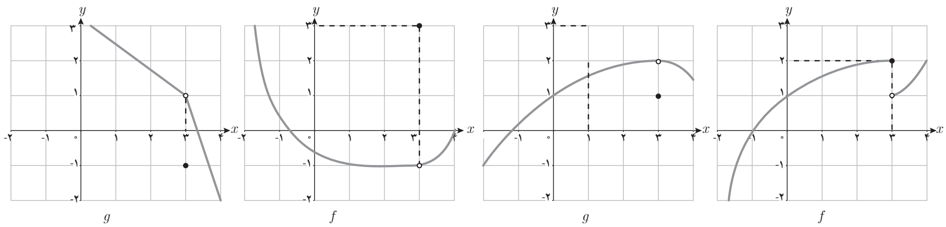


f

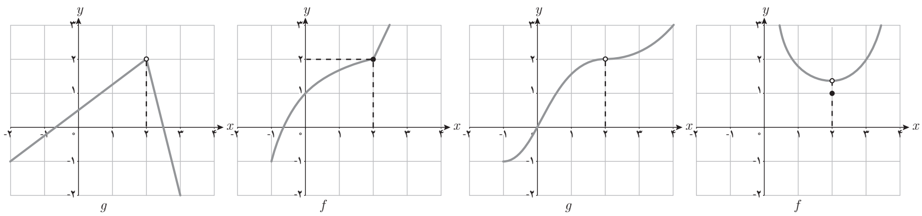


g

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳) \neq g(۳)$.

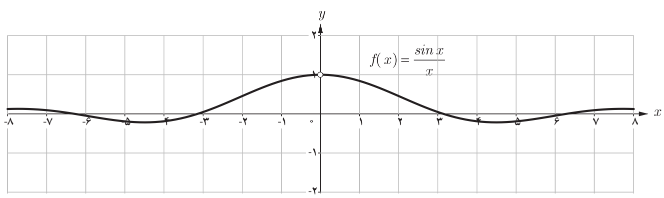


۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.



۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است). $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{x}=۱$

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
$\pm$۱	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
$\pm$۰/۵	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
$\pm$۰/۴	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
$\pm$۰/۳	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
$\pm$۰/۲	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
$\pm$۰/۱	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
$\pm$۰/۰۵	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
$\pm$۰/۰۱	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
$\pm$۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
$\pm$۰/۰۰۱	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳

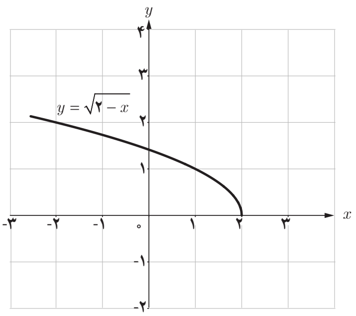


با اینکه این سؤال، سؤالی باز پاسخ نیست ولی سؤالی است که از نتیجه این سؤال در درس‌های بعد این فصل و حل مسائل آن به‌خصوص در محاسبه حدود کسری (حالت ÷) شامل توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. با توجه به اینکه قضیه فشردگی در این کتاب ارائه نشده است، در محاسبه این تمرین یعنی محاسبه $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$ با استفاده از جدول مقادیر و نمودار رسم شده حد تابع ۱ به‌دست می‌آید.

پس از کار در کلاس صفحه ۱۱۹ و صفحه ۱۲۰، مثال حل شده‌ای ارائه شده است که در آن بر تعریف شدن تابع در حداقل یک همسایگی محذوف برای حد داشتن تأکید شده است و چون $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در هیچ همسایگی محذوف ۲ تعریف نشده است پس این تابع در نقطه ۲= x حد ندارد.

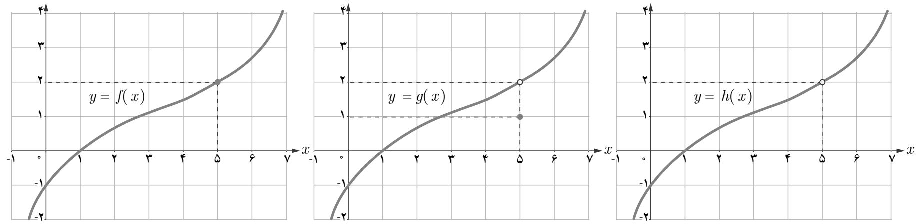
مثال : آیا تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطه ۲= x حد دارد؟ چرا؟

حل : می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f=(-\infty,۲]$ می‌باشد. چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه ۲= x حد ندارد.



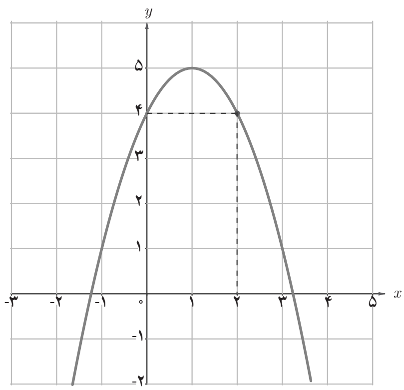
تمرین ص ۱۲۰

۱ نمودار سه تابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ ۵=x، مشخص کنید

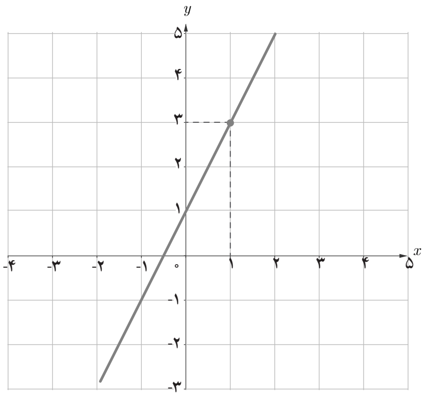


$\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۲$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=۲$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۵} h(x)=۲$

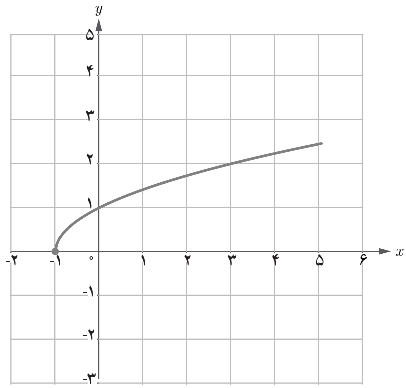
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



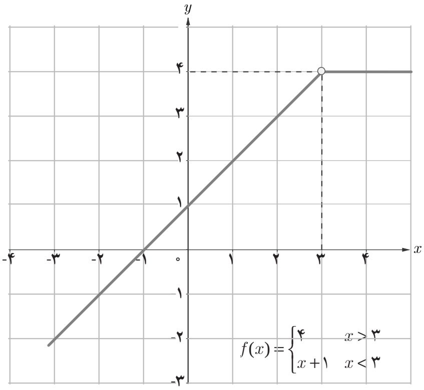
$\lim\limits_{x\to ۲} (-x^{۲}+۲x+۴) =۴$



$\lim\limits_{x\to ۱} (۲x+۱) =۳$



$\lim\limits_{x\to -۱} \sqrt{x+۱} =$ حد ندارد



$\lim\limits_{x\to ۳} f(x) =۴$

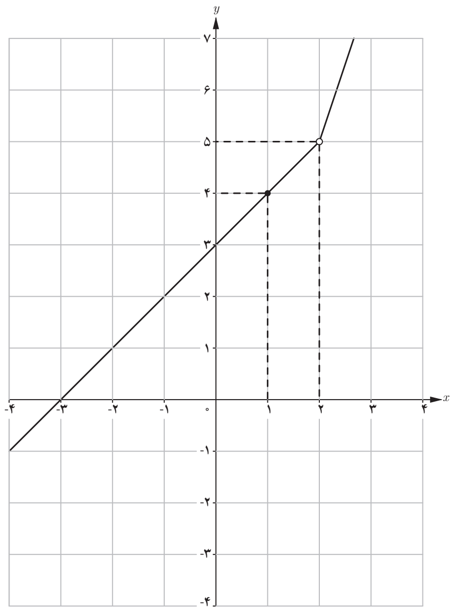
۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} (-۳x+۴)= ۴$

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	$\rightarrow$	۴	$\leftarrow$	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = -۵$ ، $f(x)=\begin{cases} x-۴ & x\neq -۱ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$

x	−۲	−۱/۵	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	→	−۱	←	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۸
$f(x)$	−۶	−۵/۵	−۵/۱	−۵/۰۱	−۵/۰۰۱	→	۳	←	−۴/۹۹۹	−۴/۹۹	−۴/۹	−۴/۸



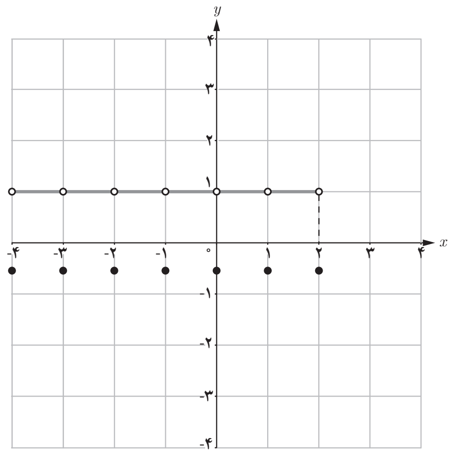
۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x>۲ \\ x+۳ & x<۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع f در نقطه $x=۲$، تعریف شده است؟

خیر

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را به دست آورید.

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۵$



۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases} -۱ & x\in \mathbb{Z} \\ ۲ & x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-۴,۲]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} g(x) = ۲$

$\lim\limits_{x\to ۱} g(x) = ۲$

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

$$D_f=\begin{cases}۱-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\\ x\neq ۰\end{cases}\Rightarrow D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$$

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

شامل همسایگی محذوف تمام نقاط دامنه به‌غیر از ۱ و ۱− و همچنین شامل همسایگی محذوف ۰ نیز هست.

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=۱$ چطور؟

بله، این تابع در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف شده ولی در همسایگی راست $x=۱$ تعریف نشده است.

۷ اگر بازهٔ $(x-۱,۲x+۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$۲\in(x-۱,۲x+۳)\Rightarrow x-۱<۲<۲x+۳\Rightarrow\begin{cases}x-۱<۲\Rightarrow x<۳\\ ۲x+۳>۲\Rightarrow x>-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\overset{\cap}{\Rightarrow}-\frac{۱}{۲}<x<۳\Rightarrow x\in(-\frac{۱}{۲},۳)$$

توصیه‌های آموزشی

با توجه به مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری حد، توصیه می‌شود در این درس و در حد امکان فرصت‌های آموزشی زیادی را برای مشاهدهٔ حد توابع در نقاط مختلف با استفاده از بازنمایی‌های مختلف از جمله جدول مقادیر و رسم نمودار در کلاس تدارک ببینند. همچنین در تمامی مثال‌ها و نمونه‌های ارائه شده، تأکید ویژه‌ای بر دو عبارت «به اندازهٔ دلخواه» و «به مقدار کافی» که در تعریف حد آمده است، داشته باشند. همچنین با ارائهٔ سؤال‌هایی که در آنها تابع در یک نقطه حد دارد، از دانش‌آموزان بخواهند که با تعیین مقدار دلخواه، مقدار کافی را به‌دست آورند. به‌عنوان مثال :

در تابع $f(x)=x+۱$ داریم : $\lim\limits_{x\to ۱}(x+۱)=۲$. اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ به ۲ از دو طرف کمتر از ۰/۱ باشد، مقدار x باید در چه فاصله‌ای از ۱ قرار گیرد؟

حل :

$$۲-۰/۱< x+۱<۲+۰/۱ \Rightarrow ۱/۹< x+۱<۲/۱ \Rightarrow ۰/۹< x<۱/۱$$

بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان

مفهوم حد به دلیل اینکه جزء مفاهیم دشوار برای دانش‌آموزان می‌باشد به همین دلیل بدفهمی‌های رایج این مفهوم برای دانش‌آموزان بسیار متنوع می‌باشد که مهم‌ترین آنها به شرح ذیل می‌باشد :

برخی از دانش‌آموزان فکر می‌کنند که :

۱ تابع باید لزوماً در نقطه حدی خود تعریف شده باشد و مقدار تابع در آن نقطه با مقدار حدش در آن نقطه برابر باشد.

۲ حد تابع، همان مقدار تابع در آن نقطه است.

۳ حد به عنوان مقداری غیرقابل دسترس محسوب می‌شود.

۴ حد، یک نقطه مرزی است و مقدار تابع به‌ازای تمامی مقادیر تعریف شده در دامنه آن همواره از حد تابع کوچک‌تر است.

۵ حد، مقدار تقریبی است.

۶ توابعی حد دارند که پیوسته باشند و فقط توابع پیوسته حد دارند.

برای رفع این بدفهمی‌ها، استفاده از بازنمایی شهودی مختلف از جمله رسم نمودار و جدول مقادیر برای مفهوم بخش حد و تأکید بر جنبه‌های مختلف تعریف و توصیف حد و تبیین شهودی آنها می‌تواند بسیار مفید باشد.

درس ۲

حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

اهداف درس

درک شهودی مفهوم حد چپ و حد راست به کمک رسم نمودار و آشنایی با تعریف ریاضی غیررسمی حد چپ و حد راست

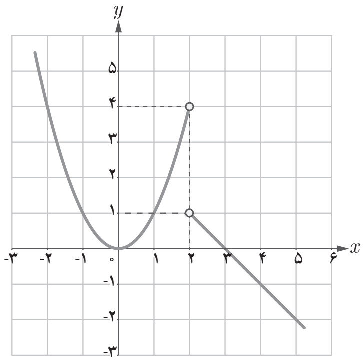
روش تدریس

در شروع این درس بهتر است ابتدا به توابعی مانند $y=\sqrt{x+۲}$ ، که دامنه آنها شامل نقاطی است که تابع فقط در یک طرف آنها تعریف شده است، اشاره کرده و این نکته را متذکر شد که با اینکه تابع در هیچ همسایگی این نقاط تعریف نشده است یعنی در این نقاط حد ندارد ولی رفتار تابع را در همسایگی چپ یا همسایگی راست این نقاط می‌توان بررسی نمود.

دانش‌آموزان با انجام فعالیت اول درس می‌توانند مفهوم حد چپ و حد راست را به‌طور شهودی درک کنند و پس از این فعالیت با تعاریف ریاضی غیررسمی آنها آشنا می‌شوند. در ادامه دانش‌آموزان به این درک می‌رسند که اگر تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد آنگاه :

حد f در نقطه a وجود دارد $\Leftrightarrow$ حد چپ و حد راست f در a موجود و با هم برابرند.

فعالیت ص۱۲۳



نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+۳ & x>۲\\ x^{۲} & x<۲\end{cases}$ به صورت روبه‌رو است :

الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد؟ خیر

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه

اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$، حد ندارد.

کار در کلاس ص ۱۲۵

در خصوص مفاهیم ارائه شده در این درس در خصوص حد چپ و حد راست و همچنین ارتباط آنها با حد توابع می‌باشد. سؤال ۲ این کار در کلاس، سؤالی باز پاسخ است که می‌تواند پاسخ‌های درست بسیاری داشته باشد.

دانش‌آموزان با انجام فعالیت صفحه ۱۲۶ به این نتیجه می‌رسند که اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد، آنگاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند. یعنی :

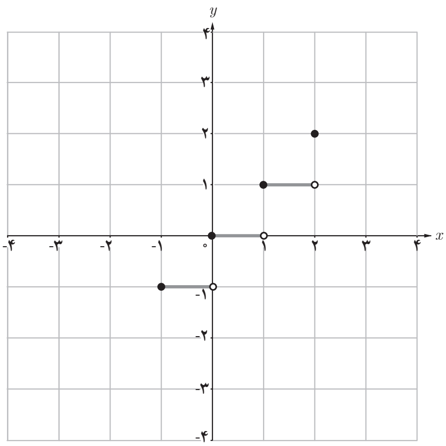
اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$

اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$

به طریق مشابه با بیان مطالب بالا در خصوص همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a داریم :

اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

فعالیت ص ۱۲۶



۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-۱,۲]$ رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۰$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=۱$ را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱$$

۴ آیا تابع f در نقطه $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟ خیر چون $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازهٔ $(۱,۲)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=۱$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to ۱^+}[x]=\lim\limits_{x\to ۱^+} g(x)=۱$.

به همین ترتیب، در $(۰,۱)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=۰$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]=\lim\limits_{x\to ۱^-} h(x)=۰$.

در کار در کلاس صفحه ۱۲۷ انتظار می‌رود دانش‌آموزان با توجه به درک شهودیشان از حد چپ و حد راست توابع و با توجه به برابر نبودن حد راست تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ با حد چپ این تابع در نقطه $x=0$ به این نتیجه برسند که تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ حد ندارد.

کار در کلاس ص ۱۲۷

۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید:

الف) با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

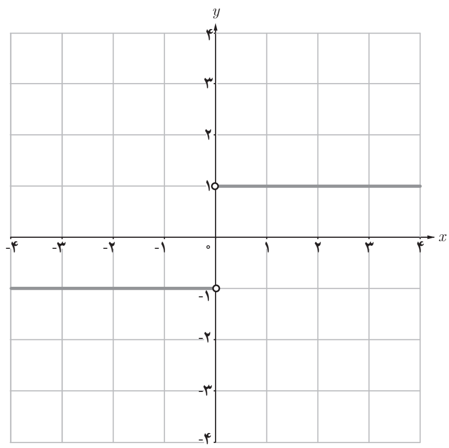
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x}=1 & x>0 \\ \frac{-x}{x}=-1 & x<0 \end{cases}$$

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

پ) با استفاده از نمودار f، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1 \ , \ \lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

ت) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ چرا؟ خیر چون $\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$



حل تمرین‌های درس دوم (از صفحه ۱۲۷ تا ۱۲۹)

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۴$

ب) $\lim_{x\to ۲} f(x) =$ موجود نیست

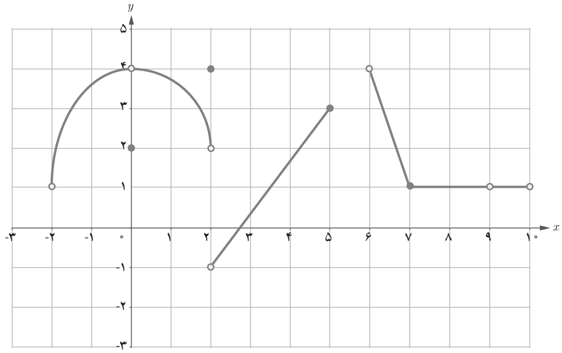
پ) $\lim_{x\to ۵} f(x) =$ موجود نیست

ت) $\lim_{x\to ۶^-} f(x) =$ موجود نیست

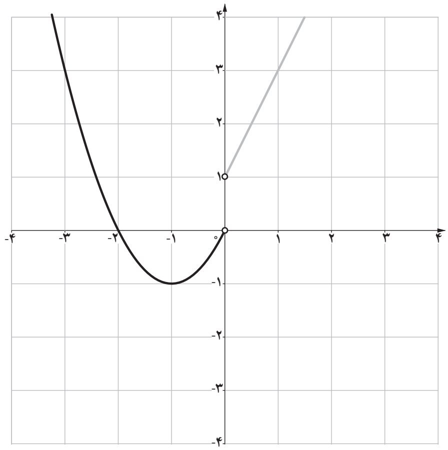
ث) $\lim_{x\to -۲^+} f(x) = ۱$

ج) $\lim_{x\to ۸} f(x) = ۱$

چ) $\lim_{x\to ۹} f(x) = ۱$



۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x>۰ \\ x^۲+۲x & x<۰ \end{cases}$ به سؤالات صفحهٔ بعد پاسخ دهید :



الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

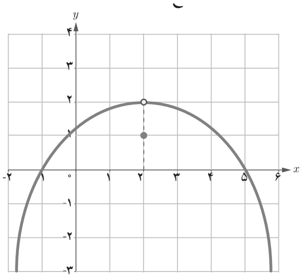
ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

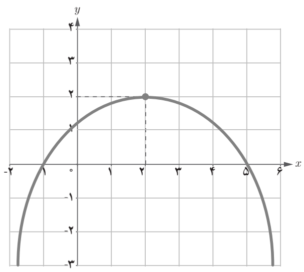
پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟ چرا؟ خیر چون

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

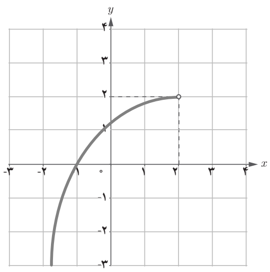
۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



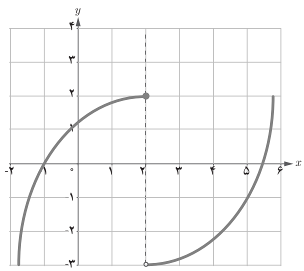
(الف)



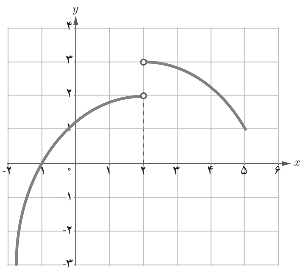
(ب)



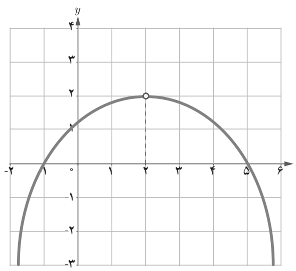
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

ــ تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (الف)، (ب) و (ج)

ــ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)

ــ تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)، (ت) و (ث)

ــ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (پ)
ــ تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (چ)
ــ تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت) و (ث)

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^{۲}-x}$ در نقطهٔ $x=۱$ چه می‌توان گفت :

$$x^{۲}-x\geq ۰ \Rightarrow D_f=(-\infty\ ,۰]\cup[۱,+\infty)$$

چون تابع در هیچ همسایگی چپ $x=۱$ تعریف نشده است پس تابع در $x=۱$ حد چپ ندارد.

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-۲}$ در نقطه $x=۲$ چه می‌توان گفت؟

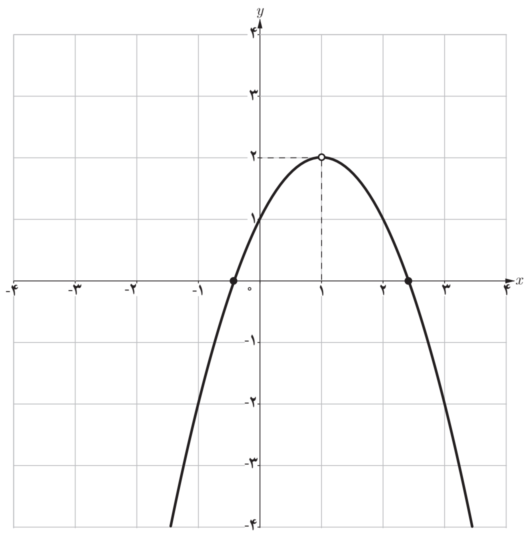
$$[x]-۲=۰ \Rightarrow ۲\leq x<۳ \Rightarrow D_f=(-\infty,۲)\cup[۳,+\infty)=\mathrm{R}-[۲,۳)$$

چون تابع در هیچ همسایگی راست $x=۲$ تعریف نشده است پس $f(x)$ در $x=۲$ حد راست ندارد.

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-۱)^{۲}+۲$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]=۱$

ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\right]=۲$



([ ] نماد جزء صحیح است)

از این سؤال دانش‌آموز می‌تواند نتیجه بگیرد که در حالت کلی $\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\neq\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$

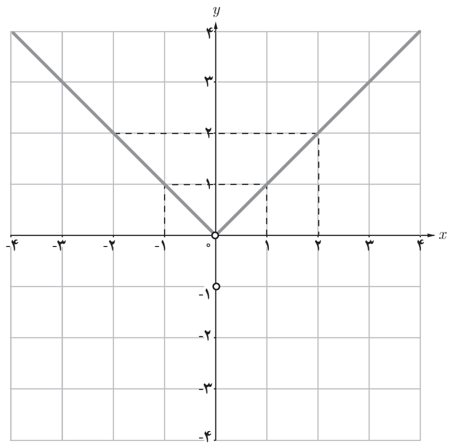
۲۰۲

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}|x|$ را به‌دست آورید.

$\lim\limits_{x\to ۰}|x|=۰$

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟ بله برقرار است.



درس ۳
قضایای حد

اهداف درس

۱ آشنایی با قضایای اولیه حد توابع مانند مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب، خارج قسمت و . . .
۲ آشنایی با قضایای حد توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$

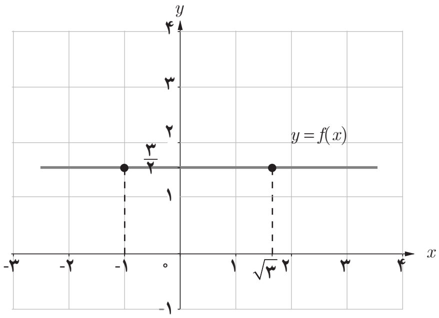
روش تدریس

دانش‌آموزان در دو درس اول این فصل با مفهوم حد تابع آشنا شده‌اند. همچنین آنها یاد گرفته‌اند که برای محاسبه حد توابع در یک نقطه، از نمودار آنها یا جدول مقادیر استفاده کنند، که هر دو روش برای توابع نه چندان پیچیده، قابل استفاده است.

در این درس به بیان قضایای اولیه دربارهٔ حد تابع می‌پردازیم تا به کمک آنها دانش‌آموزان قادر به محاسبه حد توابع پیچیده‌تر شوند. هرچند اثباتی برای قضایای این درس آورده نشده است ولی در فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های ارائه شده، سعی شده است به‌وسیله رسم نمودارها اثباتی شهودی برای درک بهتر قضایا فراهم شود.

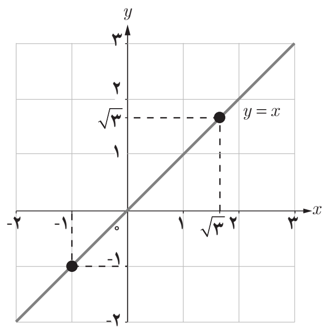
اولین فعالیت این درس، فعالیتی است که دانش‌آموزان با انجام دادن آن به‌طور شهودی به درک قضایایی در خصوص نحوه محاسبه توابع ثابت و همانی دست می‌یابند.

فعالیت ص ۱۳۰



الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{۳}{۲}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to -۱} f(x) = \frac{۳}{۲} \qquad \lim_{x\to\sqrt{۳}} f(x) = \frac{۳}{۲}$$



ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x)=x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to -۱} g(x) = -۱ \qquad \lim_{x\to\sqrt{۳}} g(x) = \sqrt{۳}$$

قضیه :

الف) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی،

$$\lim_{x\to a} c = c$$

ب) حد تابع همانی $g(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a است. یعنی،

$$\lim_{x\to a} x = a$$

فعالیت صفحه بعد (صفحه ۱۳۱) به مفهوم بخشی شهودی قضایایی در خصوص حد مجموع توابع و تفاضل دو تابع می‌پردازد. نتیجه این فعالیت به عنوان قضیه اصلی این درس در صفحه ۱۳۲ بیان شده است. در بخش نتیجه فعالیت قضایای مربوط به محاسبه حد حاصل‌ضرب دو تابع و خارج قسمت دو تابع نیز ارائه شده است.

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آن گاه

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$$

پ) (حد حاصل‌ضرب) حاصل‌ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=L_1.L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2\neq 0$، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

کار در کلاس صفحه ۱۳۲ فرصتی را فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان در مسائل ارائه شده در آن از قضایای ارائه شده در خصوص حد مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت استفاده کنند.

کار در کلاس ص ۱۳۲

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیهٔ فوق، توضیح دهید چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=\lim\limits_{x\to a} c\,.\,\lim\limits_{x\to a} f(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^{۲}(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{۲}$

$$\lim_{x\to a} f^{۲}(x)=\lim_{x\to a}(f(x).f(x))=\lim_{x\to a} f(x)\ .\ \lim_{x\to a} f(x)=(\lim_{x\to a} f(x))^{۲}$$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to a}(-f(x))=\lim\limits_{x\to a}-۱\ .\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{۱}{f(x)}=\dfrac{۱}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq ۰$)

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} ۱}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

در صفحه ۱۳۳ طی تذکری این قضایا از دو تابع به n تابع تعمیم داده شده است. در این تذکر تأکید ویژه‌ای بر محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to a} x^{n}$ شده است که برابر a^{n} می‌باشد. یعنی $\lim\limits_{x\to a} x^{n}=a^{n}$. بیان این مطلب به همراه قضیه حد توابع ثابت و قضیه حاصل‌ضرب توابع، دانش‌آموزان را برای درک قضیه حد توابع چند جمله‌ای آماده می‌کند که در صفحه ۱۳۴ به آن پرداخته شده است.

تذکر : قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع $f_{۱}$ ، . . . ، f_{n} همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f_{۱}(x)+\cdots+f_{n}(x)\right)=\lim_{x\to a} f_{۱}(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_{n}(x)$$
$$\lim_{x\to a}\left(f_{۱}(x)\times\cdots\times f_{n}(x)\right)=\lim_{x\to a} f_{۱}(x)\times\cdots\times\lim_{x\to a} f_{n}(x)$$

به‌ویژه، اگر تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد آن‌گاه : $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{n}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{n}$

که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\lim_{x\to a} x^{n}=a^{n}$$

در مثال حل شده و کار در کلاس صفحه ۱۳۴ از حد تابع قدر مطلق استفاده شده است که نیازمند یادآوری تمرین شماره ۷ صفحه ۱۲۹ قبل از حل این صفحه می‌باشد.

فعالیت صفحه ۱۳۵ به‌طور شهودی به دانش‌آموزان این درک را می‌دهد که :

۱ حد مجموع دو تابع می‌تواند وجود داشته باشد در حالی‌که هیچ کدام از دو تابع حد نداشته باشند.

۲ زمانی می‌توانیم از قضایای حد مجموع، تفاضل، ضرب و ... استفاده کنیم که حد هر یک از توابع، موجود باشد.

از این نکات در طرح سؤالات کار در کلاس صفحه ۱۳۶ استفاده شده است که بایستی در پاسخ دادن به آنها به این نکته توجه کرد.

کار در کلاس ص ۱۳۶

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

برای حل این سؤال می‌توان از نمونه ارائه شده در فعالیت صفحه ۱۳۵ و یا موارد مشابه به عنوان مثال نقض، استفاده کرد.

ب) ثابت کنید اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

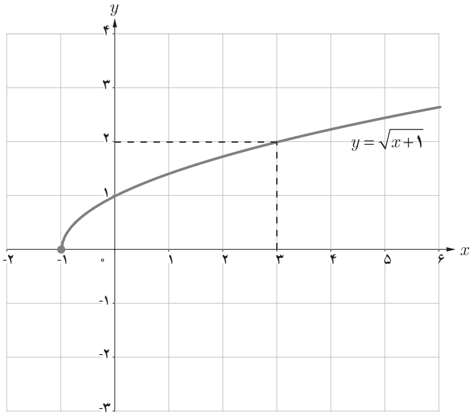
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\\ \lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)=k\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a}(g(x)+f(x)-f(x)) \xlongequal[\text{مجموع و تفاضل}]{\text{طبق قضیه حد}}$$

$$\overset{K}{\cancel{\lim\limits_{x\to a}}(\cancel{g(x)}+f(x))}-\underset{L}{\cancel{\lim\limits_{x\to a} f(x)}}=K-L=M$$

یعنی $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ وجود دارد.

در ادامه فعالیت پایین صفحه ۱۳۶، قضیه حد ریشه nام تابع به‌صورت شهودی مفهوم بخشی شده است.

فعالیت ص ۱۳۶



در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}$ را بیابید.

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۱)}$ برقرار است؟

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}f(x)}$$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

دانش‌آموزان با انجام فعالیت صفحه ۱۳۷ می‌توانند به‌صورت شهودی و به کمک نمودار ارائه شده، قضیه حد توابع مثلثاتی در خصوص $\sin x$ و $\cos x$ را درک کنند.

برای هر عدد حقیقی a،

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

در ادامه پس از ارائه کار در کلاس در خصوص استفاده از قضایای حد توابع مثلثاتی، حل تذکری تمامی قضایای مطرح شده در خصوص حد توابع در کتاب به حد چپ و حد راست توابع نیز تعمیم داده می‌شود و در کار در کلاس مسئله مرتبط با این موضوع ارائه می‌شود.

حل تمرین‌های درس سوم (از صفحه ۱۳۹ تا ۱۴۰)

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^{۳}=-۲۱۶$ ب) $\lim\limits_{x\to -۱}(-۶x^{۷}-۴x^{۲}+۵)=۶-۴+۵=۷$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۵}{۳}}\frac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^{۳}+۱)}=۰$ ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^{+}}\frac{۱-x^{۲}}{x^{۲}-۴}=\frac{۱}{۲}$ ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\sqrt{۴x^{۲}+۶x}=۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin x}{x+\cos x}=\frac{۰}{۱}=۰$ چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{|\cos x|}{x-\pi}\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}}|\cos x|=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}}\cos x=۰\\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}}|\cos x|=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}}\cos x=۰\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}|\cos x|=۰\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{|\cos x|}{x-\pi}=۰$$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۳$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

خیر. به عنوان مثال $f(x)=\begin{cases}۳x & x\le \frac{۳}{۲}\\ x+۱ & x>\frac{۳}{۲}\end{cases}$ مثال نقضی است برای رد این ادعا. البته این سؤال باز پاسخ است و می‌توان مثال‌های نقض دیگری نیز ارائه کرد.

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^{۲}-۱}=۴$.

$$\begin{cases}g(x)=۶x\\ g(x)=۱۰+x\\ g(x)=۲x+۸\end{cases}$$

اگر $\lim\limits_{x\to ۲}g(x)$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^{۲}-۱}=۴\Rightarrow \frac{\lim\limits_{x\to ۲}g(x)}{\underbrace{\cancel{\lim\limits_{x\to ۲}(x^{۲}-۱)}}_{۳}}=۴\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲}g(x)=۱۲$

موجود باشد، این سؤال نیز سؤالی باز پاسخ است.

۴ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-L\right)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

بله چون

$$\text{اگر}\ \lim_{x\to a}(f(x)-L)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L+L)$$

$$=\underbrace{\cancel{\lim_{x\to a}(f(x)-L)}}_{0}+\lim_{x\to a} L=0+L=L$$

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y=3x+2 \quad , \quad y=x^2-1 \quad , \quad y=[x]-1 \qquad y=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.

$$\lim_{x\to 1}(3x+2)=3+2=5 \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1} y \quad \begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^+} y=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-} y=-2\end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} y\neq \lim_{x\to 1^-} y$$

پس حد ندارد

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=x^2-1$	$g(x)=3x+2$	$f(x)+g(x)=x^2+3x+1$
تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=[x]-1$	$g(x)=x^2-1$	$f(x)\,g(x)=x^2+[x]-2$
توابع f و g در ۱حد راست دارندما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=3x+2$	$g(x)=[x]-1$	$\frac{f(x)}{g(x)}=3x+[x]+1$
تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$		$f^2(x)=4\ (x+1)$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=x^2-1$		$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

حد تابع $f+g$ در a وجود ندارد زیرا اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ موجود باشد آنگاه بنابر تساوی $g(x) = (f(x) + g(x) - f(x))$ و قضیه حدتفاضل حد تابع g نیز باید در a موجود باشد که خلاف فرض است.

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to-۱^-}\dfrac{x^۲+[x]}{|x|}=\dfrac{۱-۲}{۱}=-۱\\ \lim\limits_{x\to-۱^+}۳x+b=-۳+b\end{cases} \Rightarrow -۳+b=-۱\rightarrow b=۲$$

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to-۲}\left(۲g(x)-f(x)\right)$$

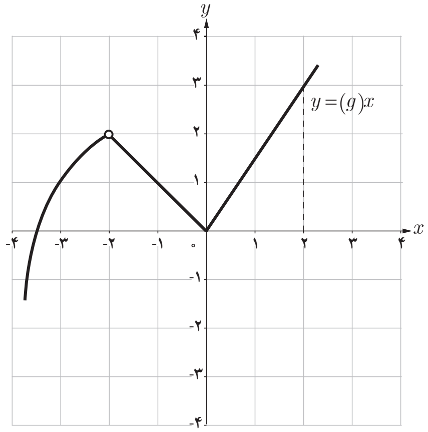
$$\lim_{x\to-۳}-۳\sqrt{g(x)}$$

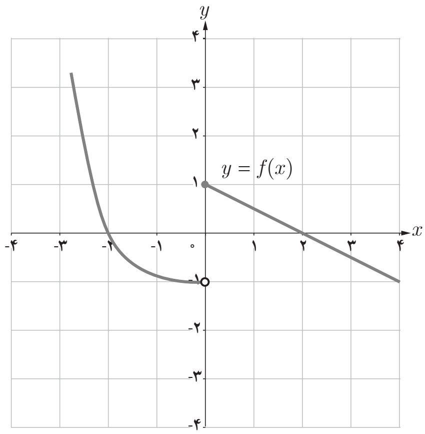
$$\lim_{x\to۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}$$

$$\lim_{x\to-۲}(۲g(x)-f(x))=۲\lim_{x\to-۲}g(x)-\lim_{x\to-۲}f(x)=۴-۰=۴$$

$$\lim_{x\to-۳}-۳\sqrt{g x}=-۳\sqrt{\lim_{x\to-۳}g(x)}=-۳\sqrt{۱}=-۳$$

$$\lim_{x\to۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}=۲\sqrt[۳]{\lim_{x\to۲}g(x)}=۲\sqrt[۳]{۳}$$





درس ۴
محاسبه حد توابع کسری (حالت ÷)

اهداف درس

۱ درک نحوهٔ محاسبه حد توابع کسری که هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه مورد نظر صفر است.

تذکر : همان‌طور که در زیرنویس کتاب در صفحهٔ اول این درس اشاره شده است در این کتاب حد کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد که صورت و مخرج کسر متعلق به یکی از دسته‌های زیر باشند :

۲ چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲

۳ عبارت رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax+b}$

۴ توابع سینوس و کسینوس با حداکثر توان ۲ و کمان به‌صورت $x+b$ و یا $۲x+b$

روش تدریس

در محاسبه حد توابع کسری که به حالت ÷ منجر می‌شود سعی می‌شود با ساده کردن صورت و مخرج کسر و حذف عامل‌های صفرکننده، به جواب نهایی دست یابیم. در توضیح اینکه در محاسبه حد چرا مجاز به ساده کردن هستیم باید به نکته زیر (که در صفحهٔ ۱۲۶ کتاب آمده است) اشاره شود :
«هرگاه دو تابع f و g در دو طرف نقطه $x=a$ (به جز احتمالاً خود نقطه a) با هم برابر باشند و حد یکی از آنها در $x=a$ موجود باشد آنگاه حد دیگری نیز در این نقطه موجود است و هر دو مقدار حد با هم برابرند».

به عنوان مثال اگر دو تابع $x+۳$ و $\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ را درنظر بگیریم با این شرط که $x\neq ۳$:
دامنه و برد این دو تابع در همسایگی محذوف ۳، با یکدیگر برابر است به همین دلیل با توجه به اینکه :
$\lim\limits_{x\to ۳} x+۳=۶$ طبق نکته بیان شده (صفحه ۱۲۶)، $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ نیز وجود دارد و برابر ۶ است.
به‌همین دلیل می‌توانیم $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ را به‌صورت زیر با حذف عامل‌های صفرکننده از صورت و مخرج از طریق ساده کردن حل کنیم :

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۳)\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

هدف اصلی این درس، ایجاد این توانایی در دانش‌آموزان است که چگونه از دانشی که قبلاً کسب کرده‌اند برای درک و محاسبه مفاهیم جدید استفاده کنند. در واقع، دانش‌آموزان در این درس یاد می‌گیرند که چگونه از مطالب قبلی که دربارهٔ اتحادهای جبری و مثلثاتی آموخته‌اند در محاسبه حد توابع استفاده کنند.

در این درس، همه روش‌های مورد نظر برای رفع ابهام (محاسبه حد توابع کسری در حالت $\frac{۰}{۰}$) به‌وسیله مثال‌های مختلف توضیح داده شده است. حالات کلی که به نحوهٔ رفع ابهام آنها پرداخته شده است به شرح زیر هستند :

۱ **چند جمله‌ای‌ها** : در حالتی که با چند جمله‌ای‌هایی (البته با درجه حداکثر ۲) سروکار داریم، برای تجزیه آنها از اتحادهای جبری نظیر اتحاد مزدوج، اتحاد مربع دو جمله‌ای و ... استفاده می‌کنیم.

۲ **عبارات گنگ** : در صورت وجود عبارات رادیکالی در صورت یا مخرج کسر، برای رفع ابهام و حذف عامل‌های صفرکننده، با ضرب و تقسیم کسر بر مزدوج عبارت گنگ مورد نظر به حل مسئله می‌پردازیم.

۳ **توابع مثلثاتی** : در حالتی که کسر شامل توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس است با استفاده از اتحادهای مثلثاتی نظیر $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$ ، $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ و $\cos ۲x=\cos^۲x-\sin^۲x=۱-۲\sin^۲x$ به محاسبه حد می‌پردازیم.

در پایان این درس نیز با ارائه مثالی، روش تغییر متغیر توضیح داده شده است. حل یک مسئله هم به روش تغییر متغیر و هم به روش‌های دیگر می‌تواند برای دانش‌آموزان جالب باشد.

در استفاده از روش تغییر متغیر، تغییر متغیری که معمولاً می‌تواند کمک مناسبی به محاسبه حد در حالت $\frac{۰}{۰}$ بکند زمانی که حد تابع در $x\to a$ خواسته شده است تغییر متغیر $t=x-a$ است. به عنوان مثال برای حل کار در کلاس صفحه ۱۴۳ به صورت صفحه بعد عمل می‌کنیم :

کار در کلاس ص ۱۴۳

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin ۲x-۱}{۴x-\pi} \Rightarrow \lim_{t\to ۰} \frac{\sin ۲(t+\frac{\pi}{۴})-۱}{۴(t+\frac{\pi}{۴})-\pi} = \lim_{t\to ۰} \frac{\sin(۲t+\frac{\pi}{۲})-۱}{۴t}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{\cos ۲t-۱}{۴t} = \lim_{t\to ۰} \frac{\cancel{۱}-\cancel{۲}\sin^۲ \cancel{t-۱}}{۴t}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{-\sin ۲t}{۲t} = -\frac{۱}{۲} \cancel{\lim_{t\to ۰}} \frac{\cancel{\sin t}}{t} \times \cancel{\lim_{t\to ۰}\sin} t$$

$$= -\frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۰ = ۰$$

پس اگر $x \to \frac{\pi}{۴}$ ، $t \to ۰ \Leftarrow \boxed{x-\frac{\pi}{۴}=t}$

$$x = t+\frac{\pi}{۴}$$

حل تمرین‌های درس چهارم ص ۱۴۴

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۲x^۲+x-۱ = x^۲-۱+x^۲+x = (x-۱)(x+۱)+x(x+۱) = (x+۱)(۲x-۱)$$

الف) $$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x} = \lim_{x\to -۱} \frac{\overset{۱}{\cancel{(x+۱)}}(۲x-۱)}{۳x\underset{۱}{\cancel{(x+۱)}}} = \lim_{x\to -۱} \frac{۲x-۱}{۳x} = \frac{-۲-۱}{-۳} = +۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} [x] = ۲$$

ب) $$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲[x]-۸}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲x^۲-۸}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲(x^۲-۴)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲\overset{۱}{\cancel{(x-۲)}}(x+۲)}{\underset{۱}{\cancel{x-۲}}}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} (۲x+۴) = ۸$$

پ) $$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴} \times \frac{(\sqrt{x+۲}+۲)}{(\sqrt{x+۲}+۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)} = \frac{۱}{۴\times۴} = \frac{۱}{۱۶}$$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}} \times \left(\dfrac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}\right) \times \left(\dfrac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}\right) = \lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۸-۲x)(۲+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{\cancel{(۴-x)}(۳+\sqrt{۲x+۱})}{۲\cancel{(۴-x)}(۲+\sqrt{x})} = \dfrac{۶}{۸} = \dfrac{۳}{۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x} \times \dfrac{(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}{(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲\cancel{x}}{\cancel{x}(x^۲+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \dfrac{۲}{۲} = ۱$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱} \times \left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}\right) = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(x^۲-x)(\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}(x+\sqrt{x})} = \dfrac{۲}{۲} = ۱$

۲ اگر $f(x) = \dfrac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}$ و $g(x) = \dfrac{۲x+۱}{x}$، **حاصل** $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)g(x)$ را بیابید.

$\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{(x+۱)}{\cancel{(۲x+۱)}(x-۱)} \times \dfrac{\cancel{(۲x+۱)}}{x} = \lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{x+۱}{x(x-۱)} = \dfrac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}} = \dfrac{۴}{۶} = \dfrac{۲}{۳}$

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin x}{\cos x} \times \dfrac{(۱+\sin x)}{(۱+\sin x)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin ۲x}{\cos x(۱+\sin x)}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{\cos ۲x}{\cancel{\cos x}(۱+\sin x)} = \dfrac{۰}{۲} = ۰$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x - \sin x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos x \cos\frac{\pi}{۴} - \sin x \sin\frac{\pi}{۴}}{\cos x - \sin x}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \times \dfrac{\cancel{(\cos x - \sin x)}}{\cancel{(\cos x - \sin x)}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

پ) $$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲}{|۱-\cos x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲}{۱-۱+\sin\frac{۲x}{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۴}{۲}\times\underbrace{\cancel{\frac{\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}}}_{۱}\times\underbrace{\cancel{\frac{\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}}}_{۱}=\frac{۴}{۲}=۲$$

ت) $$\lim_{x\to ۰}\frac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲-۲+۴\sin\cancel{۲}x}{x\cancel{\sin x}}=\lim_{x\to ۰}۴\times\overset{۱}{\cancel{\frac{\sin x}{x}}}=۴$$

ث) $$\lim_{x\to -\pi}\frac{\cos x+۱}{x+\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos(t-\pi)+۱}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos-(\pi-t)+۱}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\cos t+۱}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{(۱-\cos t)}{t}\frac{(۱+\cos t)}{(۱+\cos t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ t}{t(۱+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\cancel{\sin t}}{t}\times\frac{\sin t}{۱+\cos t}=\frac{۰}{۱+۱}=\frac{۰}{۲}=۰$$

$$\boxed{\begin{array}{l}x+\pi=t\\ x=t-\pi\end{array}}$$

حل : $x-a=t$ و اگر $x\to a$ آنگاه $t\to ۰$ و $x=t+a$ پس داریم :

ج) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(t+a)-\sin a}{t+a-a}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}$$

$$=\cos a\underbrace{\cancel{\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}}}_{۱}+\sin a\lim_{t\to ۰}\frac{(\cos t-۱)}{t}=\cos a+۰=\cos a$$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{(\cos t-۱)}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{(\cos t-۱)(\cos t+۱)}{t(\cos t+۱)}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos^۲ t-۱}{t(\cos t+۱)}=\lim_{t\to ۰}-\frac{\sin^۲ t}{t(\cos t+۱)}$$

$$=-\lim_{t\to ۰}(\underbrace{\cancel{\frac{\sin t}{t}}}_{۱}\times\frac{\sin t}{\cos t+۱})=-\frac{۰}{۲}=۰$$

با تغییر متغیر $x-\frac{\pi}{۳}=t$ ، اگر $x\to\frac{\pi}{۳}$ پس $t\to ۰$ و داریم $x=t+\frac{\pi}{۳}$

چ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۶t+۲\pi-۲\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

با تغییر متغیر $t=x-1$، اگر $x\to 1$ پس $t\to 0$ و داریم $x=t+1$

ح) $$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{2t+2-3\sqrt{t+1}+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t+3-3\sqrt{t+1}}{t}$$

$$=2\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}+3\lim_{t\to 0}\frac{(1-\sqrt{t+1})}{t}\times\frac{(1+\sqrt{t+1})}{(1+\sqrt{t+1})}=2+3\lim_{t\to 0}\frac{-\cancel{t}}{\cancel{t}(1+\sqrt{t+1})}=2+(3\times\frac{-1}{2})$$

$$=2-\frac{3}{2}=+\frac{1}{2}$$

درس ۵
پیوستگی

اهداف درس

۱ آشنایی با مفاهیم پیوستگی

۲ توانایی تعیین نقاط ناپیوستگی یک تابع با استفاده از نمودار تابع

۳ توانایی تعیین نقاط ناپیوستگی دسته‌های خاصی از توابع

روش تدریس

درس با یک فعالیت که شامل نمودارهای چند تابع است آغاز می‌شود. دانش‌آموزان با انجام این فعالیت با مفهوم پیوستگی یک تابع در یک نقطه به‌صورت شهودی آشنا می‌شوند. در صفحهٔ بعد، تعریف پیوستگی و نتایج آن ارائه می‌شود و سپس نمونه‌هایی از توابع پیوسته و ناپیوسته در یک نقطه، با ارائه نمودارهای آنها برای تقویت درک شهودی دانش‌آموزان از مفهوم پیوسته بودن و ناپیوسته بودن توابع در یک نقطه، ارائه شده است. طی این نمونه‌ها دانش‌آموزان می‌توانند به این درک برسند که هرگاه نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول $x=a$ قطع شده باشد (گسستی داشته است) حتماً تابع در $x=a$ ناپیوسته است. برای تثبیت این مطلب، کار در کلاس صفحه ۱۴۷ مطرح شده است. تمامی سؤالات کار در کلاس صفحه ۱۴۷ باز پاسخ می‌باشند و می‌توانند شامل پاسخ‌های درست بسیاری باشند که به عنوان نمونه برای هر کدام از آنها یکی از پاسخ‌های درست در صفحهٔ بعد ارائه شده است :

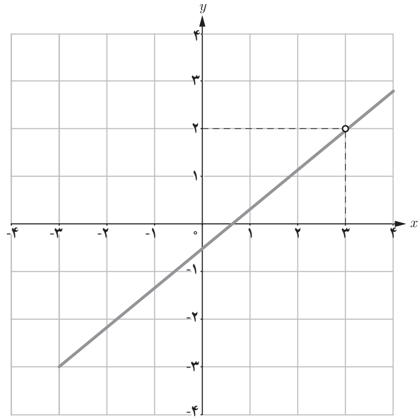
کار در کلاس ص ۱۴۷

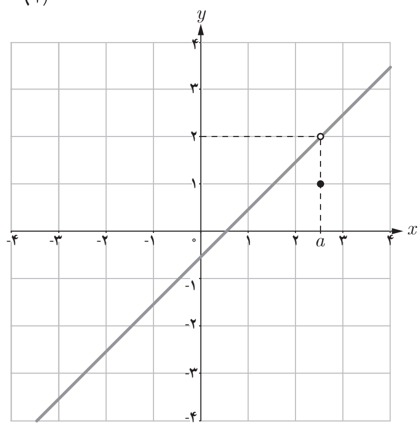
۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=۳$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=۳$ پیوسته نیست)

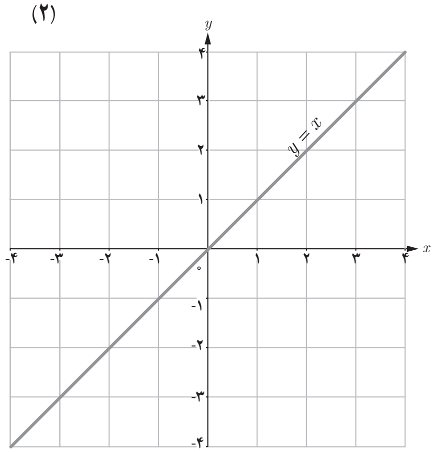
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

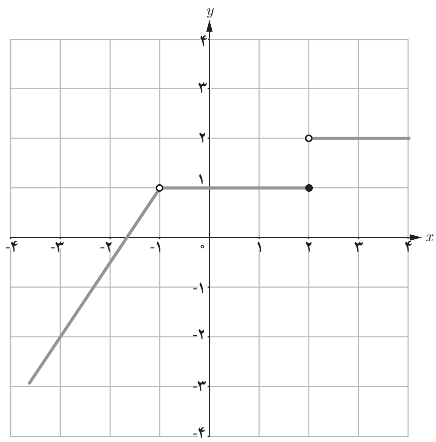
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.


(۱)


(۲)



(۳)


(۴)

تذکر : دو نکته مهم که درمورد پیوستگی باید به آن توجه شود موارد زیر می‌باشد :

۱ در این کتاب و این فصل فقط مفهوم «پیوستگی تابع در نقطه» بیان شده است و از «تابع پیوسته» هیچ حرفی زده نمی‌شود و جزء اهداف کتاب نمی‌باشد.

۲ با توجه به تعریف حد و مطالب ارائه شده و بنابر تعریف پیوستگی، در شرایط زیر باید گفته شود که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست اگر یکی از شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $a \notin D_f$

ب) f فقط در یک نقطه a تعریف شده باشد (مانند تابع $y \quad \sqrt{x}$ در $a=0$).

دانش‌آموزان با انجام فعالیت صفحه ۱۴۸، با مفهوم «پیوستگی یک‌طرفه» تابع در نقطه به صورت شهودی آشنا می‌شوند و پس از درک شهودی آن تعریف «پیوستگی راست تابع در یک نقطه مانند a و پیوستگی چپ تابع در همان نقطه» ارائه شده است.

پس از بیان این تعاریف، ارتباط بین پیوستگی راست و چپ تابع برای پیوستگی آن (در یک نقطه) در قالب یک قضیه دو شرطی مطرح شده است. پس از آن مثال حل شده‌ای برای ارائه نمونه‌ای که از تعاریف و قضایای پیوستگی در آن استفاده شده، بیان شده است و پس از این مثال، کار در کلاسی برای تعیین پیوستگی راست، چپ و دو طرفه توابع در یک نقطه با استفاده از نمودار آنها ارائه گردیده است.

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

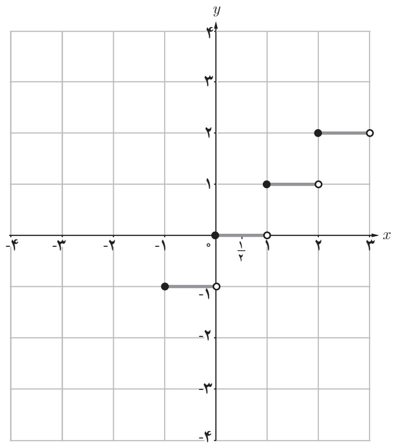
گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

در سؤال ۱ کار در کلاس صفحه ۱۴۹ تعیین پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ در چند نقطه و همچنین پیوستگی راست و چپ آن با توجه به رسم نمودار تابع در نقاط ارائه شده خواسته شده است.

کار در کلاس ص ۱۴۹



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{0 , \frac{1}{2} , 2\}$،

۱ تابع f پیوسته است. فقط در نقطه $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

۲ تابع f پیوستگی راست دارد. در نقاط $\{0 , \frac{1}{2} , 2\}$ پیوستگی راست دارد.

۳ تابع f پیوستگی چپ دارد. در نقطه $\frac{1}{2}$ پیوستگی چپ دارد.

پایین صفحه ۱۴۹ تعریف پیوستگی تابع بر یک بازه بیان شده است.

تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازهٔ باز (a , b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

همان‌طور که دبیران محترم اطلاع دارند تعریف پیوستگی تابع بر یک بازه بسته صرفاً جهت سهولت بیان صورت قضایایی مانند قضیه مقدار میانگین و ... بیان می‌شود و به نوعی آن را به عنوان قرارداد تلقی می‌کنند و نه یک مفهوم جدید!

تذکر : «پیوستگی تابع f بر بازه $[a , b]$»با مفهوم «پیوسته بودن تابع f در هر نقطه $[a , b]$» کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال تابع $y=[x]$ بر بازه بسته $[0 , \frac{1}{2}]$ پیوسته است اما نمی‌توان گفت تابع $y=[x]$ در هر نقطه از $[0 , -]$ پیوسته است. در این فصل از کتاب پیوستگی تابع بر یک بازه ارائه شده است نه پیوسته بودن تابع در تمام نقاط یک بازه. در کار در کلاس‌های صفحه ۱۵۰ نیز به این مطلب (پیوستگی تابع بر یک بازه) پرداخته شده است.

حل تمرین‌های درس پنجم ص ۱۵۱

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-1|+2$

ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$

ت) $y=\begin{cases} x(x-1) & x\le 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \\ a & x=1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1 \\ [x]+a & x\ge 1 \end{cases}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ a & x=0 \\ 2x+1 & x>0 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(2,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^{2}} & x>0\\ b-1 & x=0\\ x-2a & x<0\end{cases}$$

در $x=0$ پیوسته باشد.

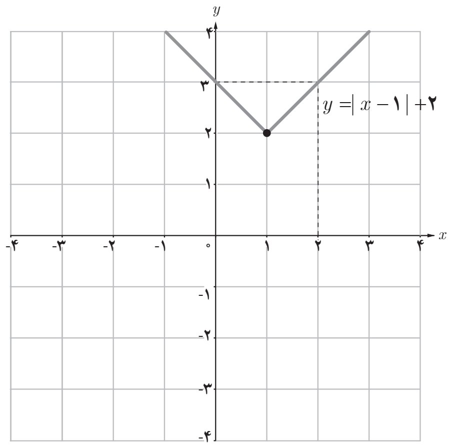
تمرین ص ۱۵۱

۱

(الف)

تابع هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد

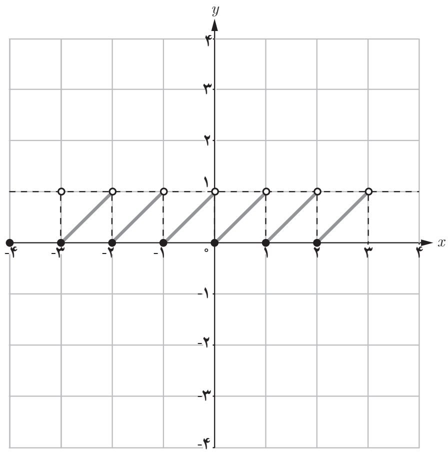
$y=|x-1|+2$

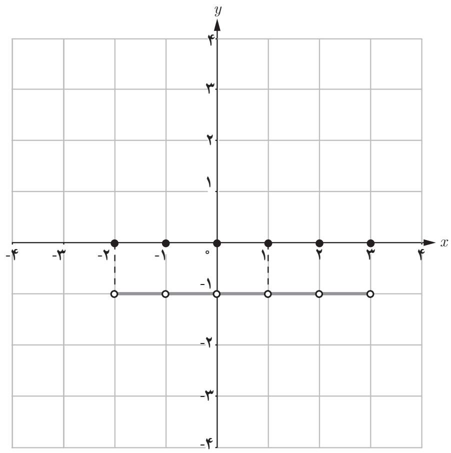


(ب)

مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع برابر $\mathbb{Z}$ است

$y=x-[x]$

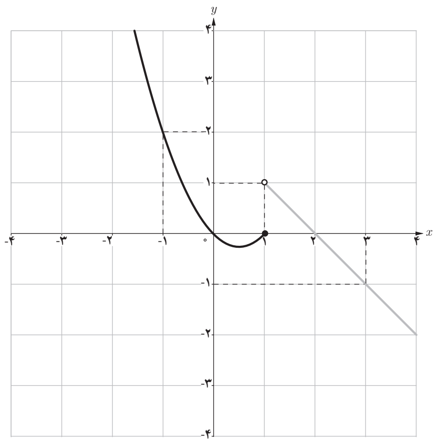




(پ)

مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع برابر مجموعه $\mathbb{Z}$ است

$$y=[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ 1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



(ت)

تابع فقط در نقطه $x=1$ ناپیوسته است

$$y=\begin{cases} x(x-1) & x\leq 1 \\ -x+2 & x>1\end{cases}$$

۲

الف)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x-1)=1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x+2)=1$$
$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

چون $f(1)=a$ پس برای آنکه شرط $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ برقرار باشد باید داشته باشیم $a=1$.

ب)

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}}=3$$

چون $f(1)=a$ پس باید $a=3$.

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^-} h(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}}{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)} = \frac{۱}{۲}$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} h(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} [x]+a = ۱+a$

پس برای آنکه $\lim\limits_{x\to ۱} h(x)$ موجود باشد باید داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲} = ۱+a \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

حال چون $\lim\limits_{x\to ۱} h(x) = \frac{۱}{۲} = h(۱)$ پس h در $x=۱$ پیوسته می‌شود.

ت) چون $\lim\limits_{x\to ۱^+} [x] = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} [x] = ۰$ پس :

$$\lim\limits_{x\to ۱^+} h(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ([x]-a)[x] = ۱-a$$

$$\lim\limits_{x\to ۱^-} k(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ([x]-a)[x] = (۰-a)(۰) = ۰$$

پس برای وجود حد باید داشته باشیم $۱-a=۰$ پس $a=۱$ و در این صورت داریم :

$\lim\limits_{x\to ۱^-} k(x) = ۰ = k(۱)$ پس k در $x=۱$ پیوسته می‌شود.

۳

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} x = ۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} (۲x+۱) = ۱$ پس $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد پس a هر مقدار هم که باشد تابع f در $x=۰$ پیوسته نیست.

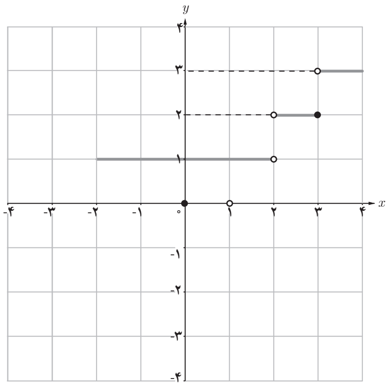
ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} g(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}} = a$

$$\lim\limits_{x\to ۰^-} g(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

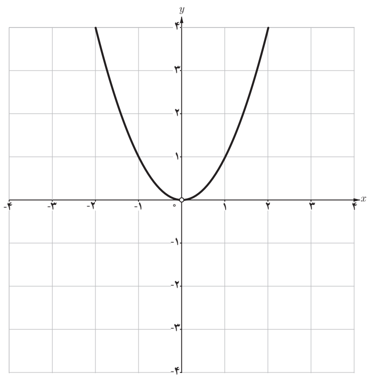
پس برای آنکه $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ موجود باشد باید داشته باشیم : $a=-a \Rightarrow ۲a=۰ \Rightarrow a=۰$

اما در این صورت خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to ۰} g(x) = ۰ \neq ۱ = g(۰)$ پس برای $a=۰$ نیز تابع g در $x=۰$ نمی‌تواند پیوسته باشد.

۴ سؤالی باز پاسخ می‌باشد که یک پاسخ به عنوان نمونه آورده شده است.



(ب)



(الف)

(پ)
$$f(x)=\begin{cases}-۱ & x\leq ۱\\ ۱ & ۱<x<۲\\ ۳ & ۲\leq x\end{cases}$$

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه (۲,۳) پیوسته است امّا چون دو نقطه $x=۳$ پیوسته نیست پس حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

۶ دامنه تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ برابر است با $(-\infty, ۳]$ و تابع f روی بازه‌های بسته‌ای مانند $[۲,۳]$ ، $[۱,۲/۵]$ و ... پیوسته است.

۷
$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(x-۲a)=-۲a$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۱-\cos x}{x^۲}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^۲ x}{x^۲(۱+\cos x)}$$

$$=\left(\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{x}\right)^۲\left(\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱+\cos x}\right)=(۱)^۲(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

$$f(۰)=b-۱$$

حد راست = حد چپ = مقدار تابع $\Rightarrow \frac{۱}{۲}=-۲a=b-۱\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}\ ,\ b=\frac{۳}{۲}$

منابع

۱ استوارت، جیمز، (۲۰۰۲)، حسابگان عام، دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ محمدحسین علامت ساز و علی‌اکبر محمدی‌حسن‌آبادی، چاپ اول، تهران، انتشارات آبیژ، ۱۳۹۸.

۲ استوارت، جیمز، (۲۰۱۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ ارشک حمیدی، جلد اول، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۹۵.

۳ اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید، حسابان (کد کتاب ۲۵۸/۱). تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش،۱۳۹۵.

۴ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید، ریاضیات ۲ (کد کتاب ۲۳۴/۲). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش،۱۳۹۴.

۵ ایوز، هاوارد و، (۱۹۸۳). آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، تهران : مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

۶ تورنس، نلسون. (۲۰۰۳)، ریاضیات در عمل، ترجمهٔ فاطمه معصومه راعی، تهران : کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.

۷ سافیر، فرد، (۲۰۰۲). ریاضیات سری شومز جلد۱. ترجمهٔ محمد مازوچی، تهران : کانون فرهنگی آموزش،۱۳۸۴.

۸ سیلورمن، ریچارد، (۱۹۶۹)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، جلد اول، تهران انتشارات علمی و فنی، ۱۳۹۰.

۹ Adams, R.A. Essex, C.(2010) Calculus: A Complete Course. Toronto. Onario: Pearson Education, Inc.

۱۰ Barnett, R. Ziegler, M. Byleen, K. and Sobecki, D. (2008). College Algebra with Trigo–nometry (g[th] Eduition). Mc Graw – Hill Education.

۱۱ Beecher, J.A. Penna, J.A. & Bittinger, M.L. (2012). Precalculus. A Right Triangle Ap–proach (4[th] Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۲ Crauder, B. Evans, B. & Noell, A. (2008). Functions and change, a modeling approach to college algebra and trigonometry. Boston. AM. Houghton Mifflin.

۱۳ Hungerford, T. W. Shaw, D. J. (2008). Contemporary Precalculus: A Graphing ap–proach.(5[th] Edition). Belmont, CA. Thomson Brooks/Cole.

۱۴ Larson, R. Hostetler, R.P. Edwards, B.H. (2004). College algebra. a graphing approach. New Jersey. Brooks Cole.

۱۵ Rockswold, K. (2011) Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization (4th Edition) Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۶ Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. New Jersey. Pearson Education. Inc.

۱۷ Sullivan, M. (2012). Precalculus (9th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.

۱۸ Sullivan, M. Sullivan III, M. (2015). Precalculus Concepts Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry (3[th] Edition). Upper Saddle River, New Jersey. Pearson Education, Inc

۱۹ Swokowski, E.W. Cole, J. A. (2009). Cole–algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition. New Jersey. Brooks Cole.

۲۰ Swokowski, E.W.Cole, J.A. (2012).Precalculus, functions and graphs. Belmont, CA.Cengage Learning.

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴-گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی عمومی و متوسطه نظری