ایران عرضه
فروشگاه کالاهای دانلودی
IRANARZE.IR

IranArze.ir
@iranarze
@iranarze

کد محصول
ES265

آخرین بروزرسانی
۲ بهمن ۱۴۰۳

درسنامه استخدامی

ریاضی و آمار مقدماتی

- پوشش دهی مباحث مهم و پرکاربرد به زبان ساده و روان
- نسخه رایگان شامل ۴۵ صفحه (صفحات کمتر و بدون سوال)
- برای تهیه نسخه اصلی، حاوی ۱۹۸ صفحه به همراه سوالات خودآزمایی، به سایت ایران عرضه مراجعه نمایید.

لینک های مفید آزمون های استخدامی	
خرید درسنامه استخدامی ریاضی و آمار مقدماتی	خرید سوالات ریاضی و آمار مقدماتی
خرید سوالات دروس عمومی استخدامی	خرید درسنامه دروس عمومی استخدامی
شبکه های اجتماعی ایران عرضه (فایل های رایگان + تخفیفات هفتگی + اخبار)	
(برای مشاهده هر بخش روی آن بزنید)	
آخرین بروزرسانی ها: ۱۴۰۳/۱۱/۰۲ محصول آپدیت و اصل سوالات اضافه شد.	

فهرست مطالب

❖ **فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله**

- بخش اول: مجموعه (آشنایی با مجموعه و ویژگی های آنها) {صفحه ۶}
- بخش دوم: الگو و دنباله (انواع الگو و دنباله ها و ویژگی های آنها) {صفحه ۷}

❖ **فصل دوم: نظریه اعداد**

- بخش اول: توان و اعداد {صفحه ۸}
- بخش دوم: عبارت های گویا {صفحه ۸}
- بخش سوم: ب.م.م و ک.م.م {صفحه ۹}
- بخش چهارم: بخش پذیری {صفحه ۹}
- بخش پنجم: همنهشتی و معادلات آن {صفحه ۹}
- بخش ششم: اتحاد های جبری {صفحه ۱۰}

❖ **فصل سوم: معادلات و نامعادلات**

- بخش اول: آشنایی با معادلات و روش حل آنها {صفحه ۱۱}
- بخش دوم: تعیین علامت چند جمله ای ها {صفحه ۱۲}
- بخش سوم: نامعادلات {صفحه ۱۲}

❖ **فصل چهارم: توابع**

- بخش اول: آشنایی با تابع {صفحه ۱۳}
- بخش دوم: دامنه و برد {صفحه ۱۳}
- بخش سوم: انواع تابع و خصوصیات آن {صفحه ۱۴}
- بخش چهارم: عملیات روی تابع {صفحه ۱۵}

❖ **فصل پنجم: مثلثات**

- بخش اول: آشنایی با مثلثات (دایره مثلثاتی و نسبت های مثلثاتی) {صفحه ۱۷}
- بخش دوم: روابط نسبت های مثلثاتی {صفحه ۱۸}

➢ بخش سوم: اتحادهای مثلثاتی {صفحه ۱۸}

❖ **فصل ششم: حد و پیوستگی**

➢ بخش اول: حد {صفحه ۲۰}

➢ بخش دوم: قضایای حد (رفع ابهام) {صفحه ۲۱}

➢ بخش سوم: پیوستگی {صفحه ۲۲}

❖ **فصل هفتم: مشتق و انتگرال**

➢ بخش اول: مشتق {صفحه ۲۳}

➢ بخش دوم: کاربرد مشتق (شیب خط، صعودی و نزولی، اکسترمم (نسبی و مطلق)، تقعر نمودار، نقطه عطف) {صفحه ۲۴}

➢ بخش سوم: انتگرال و خواص آن {صفحه ۲۵}

❖ **فصل هشتم: آنالیز ترکیبی**

➢ بخش اول: اصول شمارش (جایگشت - ترکیب و ترتیب) {صفحه ۲۷}

➢ بخش دوم: احتمال (آشنایی با احتمال، اصول احتمال، احتمال شرطی) {صفحه ۲۸}

❖ **فصل نهم: آمار و احتمال**

➢ بخش اول: آمار و اندازه گیری (آشنایی با علم آمار - جامعه و نمونه - متغیر و انواع آن) {صفحه ۲۹}

➢ بخش دوم: دسته بندی داده ها و جدول های فراوانی (میلی، مستطیلی، چندبر فراوانی و ...) {صفحه ۳۰}

➢ بخش سوم: شاخص های مرکزی (میانگین، میانه، مد) {صفحه ۳۰}

➢ بخش چهارم: شاخص های پراکندگی (واریانس، ضریب تغییرات، انحراف معیار) {صفحه ۳۱}

❖ **فصل دهم: منطق ریاضی**

➢ بخش اول: استدلال و گزاره های منطقی {صفحه ۳۳}

➢ بخش دوم: ترکیب گزاره های منطقی {صفحه ۳۳}

➢ بخش سوم: استلزام و استنتاج (اسنلزام منطقی) {صفحه ۳۴}

- بخش چهارم: سورها {صفحه ۳۴}

❖ **فصل یازدهم: ماتریس ها**

- بخش اول: آشنایی با ماتریس ها {صفحه ۳۵}
- بخش دوم: عملیات روی ماتریس ها (اعمال جبری ماتریس - ترانهاده ماتریس - دترمینان ماتریس - معکوس ماتریس) {صفحه ۳۵}
- بخش سوم: حل دستگاه های معادلاتی با ماتریس (حل معادلات چند مجهولی با ماتریس - عملیات سطری مقدماتی) {صفحه ۳۷}

❖ **فصل دوازدهم: هندسه تحلیلی**

- بخش اول: هندسه تحلیلی در فضای R^2 و R^3 (دستگاه های مختصات) {صفحه ۳۹}
- بخش سوم: بردارها، ویژگی ها و اعمال جبری آن (بردار های - بردار های یکه (واحد) - اعمال جبری بردار ها) {صفحه ۳۹}
- بخش چهارم: خط و صفحه در فضا (نقطه، خط و صفحه در فضا) {صفحه ۴۰}

❖ **فصل سیزدهم: هندسه**

- بخش اول: مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، و ...) {صفحه ۴۱}
- بخش دوم: مثلث {صفحه ۴۲}
- بخش سوم: چندضلعی های منتظم (آشنایی با چندضلعی ها و ویژگی های آنها) {صفحه ۴۲}
- بخش چهارم: تشابه و تناسب {صفحه ۴۳}
- بخش پنجم: تالس (قضیه تالس و تعمیم آن) {صفحه ۴۳}
- بخش ششم: هندسه فضایی (اشکال سه بعدی و ویژگی ها آنها) {صفحه ۴۳}

❖ فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

➢ بخش اول: مجموعه (آشنایی با مجموعه و ویژگی های آنها)

مجموعه به دسته ای از اشیا مشخص و دو به دو متمایز گفته میشود.

رخداد های میان دو یا چند مجموعه عبارتند از:

* دو مجموعه A و B در صورتی مساوی هم هستند که تمامی اعضای یک مجموعه در مجموعه دیگر نیز باشد $(A = B)$

* در صورتی که تمامی اعضای مجموعه A در مجموعه B نیز باشد اما این دو مجموعه مساوی هم نباشند میتوان گفت که مجموعه A زیر مجموعه B میباشد $(A \subseteq B)$

* اجتماع دو مجموعه، مجموعه ای شامل تمامی اعضای دو مجموعه میباشد $(A \cup B)$

* اشتراک دو مجموعه، مجموعه ای که تنها شامل اعضای مشترک دو مجموعه میباشد $(A \cap B)$

* اختلاف دو مجموعه، مجموعه ای شامل تمام اعضای مجموعه A، به غیر از اشتراک دو مجموعه A و B $(A - B)$

* تعداد اعضای مجموعه A را با n(A) نشان میدهیم

- مجموعه متناهی: مجموعه ای نامتناهی است که تعداد اعضای آن (n(A)) قابل شمارش باشد

- مجموعه نامتناهی: مجموعه ای است که تعداد اعضای آن بیشمار و یا بینهایت بوده و قابل شمارش نباشد.

* تعداد اعضای برخی مجموعه های متناهی ممکن است زیاد باشد اما با داشتن امکانات زمان ممکن است تعداد آنها را یافت.

* در تعریف مجموعه متناهی چنین میتوان گفت که: «مجموعه هایی که تعداد اعضای آنها قابل شمارش و یک عدد حسابی است، مجموعه متناهی نامیده میشوند»

* مجموعه اعداد خاصی که با آنها سر و کار خواهیم داشت عبارتند از:

* اعداد طبیعی $(\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\})$ * اعداد حسابی $(\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\})$

* اعداد صحیح $(\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\})$ * اعداد گویا $\left(\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}\right)$

* اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$ مجموعه اعدادی که نتوان به صورت نسبت دو عدد نشان داد)

* اعداد حقیقی $(\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}')$

➢ بخش دوم: الگو و دنباله (انواع الگو و دنباله ها و ویژگی های آنها)

- الگو: یک ساختار منظم از اشکال، اعداد، نماد ها و ... که ممکن است تکرار شونده، رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

- جمله عمومی: جمله عمومی یک الگو، رابطه ای است که ساختار جملات موجود در الگو را مشخص میکند و با استفاده از میتوان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.

* در حالت کلی دو نوع الگو داریم: الگوی خطی و الگوی غیر خطی

* الگوی خطی: در این دسته از الگو ها، اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است: ... , -12 , -7 , -2 , 3 , 8 , 13

* الگوی غیرخطی: در این الگوها، اختلاف میان دو جمله متوالی یکسان نمیباشد اما به طور یقین میان جملات آن یک الگو برقرار میباشد: ... , 1 , 4 , 9 , 16

- دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار میگیرند، یک دنباله مینامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده میشوند. ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. دنباله ها به دو دسته دنباله حسابی و دنباله هندسی تقسیم میشوند.

*** دنباله حسابی:**

هر جمله نسبت به جمله قبلی خود به اندازه d واحد (قدر نسبت) تغییر میکند.

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ میباشد.

اگر a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند: $b = \frac{a+c}{2}$ (واسطه حسابی)

اگر d مثبت باشد دنباله صعودی، اگر d منفی باشد دنباله نزولی و در صورتی که d برابر صفر باشد دنباله ثابت خواهد بود.

تعداد جملات با داشتن جمله اول و آخر و قدر نسبت برابر است: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$.

مجموع جملات حسابی: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

*** دنباله هندسی:**

هر جمله برابر با حاصل ضرب جمله قبلی خود در مقدار r (قدر نسبت) میباشد.

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 * r^{(n-1)}$ میباشد.

اگر a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند: $b = \sqrt{ac}$. (واسطه هندسی)

صعودی یا نزولی بودن دنباله هندسی بر اساس r تعیین میشود: r بزرگتر از ۱ باشد دنباله صعودی، r مابین ۱ و صفر باشد دنباله نزولی، r برابر یک باشد دنباله ثابت بوده و چنانچه r کوچکتر از صفر باشد، دنباله نوسانی خواهد بود.

+ مجموع جملات دنباله هندسی: $S_n = a_1 * \frac{1-r^n}{1-r}$

❖ فصل دوم: نظریه اعداد

➢ بخش اول: توان و اعداد

- **توان:** تعداد دفعات ضرب عدد در خودش را توان آن عدد میگویند. عدد b را توان nام a گویند و داریم: $b = a^n$.

- **ریشه:** عکس توان با نام ریشه بوده و به صورت $b = \sqrt[n]{a}$ نمایش داده میشود. در این حالت a ریشه nام عدد b میباشد.

* در رادیکالی چون $\sqrt[n]{a}$ اگر n زوج باشد، مقدار a حتما باید مقداری مثبت باشد.

* روابط اولیه که در رابطه با توان ها و ریشه ها میتوان گفت به صورت زیر است

$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$a^n * a^m = a^{n+m}$	$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{m.n}$
$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$a^n * b^n = (ab)^n$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$a^n = b \rightarrow \sqrt[n]{b} = a$	$a^0 = 1$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$n = 2k + 1 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	$n = 2k \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \|a\|$
$\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$a \geq 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$
$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} \|a\|: n = 2k \\ a: n = 2k + 1 \end{cases}$	$\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n * b}$
$p = 2k + 1 \rightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$	$p = 2k \rightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\|a\|^m}$	$\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[nmp]{a^{mp}.b^p.c}$

➢ بخش دوم: عبارت های گویا

- عبارت گویا به کسرهایی گفته میشود که صورت و مخرج آن ها چند جمله ای با شروط ذیل باشد:

+ توان متغیر منفی نباشد

+ متغیر زیر رادیکال نبوده و یا توان آن کسری نباشد.

+ متغیر داخل قدر مطلق نباشد

+ مخرج عبارت برابر با صفر نباشد

+ توان هیچ یک از عبارات متغیر نباشد.

* در شروط گفته شده تنها متغیر ها نباید این شروط را داشته باشند، اگر عددها دارای شرایطی چنین باشند موردی ندارد

* در عبارت های گویا دامنه برابر با تمامی اعداد حقیقی میباشد، به استثنا اعدادی که ریشه مخرج کسر بوده و مخرج کسر را صفر میکنند: $D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه مخرج کسر}\}$

* در صورتی که مخرج کسر عددی گویا نباشد، در دو حالت میتوان آن را گویا کرد:

+ مخرج یک جمله ای باشد: ضرب کردن صورت و مخرج در عبارت رادیکالی متناسب با عبارت گویای مخرج

+ مخرج چند جمله ای باشد: ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج عبارت مخرج و استفاده از انواع اتحاد ها.

بخش سوم: ب.م.م و ک.م.م

- عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b مینامیم (a و b هردو با هم صفر نیستند) و مینویسیم $(a,d) = d$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

+ $d|a$ و $d|b$ (مقسوم علیه مشترک بودن d)

+ $\forall m > 0; m|a, m|b \Rightarrow m \le d$ (بزرگ بودن d از تمامی مقسوم علیه های مشترک همچون m)

- عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b مینامیم و مینویسیم $[a,b] = c$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

+ $a|c$ و $b|c$ (مضرب مشترک بودن c)

+ $\forall m > 0; a|m\ , b|m \ \Rightarrow c \le m$ (کوچک بودن c از تمامی مضرب های مشترک همچون m)

بخش چهارم: بخش پذیری

- عدد صحیح a بر عدد صحیح b بخش پذیر (قابل قسمت) است، به شرطی که عدد صحیحی چون c باشد که $a \ = \ bc$.

* اگر a بر b بخش پذیر باشد، میگوییم a، b را میشمارد (عاد میکند) و مینویسیم $b|a$. به عنوان مثال داریم:

* اگر $b|a$، b را مقسوم علیه‌ی از a و a را مضربی از b مینامیم.

* از ویژگی های مهم بخش پذیری میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

+ اگر $b|a$، آنگاه $b|-a$ و $-b|a$

+ اگر $c|a$ و $c|b$، به ازای دو عدد صحیح x و y داریم: $c|ax + by$

+ اگر $b|a$، آنگاه $|a| \le |b|$

+ اگر $b|1$، آنگاه b = 1 یا b = -1

+ اگر $b|a$ و $c|b$، آنگاه $c|a$

+ اگر $b|a$ و $a|b$، آنگاه b = a یا b = -a

بخش پنجم: همنهشتی و معادلات آن

همنهشتی: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر m|a-b باشد، میگوییم «a همنهشت با b است به پیمانه m» و مینویسیم $a \equiv b\ (mod\ m)$ (در اکثر فرمولها مقدار m را بر بالای عبارت ≡ مینویسند) به زبان ریاضی داریم:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}; a \equiv b\ (mod\ m) \Leftrightarrow m|a - b (m \in \mathbb{N})$$

* دو عدد a و b به پیمانه m همنهشت هستند اگر m تفاضل آنها را عاد کرده یا بشمارد.

* منظور از mod، عملگر باقیمانده تقسیم است. اگر a و b به m تقسیم شوند، باقیمانده (mod) یکسانی خواهند داشت. این موضوع را به صورت گزاره دو شرطی زیر نیز میتوان گفت: a را به پیمانه m، همنهشت با b گویند اگر و فقط اگر تقسیم a بر m و تقسیم b بر m، باقیمانده های یکسانی داشته باشند.

* رابطه همنهشتی به پیمانه m در مجموعه اعداد صحیح، یک رابطه هم‌ارزی است. یعنی این رابطه دارای خواص بازتابی، تقارنی و ترایایی است:

* چنانچه داشته باشیم $a \equiv b \ (mod\ m)$ ، همنهشتی های زیر همواره صادق اند:

$ac \equiv bc \ (mod\ m)$	$a \pm c \equiv b \pm c \ (mod\ m)$
$a \pm mt \equiv b \pm mk \ (mod\ m)$	$a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$

معادلات همنهشتی:

- یک رابطه همنهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \equiv b \ (mod\ m)$ را معادله همنهشتی گویند.

* منظور از حل معادله همنهشتی، پیدا کردن جواب هایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در معادله صدق کنند

* معادله همنهشتی $ax \equiv b \ (mod\ m)$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$.

➢ بخش ششم: اتحاد های جبری

- چند مورد از اتحاد های برکاربرد در ریاضی عبارتند از:

اتحاد مربع مجموع دو جمله	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
اتحاد مکعب مجموع دو جمله	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$؛
فرمول اتحاد توان nام مجموع دو جمله	$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$
فرمول اتحاد توان nام تفاضل دو جمله	$(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} (-b)^i$
اتحاد مزدوج	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
اتحاد جمله مشترک	$(x+a)(x \pm b) = x^2 + (a \pm b)x \pm ab$
اتحاد چاق و لاغر مجموع	$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
اتحاد چاق و لاغر تفاضل	$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

❖ فصل سوم: معادلات و نامعادلات

➢ بخش اول: آشنایی با معادلات و روش حل آنها

- **معادلات درجه ۱:** صورت کلی این نوع معادلات به صورت $ax + b = 0$ میباشد که ریشه آن برابر است با $x = -\frac{b}{a}$

* برای به دست آوردن ریشه، ابتدا مجهول را به یک طرف معامله و معلوم را به طرف دیگر میبریم. سپس تمامی معادله را بر ضریب مجهول تقسیم میکنیم تا مجهول به دست بیاید.

- **معادلات درجه ۲:** معادلاتی که درآنها بالاترین توان متغیر برابر با ۲ باشد. نمایش ریاضی این نوع معادلات به صورت مقابل میباشد که در آن $a \neq 0$ میباشد: $ax^2 + bx + c = 0$

* برای حل این دسته از معادلات، روش های مختلفی از جمله روش دلتا، روش تجزیه و روش مربع کامل وجود دارد.

دلتای معادله با استفاده از فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ محاسبه میشود و ریشه ها با جایگذاری آن در فرمول $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

+ دلتا مثبت باشد ($\Delta > 0$) معادله دارای دو ریشه حقیقی، برابر با صفر باشد ($\Delta = 0$)، معادله دارای یک ریشه حقیقی و اگر منفی باشد ($\Delta < 0$)، معادله ریشه حقیقی ندارد.

* چنانچه α و β ریشه های معادله درجه ۲ باشند، میتوان اتحاد های زیر را در مورد این معادلات نوشت:

قدر مطلق اختلاف دو ریشه	ضرب دو ریشه P	جمع دو ریشه S
$\lvert\alpha - \beta\rvert = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$	$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

* اگر S و P به ترتیب مجموع و حاصلضرب دو عدد همانند α و β باشند، معادله درجه دومی به صورت زیر میتوان نوشت که α و β دو ریشه آن معادله میباشند: $x^2 - Sx + P = 0$

- **معادلات گویا:** معادلات گویا به صورت کلی شامل معادلاتی میباشند که به صورت کسری بوده و صورت و مخرج این کسرها، میتواند شامل چندجمله ای ها نیز باشد. دامنه این نوع معادلات شامل تمام اعداد حقیقی میباشد، به غیر از اعدادی که باعث صفر شدن مخرج کسر میشوند: $D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج کسر}\}$

* برای حل معادله گویا کافی است که با ضرب کردن طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها، مخرج ها را حذف و معادله را ساده تر کنیم و پس از آن نسبت به حل معادله اقدام کنیم. جواب هایی که ریشه مخرج ها میباشند، جواب قابل قبول برای حل معادله نیستند.

- **معادلات رادیکالی:** معادلاتی که متغیر در آنها زیر رادیکال باشد را معادلات رادیکالی میگویند.

- **معادلات قدر مطلق:** ریشه های به دست آمده باید در دامنه تعریف شده قرار گیرند و طرف مقابل قدر مطلق را منفی نکنند.

➢ بخش دوم: تعیین علامت چند جمله ای ها

برای تعیین علامت چندجمله ای ها ابتدا ریشه های آنها را به دست می آوریم (فارغ از درجه چند جمله ای)

تعیین علامت درجه اول	ریشه $ax+b$: موافق a ∣ ۰ ∣ مخالف a
اثر قدر مطلق و توان زوج در تعیین علامت	ریشه $(ax+b)^2$ ، $\lvert ax+b \rvert$: + ∣ ۰ ∣ +
اثر چندجمله ای در مخرج در تعیین علامت	ریشه $\frac{1}{(ax+b)}$: موافق a ∣ ت.ن ∣ مخالف a
تعیین علامت عبارت درجه ۲	
معادله درجه ۲ با دلتای مثبت	x_1 ، x_2 (ax^2+bx+c) : موافق a ∣ 0 ∣ مخالف a ∣ 0 ∣ موافق a
معادله درجه ۲ با دلتای صفر	x_1 (ax^2+bx+c) : موافق a ∣ 0 ∣ موافق a
معادله درجه ۲ با دلتای منفی	بدون ریشه (ax^2+bx+c) : **موافق a**

* برای تعیین علامت معادلات به صورت ضرب یا تقسیم دو چند جمله ای، ریشه هر کدام را به دست آورده و جدول تعیین علامت را تشکیل میدهیم. در نهایت برای پیدا کردن علامت معادله اصلی علامت ها را در هم ضرب میکنیم

➢ بخش سوم: نامعادلات

- نکات ابتدایی که در مورد نامعادلات لازم به ذکر هستند:

$x \geq y \xrightarrow{a>0} ax \geq y$	$x \geq y \xrightarrow{a<0} ax \leq y$	$x \geq y \to x+c \geq y+c$

* در نامعادلات درجه یک، متغیر را به یک سمت انتقال داده و سپس با ضرب، تقسیم، جمع و تفریق، نامعادله را حل میکنیم.

* روش پر کاربرد در حل نامعادلات درجه دوم و کسری، استفاده از جدول تعیین علامت میباشد. این روش مخصوصا در نامعادلاتی که از بیش از یک چند جمله ای تشکیل شده اند، مورد استفاده قرار میگیرد.

* در نامعادلاتی که به صورت قدر مطلق یا توان ۲ هستند میتوان نوشت:

نامعادلات قدر مطلق	نامعادلات درجه ۲
$\begin{cases} \lvert x \rvert \leq a \to -a \leq x \leq a \\ \lvert x \rvert \geq a \to x \leq -a \text{ ,} x \geq a \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 \leq a \to -a \leq x \leq a \\ x^2 \geq a \to x \leq -a \text{ ,} x \geq a \end{cases}$

❖ فصل چهارم: توابع

➢ بخش اول: آشنایی با تابع

- زوج مرتب، با نماد (a,b) در ریاضیات، یک «زوج» از اشیا است. در اینجا «ترتیبی» که اشیا در جفت پدیدار میشوند، مهم است؛ یعنی زوج مرتب (a,b) با زوج مرتب (b,a) متفاوت است، مگر آنکه a = b.

* به هر مجموعه ای از چندین زوج مرتب، یک رابطه گفته شده $R = \{(1,2), (2,7), (4,6), (6,3), (2,4), (4,1)\}$

- **تابع:** یکی از انواع رابطه است. در این نوع رابطه، اعضای دو مجموعه (مجموعه دامنه (D) یا ورودی و مجموعه برد (R) یا خروجی) به یکدیگر وصل میشوند. اصلی ترین نکته در ارتباط با توابع ریاضی این است که هیچ یک از اعضای ورودی، با بیش از یک عضو خروجی رابطه ندارد. به عبارت دیگر، با قرار دادن یک ورودی در تابع، باید تنها به یک خروجی مشخص برسیم.

* برای نمایش توابع چندین روش وجود دارد که ساده ترین آنها، مجموعه زوج مرتب هاست. به رابطه ای که در آن هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه اول یکسان نداشته باشند، یک تابع گفته میشود.

+ در این نوع توابع، به مجموعه‌ی مؤلفه های اول، دامنه تابع و به مجموعه‌ی مؤلفه دوم، برد تابع گفته میشود.

* روش دیگر برای نمایش توابع، استفاده از نمودار ون (نمایش پیکانی) میباشد

* روش دیگر برای نمایش توابع استفاده از نمودار محور مختصات است. در این نمایش، یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی با محور y ها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

* نوع دیگری از نمایش توابع، استفاده از ضابطه تابع هستش. اگر $y = f(x)$ یک تابع باشد، منظور از $f(a)$ عبارتی است که از قرار دادن مقدار a در متغیر x به دست می آید.

* برای تشخیص اینکه ضابطه داده شده یک تابع است یا نه، به متغیر x یک مقدار میدهیم و در صورتی که برای y بیش از یک جواب وجود داشته باشد، ضابطه داده شده تابع نیست

- **ترکیب دو تابع:** ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با $fog(x)$ نشان میدهیم که این تابع برابر است با $fog(x) = f(g(x))$ و دامنه این تابع ترکیبی به صورت $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ میباشد.

* لازم به ذکر است که دو تابع $fog(x)$ و $gof(x)$ مساوی هم نیستند.

➢ بخش دوم: دامنه و برد

* در نمایش زوج مرتب، به مجموعه تمامی مولفه های اول، دامنه تابع و به مجموعه مولفه های دوم، برد تابع گفته میشود.

* در نمایش نمودار ون، به تمامی اعضای مجموعه اول، دامنه تابع و به اعضایی مجموعه دوم، برد تابع گفته میشود.

* در نمایش به صورت نمودار در محور مختصات، به تصویر نمودار بر روی محور xها، دامنه تابع و به تصویر نمودار بر روی محور yها، برد تابع گفته میشود.

* در نمایش به صورت ضابطه ای، مجموعه مقادیری که x میتواند اختیار کند، دامنه تابع و به مجموعه مقادیری که y میتواند اختیار کند، برد تابع گفته میشود

* دامنه تابعی همچون $y = f(x)$، را با D_f و برد تابع را با R_f نشان میدهیم.

* در به دست آوردن دامنه، نباید عبارت را ساده کنیم. زیرا ممکن است باعث حذف شدن عوامل تاثیر گذار باشد.

- دو تابع f و g هنگامی مساوی هستند که دامنه آنها مساوی هم بوده $D_f = D_g$ و به ازای هر مقدار x داخل این دامنه ها داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

عمل جبری	نمایش	دامنه تابع
جمع دو تابع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
اختلاف دو تابع	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	$(f*g)(x) = f(x) * g(x)$	$D_{f*g} = D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \| g(x) = 0\}$

➢ بخش سوم: انواع تابع و خصوصیات آن

- تقسیم بندی های مختلفی برای توابع ریاضی وجود دارد.

* انواع تابع بر اساس رابطه بین دامنه و برد: تابع یک به یک، تابع چند به یک، تابع پوشا، تابع یک به یک و پوشا، تابع غیرپوشا و تابع ثابت

* انواع تابع بر اساس فرم معادله: تابع همانی، تابع خطی، تابع درجه دو یا مربعی، تابع درجه سه یا مکعبی و تابع چندجمله‌ای

* انواع تابع بر اساس برد: تابع قدر مطلق، تابع گویا، تابع علامت، تابع فرد، تابع زوج، تابع متناوب یا دوره‌ای، تابع جز صحیح، تابع وارون و تابع مرکب

- **تابع همانی:** تابعی که هر ورودی از دامنه را به همان مقدار نظیر میکند. به عبارتی دیگر $\forall x \in D_f,\ \ f(x) = x$.

- **تابع ثابت:** تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو میباشد. فارغ از ورودی تابع، خروجی آن همواره مقداری ثابت است.

- **توابع چندجمله ای:** توابعی که نمایش آنها به صورت چندجمله ای های جبری از یک متغیر باشند. دامنه این نوع توابع همه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) میباشد. از انواع آن میتوان به توابع درجه اول (توابع خطی) و توابع درجه دوم (توابع سهمی):

- **تابع چند ضابطه ای (Piecewise Function):** توابعی هستند که برای قسمت های مختلف دامنه، ضوابط مختلفی تعریف شده است. لازم به ذکر است که دامنه هیچ یک از این قسمت ها با قسمت های دیگر اشتراکی ندارد. از انواع توابع چند ضابطه ای میتوان به قدر مطلق، جزء صحیح و .. اشاره کرد.

* در صورتی که با قرار دادن مقادیر x- در تابع، علامت خروجی تابع تغییر نکند، میگوییم تابع ما زوج است. اما چنانچه با قرار دادن مقادیر x- در تابع، علامت تابع تغییر کند، میگوییم تابع ما فرد است:

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \rightarrow \text{تابع زوج است} \\ f(-x) = -f(x) \rightarrow \text{تابع فرد است} \end{cases}$$

- تابع وارون (معکوس): اگر f یک تابع از دامنه D_f به برد R_f باشد، آنگاه معکوس تابع f که با f^{-1} نشان داده میشود، تابعی است از $D_{f^{-1}}(=R_f)$ به $R_{f^{-1}}(=D_f)$ که نمایش آن به صورت مقابل است: $f^{-1} = \{(f(x), x): x \in D_f\}$

* شرط معکوس پذیری تابع f این است که این تابع، تابعی یک به یک باشد.

* برای به دست آوردن تابع معکوس در حالت زوج مرتب، کافی است که جای مولفه های اول و دوم را در هر زوج مرتب عوض کنیم

* برای رسم نمودار تابع معکوس در محور مختصات، کافی است ابتدا در صورت لزوم با حذف بخش هایی که مانع از یک به یک بودن تابع میشوند، آن را یک به یک کرده و پس از آن، نمودار را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم.

* برای به دست آوردن ضابطه تابع معکوس یک تابع مانند f، در معادله $y = f(x)$، ابتدا متغیر x را بر حسب متغیر y محاسبه میکنیم. سپس با تغییر نام متغیر y به متغیر x و برعکس، ضابطه تابع $y = f(x)$ را به دست میاوریم.

* از جمله پرکاربرد ترین توابع و معکوس آنها میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

تابع	معکوس تابع	تابع	معکوس تابع
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$f^{-1}(x) = \ln x$	$f(x) = a^x$	$f^{-1}(x) = \log_a x$
$f(x) = \sin x$	$f^{-1}(x) = \arcsin x$	$f(x) = \cos x$	$f^{-1}(x) = \arccos x$

بخش چهارم: عملیات روی تابع

- انتقال عمودی و افقی توابع:

تابع $y = f(x)$ مشخص است و فرض میکنیم که k یک عدد حقیقی باشد، در اینصورت داریم:

* رسم نمودار $y = -f(x)$، قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها

* رسم نمودار $y = f(-x)$، قرینه نمودار $f(x)$ را نسبت به محور y ها

* برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ داریم:

$$f(x) + k \rightarrow \begin{cases} k > 0, & k \text{ واحد به بالا منتقل میشود} \\ k < 0, & k \text{ واحد به پایین منتقل میشود} \end{cases}$$

* برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ داریم:

$$f(x+k) \to \begin{cases} k > 0, & \text{واحد به چپ منتقل میشود } k \\ k < 0, & \text{واحد به راست منتقل میشود } k \end{cases}$$

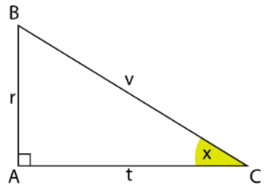
* در رسم نمودار $y = kf(x)$، عرض نقاط را در k ضرب میکنیم. k>1 باشد، نمودار منبسط و 0<k<1 باشد، منقبض میشود.

* در رسم نمودار $y = f(kx)$، طول نقاط را در $\frac{1}{k}$ ضرب میکنیم. k>1 باشد، نمودار منقبض و 0<k<1 باشد منبسط میشود.

* اعمال این تغییرات نیز از اولویت خاصی برخوردار است که ترتیب آن را در تابعی همانند $y = af(bx+c)+d$ به صورت مقابل است: $y = f(x) \to y = f(x+c) \to y = f(bx+c) \to y = af(bx+c) \to y = af(bx+c)+d$

❖ فصل پنجم: مثلثات

➢ بخش اول: آشنایی با مثلثات (دایره مثلثاتی و نسبت های مثلثاتی)



نسبت های مثلثاتی عبارتند از سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت که در یک مثلث قائم الزاویه همانند مثلث ABC زیر، مقادیر این تابع برای زاویه x عبارتند از:

$\sin x = \frac{r}{v}$	$\cos x = \frac{t}{v}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{r}{t}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{t}{r}$

- دایره مثلثاتی دایره ای جهت دار به شعاع یک واحد است که جهت مثبت آن، پاد ساعتگرد میباشد. این دایره توسط محور های عمود بر هم به چهار بخش تقسیم میشوند.

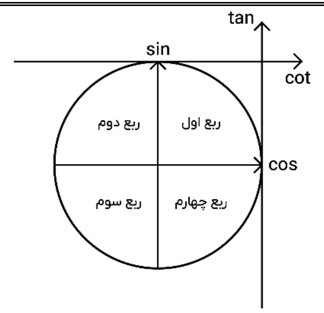
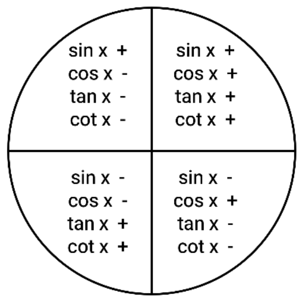
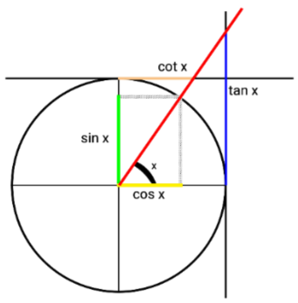
- اندازه گیری زاویه ها در دایره مثلثاتی به دو صورت درجه و رادیان انجام میگیرد.

درجه: محیط دایره را به ۳۶۰ واحد تقسیم میکنیم، اندازه هر یک از زوایای مرکزی رو به این کمان ها یک درجه میباشد.

رادیان: یک رادیان یک زاویه مرکزی است که اندازه کمان روبروی آن برابر شعاع دایره است. که این مقدار تقریباً برابر با ۵۷ درجه است.

* رابطه ای برای تبدیل درجه به رادیان و بالعکس: $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$. به عبارتی دیگر برای تبدیل درجه به رادیان کافیست آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنیم.

- دایره مثلثاتی توسط محور های عمود بر هم گذرنده از مرکز آن به چهار ربع تقسیم میشود که ربع اول در بالا و سمت راست قرار دارد و نامگذاری این بخش ها در جهت پادساعتگرد صورت میگیرد

محور ها و ربع های دایره مثلثاتی	علامت نسبت های مثلثاتی	مقدار نسبت های مثلثاتی زاویه x در دایره
		

* با توجه به اینکه شعاع دایره مثلثاتی یک واحد میباشد، میتوان گفت که مقدار سینوس و کسینوس همواره در بازه $[-1,1]$ قرار دارد.

➢ بخش دوم: روابط نسبت های مثلثاتی

* در جدول زیر به برخی از روابط مثلثاتی زاویه های قرینه، مکمل و ... میپردازیم:

نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه	نسبت های مثلثاتی زوایای مکمل
$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases}$	$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \tan(\pi - x) = -\tan x \\ \cot(\pi - x) = -\cot x \end{cases}$

* نکته کلی که لازم به ذکر میباشد، این است که اگر در کمان یک نسبت مثلثاتی، مضارب صحیح π اضافه یا کم شوند تغییری در نسبت داده نمیشود، اما علامت آن ممکن است بنابر ناحیه تغییر کند. در صورتی که در یک کمان از نسبت مثلثاتی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ اضافه یا کم شود، نسبت مثلثاتی مورد نظر تغییر خواهد کرد و تغییر علامت آن نیز همچنان به ناحیه مثلثاتی بستگی دارد

➢ بخش سوم: اتحادهای مثلثاتی

- اتحاد های پرکاربردی که در نسبت های مثلثاتی برقرار است را میتوان به صورت زیر لیست کرد:

اتحاد های درجه دو نسبت های مثلثاتی	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x . \cos x$ $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \cos^2 x$ $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$
سینوس و کسینوس دو برابر زاویه	$\sin(2x) = 2\sin x . \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
سینوس، کسینوس و تانژانت جمع و تفریق دو زاویه	$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

- **توابع مثلثاتی:** به توابعی چون $y = a \sin x$ و یا $y = \tan bx$ که در آنها نسبت های مثلثاتی وجود دارد، توابع مثلثاتی گفته میشود.

در توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$، دامنه توابع برابر R و برد آنها برابر با بازه $[-1,1]$ میباشد.

+ در توابع مثلثاتی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$، دوره تناوب برابر است با $T = \frac{2\pi}{|b|}$، ماکسیمم برابر است با $max = |a| + c$ و مینیمم برابر است با $min = -|a| + c$

* تابع تانژانت به صورت $y = \tan x$ نوشته میشود، که دامنه آن به صورت $\mathbb{R} - \frac{(2k+1)\pi}{2}$ بوده و برد آن برابر با $\mathbb{R}$ است. دوره تناوب این تابع برابر $T = \pi$ میباشد.

* تابع کتانژانت به صورت $y = \cot x$ نوشته میشود، که دامنه آن به صورت $\mathbb{R} - k\pi$ بوده و برد آن برابر با $\mathbb{R}$ است. دوره تناوب این تابع برابر $T = \pi$ میباشد.

❖ فصل ششم: حد و پیوستگی

➢ بخش اول: حد

- همسایگی یک نقطه: هر بازه به صورت $(x-\alpha, x+\alpha)$ را که در آن x یک عدد حقیقی و α یک عدد حقیقی مثبت است را یک همسایگی متقارن برای x مینامند.

* در صورتی که نقطه x را از بازه حذف کنیم، بازه ای مانند $(x-\alpha, x+\alpha)-\{x\}$ به دست می آید که به آن ، همسایگی متقارن محذوف برای x میباشد.

* به بازه $(x, x+\alpha)$ یک همسایگی راست و به بازه نظیر $(x-\alpha, x)$، همسایگی چپ نقطه x گفته میشود.

- میل کردن: وقتی که x از عددی به غیر از a به سمت خود a حرکت میکند، میگوییم که x به a میل میکند. به عبارتی دیگر میل کردن x به a یعنی آنکه مقادیر x به a نزدیک میشوند.

وقتی که x از مقادیری بیشتر از a به a نزدیک میشود، میگوییم که x از راست به a میل میکند و آن را با $x \to a^+$ نشان میدهیم.

همچنین وقتی که x از مقادیری کمتر از a به a نزدیک میشود، میگوییم که x از چپ به a میل میکند و آن را با $x \to a^-$ نشان میدهیم.

* اگر مقدار f با نزدیک شدن x به نقطه a از مقدار های بزرگتر و نزدیک آن، به مقداری مانند j نزدیک شود، حد راست تابع f در نقطه x = a، برابر با j میباشد و مینویسیم: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = j$

* اگر مقدار f با نزدیک شدن x به نقطه a از مقدار های کمتر و نزدیک آن، به مقداری مانند j نزدیک شود، حد چپ تابع f در نقطه x = a، برابر با j میباشد و مینویسیم: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = j$

* اگر حد چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه x = a وجود داشته باشند و مقدار این دو با هم برابر باشد، تابع $f(x)$ در آن نقطه دارای حد میباشد: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = j \to \lim\limits_{x \to a} f(x) = j$

$\lim\limits_{x \to a}\big(f(x)+g(x)\big) = j+m$	$\lim\limits_{x \to a}\big(f(x)-g(x)\big) = j-m$
$\lim\limits_{x \to a}\big(f(x)*g(x)\big) = j*m$	$\lim\limits_{x \to a}\big(f(x)\div g(x)\big) = j \div m$
$\lim\limits_{x \to a} c*f(x) = c*j$	$\lim\limits_{x \to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{j} \quad (j \neq 0)$
$\lim\limits_{x \to a}\big(f(x)\big)^n = j^n$	$\lim\limits_{x \to a}\lvert f(x)\rvert = \lvert j\rvert$
$\lim\limits_{x \to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{j} \quad (j>0 \;\; or \;\; n=2k+1)$	

- در حالت های خاصی از حد گیری ممکن است ابهام به وجود بیاید که این حالت ها به صورت زیر میباشد:

$\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}} = \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty * 0^{\pm}$	$\infty - \infty$	1^{∞}

* در محاسبات حدی دو نوع صفر داریم، صفر مطلق یا عددی که به صورت 0 نمایش داده میشود و نوع دیگر صفر حدی است. این صفر هنگامی رخ میدهد که تابع به صفر میل میکند اما برابر با صفر نمیباشد.

در جدول زیر صفر مطلق را صرفا با *0* نشان میدهیم:

$\infty * \infty = \infty$	$\infty + \infty = \infty$	$a * \infty = \infty$
$\frac{\infty}{a} = \infty$	$a > 0: \quad \frac{a}{0^{+}} = +\infty$	$a > 0: \quad \frac{a}{0^{-}} = -\infty$
$0 * \infty = 0$	$\frac{a}{\infty} = 0$	$\frac{0}{0} = 0$
$\frac{a}{0} =$ تعریف نشده	$\frac{0}{0^{\pm}} = 0$	$\frac{0^{\pm}}{0} =$ تعریف نشده

➢ بخش دوم: قضایای حد (رفع ابهام)

در صورتی که در $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$، حد صورت و مخرج در x = a برابر با صفر حدی باشد، یعنی داشته باشیم $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$، به وضعیت پیش آمده وضعیت ابهام $\frac{0}{0}$ گفته میشود.

* اگر توابع f و g چندجمله ای باشند، برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ باید عامل صفر کننده را از صورت و مخرج حذف کنیم. برای این کار میتوان از روش هایی چون اتحاد ها، تجزیه کردن، گویا کردن و ... استفاده کرد.

* در صورتی که حداقل یکی از توابع f و g عبارتی رادیکالی باشد، برای رفع ابهام میتوان صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کرد.

* در صورتی که حداقل یکی از توابع f و g یک عبارت مثلثاتی باشد، با اتحاد های مثلثاتی صورت و مخرج را آن قدر ساده میکنیم که عامل صفر کننده در صورت و مخرج ساده شود تا بتوان آنرا از صورت و مخرج حذف کرد.

روش دیگر برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$، قاعده هوپیتال میباشد. چنانچه داشته باشیم $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ و یا $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$، در صورت مشتق پذیر بودن توابع f و g، میتوان برای محاسبه حد، از صورت و مخرج به صورت جداگانه مشتق گرفت و سپس از عبارت جدید به دست آمده حد گرفت. به طور کلی داریم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \to \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

* در صورتی که در این مرحله نیز با نتیجه مبهم روبرو شدیم، میتوان مجدد از صورت و مخرج مشتق گرفت.

* قاعده هوپیتال برای حد های چپ و راست نیز برقرار است. همچنین برای هر مقدار a، حتی بینهایت نیز برقرار میباشد.

* روش دیگر برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$، استفاده از هم ارزی میباشد. توابع f و g را در همسایگی x = a هم ارز گوییم و با $f \sim g$ نشان دهیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \end{cases}$$

+ هر عبارت با درجه گویای مثبت، وقتی که $x \to 0$، هم ارز جمله ای میباشد که کمترین درجه را دارد و وقتی که $x \to \pm\infty$، هم ارز جمله ای میباشد که بیشترین درجه را دارد.

* هم ارزی های مثلثاتی وقتی که x به صفر میل میکند $(x \to 0)$ را در جدول زیر میتوانید مشاهده کنید:

$\sin ax \sim ax$	$\sin^n ax \sim (ax)^n$	$\sin^{-1} ax \sim ax$
$\cos ax \sim 1 - \frac{(ax)^2}{2}$	$\cos^n ax \sim 1 - \frac{n(ax)^2}{2}$	$\cos^{-1} ax$ *

- حد بینهایت: اگر در تابع $f(x)$ وقتی که x به a میل میکند، مقدار آن بدون هیچ محدودیتی بزرگ و بزرگتر یا کوچک و کوچکتر شود و به هیچ عدد متناهی ثابتی میل نکند، میگوییم که حد تابع در نقطه a برابر با مثبت بینهایت $(+\infty)$ یا منفی بینهایت $(-\infty)$ است.

➢ بخش سوم: پیوستگی

- وقتی که حد چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه x = a موجود و مساوی باهم باشند و با مقدار تابع در نقطه x = a نیز برابر باشد، میگوییم تابع در نقطه x = a، پیوسته است: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

* چنانچه حد راست موجود و برابر با مقدار $f(a)$ باشد، تابع دارای پیوستگی راست میباشد.

* چنانچه حد چپ موجود و برابر با مقدار $f(a)$ باشد، تابع دارای پیوستگی چپ میباشد.

* ناپیوستگی ممکن است در مواردی همچون مرز توابع چندضابطه ای، جزء صحیح اعداد صحیح، رادیکال صفر رخ دهد، پس از این رو در صورت مواجه به چنین مواردی در تابع، باید این نقاط بررسی شوند، اما رخ دادن ناپیوستگی در ریشه مخرج ها همواره قطعی میباشد.

*** چند نکته در ارتباط با پیوستگی توابع چندجمله ای:**

+ چندجمله‌ای ها روی دامنه‌شان، یعنی اعداد حقیقی، پیوسته هستند.

+ جمع و تفریق دو یا چند عبارت چندجمله‌ای نیز روی اشتراک دامنه‌هاشان (اعداد حقیقی) پیوسته است.

+ ضرب چندجمله‌ای ها روی اشتراک دامنه هایشان پیوسته هستند.

❖ فصل هفتم: مشتق و انتگرال

➢ بخش اول: مشتق

مشتق به معنی نرخ تغییرات لحظه ای است و در حالت کلی بیان میکند که یک تابع با چه نرخی نسبت به متغیر وابسته اش تغییر میکند. مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه ای همچون $x = a$ برابر با شیب مماس بر نمودار تابع f در نقطه a میباشد.

* مشتق تابع را با $f'(x)$ نمایش میدهند. به عبارت $\frac{dx}{dy}$ مشتق y نسبت به x گفته میشود. این مقدار، تغییرات تابع y را نسبت به متغیر x در یک نقطه خاص، محاسبه میکند. رابطه مشتق به صورت زیر است:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dx}{dy}$$

* تابع $f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر است هرگاه که تابع در آن پیوسته بوده و مشتق چپ و راست موجود و معین باشد.

* برخی از مشتق های معروف و پرکاربرد (در روابط زیر u و v توابعی بر حسب x میباشند):

تابع	مشتق تابع	تابع	مشتق تابع
توابع جبری و چندجمله ای ها			
$y = c$	$y' = 0$	$y = au$	$y' = au'$
$y = u^n$	$y' = n.u'.u^{n-1}$	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
$y = \frac{a}{u^n}$	$y' = -\frac{an.u'}{u^{n+1}}$	$y = \frac{au+b}{cu+d}$	$y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}.u'$
$y = u.v$	$y' = u'.v + u.v'$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$
توابع مثلثاتی			
$y = \sin u$	$y' = u'.\cos u$	$y = \cos u$	$y' = -u'.\sin u$
$y = \tan u$	$y' = u'(1+\tan^2 u)$	$y = \cot u$	$y' = -u'(1+\cot^2 u)$
توابع نمایی و لگاریتمی			
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = e^u$	$y' = u'.e^u$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u.\ln a}$	$y = a^u$	$y' = u'.a^u.\ln a$
$y = u^v$		$y' = u^v\left(v'.\ln u + \frac{u'.v}{u}\right)$	

* در مشتق گیری از توابع مرکب همچون $fog(x)$، خواهیم داشت: $y = fog(x) = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x).f'(g(x))$

اگر $y = f(u)$ باشد که در آن u یک تابع بر حسب x، همچون $g(x)$ باشد، آهنگ تغییرات y نسبت به u برابر $\frac{dy}{du}$ و آهنگ تغییر u نسبت به x برابر $\frac{du}{dx}$ میباشد. در اینصورت آهنگ تغییر y نسبت به x برابر است با: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} \rightarrow y'_x = y'_u * u'_x$

➢ بخش دوم: کاربرد مشتق (شیب خط، صعودی و نزولی، اکسترمم (نسبی و مطلق)، تقعر نمودار، نقطه عطف)

- تعیین معادله خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$: ابتدا مقدار $f'(a)$ را به دست میاوریم. این مقدار برابر با شیب خط مماس میباشد و با داشتن آن معادله خط مماس را میابیم: $y = f'(a) * (x - a) + f(a)$

معادله خط عمود بر تابع در همان نقطه نیز به صورت زیر است: $y = -\frac{1}{f'(a)} * (x - a) + f(a)$

- یکی دیگر از کاربرد های مشتق بررسی صعودی یا نزولی بودن توابع در بازه های داده شده است.

* علامت مشتق تابع در بازه داده شده، نامنفی باشد $(y' \geq 0)$، تابع صعودی و اگر مثبت باشد $(y' > 0)$، اکیدا صعودی است.

* علامت مشتق تابع در بازه داده شده، نامثبت باشد $(y' \leq 0)$، تابع نزولی و اگر منفی باشد $(y' < 0)$ اکیدا نزولی است.

در صورتی که در مسئله به هیچ بازه ای اشاره نشده باشد، صعودی یا نزولی بودن را به کل دامنه میتوان تعمیم داد.

علامت $f'(x)$ در بازه	مثبت	منفی	صفر
یکنوایی تابع $f(x)$ در بازه	اکیدا صعودی	اکیدا نزولی	ثابت

- در صورتی که از مشتق تابع f، یعنی f'، مجدد مشتق بگیریم، به مشتق درجه ۲ دست میابیم که با f'' نشان داده میشود. با استفاده از مشتق درجه ۲ میتوان جهت تقعر توابع سهمی را نشان داد.

- کاربرد دیگر مشتق، مشخص کردن نقاط بحرانی میباشد. نقاط بحرانی به نقاطی از دامنه تابع گفته میشه که تابع در آن نقاط یا مشتق ندارد و یا اگر مشتق دارد، مقدار مشتق در اون نقطه برابر صفر هست.

* برای یافتن این نقاط، کافی است مشتق تابع را محاسبه کنیم و ریشه های آن یا نقاط دارای مشکل (بدون مشتق، مشتق چپ و راست نابرابر و ...) را به دست بیاوریم.

* در صورتی که مشتق به صورت کسری بود، هم صورت و هم مخرج را برابر صفر قرار میدهیم، ریشه های صورت و مخرج مشتق تابع، نقاط بحرانی هستند به شرطی که عضو دامنه تابع f باشند.

* توابع نمایی، لگاریتمی و هموگرافیک، نقطه بحرانی ندارند.

- از دیگر کاربرد های مشتق، تعیین نقاط اکسترمم و اکسترمم نسبی میباشد. نقاط اکسترمم، همان نقاط ماکسیمم و یا مینیمم تابع میباشد.

* پیوستگی و مشتق پذیری از الزامات نقاط اکسترمم نمیباشد.

- نقاط اکسترمم مطلق، نقاطی هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به تمامی نقاط دامنه تابع f بزرگتر یا مساوی باشد.

* اکسترمم های مطلق تابع یا در انتها و ابتدای بازه دامنه تابع هستند یا یکی از اکسترمم های نسبی تابع میباشند

➢ بخش سوم: انتگرال و خواص آن

- **انتگرال:** روشی برای اختصاص اعداد به توابع است؛ به گونه ای که جابه‌جایی، مساحت، حجم و دیگر مفاهیم برآمده از ترکیب داده های بینهایت کوچک را به وسیله آن بتوان توصیف کرد.

- انتگرال عکس مشتق گیری است و بسته به تابعی که از آن انتگرال میگیریم میتواند معنا و مفهوم متفاوتی داشته باشد.

* به زبان ساده تر، انتگرال برابر مساحت زیر نمودار است. لذا وقتی برای یک تابع یا نمودار داده شده انتگرال را محاسبه میکنیم در واقع مساحت زیر نمودار را بدست میاوریم. فرم کلی نمایش انتگرال در محاسبات به صورت $\int f(x)dx$ میباشد.

* چنانچه تابع f را داشته باشیم و از آن مشتق بگیریم، تابع f' به دست می‌آید. حال اگر از تابع f' بخواهیم انتگرال بگیریم، به تابعی همچون $f(x)+c$ میرسیم که در این معادله c یک مقدار ثابت میباشد.

$$(f(x))' = f'(x) \Rightarrow \int f'(x)dx = f(x)+c$$

* انتگرال به دو نوع معین و نامعین تقسیم بندی میشود؛ اگر حدود انتگرال مشخص شده باشد، به آن انتگرال معین و اگر مشخص نشده باشد، به آن انتگرال نامعین گفته میشود.

- **انتگرال معین:** اصطلاحی است که به منظور محاسبه انتگرال در بازه ای مشخص استفاده میشود. انتگرال معین، مساحت زیر منحنی در بازه مفروض را (مثلا a تا b) محاسبه میکند. در بازه $[a,b]$ به a کران پایین و به b کران بالا گفته میشود:

$$\int_a^b f(x)dx \to \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

چندین نکته ابتدایی و اولیه که در ارتباط با انتگرال ها میتوان گفت را در جدول زیر برای شما نشان داده ایم:

$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	
$\int_a^b f(x)dx = \int_{a\pm c}^{b\pm c} f(x\mp c)dx$	$\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert = \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$	

- **انتگرال جزء به جزء:** با استفاده از روش جزء به جزء میتوان انتگرال های دشوار را به انتگرال های ساده تر تبدیل کرد. در صورتی که دو تابع u و v را داشته باشیم میتوان نوشت: $\int udv = uv - \int vdu$

* استفاده از این روش به خاطر نکته زیر میسر میباشد: $d(uv) = udv + vdu \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu$

- **روش تغییر متغیر:** یکی از روش هایی که در انتگرال گیری برای ساده سازی انتگرال به کار میرود، روش تغییر متغیر (جایگزینی یا جانشینی) میباشد.

❖ فصل هشتم: آنالیز ترکیبی

➢ بخش اول: اصول شمارش (جایگشت - ترکیب و ترتیب)

- **اصل جمع:** اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد بطوریکه روش اول به n طریق و روش دوم به m طریق قابل انجام باشد، و این دو روش مستقل از همدیگر و غیرهمزمان باشند، برای انجام کار مورد نظر، m + n روش وجود دارد.

* تشخیص این اصل در سوالات با استفاده از واژه «یا» میباشد: «انجام این کار یا آن کار».

- **اصل ضرب**: اگر کاری در طی دو مرحله انجام شود که مرحله اول به n روش و مرحله دوم به m روش قابل انجام باشد (این دو مرحله همزمان هستند)، آنگاه آن کار را میتوان به $m \times n$ روش انجام داد.

* تشخیص این اصل در سوالات با استفاده از واژه «و» میباشد: «انجام این کار و آن کار».

- **فاکتوریل:** حاصلضرب تمامی اعداد طبیعی و متوالی از یک تا n را با نماد !n نشان میدهیم: $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$

* مطابق با قراردادهای ریاضی فاکتوریل دو عدد یک و صفر، همواره برابر یک میباشد: $0! = 1! = 1$

- **جایگشت:** به تعداد حالت های قرار گرفتن n شی در کنار هم، جایگشت n شی میگویند.

* برای محاسبه جایگشت n شی چندین نکته مهم وجود دارد که باید در نظر گرفته شوند، من جمله متمایز یا نامتمایز بودن شی ها، تکراری بیا غیر تکراری بودن برخی شی ها و ... . در زیر به بررسی انواع جایگشت های n شی متمایز میپردازیم:

+ در حالت عادی که ترتیب قرار گیری مهم است، تعداد حالت های ممکن برای جایگشت n شی متمایز برابر با $n!$ میباشد.

+ اگر k شی از n شی کنار هم باشند، تعداد جایگشت های این n شی برابر است با: $(n-k+1)! * k!$

+ اگر n شی را به دور میز گرد بچینیم، یک عضو به عنوان مبدا میباشد، تعداد جایگشت ها برابر با $(n-1)!$ خواهد بود.

- **ترتیب:** انتخاب r شی از میان n شی متمایز که ترتیب قرار گیری مهم است. با نماد $P(n.r)$ نشان میدهیم و برابر است با:

$$P(n.r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (0 \leq r \leq n)$$

- **ترکیب:** انتخاب r شی از میان n شی متمایز که ترتیب در آن مهم نیست. با نماد $C(n.r)$ نشان میدهیم و برابر است با:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

n تعداد همه اشیا	ترتیب (تشکیل صف)		ترکیب (تشکیل گروه)	
k تعداد انتخاب ها	عدم تکرار	وجود تکرار	عدم تکرار	وجود تکرار
نحوه محاسبه	$P(n.k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k	$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-k)!}$

➢ بخش دوم: احتمال (آشنایی با احتمال، اصول احتمال، احتمال شرطی)

- **آزمایش یا پدیده تصادفی:** آزمایش یا پدیده ای که قبل از اتفاق نتیجه آن معلوم نباشد ولی نتایج آن قابل پیش بینی باشد.

- **فضای نمونه:** به مجموعه تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه گفته میشود، با S نشان داده میشود و تعداد اعضای آن را با نماد های $|S|$ یا $n(S)$ نشان میدهیم. فضای نمونه به دو دسته تقسیم میشود: فضای نمونه گسسته و پیوسته.

* آزمایش تصادفی که از دو مرحله با تعداد m و p تشکیل شده باشد، تعداد اعضای فضای نمونه برابر $n(S) = m * p$ است.

پرتاب m سکه	پرتاب m تاس	پرتاب m سکه و p تاس	انتخاب p شی از میان n شی	خانواده ای با m فرزند
2^m	6^m	$2^m * 6^p$	$\binom{m}{p} = \frac{m!}{p! * (m-p)!}$	2^m

- **برآمد:** به هر عضو فضای نمونه، یک برآمد گفته میشود. در هر آزمایش تصادفی، تنها یکی از اعضای مجموعه S رخ میدهد

- **پیشامد:** هر زیر مجموعه از فضای نمونه را پیشامد مینامند. فضای نمونه n عضوی تعداد 2^n پیشامد دارد.

هنگامی میگوییم پیشامد A رخ داده است که یکی از اعضای آن به عنوان نتیجه آزمایش رخ داده باشد.

* انواع پیشامد: پیشامد ساده: (دارای یک برآمد)، پیشامد ناممکن یا تهی: (هیچگاه اتفاق نیافتد)، پیشامد حتمی (حتما رخ دهد).

- A پیشامدی از فضای نمونه S باشد، احتمال وقوع پیشامد A که با P(A) نمایش داده میشود برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

* احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه S همواره به صورت $0 \leq P(A) \leq 1$ میباشد.

متمم پیشامد	پیشامد A رخ ندهد	$P(A') = 1 - P(A)$
اجتماع دو مجموعه	یا A و یا B رخ دهد و یا هردو رخ دهند	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
اشتراک دو مجموعه	هر دو پیشامد A و B رخ دهند	$P(A \cap B)$
اختلاف دو مجموعه	پیشامد A رخ دهد اما پیشامد B رخ ندهد	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

* دو پیشامد A و B هنگامی ناسازگار هستند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند: $A \cap B = \emptyset \to P(A \cap B) = 0$

* دو پیشامد A و B را پیشامد مستقل مینامند هنگامی که وقوع یکی، ربطی به وقوع دیگری نداشته باشد. شرط شرط مستقل بودن دو پیشامد به صورت $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ میباشد.

* اگر سوال به صورت «احتمال آنکه A یا B رخ دهد چه قدر است» باید مقدار $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم

* اگر در سوال گفته شده که «احتمال آنکه A و B هر دو رخ بدهند چه قدر است»، باید مقدار $P(A \cap B)$ را محاسبه کنیم

- **احتمال شرطی:** چنانچه A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشد و $P(B) \neq 0$ باشد، آنگاه احتمال پیشامد A به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد، با نماد $P(A|B)$ نمایش داده میشود و فرمول محاسبه آن به صورت زیر است:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

❖ فصل نهم: آمار و احتمال

➢ بخش اول: آمار و اندازه گیری (آشنایی با علم آمار - جامعه و نمونه - متغیر و انواع آن)

- جامعه آماری: مجموعه ای از افراد یا اشیا که میخواهیم در مورد آنها موضوع یا موضوعاتی را بررسی کنیم. جامعه آماری مجموعه ای از افراد یا اشیا میباشد که حداقل در یک صفت مشترک هستند. تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه مینامیم.

- سرشماری: اگر تمامی افراد یک جامعه را مورد بررسی قرار دهیم، آن جامعه را سرشماری کرده ایم. سرشماری مشکلات متعددی دارد که در زیر به آنها اشاره میکنیم:

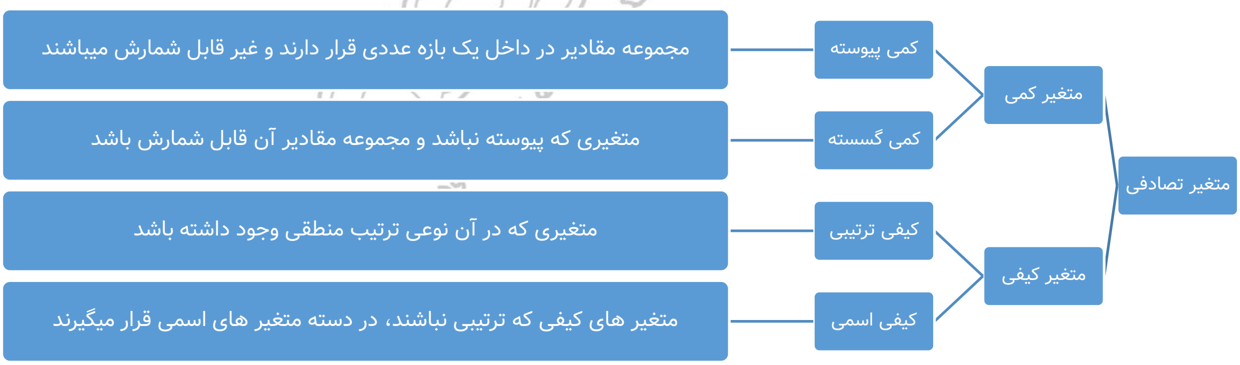
در دسترس نبودن تمام جامعه - وقت گیر بودن دسترسی به تمام جامعه - گران بودن بررسی تمام جامعه - از بین رفتن جامعه در برخی از مطالعات

- صفت: کمیت یا کیفیتی که متعلق به عناصر جامعه آماری است را صفت مینامند. صفت بر دو نوع است:

+ ثابت: همه عناصر جامعه آن را دارا باشند   + متغیر: از یک عنصر به عنصر دیگر تغییر کند

- نمونه: نمونه زیرمجموعه ای از جامعه آماری است که بیان کننده ویژگی های اصلی جامعه میباشد. تعداد اعضای نمونه را نیز اندازه نمونه مینامند.

- متغیر تصادفی: مشخصه ویژه ای از افراد جامعه که میخواهیم مورد بررسی قرار دهیم.



* متغیر تصادفی کمی: متغیر های قابل اندازه گیری که مقادیر عددی به خود میگیرند و برای آنها اعمال ریاضی قابل انجام است. (همچون قد و وزن و ...) این دسته از متغیر ها به دو دسته کمی پیوسته و کمی گسسته تقسیم میشود. (از جمله ویژگی های متغیر های کمی این است که میتوان آنها را باهم مقایسه کرد)

* متغیر تصادفی کیفی: متغیر های غیرقابل اندازه گیری که صرفا برای مقایسه و دسته بندی افراد یا اشیا در گروه ها به کار میرود. این متغیر ها لزوما مقدار عددی نمیگیرند و به دو دسته تقسیم میشود، کیفی ترتیبی و کیفی اسمی.

➢ بخش دوم: دسته بندی داده ها و جدول های فراوانی (میله‌ای، مستطیلی، چند بر فراوانی و ...)

- **فراوانی:** تعداد دفعاتی که یک شی یا عدد تکرار میشود را فراوانی آن شی یا عدد میگوییم که با f_i نشان داده میشود.

+ فراوانی مطلق: تعداد دفعاتی که یک داده آماری در یک جامعه آماری تکرار میشود و آن را با f_i نشان میدهیم.

+ فراوانی کل یا حجم جامعه: تعداد کل اعضای یک جامعه یا مجموع فراوانی های مطلق، به صورت $n = \sum f_i$ میباشد.

+ فراوانی تجمعی: فراوانی تجمعی طبقه i ام برابر مجموع فراوانی های مطلق طبقه اول تا i است که با F_i نشان میدهیم.

$$F_i = \sum_{k=1}^{i} f_i$$

+ فراوانی نسبی: حاصل تقسیم فراوانی مطلق هر دسته بر حجم جامعه که با r_i نشان میدهیم: $r_i = \frac{f_i}{n}$.

+ فراوانی نسبی تجمعی: حاصل تقسیم فراوانی تجمعی هر دسته بر حجم جامعه که با R_i نشان میدهند.

- **توزیع فراوانی:** سازماندهی داده ها در آمار «توزیع فراوانی» مینامند، توزیع فراوانی جدول مرتب شده‌ی مقادیر آن داده ها است که تکرار وقوع هر داده در آن مشخص شده باشد.

- **جدول توزیع فراوانی:** جدولی است که برای مرتب سازی و دسته بندی داده ها به کار میرود، بر حسب کم یا زیاد بودن داده های آماری، در دو حالت میتوان جدولی برای آنها در نظر گرفت.

- **دامنه تغییرات:** اختلاف میان بزرگترین و کوچکترین داده که با R نشان داده میشود. دامنه ارتباطی با فراوانی داده ها ندارد.

- **حدود دسته ها:** اعدادی که در دو طرف یک دسته قرار میگیرند، حدود آن دسته و یا کران های بالا و پایین دسته میباشند.

- **طول دسته ها:** اختلاف میان کران بالا و پایین هر دسته را طول دسته مینامند و با نماد C نشان میدهند.

- **مرکز دسته ها:** به عنوان نماینده یا نشان دسته نیز یاد میشود، برابر با میانگین کران بالا و پایین هر دسته میباشد.

از انواع نمودار های آماری میتوان به نمودار های میله ای، نمودار های مستطیلی یا هیستوگرام، نمودار های چند بر فراوانی، نمودار های تجمعی، نمودار های دایره ای و نمودار های ساقه و برگ اشاره کرد.

هر کدام از این نمودار ها در حالت های خاصی به کار میروند، به عنوان مثال نمودار میله ای بیشتر برای متغیر های کمی گسسته و کیفی به کار میرود، نمودار دایره ای برای متغیر های کیفی و بیشتر با استفاده از درصد فراوانی مورد استفاده قرار میگیرد و ... .

➢ بخش سوم: شاخص های مرکزی (میانگین، میانه، مد)

شاخص های مرکزی به مقداری گفته میشود که که مرکز داده ها را مشخص میکند. این شاخص نشان دهنده تمرکز داده ها است. شاخص های مرکزی یا گرایش به مرکز شاخص هایی هستند که با استفاده از آنها مجموعه ای از داده ها در یک مقدار

یا عدد که نماینده آن مجموعه است خلاصه می شود. از جمله شاخص های مرکزی که در ادامه به آنها میپردازیم عبارتند از میانگین، میانه، نما یا مد و چارک.

- میانگین: اصلی ترین و مهمترین شاخص مرکزی، به معنای معدل کل داده ها میباشد. دارای دو حالت وزن دار و بی وزن است. در صورتی که داده ها فراوانی نداشته باشند، از میانگین بی وزن و در صورتی که داده ها فراوانی داشته باشند، از میانگین وزن دار استفاده میشود.

میانگین بی وزن	میانگین داده هایی که فراوانی ندارند	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
میانگین وزن دار	میانگین داده هایی که فراوانی دارند (مرکز دسته i ام را با x_i و فراوانی آن را با f_i نشان دهیم)	$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

* میانگین در هر جامعه آماری منحصر به فرد میباشد و همواره عددی است بین کوچکترین و بزرگترین داده.

* تمامی داده ها در عدد ثابتی ضرب شوند یا با عدد ثابتی جمع شوند، میانگین نیز در آن عدد ضرب شده یا با آن جمع میشود

- میانه (Md): عددی است که نصف داده ها از آن بزرگتر و نصف دیگر داده ها از آن کوچکتر هستند. برای به دست آوردن میانه ابتدا داده ها را به طور صعودی مرتب میکنیم. سپس داده میانی (داده ای که در وسط قرار میگرد) را پیدا میکنیم

* اگر تعداد داده ها فرد باشد میانه عدد وسط است، اگر تعداد زوج باشد، میانه برابر میانگین دو داده ای است که در وسط قرار دارند.

* در صورت ضرب داده ها در یک عدد ثابت و یا جمع بستن آنها با عددی ثابت، میانه نیز در آن عدد ضرب یا با آن جمع میشود.

- مد یا نما (Mo): داده یا داده هایی که دارای بیشترین فراوانی (تکرار) باشند.

مد تنها شاخص مرکزی است که برای متغیر های کیفی قابل استفاده میباشد و بر عکس میانگین و میانه شاخص منحصر به فردی نمیباشد و رفتار آن در مواجه با ضرب شدن در عدد ثابت یا جمع شدن با عدد ثابت، همچون میانگین و میانه میباشد.

➢ بخش چهارم: شاخص های پراکندگی (واریانس، ضریب تغییرات، انحراف معیار)

- شاخص های پراکندگی میزان پراکندگی یا میزان اختلاف بین داده ها و یا تفسیر داده ها را در جامعه آماری یا نشان میدهند. دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار از جمله شاخص های پراکندگی هستند.

- دامنه تغییرات: عبارت است از اختلاف بین بزرگترین داده و کوچکترین داده که آن را با R نمایش میدهند:

$$R = x_n - x_1 = x_{max} - x_{min}$$

* دامنه تغییرات یک معیار سریع برای به دست آوردن پراکندگی بین داده ها است ولی معیار مناسبی نیست.

* اگر تمامی داده ها را در عددی ضرب کنیم یا بر آن تقسیم کنیم (عدد غیر صفر)، دامنه نیز در آن عدد ضرب یا بر آن تقسیم خواهد شد.

- **واریانس:** شاخصی است که تغییرات تمامی داده ها را نسبت به یک مبدا (میانگین) بیان میکند. واریانس برابر با میانگین مجذور انحرافات از میانگین است که با نماد σ^2 نمایش داده میشود. برای محاسبه واریانس داریم:

داده ها بدون فراوانی	$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}{n}-\bar{x}^2$
داده ها با فراوانی	$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)^2}{n}-\bar{x}^2$

* هر چه واریانس به صفر نزدیکتر باشد، پراکندگی میان داده ها کمتر خواهد بود

* اگر یک عدد ثابت را با همه داده ها جمع کنیم یا از همه داده ها کسر کنیم، تغییری در واریانس داده ها نخواهیم داشت

+ اگر تمامی داده ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم یا بر آن تقسیم کنیم، واریانس در مجذور آن عدد ضرب یا بر مجذور آن تقسیم خواهد شد: $\sigma^2_{(ax)}=a^2\sigma^2_{(x)}$ و یا $\sigma^2_{\left(\frac{x}{a}\right)}=\frac{\sigma^2_{(x)}}{a^2}$

- **انحراف معیار:** از جذر مثبت واریانس، انحراف معیار به دست می آید. انحراف معیار که برابر جذر مثبت واریانس است از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

* اگر تمام داده ها برابر باشند، انحراف معیار برابر صفر خواهد بود و بالعکس

* اگر عددی ثابت را با داده ها جمع کنیم یا از آنها کسر کنیم، انحراف معیار تغییری نخواهد کرد

* اگر همه داده ها را در عدد ثابتی ضرب کنیم یا بر آن تقسیم کنیم، انحراف معیار در قدرمطلق آن عدد ضرب یا بر آن تقسیم میشود.

- **ضریب تغییرات:** از تقسیم انحراف معیار به میانگین به دست می آید و تنها شاخص پراکندگی بدون واحد میباشد:

$$C.V=\frac{\sigma_x}{\bar{x}}$$

* اگر داده های آماری را در عدد ثابت مثبتی ضرب کنیم، ضریب تغییرات تغییری نخواهد کرد.

❖ فصل دهم: منطق ریاضی

➢ بخش اول: استدلال و گزاره های منطقی

- **استدلال:** یک استدلال از چند جمله خبری (ملزومات استدلال) و یک نتیجه (نتیجه استدلال) تشکیل میشود.

- **گزاره:** گزاره جمله ای است خبری که یا درست است یا نادرست ولی هیچگاه همزمان درست و نادرست نمیباشد.

- **ارزش گزاره:** درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره میگویند. ارزش گزاره درست را با « د » یا « T » و ارزش گزاره نادرست را با « ن » یا « F » نشان میدهند.

- **جدول ارزش گزاره ها:** برای نشان دادن ارزش یک گزاره به صورت جدولی به صورت مقابل اقدام میکنیم:

p
T
F

چنانچه دو گزاره همچون p و q داشته باشیم، این دو گزاره نسبت به همدیگر چهار حالت دارند:

$$(p,q)=\{(T,T),(T,F),(F,T),(F,F)\}$$

* اگر n گزاره داشته باشیم، تعداد حالت های گزاره ها نسبت به هم 2^n میباشد.

- **نقیض یک گزاره:** نقیض p گزاره ای است که ارزش آن برعکس ارزش p باشد. نقیض p را با $\sim p$ نمایش میدهیم.

- **گزاره های هم ارز:** اگر ارزش هر دو گزاره p و q یکسان باشد، به آنها گزاره هم ارز میگوییم و مینویسیم: $p\equiv q$.

➢ بخش دوم: ترکیب گزاره های منطقی

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط های گزاره ای همانند «و»، «یا»، «اگر _ آنگاه» و ...، گزاره های مرکب به دست می آیند که نمونه های آنها را در زیر بررسی میکنیم و پس از آن به بررسی هر کدام از ترکیب ها میپردازیم:

جدول ارزش ترکیب ها:

ترکیب فصلی	به عبارت «p یا q»، ترکیب فصلی دو گزاره گفته میشود و با نماد $p\vee q$ نمایش داده میشود. ارزش این ترکیب تنها زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد	p / q / $p\vee q$: T T T T F T F T T F F F
ترکیب عطفی	به عبارت «p و q»، ترکیب عطفی دو گزاره گفته میشود و با نماد $p\wedge q$ نمایش داده میشود. ارزش این ترکیب تنها زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشد	p / q / $p\wedge q$: T T T T F F F T F F F F
ترکیب شرطی	به عبارت «اگر p آنگاه q»، ترکیب شرطی دو گزاره گفته میشود و با نماد $p\Rightarrow q$ نمایش داده میشود. ارزش این ترکیب زمانی نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تألی نادرست باشد.	p / q / $p\Rightarrow q$: T T T T F F F T T F F T

- ترکیب دو شرطی: اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نمایش میدهند و آن را ترکیب دوشرطی گزاره های p و q مینامند و فقط وقتی درست که ارزش هر دو مولفه آن یکسان باشد.

➢ بخش سوم: استلزام و استنتاج

* از جمله قواعد استلزام و استنتاج میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

- قاعده انتزاع:	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad p}{\therefore q}$	- قاعده نقیض انتزاع:	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad \sim q}{\therefore \sim p}$
- قاعده قیاس صوری:	$\dfrac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{\therefore p \Rightarrow r}$	- قاعده ترکیب عطفی	$\dfrac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$
- قاعده تفصیل فصلی	$\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$	- قاعده ساده سازی عطفی	$\dfrac{p \wedge q}{\therefore q}$ or $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$
- قاعده قیاس فصلی	$\dfrac{p \vee q \quad \sim p}{\therefore q}$		

➢ بخش چهارم: سورها

سورها عبارت هایی هستند که اگر در ابتدای هر گزاره نما قرار گیرند، آن را به گزاره ای با ارزش درست یا نادرست تبدیل میکنند.

- سور عمومی: هرگاه بر سر گزاره نمایی، عبارتی مانند «هر چه باشد» یا «به ازای هر مقدار» یا «به ازای جمیع مقادیر» یا نظیر آنها قرار گیرد، آنگاه گزاره نما به گزاری ای با سور عمومی تبدیل میشود.

- سور وجودی: هر گاه بر سر گزاره نمایی عبارتی همانند «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» یا نظیر اینها قرار گیرد، آن را به گزاره ای با سور وجودی تبدیل میکند.

- سور انحصاری: هرگاه بر سر گزاره نمایی عبارتی همچون «وجود دارد یک» یا «به ازای تنها یک مقدار» و نظیر اینها قرار بگیرد، آن را به گزاره ای با سور انحصاری تبدیل میکند.

- سور صفر: هرگاه بر سر گزاره نمایی عبارتی همچون «وجود ندارد هیچ» یا «به ازای هیچ مقدار» و نظیر اینها قرار بگیرد، آن را به گزاره ای با سور صفر تبدیل میکند.

❖ فصل یازدهم: ماتریس ها

➢ بخش اول: آشنایی با ماتریس ها

- ماتریس: ماتریس تعاریف متعدد اما همراستا دارد که دقیقترین آنها بدین صورت میباشد: «منظور از یک ماتریس همچون $A_{m\times n}$، آرایشی از عناصر است که در m سطر و n ستون قرار گرفته اند. به هر یک از عناصر قرار گرفته در این ماتریس، درایه ماتریس گفته میشود. که با a_{ij} نشان داده میشود.»

- درایه های ماتریس: به هر یک از اعداد داخل ماتریس، عنصر یا درایه ماتریس گفته میشود.

* چنانچه یک ماتریس به صورت $A_{m\times n}$ داشته باشیم و a_{ij} یک درایه از این ماتریس باشد، i شماره سطر و j شماره ستونی است که درایه در آن قرار دارد.

- مرتبه ماتریس: در ماتریسی که به صورت $A_{m\times n}$ نمایش داده میشود، به $m \times n$ مرتبه ماتریس گفته میشود.

- ترانهاده ماتریس: ماتریسی است که از جابجایی درایه های سطر و ستون یک ماتریس به دست می آید.

* از انواع ماتریس های خاص بر اساس مرتبه، ماتریس های سطری و ستونی میباشند.

- ماتریس مربعی: در ماتریس مربعی تعداد سطر ها و ستون ها برابر میباشد ($m = n$)، و از موارد منحصر به ماتریس های مربعی میباشد، قطر اصلی و قطر فرعی میباشد.

- ماتریس مثلثی: ماتریس های مثلثی ماتریس هایی هستند که بسته به نوع آنها، مقادیر تمامی درایه های بالا یا پایین قطر اصلی برابر با صفر میباشد، انواع ماتریس های مثلثی عبارتند از: ماتریس بالا مثلثی، ماتریس اکیدا بالا مثلثی، ماتریس پایین مثلثی، ماتریس اکیدا پایین مثلثی

- ماتریس صفر: ماتریسی که مقدار تمامی درایه های آن برابر با صفر میباشد. ماتریس صفر را با O نشان میدهیم و داریم:

$$O[o_{ij}] \Rightarrow \forall i,j : o_{ij} = 0$$

➢ بخش دوم: عملیات روی ماتریس ها (اعمال جبری ماتریس - ترانهاده ماتریس - دترمینان ماتریس - معکوس ماتریس)

- ضرب ماتریس در عدد ثابت: چنانچه عدد ثابت حقیقی چون k در ماتریسی همانند $A_{m\times n}$ ضرب شود، درایه های ماتریس از ضرب تک تک درایه های ماتریس A در عدد k به دست می آید: $kA = k \times [a_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$

- جمع و تفریق دو ماتریس: دو ماتریس A و B هنگامی جمع یا تفریق پذیر هستند که هم درجه باشند. ماتریس C که حاصل جمع و یا تفریق این دو ماتریس است به صورت زیر تعریف میشود:

$$C = A \pm B \Rightarrow [c_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$$

- **ضرب ماتریس ها:** شرط آنکه ضرب میان دو ماتریس A و B به صورت $A \times B$ تعریف پذیر باشد، این است که تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطر های ماتریس B برابر باشد. ماتریس نتیجه ضرب دو ماتریس A و B به صورت مقابل خواهد بود: $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$

* ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد. ضرب دو ماتریس به صورت AB با BA برابر نیست: $A \times B \neq B \times A$

* خواص ضرب ماتریس ها:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
$$(A + B) \times C = AC + BC$$

* چنانچه ماتریس واحد در ماتریس A ضرب شود، نتیجه ضرب برابر با ماتریس A خواهد بود. ضرب هر ماتریس در ماتریس واحد خاصیت جابجایی دارد: $A \times I = I \times A = A$

* از خاصیت های توانی میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

$A^n \times A^m = A^{n+m}$	$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$
$(kA)^n = k^n A^n$	$(A^n)^m = A^{mn}$
$A^2 = A \Rightarrow A^n = A$	$A^2 = O \Rightarrow A^n = O$
$A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} A^{2k} = I \\ A^{2k+1} = A \end{cases}$	$A^2 = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A$

- **دترمینان ماتریس:**

دترمینان ماتریس تابعی است از مجموعه ماتریس های مربعی به مجموعه اعداد حقیقی که بر طبق قوانین معینی محاسبه میگردد. دترمینان هر ماتریس مربعی همچون A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش میدهند.

* برای ماتریس مربعی A از مرتبه ۲، محاسبه دترمینان به صورت زیر میباشد:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

- **دستور ساروس (محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3)**

در استفاده از دستور ساروس که مختص محاسبه دترمینان ماتریس سه در سه میباشد داریم:

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix}$$

$$|A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

* مهمترین کاربرد دترمینان در محاسبه ماتریس وارون یا معکوس میباشد.

- ماتریس معکوس: اگر داشته باشیم $AB=BA=I$، آنگاه A را وارون پذیر میگوییم و ماتریس B را وارون یا معکوس ماتریس A مینامیم و به طور کلی آن را به صورت A^{-1} نشان میدهیم.

* شرط لازم و کافی برای معکوس پذیر بودن ماتریس این است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

- عملیات سطری مقدماتی: اگر ماتریسی همچون A با ابعاد $m\times n$ را داشته باشیم، سه عمل زیر را میتوان روی سطرهای این ماتریس انجام داد که به این سه عملیات، عملیات سطری مقدماتی یا Elementary Row Operations گفته میشود:

+ تعویض دو سطر: عمل $R_i \leftrightarrow R_j$ جای دو سطر i و j را در ماتریس عوض میکند.

+ ضرب یک عدد غیر صفر در یک سطر: عمل tR_i عدد غیر صفر t را در همه درایه های سطر i ام ضرب میکند

+ جمع مضرب یک سطر با سطر دیگر: عمل R_j+tR_i، t برابر سطر i را با سطر j جمع میکند

➢ بخش سوم: حل دستگاه های معادلاتی با ماتریس (حل معادلات چند مجهولی با ماتریس - عملیات سطری مقدماتی)

یکی از کاربرد های ماتریس ها در ریاضیات، استفاده از آنها برای حل دستگاه های چند معادله چند مجهولی خطی میباشد..

به مثال زیر دقت کنید:

$$\begin{cases}ax+by=c\\dx+ey=f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a&b\\d&e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\f\end{bmatrix}\Rightarrow A\times X=B$$

در رابطه داده شده به ماتریس A ماتریس ضرایب، ماتریس X را ماتریس بردار مجهول و B را ماتریس بردار ثابت میگویند.

* حتی میتوان دستگاه های سه معادله سه مجهولی را به فرم ماتریسی در آورد و با استفاده از ماتریس ها، دستگاه مورد نظر را حل کرد:

$$AX=B\Rightarrow\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$$

- روش معکوس ماتریس: چنانچه ماتریس ضرایب در رابطه $A\times X=B$ وارون پذیر باشد داریم:

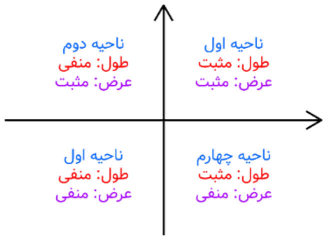
$$A\times X=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

- روش کرامر: برای محاسبه هر مجهول، ستون ضرایب آن را در ماتریس ضرایب حذف کرده و به جای آن ماتریس مقادیر ثابت (B) را قرار میدهیم. سپس دترمینان ماتریس جدید به دست آمده را محاسبه میکنیم و مقدار آن را بر دترمینان ماتریس ضرایب تقسیم میکنیم: $x=\frac{D_x}{D}\ \ ,\ \ y=\frac{D_y}{D}\ \ ,\ \ z=\frac{D_z}{D}$

- حل با استفاده از ماتریس افزوده و روش گاوسی (گاوس-جردن): ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات، ماتریسی عددی است که هر سطر آن، ضرایب و مقادیر ثابت هر دو سمت معادله را یکجا نشان میدهد و هر ستون، نماینده ضرایب مربوط به یک متغیر است.

❖ فصل دوازدهم: هندسه تحلیلی

➢ بخش اول: هندسه تحلیلی در فضای R^2 و R^3 (دستگاه های مختصات)



منظور از مختصات نقطه در صفحه، بیان طول و عرض آن نقطه در صفحه مختصاتی است. صفحه مختصاتی به کمک محورهای مختصات به چهار ناحیه تقسیم میشود که شماره گذاری این ناحیه ها از ۱ تا ۴ به طور پادساعتگرد است.

* در دستگاه مختصات دو بعدی، نقطه با دو مولفه طول x_1 و عرض y_1 و به صورت (x_1, y_1) یا $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ نشان داده میشود.

فاصله میان دو نقطه A و B برابر است با: $d = |AB| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

* فاصله نقطه ای به مختصات $A(x_1, y_1)$ از خطی به معادله $ax + by + c = 0$، برابر است با: $d = |Ah| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- معادله یک خط که به صورت $y = mx + c$ نمایش داده میشود، معادله استاندارد خط نامیده میشود. در این حالت m شیب خط و c عرض از مبدا خط میباشد.

* فرم دیگری از نمایش معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ میباشد که به آن فرم گسترده معادله خط گفته میشود و در این حالت شیب خط برابر $-\frac{a}{b}$ و عرض از مبدا برابر $-\frac{c}{b}$ میباشد.

- هندسه تحلیلی (فضای R^3):

چنانچه در محور مختصات علاوه بر طول و عرض، ارتفاع نیز در نظر گرفته شود، با مختصات سه بعدی روبرو خواهیم شد که در این دستگاه مختصات، نقطه ای همچون A دارای سه مؤلفه طول (x)، عرض (y) و ارتفاع (z) خواهد بود و به صورت $A(x_a, y_a, z_a)$ نمایش داده میشود.

* فاصله نقطه ای به مختصات $A(x_1, y_1, z_1)$ از صفحه ای به معادله $ax + by + cz + d = 0$، برابر است با:

$$d = |Ah| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

➢ بخش دوم: بردارها، ویژگی ها و اعمال جبری آن (بردار های - بردار های یکه (واحد) - اعمال جبری بردار ها)

به هر پاره خط جهت دار در دستگاه های مختصات (چه دو بعدی و چه سه بعدی) بردار گفته میشود. هر پاره خط دارای یک نقطه آغاز و یک نقطه پایان میباشد. چنانچه نقطه آغاز بردار برابر با A و نقطه پایانی برابر با B باشد، بردار به صورت $\overrightarrow{AB}$ نشان داده میشود.

* بردار $\overrightarrow{AB}$ با بردار $\overrightarrow{BA}$ مساوی نمیباشد: $\overrightarrow{AB} = A - B \neq B - A = \overrightarrow{BA}$

* اگر که نقطه ابتدایی برداری، مبدا مختصات و نقطه انتهایی آن نقطه ای همچون A باشد، بردار را به صورت $\vec{A}$ نشان میدهیم و با توجه به روابط گفته شده به صورت $\vec{A} = (a_1, a_2)$ یا $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ نمایش داده میشود.

* اندازه برداری به صورت $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ، به صورت $|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ میباشد.

- بردار یکه: برداری است که طول آن برابر یک واحد میباشد. در دستگاه های مختصات، بردار های یکه متناظر با محور های x، y و z به ترتیب با نماد های $\vec{\imath}$، $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ نمایش داده میشوند: $\vec{\imath} = (1,0,0)$، $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ و $\vec{k} = (0,0,1)$

* بردار یکه برای هر بردار دلخواهی که با $\vec{u}$ نشان میدهیم، برداری است که از تقسیم کردن آن بردار بر اندازه آن به دست می آید؛ به عبارتی دیگر داریم: $\vec{u_A} = \frac{\vec{A}}{|A|}$

- جمع دو بردار: جمع دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ که به صورت $\vec{a} + \vec{b}$ نمایش داده میشود برابر است:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- ضرب عدد در بردار: چنانچه عدد n که یک عدد حقیقی میباشد را داشته باشیم میتوان نوشت: $n.\vec{a} = (na_1, na_2, na_3)$ و در ارتباط با اندازه بردار جدید میتوان گفت که $|n.\vec{a}| = |n||\vec{a}|$

- ضرب داخلی بردار ها: حاصل ضرب داخلی دو بردار که به صورت $\vec{a}.\vec{b}$ نشان داده میشود، یک عدد اسکالر است.

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|.\cos\theta$$

- ضرب خارجی: حاصل ضرب خارجی به صورت یک بردار میباشد که بر هر دو بردار عمود میباشد.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = |\vec{a}||\vec{b}|.\sin\theta$$

➢ بخش سوم: خط و صفحه در فضا (نقطه، خط و صفحه در فضا)

- معادله خط در فضا: معادله خط در فضا را میتوان به وسیله سه فرم نشان داد: فرم برداری، فرم پارامتری، فرم متقارن

* فارغ از فرم نشان دادن خط، نیاز به دو مورد داریم: یک نقطه بر روی خط و یک بردار در راستای خط که به آن بردار هادی میگوییم و با $\vec{u}$ نشان میدهیم.

- دو خط در فضا نسبت به هم سه حالت دارند، یا متقاطع اند، یا موازی اند یا متنافر

- معادله صفحه در فضا: برای نوشتن معادله یک صفحه در فضا به یک نقطه بر روی صفحه و یک برداری عمود بر صفحه نیاز داریم که به این بردار عمود بر صفحه، بردار نرمال گفته میشود و با $\vec{n}$ نمایش داده میشود.

- دو صفحه در فضا نسبت به همدیگر سه حالت دارند، یا منطبق اند، یا موازی یا متقاطع.

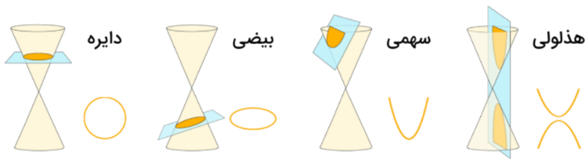
- اوضاع نسبی خط و صفحه در فضا:

یک خط نسبت به صفحه در فضا سه حالت دارد، یا منطبق است، یا موازی و یا متقاطع.

❖ فصل سیزدهم: هندسه

➢ بخش اول: مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، و ...)

مقاطع مخروطی زمانی تشکیل میشوند که یک صفحه، به گونه ای، بخشی از مجموعه دو مخروط را که در رأس با هم مشترک هستند قطع کند. در شکل زیر نحوه ایجاد بعضی از مقاطع مخروطی نشان داده شده.



* فرم عمومی معادله عمومی مقاطع مخروطی که از آن میتوان برای هر مقطع مخروطی استفاده کرد به صورت زیر است:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

* در این معادله ضرایب A، B و C نمیتوانند همزمان برابر صفر شوند.

دایره	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $A=C$
بیضی	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $AC>0\ \&\ A\neq C$
هذلولی	$\begin{cases} Ax^2-Cy^2+Dx+Ey+F=0 \\ -Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \end{cases}$ $AC>0$
سهمی	$\begin{cases} Ax^2+Dx+Ey+F=0 \\ Cy^2+Dx+Ey+F=0 \end{cases}$

- **دایره:** مجموعه (مکان هندسی) نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه ثابت O برابر با مقدار ثابتی همچون r میباشد. به O مرکز دایره و به r شعاع دایره گفته میشود. دایره را به صورت $C(O,r)$ نشان داده میشود.

* مرکز دایره نقطه $O(\alpha,\beta)$ باشد، معادله دایره به صورت $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ خواهد بود. (فرم متقارن معادله دایره).

* نقطه ای همچون A در صفحه مختصات، نسبت به دایره $C(o,r)$ در سه حالت قرار دارد: یا درون آن است $(OA<r)$، یا بر روی دایره است $(OA=r)$ و یا بیرون دایره قرار دارد $(OA>r)$

* زاویه های موجود در دایره بر دو نوع هستند: زاویه مرکزی (راس آن بر روی مرکز دایره و اضلاع آن دو شعاع دایره)، زاویه محاطی (راس آن بر روی محیط دایره و اضلاع آن دو تر از دایره).

* چنانچه دو دایره $C(o,r)$ و $C'(o',r')$ را داشته باشیم، این دو دایره نسبت به هم 6 حالت دارند: متخارج، مماس خارجی، متقاطع، مماس داخلی، متداخل، هم مرکز

- **بیضی:** مجموعه (مکان هندسی) نقاطی از صفحه که مجموع فاصله آنها از دو نقطه ثابت F و F' برابر با مقدار ثابتی همچون 2a میباشد. به F و F' کانون های بیضی و به 2a فاصله رئوس کانونی گفته میشود.

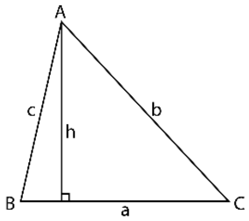
* چنانچه مرکز بیضی بر روی نقطه ای همچون $O(\alpha,\beta)$ باشد، معادله بیضی های افقی و عمودی به ترتیب به صورت زیر میباشند:

+ بیضی افقی به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ خواهد بود

+ بیضی عمودی به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ خواهد بود

➢ بخش دوم: مثلث

مثلث از سه ضلع تشکیل شده است که به محل اتصال این اضلاع، راس مثلث گفته میشود. ارتفاع مثلث (که برای هر ضلع تعریف کرد) عبارت است از پاره خطی که از راس شروع شده و بر ضلع مقابل خود عمود میباشد. به ضلعی که ارتفاع بر آن عمود شده اس، قاعده مثلث گفته میشود. از جمله خاصیت های مثلث این است که سایر چندضلعی ها را میتوان به چندین مثلث تجزیه کرد که این تجزیه کاربرد های زیادی دارد



* مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر با 180 درجه میباشد: $A+B+C=180$

* مثلث بسته به اضلاع یا زوایای آن انواع خاص و منحصر به فردی دارد: متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، حاده، قائم الزاویه، منفرجه و متساوی الزاویه

➢ بخش سوم: چندضلعی های منتظم (آشنایی با چندضلعی ها و ویژگی های آنها)

چند ضلعی انواع مختلفی دارد از جمله چندضلعی های محدب و مقعر (وابسته به اندازه زوایای داخلی)، چند ضلعی های منتظم و نامنتظم (وابسته به اندازه اضلاع و زاویه ها) و در نهایت چندضلعی هایی که بر اساس تعداد اضلاع مشخص میشوند

چند ضلعی منتظم چند ضلعی است که تمام ضلع های آن باهم و تمام زاویه های آن با یکدیگر هم اندازه هستند.

* دقت داشته باشید که هم اندازه بودن اضلاع و زاویه ها باید با همدیگر رخ دهد، وگرنه لوزی که اندازه اضلاع آن برابر باشد و مستطیلی که زاویه های آن با هم برابر هستند، چندضلعی منتظم نیستند.

* از مهمترین اجزای چندضلعی های منتظم میتوان زاویه داخلی، زاویه خارجی، ارتفاع، شعاع، زاویه مرکزی و ضلع را نام برد

* مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی همواره برابر $T=(n-2)\times 180$ میباشد.

* مجموع زوایای خارجی تمام چندضلعی ها برابر با 360 درجه میباشد.

* ارتفاع پاره خطی است که مرکز چندضلعی منتظم را به مرکز ضلع های آن متصل می کند: $h=\frac{a}{2\tan\frac{180}{n}}$

* به فاصله مرکز چندضلعی منتظم تا هر یک از راس های آن، شعاع می گویند: $r=\frac{a}{2\sin\frac{180}{n}}$

* قطر چندضلعی منتظم، پاره خطی است که از هر راس به راس های غیر مجاور رسم میشود. در یک n ضلعی منتظم، تعداد قطر ها برابر $d=\frac{n(n-3)}{2}$ میباشد.

➢ بخش چهارم: تشابه و تناسب

- نسبت و تناسب: تساوی بین دو نسبت، تناسب نامیده میشود، از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ میتوان روابط زیر را به دست آورد که کاربرد های فراوانی در ریاضیات دارند:

$\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$	$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- تشابه مثلث ها

دو مثلث ABC و A'B'C' هنگامی مشابه هم هستند که زاویه هایشان برابر و اضلاع شان مناسب هم دیگر باشد. تشابه دو مثلث ABC و A'B'C' را به صورت $ABC \sim A'B'C'$ میدهیم:

$$ABC \sim A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \widehat{A'},\ \ \hat{B} = \widehat{B'},\ \ \hat{C} = \widehat{C'} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

➢ بخش پنجم: تالس (قضیه تالس و تعمیم آن)

- تالس: در مثلث ABC، چنانچه خطی موازی با یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر را قطع کند، چهار پاره خط ایجاد شده بر روی اضلاع یک تناسب را تشکیل میدهند.

* **تعمیم قضیه تالس:** اگر خطی دو ضلع مثلث را قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی ایجاد میشود که اندازه اضلاع آن با اندازه اضلاع مثلث اصلی متناسب است:

* عکس قضیه تالس: اگر در مثلثی چون ABC، داشته باشیم: $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$، آنگاه میتوان گفت که در آن مثلث، DE با BC موازی است ($BC \parallel DE$).

➢ بخش ششم: هندسه فضایی (اشکال سه بعدی و ویژگی ها آنها)

- حجم های فضایی:

حجم ها را میتوان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد. به حجم هایی که در یکی از سه دسته حجم های منشوری، حجم های کروی و حجم های هرمی قرار داشته و یا از ترکیبی از آنها تشکیل شده باشند، حجم های هندسی میگوییم. به حجم هایی که در سه دسته ذکر شده قرار نداشته باشند و یا از ترکیبی از آنها تشکیل نشده باشند، حجم های غیر هندسی میگوییم

* دو نوع اصلی از اشکال سه بعدی وجود دارد؛ «اشکال چند سطحی» و «اشکال غیر چند سطحی».

* اشکال هندسی سه بعدی، اشکالی هستند که علاوه بر طول و عرض، بعد دیگری به نام ارتفاع هم دارند. از جمله حجم های سه بعدی میتوان به مکعب، کره، مخروط، استوانه و ... اشاره کرد.

+ اشکال چند سطحی یعنی اشکالی که وجه مسطح دارند. از جمله این اشکال میتوان مکعب، منشور ها و ... را نام برد.

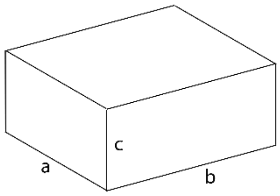
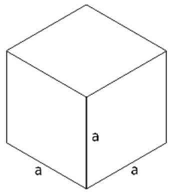
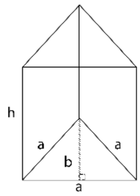
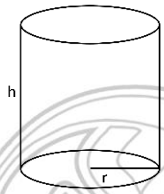
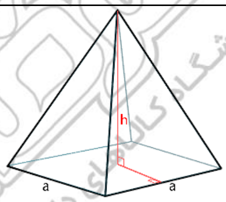
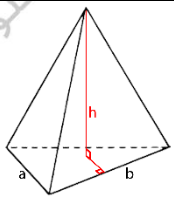
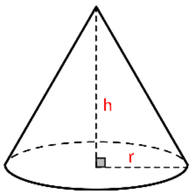
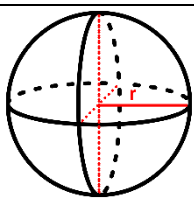
+ اشکال غیر چند سطحی یعنی اشکالی که حداقل یک سطح آنها غیر مسطح است. از جمله این اشکال میتوان کره و مخروط و ... را نام برد.

- حجم های منشوری:

حجم‌های منشوری بین دو سطح موازی قرار گرفته‌اند. در مکعب، این دو سطح موازی، دو مربع هستند. در استوانه، دو سطح موازی، دو دایره هستند. با تغییر این دو سطح موازی می‌توان حجم های منشوری مختلف به دست آورد

* به دو سطح موازی در منشور، دو قاعدهٔ منشور می‌گوییم. هر سطحی به غیر از این دو قاعده را وجه های جانبی منشور می‌گوییم. محل اتصال (اشتراک) وجه های جانبی با یکدیگر و یا با قاعده های منشور را یال های منشور می‌نامیم. محل اتصال (اشتراک) یال ها با قاعده‌ها را نیز، رأس های منشور می‌نامیم

* در جدول زیر به معرفی شکل های سه بعدی و هندسی خاص و نکات و ویژگی های آنها میپردازیم:

حجم	ویژگی ها	شکل	فرمول ها
مکعب مستطیل	* دارای ۶ وجه مستطیل شکل * دارای ۸ راس و ۱۲ یال		مساحت کل: $S = 2(ab + b + ac)$ مساحت جانبی: $S_s = 2(ac + bc)$ حجم: $V = a \times b \times c$
مکعب مربع	* دارای شش وجه مربعی * دارای ۸ راس و ۱۲ یال		مساحت کل: $S = 6a^2$ مساحت جانبی: $S_s = 4a^2$ حجم: $V = a^3$
منشور با قاعده مثلث	* دارای دو قاعده مثلثی شکل * دارای سه وجه جانبی متوازی الاضلاع * دارای ۶ راس و ۹ یال		مساحت کل: $S = 3ah + 2\left(\frac{1}{2}ab\right)$ مساحت جانبی: $S_s = 3ah$ حجم: $V = \frac{1}{3}Ah$
استوانه	* دارای دو قاعده دایره شکل به قطر r * بدون یال و راس *دارای وجه جانبی یکپارچه مستطیلی		مساحت کل: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ مساحت جانبی: $S_s = 2\pi rh$ حجم: $V = h\pi r^2$
هرم	* با قاعده n ضلعی منتظم * دارای وجه ها جانبی مثلثی شکل * دارای n+1 راس و 2n یال		مساحت کل: مساحت قاعده + مساحت جانبی حجم: $V = \frac{1}{3}Ah$
هرم با قاعده n ضلعی	* قاعده n ضلعی * دارای وجه ها جانبی مثلثی شکل * دارای n+1 راس و 2n یال		مساحت کل: مساحت قاعده + مساحت جانبی حجم: $V = \frac{1}{3}Ah$
مخروط	* دارای قاعده دایره شکل * دارای یک راس و یک یال (محل اتصال قاعده به سطح جانبی)		مساحت کل: $S = \pi r\left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right)$ حجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
کره	* دارای قاعده نبوده و محصور بین چند وجه نمیباشد		مساحت کل: $S = 4\pi r^2$ حجم: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$