

جزوه

مکانیک سیالات

✓ شامل جزوات آموزشی درس مکانیک سیالات

✓ ویژه آزمون های استخدامی و اخذ مدرک

لینک های مفید آزمون ها

خرید سوالات بانکدار مهندسی ساختمان
(مکانیک) بانک سینا

خرید سوالات بانکدار مهندسی ساختمان
(عمران) بانک سینا

خرید سوالات کارشناس رسمی دادگستری
مهندسی آب

خرید سوالات مهندس مکانیک آبفا

شبکه های اجتماعی ایران عرضه
(فایل های رایگان + تخفیفات هفتگی + اخبار)

(برای مشاهده هر بخش روی آن بزنید )



Fluid Mechanics

مکانیک سیالات

استریمر

نام درس مکانیک سیالات

نام طراح: مهندس علیرضا بینش

ی که مربوط به حرکت اج
مکانه ، انرژی و تکانه ی زاویه
له بکار بریم . مکانیک سیال
یک و دینامیک مایعات و
د مکانیک اجسام صلب بر
عمده و مهم بین این دو مک

***پیش درآمد:**

در درس مکانیک تحلیلی که مربوط به حرکت اجسام صلب بود ، با اصول و قوانین نیوتن ، پایداری تکیه ، انرژی و تکیه ای زاویه ای به خوبی آشنا شدیم و آنها را در حل مسایل مربوطه بکار بریم . مکانیک سیالات نیز بخشی از علم مکانیک است که در آن استاتیک و دینامیک مایعات و گازها مطالعه میشود .اگرچه این مطالعات نیز مانند مکانیک اجسام صلب بر اساس قوانین اصلی مکانیک استوار است ولی دو فرق عمده و مهم بین این دو مکانیک وجود دارد:

۱. خواص و ویژگیهای سیالات با جامدات سبکی متفاوت است و این ویژگی ها اغلب با حرکت سیال تغییر می کند .

۲. در مکانیک جامدات معمولا حرکت اجسامی با جرم و ابعاد مشخص بررسی به صورت یک ،میشود ولی در مکانیک سیالات مطالعه ی حرکت پیوسته ی سیال جریان مورد نظر می باشد. به بیان دیگر در مکانیک اجسام صلب مسیر حرکت ذره مشخص است ولی در مکانیک سیالات این مسیر نا مشخص و امکان مطالعه ی حرکت ذره ی منفرد وجود ندارد . در نتیجه با توجه به نکات بالا حل کامل معادلات حرکت سیالات معمولا امکان پذیر نیست و در معادلات نظری آن ضروری است که فرض هایی در نظر گرفته شود تا در عمل این معادلات به معادلات آسانتری تبدیل شود . بنابراین استفاده از نتایج نظری بدست آمده هنگامی مسیر خواهد شد که آنها را با آزمایشهای تجربی تصحیح و تکمیل کرد .

* فصل ۱

ویژگی های سیال

۱-۱ مقدمه:

دانش فناوری مکانیک سیالات با درک و مفاهیم ویژگی های سیال و همچنین بکارگیری قوانین اساسی مکانیک و ترمودینامیک و انجام آزمایشهای دقیق بسیار گسترش یافته است. ویژگی چسبندگی و چگالی در جریان داخل کانالهای باز و بسته و جریان در پیرامون اجسام شناور در سیال نقش عمده ای در مکانیک سیالات دارد. به هنگامی که با کاهش فشار روبرو هستیم، فشار بخار نیز که موجب تغییر فاز (حالت) مایع به گاز می شود، اهمیت می یابد.

در این فصل ابتدا به تعریف سیال و سیستم بین المللی یکاها (SI) و سپس به بررسی ویژگی ها و تعریف های فوق می پردازیم.

۱-۲ تعریف سیال:

سیال ماده ای است که در اثر تنش برشی حتی ناچیز به طور دائم تغییر شکل می دهد . تنش برشی متوسط برابر با تقسیم نیروی برشی بر سطح است .

توجه داریم که نیروی برشی همان مولفه ی مماسی نیرو بر سطح مزبور می باشد . حال اگر این سطح آنقدر کوچک شود که به یک نقطه تبدیل شود آنگاه حد نیروی برشی بر این سطح نقطه ای را تنش برشی در یک نقطه می گویند .

در شکل (۱-۱) ماده ای در بین دو صفحه موازی و نزدیک بهم نشان داده شده است .

فرض می کنیم صفحات آنقدر بزرگ باشند تا از شرایط لبه های آنها بتوان صرف نظر کرد . اگر صفحه ی پایین ثابت باشد و نیروی F صفحه ی بالا به مساحت A را بکشد . در نتیجه F/A همان تنش برشی بر این ماده است . هنگامی که نیروی F باعث شود صفحه ی بالایی با سرعت یکنواخت (اما مخالف صفر) حرکت کند , می توان نتیجه گرفت که ماده ی موجود بین دو صفحه مذکور , یک سیال است .

به طور تجربی معلوم شده است که ذرات سیال مجاور صفحات , سرعتی برابر با سرعت لایه های مرزی خواهند داشت . سیال موجود در سطح $abcd$ به موقعیت جدید $a'b'c'd'$ می رسد .

هر ذره سیال موازی صفحه حرکت می کند ، بنابراین سرعت u از صفحه پایین که سرعت آن صفر است تا صفحه بالایی که سرعتش U می باشد ، تغییر می کند .
آزمایش نشان می دهد اگر سایر کمیات ثابت باشد F با U ، A نسبت مستقیم و با ضخامت سیال نسبت عکس دارد . یعنی داریم :

$$F = \mu AU/t$$

که در آن μ ضریب تناسب است و مربوط به ویژگی های هر سیال می شود . اما اگر تنش برشی را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$Z = F/A$$

آنگاه داریم :

$$Z = \mu U / t$$

توجه داریم ، نسبت u/t ، همان سرعت زاویه ای خط ab یا به بیان دیگر میزان کاهش زاویه ای bad است .

اما نسبت du/dy ، u/t هر دو حاصل تقسیم تغییرات سرعت بر مسافتی می باشد که این تغییرات در طول آن انجام می گیرد . بنابراین رابطه ی (۱-۱) را می توان به صورت رابطه ی دیفرانسیلی زیر درآورد:

$$Z = \mu \, du/dt$$

رابطه ی بالا ، نشان دهنده ی ارتباط تنش برشی با سرعت تغییر شکل زاویه ای یک جریان تک بعدی است .

لاضرب تناسب را چسبندگی سیال و معادله (۱-۲) را قانون چسبندگی نیوتن می نامند . توجه داریم تعریف سیال ، مواد غیر سیال را شامل نمی شود . به طور مثال یک ماده ی پلاستیکی متناسب با مقدار نیروی وارد بر آن به میزان معینی تغییر شکل می دهد ولی این تغییر شکل دائمی نیست .

۱-۳ یکاهای نیرو، جرم، طول و زمان

در حل مسایل مکانیک، یکاهای نیرو، جرم، طول و زمان نقش مهمی دارند. همچنین از این یکاها می توان، یکاهای دیگر را بدست آورد.

سیستم بین المللی یکاها، (SI) در اغلب کشورهای جهان پذیرفته شده است و در چند سال آینده انتظار می رود که تمامی کشورها این سیستم را بپذیرند و از آن استفاده کنند. در این سیستم نیوتن N یکای نیرو، کیلوگرم Kg یکای جرم، متر m یکای طول و ثانیه S یکای زمان است. و یک نیوتن به صورت زیر تعریف میشود:

$$N = 1 \text{ Kg m/s}^2 \quad (۱-۳)$$

نیرویی که به علت جاذبه بر جسمی وارد می شود را **نیروی گرانش** یا **وزن** آن جسم می نامند.

توجه داریم که جرم یک جسم با تغییر مکان یا محل تغییر نمی‌کند ولی نیروی گرانش یا وزن جسم تغییر میکند زیرا این نیرو برابر با حاصل ضرب جرم جسم در شتاب جاذبه g بدست می‌آید .

$$F=mg \quad (۱-۴)$$

در سیستم بین المللی یکاها ، شتاب گرانش استاندارد برابر با $9/806 \text{ m/s}^2$ میباشد .
در این درس علائم اختصاری سیستم یکای SI با حروف کوچک مانند ساعت ، h متر m و ثانیه s نشان داده می شود . برای بعضی از یکاها در این سیستم از حرف اول اسامی دانشمندان استفاده می شود :

وات W ، پاسکال Pa ، نیوتن N و ...

اهمیت این سیستم در استفاده از مضارب ۱۰ یا $۱۰/۱$ به صورت پیشوند است . در جدول

(۱-۱) پیشوندهایی که کاربرد بیشتری دارند آمده است .

۴-۱ چسبندگی

در بررسی جریان یک سیال ، چسبندگی سیال حائز اهمیت است . در این بخش راجع به طبیعت و ویژگیهای چسبندگی، ابعاد ، ضرایب تبدیل ، چسبندگی مطلق و چسبندگی سینماتیکی بحث خواهیم کرد . چسبندگی ویژگی از سیال است که به علت آن ، سیال در مقابل تنش برشی از خود مقاومت نشان میدهد . از قانون چسبندگی نیوتن معلوم می شود که برای یک تغییر شکل زاویه ای ، تنش برشی با لزجت نسبت مستقیم دارد . به طور مثال قیر از مایعاتی با چسبندگی زیاد است ، در صورتیکه هوا و آب از سیالاتی با چسبندگی کم می باشند . از آزمایش معلوم شده است که چسبندگی گازها با افزایش دما ، زیاد می شود در صورتیکه برعکس چسبندگی مایعات با افزایش دما، کاهش می یابد .

مقاومت یک سیال در برابر نیروی برشی به جاذبه مولکولی و میزان انتقال تکانه ی مولکولها بستگی دارد . در مایعات به دلیل کوچکی فواصل بین مولکولها , نیروی جاذبه ی مولکولی به مراتب از گازها بیشتر است . چنین به نظر می رسد که علت اصلی وجود چسبندگی در مایعات , جاذبه ی مولکولی است , زیرا با افزایش دما , جاذبه مولکولی کم میشود و چسبندگی نیز کاهش می یابد . اما در مورد گازها , نیروهای جاذبه مولکولی بسیار اندک است , بنابراین آنچه باعث مقاومت در مقابل تنش برشی م ی شود همان انتقال تکانه ی مولکولی آنهاست . در فشارهای معمولی , چسبندگی مستقل از فشار است و فقط تابعی از دما می باشد ولی در فشارهای بالا , چسبندگی گازها و برخی از مایعات با تغییر فشار , تغییر می کند .

در یک سیال چه در حالت سکون و چه در حالت حرکت ، اگر دو لایه مجاور نسبت به یکدیگر حرکتی نداشته باشند ، هیچ نوع تنش برشی ایجاد نخواهد شد ، زیرا مقدار du/dy در کل سیال برابر صفر می باشد . بنابراین به هنگام بررسی ایستایی سیالات ، فقط تنش های عمودی یا فشار مورد توجه خواهند بود . ابعاد چسبندگی را می توان از قانون چسبندگی نیوتن (معادله ۲-۱) بدست آورد :

$$\mu = Z/(du/dy)$$

۵-۱ محیط پیوسته

در بررسی جریان سیالات ، ساختمان واقعی مولکولی را می توان به شکل یک فضای پیوسته در نظر گرفت که آن را محیط پیوسته می نامند . به عنوان مثال ، سرعت در هر نقطه در فاصله بین دو مولکول برابر با صفر است و زمانی دارای سرعت می شود که مولکولی دیگر این فاصله خالی را اشغال کند . در محاسبه ی ویژگیهای سیال ، می توان علاوه بر نظریه ی مولکولی همراه با حرکات مولکولی ، روابط پیوستگی را نیز مورد استفاده قرار داد.

در گازهای رقیق ، مانند آتمسفر در ارتفاع 80km از سطح دریا ، از نسبت پویش آزاد متوسط گاز به عنوان یکی از شاخص های طولی جسم یا مجرای عبور گاز جهت تشخیص نوع جریان استفاده به عمل می آید .

پویش آزاد متوسط برابر با مسافت متوسطی است که یک

مولکول بین دو برخورد متوالی طی می کند .

هنگامی که نسبت پویش آزاد متوسط خیلی کوچک باشد ، رفتار جریان گاز رادینامیک گازها می گویند و رفتار لحظات بعدی را جریان لغزشی می نامند . اگر این نسبت خیلی زیاد باشد ، حرکت را جریان آزاد مولکولی می نامند . ما در این درس فقط دینامیک گازها را مورد مطالعه قرار خواهیم داد . همچنین فرض می شود کمیات چگالی ، جسم مخصوص ، سرعت و شتاب در تمامی سیال به طور پیوسته تغییر کند یا ثابت باشد .

۱-۶ چگالی ، حجم مخصوص ، وزن مخصوص ، چگالی مخصوص و فشار

چگالی سیال را معادل جرم در واحد حجم تعریف می کنند و تعریف چگالی در یک نقطه عبارتست از حد جرم کوچکی از سیال Δm تقسیم به حجم بسیار کوچک Δv به هنگامی که Δv به سمت ε^3 میل کند ، توجه داریم ε مقدار کوچکی است که در مقایسه با فاصله ی بین مولکولها بازم بزرگ می باشد .

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow \varepsilon^3} \frac{\Delta m}{\Delta v}$$

(۱-۷)

چگالی آب در فشار استاندارد 760mmHg و دمای 4`c برابر با 1000Kg/m3 است .

V_s حجم مخصوص برابر با وارون چگالی می باشد و در واقع حجم اشغال شده

توسط واحد جرم سیال را **حجم مخصوص** می نامند . یعنی :

$$V_s = 1/\rho \quad (۱-۸)$$

نیروی گرانش واحد برای یک جسم ، همان نیروی گرانش در واحد حجم جسم

می باشد که مقدار آن با تغییر مکان یا محل ، تغییر می کند و بستگی به شتاب

جاذبه محیط دارد :

$$\gamma = P g$$

چگالی نسبی S یک جسم در شرایط استاندارد ، نسبت جرم جسم به جرم آب هم حجم آن می باشد و به صورت نسب چگالی آب نیز بیان می شود .

فشار ، متوسط برابر با تقسیم نیروی محوری موثر وارد بر سطح به مساحت آن سطح بدست می آید . فشار در یک نقطه از نسبت نیروی عمودی به مساحت سطحی که به سمت یک نقطه بسیار کوچک میل می کند ، بدست می آید . اگر از طرف سیال فشاری به دیواره ی ظرفی وارد شود ، متقابلاً از طرف همان ظرف نیز فشار برابر با فشار سیال به سیال اعمال می شود . مایعات بخوبی در مقابل فشارهای زیاد از خود مقاومت نشان می دهند در صورتیکه در مقابل کشش بسیار ضعیف هستند .

فشار را می توان بصورت ارتفاع ستونی از سیال نیز بیان کرد رجوع به فصل ۲ .

فشار مطلق را با P و فشار نسبی را با نشان خواهیم داد .

۷-۱ گاز کامل

رابطه های ترمودینامیکی و جریان سیالات تراکم ناپذیر نظیر گازها به طور کلی به گازهای کامل محدود می شود. گاز کامل، گازی است که از قانون مربوط به گازهای کامل پیروی کند و دمای مخصوص آن نیز ثابت باشد:

$$PV_s = RT \quad (1-10)$$

در رابطه ی بالا P فشار مطلق، V_s حجم مخصوص، R ثابت گازها و T دمای مطلق می باشد.

باید بین گاز کامل با سیال آرمانی تفاوت قائل شد. زیرا سیال آرمانی سیالی است که تراکم ناپذیر و بدون اصطکاک می باشد در حالیکه گاز کامل، گازی است که هم چسبندگی دارد و هم قادر به ایجاد تنش های برشی می باشد و همچنین تراکم پذیر است.

معادله ی (۱-۱۰) را می توان به صورت زیر درآورد:

$$P = \rho RT \quad (1-11)$$

یکای R با توجه به سایر کمیتها به آسانی تعیین می شود . اگر از SI استفاده کنیم
آنگاه P بر حسب پاسکال , بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب و T بر حسب کلونین
می باشد و در نتیجه داریم :

$$R = \frac{N}{m^2} \frac{m^3}{Kg.K} = \frac{m.N}{Kg.K} \quad \text{یا} \quad \frac{m.N}{Kg.K} \quad (۱-۱۲)$$

رابطه بین کلونین و سانتی گراد : $T = t + 273$

که دمای t بر حسب سانتی گراد میباشد یعنی $0^{\circ}C$ برابر با 273° کلونین می باشد .

مقادیر R برای گازهای معمولی در جدول ۴-۱ آمده است .

گازهای حقیقی در دمای بالاتر از دمای بحرانی و در فشارهای کمتر از فشار بحرانی از قانون گازهای کامل پیروی میکنند . یعنی با افزایش فشار و نزدیکی به نقطه بحرانی دیگر از قانون گازهای کامل نمی توان برای گازهای حقیقی استفاده کرد .

این قانون , قانون بویل رل نیز در بر می گیرد . بنا به قانون بویل در دمای ثابت , تغییرات چگالی با فشار نسبت مستقیم دارد . حجم V به ازای واحد جرم m گاز برابر با mrs است , بنابراین داریم :

$$PV =$$

$$mRT$$

(۱-۱۳)

اگر قانون گازهای کامل را برای یک مول گاز بنویسیم، نتایج آسانی بدست می آید .
یک کیلوگرم مول از گاز ، جرمی از گاز است که برابر با جرم مولکولی نسبی آن گاز
باشد . به عنوان مثال یک کیلوگرم مول از اکسیژنی O_2 برابر با 32Kg است . اگر
حجم در مول را با نشان می دهیم ، قانون گازهای کامل به صورت زیر بیان
می شود :

$$P = mRT \quad (1-14)$$

که در آن M جرم مولکولی گاز است . اگر تعداد مولهای گاز را در حجم V برابر با
 n بگیریم، آنگاه می دانیم $m=nM$ است و در نتیجه بدست می آید :

$$PV = nMRT \quad (1-15)$$

اما از قانون آووگادرو می دانیم گازها در حجم مساوی و دمای مطلق و فشار یکسان ، تعداد مولکولهای مساوی دارند . بنابراین جرم آنها متناسب با جرم مولکولی نسبی آنها است . از آنجایی که مقدار PV / nT برای تمام گازهای کامل ، یکسان است ، بنابراین با توجه به معادله ی (۱-۵) حاصل ضرب MR نیز ثابت می باشد. این مقدار ثابت را ثابت گازها می نامند و در سیستم بین المللی یکاها داریم :

$$MR = 8.312 \quad m.N/Kg.mol.K \quad (۱-۱۶)$$

در نتیجه مقدار R را می توان از رابطه بالا چنین بدست آورد:

$$R = 8.312 / M \quad m.N/Kg.N \quad (۱-۱۷)$$

{رجوع کنید به جدول ۱-۳}

گرمای ویژه یک گاز ، C_v مقدار گرمائی است که باید در حجم ثابت به واحد جرم آن داده شود ، تا دمای آن یک درجه بالا برود. C_p گرمای ویژه یک گاز است و آن مقدار گرمایی است که در فشار ثابت به واحد جرم آن داده می شود تا دمای آن یک درجه زیادتر شود .

K ضریب دمای مخصوص برابر با C_p/C_v است و انرژی داخل u نیز به P , T دارد و انرژی در واحد جرم تعریف می شود . یکی از پارامترهای مهم گاز آنتالپی است که از رابطه ی $h = u + P/\rho$ بدست می آید .

یکای C_p , C_v برابر با ژول بر کیلوگرم ، یعنی $J/kg \cdot K$ است. دمای معادل $4187J$ باید به یک کیلوگرم آب در شرایط استاندارد داده شود تا دمای آن یک درجه سلیوس زیاد شود و این مقدار گرما را یک کالری می نامند .

رابطه ی R با C_p , C_v به صورت زیر است :

$$C_p = C_v + R$$

در فصلهای ۳ و ۶ به نکات و رابطه های مهم تری درباره گاز کامل پرداخته می شود .

۸-۱ ضریب کشسانی حجمی

در بخش های قبلی تراکم پذیری گازها را با استفاده از تعریف گاز کامل توضیح دادیم . زمانی تراکم پذیری یک سیال اهمیت می یابد که به طور ناگهانی تغییرات فشار زیادی را تحمل کند. با تغییر دمای مساله، تراکم پذیری اهمیت می یابد . تراکم پذیری یک مایع از ضریب چگالی حجمی بیان می شود . اگر در واحد حجمی فشار به اندازه dp زیاد شود ، حجم مورد نظر به اندازه $-dv$ کم می شود. نسبت $-dp / dv$ را ضریب کشسانی حجمی K می نامند. بنابراین داریم :

$$K = dp / (dv/V)$$

اما dv / V بدون بعد می باشد بنابراین واحد K را بر حسب واحد فشار بیان می کنند.

با توجه به جدول (۱-۲) برای آب در دمای $K=2.2\text{Gpa}$, 20°C می باشد. برای

درک بهتر تراکم پذیری آب , فرض کنید فشاری برابر با 0.1 Mpa به یک

متر مکعب آب اثر کند . در این صورت داریم :

$$dV = Vdp / K = (1.0\text{ m}^3)(0.1\text{ Mpa}) / 2.2\text{ Gpa} = 1 / 22000\text{ m}^3$$

که تقریباً مساوی $45/5\text{ m}^3$ می باشد . هنگامی که یک مایع فشرده می شود

مقاومتش در برابر ازدیاد فشار افزایش می یابد . به همین دلیل , در 3000 اتمسفر ,

مقدار K برای آب دو برابر می شود .

۹-۱ فشار بخار

به علت فرار مولکولها از سطح مایع ، مایعات تبخیر می شوند و فشاری که از طرف مولکولهای بخار در فضا ایجاد می شود را فشار بخار می نامند. اگر فضای بالای سطح مایع مسدود باشد ، پس از مدت زمانی ، مقدار مولکولهایی که قبلا از سطح مایع فرار کرده اند با مقدار مولکولهایی که در اثر برخورد با سطح آزاد مایع تقطیر می شدند ، برابر خواهد بود و تعادل ایجاد میشود . اما این پدیده به تحریک مولکولها بستگی دارد و این تحریک نیز تابعی از دماست ، بنابراین فشار بخار یک سیال با ازدیاد دما افزایش می یابد. به هنگام برابری فشار روی مایع با فشار بخار ، مایع شروع به جوشیدن می کند. یعنی با کاهش فشار به مقدار کافی، آب می تواند در دمای اتاق بجوشد .

در دمای 20°C فشار بخار آب برابر با $2 / 447 \text{ Kpa}$ ، فشار بخار جیوه $0/173$ Pa میباشد .

در اغلب سیستم هایی که مایعات در آنها جریان دارند ، احتمال این که در نقاطی از این سیستم فشار بقدر کافی کاهش یابد که برابر با فشار بخار یا کمتر از آن شود وجود دارد و این باعث تبخیر سدیم مایع می شود و پدیده ای به نام حفره سازی بوجود می آید. حبابهای کوچک یا حفره های بوجود آمده،سریعا انبساط می یابند و از مکان اولیه خود به طرف منطقه ای که فشار بیشتری نسبت به فشار بخار دارد ، حرکت می کند و در آنجا از بین می روند. این پدیده رشد و نابودی در پمپ ها و توربین های هیدرولیکی باعث خوردگی فلزی می شوند و در نتیجه خساراتی به دنبال خواهند داشت.

تست های فصل ۱

۱-۲-۱ سیال ماده ای است که :

(الف) به طور دائم منبسط می شود تا ظرفی را پر کند .

(ب) عملاً تراکم ناپذیر است .

(ج) نمی تواند تابع نیروهای برشی باشد.

(د) تحت تاثیر نیروی برشی نمی تواند در حالت سکون باقی بماند.

۱-۲-۲ قانون چسبندگی نیوتنی ترکیبی است از :

(الف) فشار ، سرعت و چسبندگی

(ب) تنش برشی و میزان تغییر شکل زاویه ای یک سیال

(ج) تنش برشی ، دما ، چسبندگی و سرعت

(د) فشار ، چسبندگی و میزان تغییر شکل زاویه ای

۱-۳-۱ جسمی به جرم 2 Kg و وزن 19 n روی یک ترازوی فنری قرار دارد . شتاب جاذبه محل را بر حسب متر بر مجذور ثانیه برابر است با :

(الف) $10.5/0$ (ب) 2 (ج) $5/9$ (د) 19

۲-۳-۱ اگر نیروی معادل 10 N به جرم 2 kg وارد شود شتاب این بر جسم بر حسب m/s^2 چقدر است؟
 الف) $2/0$ (ب) $0/2$ (ج) $0/5$ (د) $0/20$

۳-۳-۱ نیروی گرانش وارد به یک جسم به جرم 3 kg در سیاره ای که شتاب جاذبه ی آن $g=10\text{ m/s}^2$ می باشد بر حسب نیوتن چقدر است؟
 الف) $30/0$ (ب) $33/3$ (ج) $42/29$ (د) 30

۴-۳-۱ فشار 10 Pa را می توان به صورت زیر نوشت:
 الف) gPa (ب) GPa (ج) KMPa (د) μPa

۱-۴-۱ رابطه ی ابعادی چسبندگی کدام است؟
 الف) FLT^{-2} (ب) FLT^{-1-1} (ج) FLT^{-2} (د) FLT^2

- ۲-۴-۱ جواب نادرست را مشخص کنید . نیروهای برشی :
- الف) درموقعی که سیال ساکن است بوجود نمی آید.
- ب) [√]موقعی که سیال ساکن است به دلیل جاذبه ی مولکولی ممکن است بوجود بیاید
- ج) به تبادل مولکولی تکانه بستگی دارد.
- د) به نیروهای بین مولکولی بستگی دارد.

۳-۴-۱ رابطه ی ابعادی چسبندگی سیناتیکی عبارت است از :

۲-۱	۲۲	-۱-۱	-۲
LT (د [√]	LT (ج	MLT (ب	FLT (الف

۴-۴-۱ چسبندگی نفت سفید در ۲۰`C با توجه به جدول ۲-۱ برچسب نیوتن برمترمربع برابر است با :

-۲	-۳	-۴	-۵
۹۳/۱ × ۱۰ (د	۹۳/۱ × ۱۰ (ج [√]	۴ × ۱۰ (ب	۴ × ۱۰ (الف

۵-۴-۱ چسبندگی سیناتیک هوای خشک در 30°C و 760 میلی متر جیوه
بر حسب مترمربع بر ثانیه برابر است با :

- ۵- ۴- ۶- ۵-
الف) $7/1 \times 10^{-5}$ ب) $7/1 \times 10^{-6}$ ج) $73/1 \times 10^{-6}$ د) $93/1 \times 10^{-5}$

۸- ۶-۴-۱ به ازای $V = 3 \times 10 \text{ m}^2/\text{s}$, $P = 800 \text{ kg/m}^2$, مقدار μ
در سیستم متریک برابر است با :

- ۱۱- ۵- ۵- ۱۲-
الف) $75/3 \times 10^{-5}$ ب) $4/2 \times 10^{-5}$ ج) $47/2 \times 10^{-5}$ د) $4/2 \times 10^{-12}$

۱-۵-۱ در کدامیک از انواع جریان های زیر فرض پیوستگی معقول می
باشد؟

- ۱) جریان آزاد مولکولی ۲) جریان لغزشی ۳) دینامیک گازها
۴) خلاء کامل ۵) جریان مایع
الف) ۲ و ۴ ب) ۴ و ۵ ج) ۳ و ۵ د) ۳ و ۵

- ۱-۷-۱ گاز کامل :
الف) چسبندگی اش صفر است .
ب) چسبندگی اش ثابت نمی باشد.
ج) تراکم ناپذیر است .
د) از رابطه ی $Pp=RT$ پیروی می کند.

۱-۷-۲ جرم مولکولی نسبی گازی ۲۸ است ، مقدار R برحسب $m.N/kg.k$ برابر است با :
الف (۲۹۱۷ ب) ۲۹۷ ج) ۲۹۱۱ د) ۸۳۱۲

۱-۷-۳ در فشار مطلق 1 MPa در دمای 10°C چگالی در SI برابر است با :
الف (۲۳۱/۱ ب) ۳۱/۱۲ ج) ۰/۶۵ د) ۴/۱۱۸

۱-۷-۴ چه مقدار گاز منواکسید کربن برحسب کیلوگرم جرم ، در حجم 100 L و دمای 20°C و فشار 200 KPa جای می گیرد؟
الف (۰/۲۳... ب) ۰/۲۳ ج) ۳/۳۶۷ د) ۳۳۶۷

۱-۸-۱ ضریب کشانی حجمی گازی در دمای T. از رابطه ی زیر بدست می آید :

الف (p/p ب (RT. ج (pP د ($PRT.$

۱-۸-۲ ضریب کشسانی حجمی :

الف (به دمای بستگی ندارد ب (با افزایش فشار , زیاد می شود
د (رابطه ابعادی آن به صورت $1/p$ می باشد
ج (به فشار و چسبندگی بستگی ندارد .

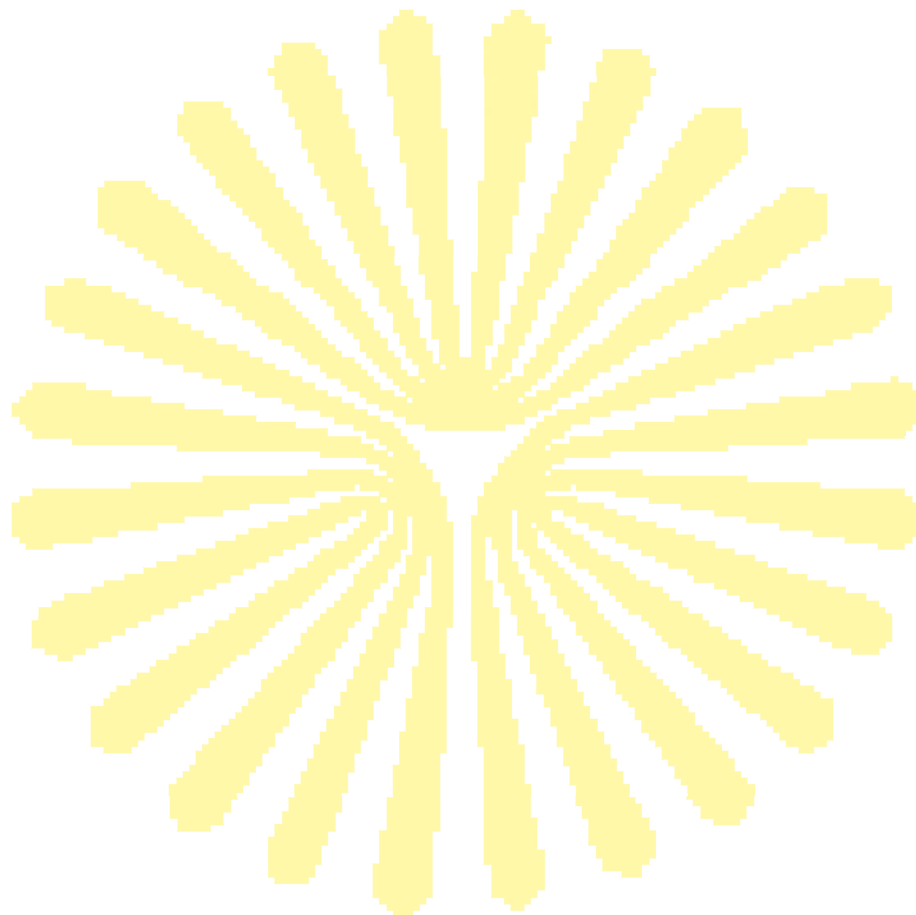
۱-۸-۳ اگر 7MPa فشار به روی آب وارد کنیم , چگالی آن چند درصد افزایش می یابد ؟

الف ($300/1$ ب ($30/1$ ج ($3/1$ د ($2/1$

۱-۸-۴ با اعمال فشار MPa ا به روی مایعی به حجم 300L حجمش $6/0\text{L}$ می شود ضریب کشانی حجمی آن را بر حسب GPa بدست آورید .

الف ($5/0 -$ ب ($5/0$ ج (50 د (500

۱-۹-۱ فشار بخار آب بر حسب پاسکال در دمای 30°C برابر است با :
الف) ۴۴/۰ ب) ۱۸/۷ ج) ۲۲۳ د) ۴۳۱۵



ایستایی سیالات

۱-۲ مقدمه

در این فصل راجع به دانش ایستایی سیالات و آنهم در دو بخش خواهیم پرداخت: فشار و تغییرات داخلی یک سیال و همچنین نیروهای فشاری روی سطوح معین. اگر سیال مانند جسم جامد حرکت کند، به دلیل تشابه نیروهای مورد بحث، آن را در قسمت ایستایی سیالات بررسی می کنند. در مطالعه ی ایستایی سیالات بر روی سطوح تمام اجسام آزاد، فقط نیروهای فاری عمودی مورد توجه است.

۲-۲ فشار در یک نقطه

می دانیم اگر نیروی عمودی وارد بر صحنه ای را تقسیم بر مساحت این صفحه کنیم، فشار متوسط بدست می آید. بنابراین فشار در یک نقطه از حد نسبت نیروی عمودی وارد بر سطح بدست می آید اگر مساحت آن سطح به سمت صفر میل کند. در نتیجه در هر نقطه از یک سیال ساکن، فشار در تمام جهت ها یکسان می باشد. برای اثبات این مطلب فرض می کنیم جسم کوچک آزادی به شکل گوه ای باشد که عرض آن برابر واحد و در نقطه (x, y) از یک ساکن قرار داشته باشد.

شکل (۲-۱). همچنین فرض می کنیم فقط نیروی عمودی بر سطح و نیروی گرانی موجود باشد. بنابراین معادلات حرکت در جهت x, y به صورت زیر در می آید:

$$\sum F_x = P_x \delta_y - P_s \delta_s \sin \theta = \frac{\delta_x \delta_y}{2} \rho a x = 0 \quad (2-1)$$

$$\sum F_y = p_y \delta_x - p_s \delta_s \cos \theta - \gamma \frac{\delta_x \delta_y}{2} = \frac{\delta_x \delta_y}{2} \rho a y = 0 \quad (2-2)$$

که در این دو رابطه P_x , P_y , P_z فشارهای متوسط بر سه سطح ، نیروی گرانی واحد چگالی و a_x , a_y شتاب می باشند . اگر حد جسم آزاد را که به سمت نقطه‌ی (x,y) میل کند (با حفظ زاویه θ) بگیریم و با استفاده از دو رابطه‌ی زیر:

$$\delta s \sin \theta = \delta y \quad , \quad \delta s \cos \theta = \delta x$$

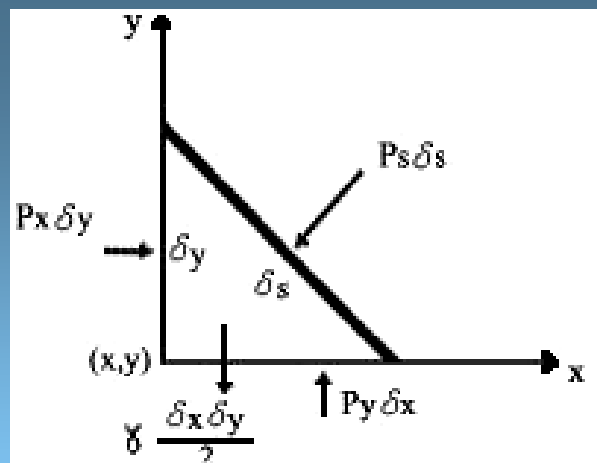
آنگاه معادلات (۲-۱) و (۲-۲) به صورت زیر در می آیند:

$$p_x \delta y - p_s \delta y = 0 \quad | \quad p_y \delta x - p_s \delta x - \frac{\gamma \delta x \delta y}{2} = 0$$

جمله‌ی آخر در معادله‌ی دوم را صرف نظر کنیم. زیرا در مقایسه با سایر جملات کوچک است. بنابراین نتیجه می شود:

(۲-۳)

$$P_s = P_x = P_y$$



شکل ۱-۲

نمودار جسم آزاد ذره ای به شکل گوه

و این قانون پاسکال است. چون زاویه ی θ اختیاری بود، بنابراین با توجه به معادله ی (۲-۳) مشخص می شود که در هر نقطه از یک سیال ساکن، فشار در تمام جهات یکسان است.

اگر حرکت سیال طوری باشد که دو لایه مجاور آن نسبت به هم حرکت داشته باشند، تنشهای برشی بوجود می آیند و در نتیجه تنش های عمودی حاصل در تمام جهت ها یکسان نخواهد بود. این فشار به صورت میانگین سه تنش فشاری عمود بر هم در یک نقطه به صورت زیر تعریف می شود:

$$P = \frac{P_x + P_y + P_s}{3} \quad (۲-۴)$$

اما در یک سیال آرمانی با چسبندگی صفر برای هر نوع حرکت سیال، هیچ تنش برشی بوجود نمی آید، در نتیجه در هر نقطه از این سیال، فشار در تمامی جهت ها یکی خواهد بود.

۲-۳ معادلات بنیادی ایستایی سیالات

۲-۳-۱ تغییرات فشار در سیال ساکن

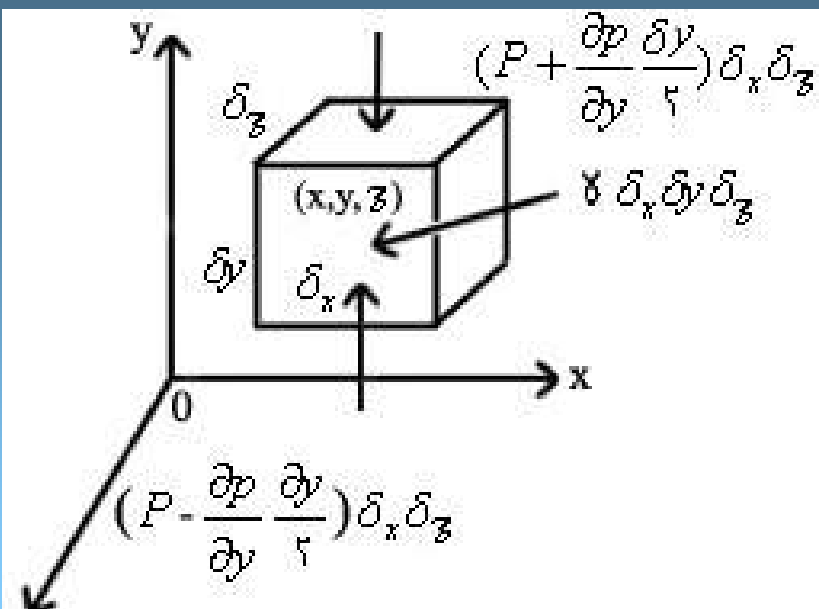
نیروهایی که به یک جزء سیال ساکن وارد می شود همان نیروهای سطحی و نیروهای داخلی است (شکل ۲-۲). اگر محور y را به سمت بالا و به طور عمودی در نظر بگیریم، تنها نیروی داخلی که بر این جزء در امتداد y وارد می شود برابر با:

$\gamma \delta x \delta y \delta z$ می باشد. فرض می کنیم، فشار P در مرکز این جزء (x, y) نیروی تقریبی وارد بر سطح عمود بر y که نزدیکتر به مبدأ می باشد، تقریباً برابر است

و نیروی وارد بر سطح مقابل آن برابر است با:

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z$$

توجه داریم δy فاصله از مرکز تا سطح عمود بر محور y است. بنابراین نیروهای وارد بر این جزء فرضی در جهت y بدست می آید:



$$\delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta_x \delta_y \delta_z - \gamma \delta_x \delta_y \delta_z$$

شکل ۲-۲ جزء مکعب مستطیل شکل در سیال ساکن

اما در دو جهت x و y هیچ نیروی داخلی وارد نمی شود:

$$\delta F_x = \frac{\partial p}{\partial x} \delta_x \delta_y \delta_z \quad \delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta_x \delta_y \delta_z$$

سرانجام بردار نیروی مؤثر δF از رابطه زیر بدست می آید.

$$\vec{\delta F} = \hat{i} \delta F_x + \hat{j} \delta F_y + \hat{k} \delta F_z = - \left(\hat{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z - \hat{j} \gamma \delta x \delta y \delta z$$

حال ابعاد جزء مورد نظر را به سمت صفر میل می دهیم و دو طرف رابطه‌ی بالا را بر $\delta x \delta y \delta z = \delta v$ تقسیم می کنیم تا نتیجه شود:

$$\lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{F}}{\delta v} = - \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) p - \hat{j} \gamma \quad (۲-۵)$$

و این مقدار نیروی وارد بر واحد حجم جزء در هر نقطه است که برای سیال ساکن باید برابر با صفر گرفت. کمیت داخل پرانتز در رابطه‌ی (۲-۵) گرادیان (∇) می باشد. یعنی:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۲-۶)$$

و ∇P - ، برابر با میدان برداری $\mathbf{f}$ (نیروی فشار سطح در واحد حجم) است:

$$\mathbf{f} = -\nabla P \quad (۲-۷)$$

بنابراین قانون تغییرات فشار در سیال ساکن به صورت زیر بیان می شود.

$$\mathbf{f} - \hat{i}\gamma = 0$$

اگر سیال چسبناکی در حال حرکت یا سیالی که در آن تنش برشی در تمام نقاط صفر باشد، قانون دوم نیوتن به صورت زیر در می آید:

$$\mathbf{f} - \hat{j}\gamma = \rho a \quad (۲-۸)$$

در رابطه ی بالا a شتاب جزء سیال است. اگر فقط نیروی گرانشی به حجم سیال اثر کند. نیروی سیال به صورت $\mathbf{f} - \hat{j}\gamma$ است. ما از این رابطه به هنگام بحث معادلات اویلر استفاده خواهیم کرد. اگر معادله (۲-۸) را بخوانیم به صورت مولفه ای بیان کنیم، سه معادله ی زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma, \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

در واقع این معادلات شکلی از قانون پاسکال است و بیانگر این نکته می باشد که در جرمی پیوسته ای از یک سیال، چنانچه دو نقطه ارتفاع یکسانی داشته باشند، فشارهای یکسانی دارند. بنابراین می توان نتیجه گرفت که P فقط تابعی از y است یعنی:

$$dp = -\gamma dy \quad (2-9)$$

این معادله ی دیفرانسیل آسان، رابطه ای بین تغییرات فشار را با نیروی گرانی و تغییرات ارتفاع نشان می دهد و برای سیالات تراکم پذیر یا تراکم ناپذیر بکار می رود.

اگر سیال همگن و تراکم ناپذیر باشد که در این صورت γ ثابت می باشد. با انتگرال گیری از رابطه ی (2-9) نتیجه می شود:

$$p = -\gamma y + C \quad (2-10)$$

اما اگر سطح مقایسه را سطح آزاد مایع بگیریم. بنابراین در ارتفاع $y=-h$, P برابر است با افزایش فشار از سطح آزاد مایع و معادله ی بالا به صورت زیر در می آید.

$$p = \gamma h \quad (2-11)$$

مثال ۱:

می خواهیم آزمایشگاه دریایی به ارتفاع ۵ متر را طراحی می کنیم که بتواند در عمق ۱۰۰ متری از سطح دریا غوطه ور باشد . می دانیم چگالی نسبی آب نمک ۱/۰۲۰ است ، فشار روی سطح بالای آزمایشگاه و همچنین تغییرات فشار را روی یکی از وجوه آن بدست آورید.
به ازای $h=100m$

حل $\gamma = 1020 \times 1000 \times 9/806 = 10 \text{ kN/m}^3$ و از رابطه ی (۱۱-۲) داریم :

$$P = \gamma h = 10 \times 100 = 1 \text{ N/m}$$

اگر y فاصله از بالای آزمایشگاه رو به پایین باشد، تغییرات فشار به صورت زیر خواهد بود.

$$P = 10(y + 100) \text{ Kpa}$$

۲-۳-۲ تغییر فشار در سیال تراکم پذیر

اگر دمای یک گاز آرمانی ثابت و به حالت سکون باشد با توجه به

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_o}{\rho_o} \quad \text{معادله‌ی (۱-۱) داریم:} \quad (۲-۱۲)$$

اگر ρ را از این معادله و معادله (۲-۹) حذف کنیم (می دانیم $\gamma = pg$ است):

$$dy = \frac{-P_o}{g\rho_o} \frac{dp}{P} \quad (۲-۱۳)$$

با انتگرال گیری از این معادله نتیجه می شود:

$$\int_{y_o}^y dy = -\frac{P_o}{g\rho_o} \int_{P_o}^P \frac{dp}{P}$$

و یا

$$y - y_o = -\frac{P_o}{g\rho_o} \ln \frac{P}{P_o}$$

و یا

$$P = P_o e^{\left(-\frac{y-y_o}{P_o / g\rho_o}\right)}$$

(۲-۱۴)

معادله بالا تغییر فشار را با ارتفاع در یک گاز تکدما نشان می دهد.

مثال ۲

اگر در سطح دریا $\rho = ۲۴/۱ \text{ kg/m}^3$ و $P = 105 \text{ Pa abs}$ و آتمسفر تکدما باشد، مقدار فشار و چگالی را در ارتفاع ۲۰۰۰ متری چقدر خواهد بود؟

حل

با جایگزین داده ها در معادله ی (۲-۱۴) بدست می آید:

$$P = 10^5 \exp\left[-\frac{2000}{10^5 / 9.806 \times 1/24}\right] = ۴۷۸ \text{ kPa abs}$$

برای محاسبه ی چگالی از معادله ی (۲-۱۲) خواهیم داشت:

$$p = \frac{\rho_o}{\rho_o} P = 1/24 \frac{78400}{100000} = 0.972 \text{ Kg/m}^3$$

۲-۴ دستگاه های اندازه گیری فشار

فشار را می توان نسبت به هر مبنای دلخواهی بیان کرد. متداول این است که مبنای فشار، صفر مطلق و فشار اتمسفر محلی باشد. اگر فشار بر حسب اختلاف آن با خلاء کامل بیان شود آن را فشار مطلق می گویند و هنگامی که بر حسب اختلاف با اتمسفر محلی بیان شود، فشار نسبی می نامند.

فشار اتمسفر محلی را با بارومتر جیوه ای (شکل ۲-۳) اندازه می گیرند که اختلاف فشار بین اتمسفر و خلاء یا لوله ای که هوای آن تخلیه شده باشد نشان می دهد. بارومتر جیوه ای شامل یک لوله نازک شیشه ای محتوی جیوه است که یک سر آن و سر باز آن در تشتکی پر از جیوه غوطه ور می باشد. این دستگاه طوری درجه بندی می شود که به کمک آن بتوان مقدار R را تعیین کرد.



شکل (۲-۳)

بارومتر جیوه ای

فضای بالای جیوه حاوی بخار جیوه است و اگر فشار بخار جیوه h_r بر حسب میلی متر جیوه و R نیز بر حسب همین یکا بیان شود، آنگاه فشار در نقطه A برابر است با:

$$h_r + R = h_A$$

(۲-۱۵)

توجه داریم که فشار بارومتر با تغییر محل فرق می کند و h_r تابعی از دما است ولی در دمای اتمسفر مقدار وابستگی h_r به دما بسیار کم و ناچیز است. معمولاً گرادیان دمای اتمسفر را ثابت فرض می کنند و آن را به صورت زیر بیان

$$T = T_o + \beta y$$

(۲-۱۶)

و میزان تغییرات دما با ارتفاع را در آتمسفر میزان انحراف می نامند. حرکت توده هوا بستگی به چگالی آن نسبت به چگالی هوای پیرامونش دارد. اگر این توده هوا در آتمسفر بالا برود، فشار کاهش می یابد و منبسط می شود و در نتیجه دمای آن نیز کاسته می شود. این مقدار را انحراف بی در رو می نامند.

مثال ۳

در کارخانه ای می خواهند مقداری زیادی زباله را بسوزانند. دمای دود حاصل از این زباله ها در ارتفاع ۱۰ متری بالاتر از سطح زمین 11°C بیشتر از هوای پیرامونش می باشد. اگر شرایط طوری باشد که در فشار آتمسفر مقدار انحراف دمای $\beta = -0.951/^{\circ}\text{C}$ در هر متر و $T_o = 20^{\circ}\text{C}$ باشد، چه اتفاقی خواهد افتاد؟

حل

با توجه به رابطه (۲-۱۶) می توان از قانون گاز کامل استفاده کرد. و چگالی را به صورت زیر بیان کرد:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{P}{R(T_o + \beta)y}$$

با جایگزین این رابطه در رابطه فشار داریم:

$$\int_{P_o}^P \frac{dp}{P} = -\frac{g}{R} \int_0^y \frac{dy}{T_o + \beta y}$$

و یا

$$\ln \frac{P}{P_o} = -\frac{g}{R\beta} \ln \frac{T_o + \beta y}{T_o} = -\frac{g}{k\beta} \ln(1 + \beta y / T_o)$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{P}{P_o} = (1 + \beta y / T_o)^{-g/k\beta}$$

اما از فصل می دانیم برای فشار و دما در حالتی که گاز بدون انتقال دما منبسط می شود رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{P}{P_o} \right)^{(k-1)/k}$$

که در آن T_1 و P_o دما و فشار مطلق دود در حالت اولیه است و k ضریب دمای مخصوص می باشد که برای هوا و سایر گازهای دو اتمی برابر با 1.4 است. از حذف $\frac{P}{P_o}$ در دو معادله‌ی اخیر، داریم:

$$T = T_1 (1 + \beta y / T_o)^{-[(k-1)/k] (g/R\beta)}$$

اما در طی این مدت که گاز به سوی بالا می رود ، دمایش با دمای پیرامون خود یکسان خواهد شد و داریم:

$$T = T_o + \beta y$$

سرانجام از این دو معادله، y را بدست آوریم:
(۲-۱۷)

$$y = \frac{T_o}{\beta} \left[\left(\frac{T_o}{T_1} \right)^a - 1 \right]$$

$$a = \frac{-1}{(k-1) \frac{g}{KR\beta} + 1}$$

که در آن

اکنون به ازای $\beta = -0.0065^\circ\text{C}$ و مقدار $t_o = 20^\circ\text{C}$ بدست می آید:

$$y = 2/8.9\text{m}$$

و

$$a = -2/2$$

اگر نقطه ای در زیر خط فشار آتمسفر محلی که به عنوان مبدأ اندازه گیری معین شده، قرار داشته باشد، آن را فشار مکش می نامند. برای مثال اگر فشار 46.0mm Hg abs را بارومتر 72.0mm نشان دهد، فشار را می توان به صورت -26.0mmHg یا 26.0mmHg مکش بیان کرد. بنابراین می توان چنین نوشت:

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{bar}} + P_{\text{gage}}$$

(۲-۱۸)

دستگاه دیگری که در اندازه گیری فشار بکار می رود مانومتر است و آن دستگاهی است که در آن از ستون مایع جهت تعیین اختلاف فشار استفاده می شود. ساده ترین نوع مانومترهایی را که در شکل (۴-۲) نشان داده شده است. پیزومتر می نامند و از آن در حالتی که فشار نسبی مایع از صفر بیشتر باشد استفاده می شود. توجه داریم که لوله شیشه ای به حالت قائم به فضای مخزن ارتباط می یابد و مایع داخل مخزن در این لوله تاجایی بالامی آید که به حالت تعادل برسد. این ارتفاع (h) بیانگر فشار داخل مخزن است. از این دستگاه نمی توان در اندازه گیری فشار منفی استفاده کرد.

اگر فشار داخل مخزن بسیار زیاد باشد، باید طول لوله شیشه ای قائم بسیار بلند باشد که عملی نیست، بنابراین از این دستگاه نمی توان استفاده کرد. اگر چگالی نسبی مایع S باشد. فشار مخزن برابر با " h_s برابر واحد طول آب" می باشد.

بنابراین اگر بخواهیم فشارهای نسبی مثبت و منفی ناچیز در یک مایع را اندازه گیری کنیم باید از نوع دیگر مانومتر که در شکل (۴-۲ الف) نشان داده شده است استفاده کرد. در این حالت سطح آزاد مایع پایین تر از مخزن A قرار می گیرد. زیرا با کاهش ارتفاع، فشار کم می شود و فشار نسبی در سطح آزاد مایع صفر است. در این حالت داریم:

$$h_A = -AS$$

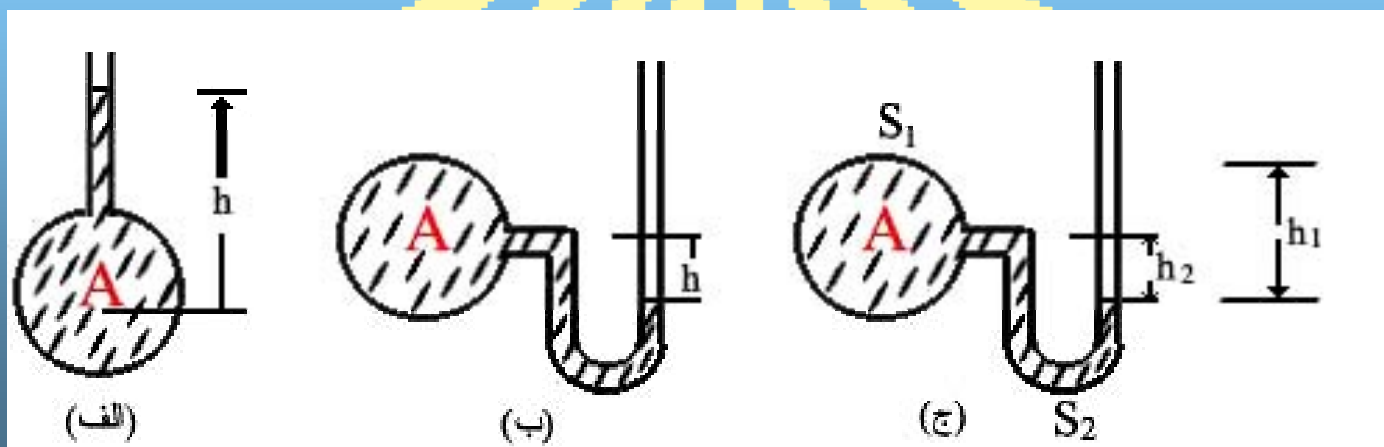
واحد طول آب

در مواردی که فشار نسبی مثبت و یا منفی زیاد باشد ، از مانومتری استفاده می شود که در شکل (۴-۲ ج) نشان داده شده است و در آن از دو مایع یا یک مایع و یک گاز که یکی از آنها چگالی نسبی بیشتری نسبت به دیگری داشته باشد ، بکار می رود . اگر چگالی نسبی سیال داخل مخزن A برابر با S_1 و چگالی مایع داخل مانومتر S_2 باشد. معادله ای به صورت زیر برای اندازه گیری فشار مخزن A باشد و از نقطه A یا بالاترین سطح آزاد مایع نوشته می شود:

$$h_A + h_2 S_1 - h_1 S_2 = 0$$

و h_A فشار مجهول است ، که بر حسب یکای طول آب بیان می شود .

شکل ۴-۲ مانومترهای ساده



۵-۲ نیروهای وارد بر سطوح سطح

در بخش قبلی تغییرات فشار را درون سیال بررسی کردیم. روی یک سطح مشخص داخل سیال نیروهای زیادی وارد می شود که می توانیم یک نیروی برآیند جایگزین آنها کرد. در این بخش راجع به مقدار نیروی برآیند و خط اثر آن (مرکز فشار) بحث می کنیم.

۱-۵-۲ سطوح افقی

اگر صفحه ای مسطح به طور افقی داخل سیالی ساکن تحت فشار ثابت قرار گیرد، مقدار نیروی وارد بر یک وجه این صفحه برابر است با:

$$\int p dA = p \int dA = PA$$

نیروهای خارجی PA به طور موازی به سطح A وارد می شود، در نتیجه جمع تمامی آنها برابر با نیروی برآیند خواهد بود. توجه داریم در این حالت جمع نیروها به صورت جمع اسکالر میباشد. اکنون می خواهیم خط اثر این نیروی برآیند (نقطه ای داخل سطح که گشتاور نیروها حول هر محوری گذرا از این نقطه صفر باشد) را تعیین کنیم. با توجه به شکل

$$PAx' = \int_A x p dA$$

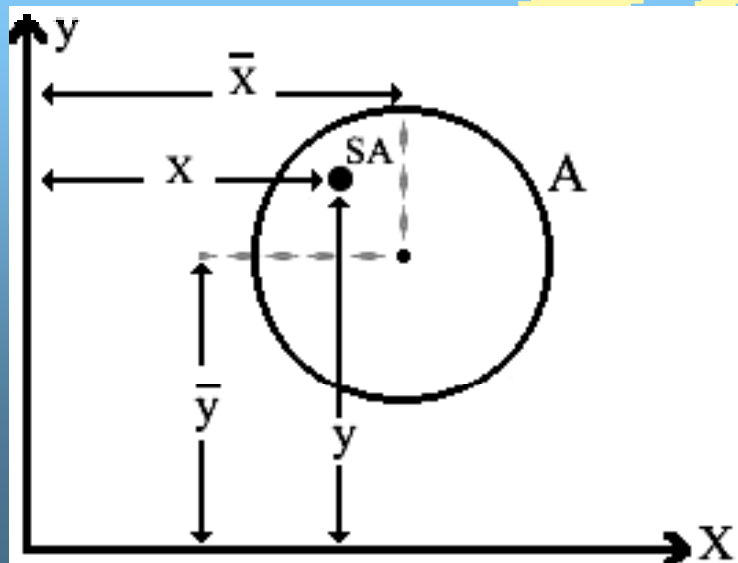
(۵-۲) داریم:

در رابطه‌ی بالا x' فاصله‌ی نیروی برآیند تا محور y است. چون P را ثابت فرض کردیم:

$$x' = \frac{1}{A} \int_A x dA = \bar{x}$$

که در آن $\bar{x}$ فاصله‌ی مرکز جرم تا محور y است (به پیوست الف مراجعه شود). در نتیجه می‌توان چنین گفت در یک سطح افقی که تحت فشار سیال ساکن است، بردار برآیند از مرکز جرم این صفحه عبور خواهد کرد.

شکل ۵-۲ سطح افقی تحت فشار از سوی یک سیال ساکن



۲-۵-۲ سطوح شیبدار

در شکل (۲-۶) صفحه سطحی با تصویری $A'B'$ نشان داده شده است. زاویه ای این صفحه با سطح افقی θ فرض می شود. تقاطع سطح مسطح را با سطح آزاد مایع محور X می گیریم و محور Y را روی سطح آزاد مزبور انتخاب می کنیم.

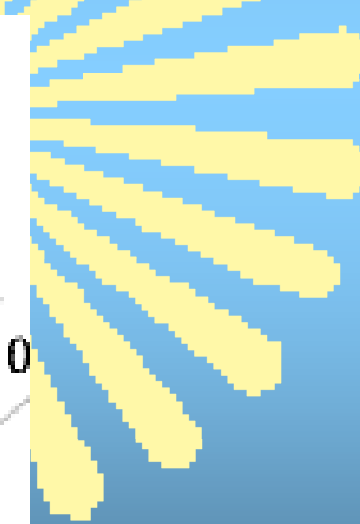
بنابراین صفحه XY را می توان یک سطح شیبداری فرض کرد. اکنون می خواهیم مقدار و جهت و خط اثر نیروی برآیند را که از سیال به یک وجه این سطح وارد می شود، تعیین کنیم. فرض می کنیم نواری نازک به ضخامت δy به مساحت δA را از این سطح بر می گزینیم. مقدار نیرویی که از سیال به این نوار وارد می شود، برابر است با:

$$\delta_F = P \delta_A = \gamma h \delta_A = \gamma y \sin \theta \delta A \quad (۲-۱۹)$$

اما می دانیم تمام نیروهای خارجی موازی اند، بنابراین به آسانی با انتگرال گیری از رابطه ی بالا مقدار F نیروی برآیند بدست می آید:

$$F = \int p dA = \gamma \sin \theta \int y dA = \gamma \sin \theta \bar{Y} A = \bar{\gamma} h A = p_G A \quad (۲-۲۰)$$

بر روی برآیند نیز عمود بر صفحه می باشد
شیبدار درون مایع



۳-۵-۲ مرکز فشار

با توجه به شکل (۲-۶)، ملاحظه می شود که خط اثر نیروی برآیند از نقطه ای به مختصات (x_p, y_p) گذر می کند. این نقطه را مرکز فشار می گویند و توجه داریم ضرورتی ندارد که بر مرکز جرم سیستم منطبق باشد. یعنی مرکز فشار یک صفحه شیبدار در مرکز جرم آن صفحه قرار ندارد. در تعیین مرکز فشار باید گشتاورهای نیروی برآیند را که $x_p F$, $y_p F$ می باشند برابر با گشتاورهای نیروهای گسترده حول محورهای x , y گرفت:

$$x_p F = \int_A x_p d_A \quad (۲-۲۰ \text{ ب})$$

$$y_p F = \int_A y_p d_A \quad (۲-۲۰ \text{ الف})$$

توجه داریم در معادلات بالا δA دیگر برابر با $\delta x \delta y$ نیست و سرانجام داریم:

$$x_p = \frac{1}{F} \int_A x_p d_A \quad (۲-۲۱ \text{ الف})$$

$$y_p = \frac{1}{F} \int_A y_p d_A \quad (۲-۲۱ \text{ ب})$$

برای سطوح ساده، این معادلات به شکل کلی تر زیر بیان می شوند

$$x_p = \frac{1}{\bar{\gamma} A \sin \theta} \int_A x y \sin \theta d_A = \frac{1}{\bar{\gamma} A} \int_A x y d_A = \frac{I_{xy}}{\bar{\gamma} A} \quad (\text{به ضمیمه الف رجوع کنید}).$$

با استفاده از ضمیمه مزبور معادله بالا به صورت زیر ساده می شود:

$$x_p = \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}_A} + \bar{x}$$

اگر یکی از محورهای مرکز جرم یا $x = \bar{x}$ یا $y = \bar{y}$ محور تقارن صفحه باشد، $\bar{I}_{xy}$ حذف و مرکز فشار روی $x = \bar{x}$ قرار می گیرد. توجه داریم $\bar{I}_{xy}$ می تواند مثبت یا منفی باشد،

بنابراین مرکز فشار می تواند در طرف چپ و یا در طرف راست خط $x = \bar{x}$ باشد. اکنون y_p را محاسبه می کنیم.

$$y_p = \frac{1}{\bar{y}_A \sin \theta} \int_A y \sin \theta dA = \frac{1}{\bar{y}_A} \int y^2 dA = \frac{I_x}{\bar{y}_A} \quad (2-23)$$

با استفاده از قضیه محورهای موازی $I_x = I_G + \bar{y}^2 A$ در این رابطه I_G اگشتاور دوم سطح حول مرکز جرم افقی آن می باشد با جایگزینی رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (2-23) نتیجه می شود:

$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y}_A} + \bar{y} \quad (2-24)$$

اما I_G همواره مثبت است، بنابراین نیز مثبت می باشد و مرکز فشار همیشه پایین تر از مرکز جرم صفحه خواهد بود.

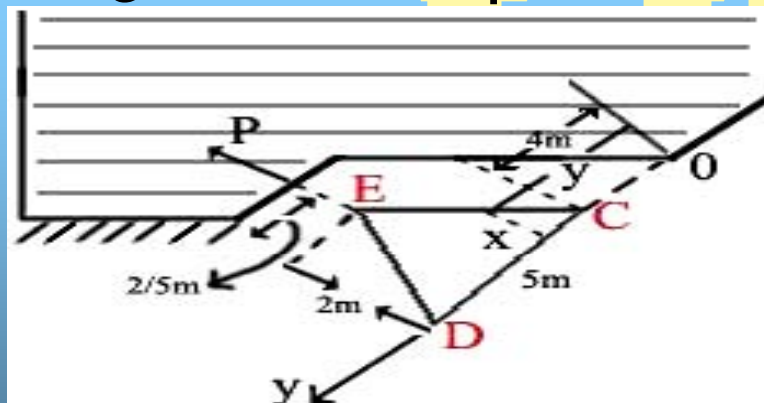
مثال ۴

دریچه مثلثی شکل CDE حول محور CD لولا شده است (شکل ۷-۲) و برای باز کردن آن باید نیروی مانند P در نقطه‌ی E وارد شود. روی دریچه رو غنی با چگالی ۸۰/۸ قرار دارد و به سطح زیرین دریچه فشار آتمسفر وارد می‌شود. با چشم‌پوشی از وزن این دریچه (الف) مقدار نیروی را که به دریچه وارد می‌شود محاسبه کنید (ب) موضوع مرکز جرم کجاست؟ (ج) مقدار نیروی لازم برای باز کردن دریچه چقدر است؟

حل

شکل ۷-۲

دریچه‌ی مثلث شکل



(الف) با انتگرال گیری و مراجعه به شکل دریچه (۷-۲) داریم.

$$F = \int_A p dA = \gamma \sin \theta \int y_x d_y = \gamma \sin \theta \int_4^{6.15} xy dy + \gamma \sin \theta \int_{6.5}^9 xy dy$$

اکنون رابطه‌ی بین y , x را بدست می آوریم.

$$X=ay+b \rightarrow 0=4a+b, 3=6/5a+b$$

از حل این دو معادله a و b بدست می آید.

$$a = 6/5, b = -4/8/5 \rightarrow x = \frac{6}{5}(y - 4)$$

همین طور برای انتگرال هم داریم: $x = \frac{6}{5}(9 - y)$ بنابراین با جایگزینی در دو انتگرال بالا نتیجه می شود:

$$F = \gamma \sin \theta \frac{6}{5} \left[\int_4^{6/5} y(y - 4) dy + \int_{6/5}^9 y(9 - y) dy \right]$$

با انتگرال گیری و جایگزینی مقدار $\gamma \sin \theta$ در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت.

$$F = 9806 \times 0/8 \times 0/50 \times \frac{6}{5} \left[\left(\frac{y^3}{3} - 2y^2 \right)_4^{6/5} + \left(4/5 y^2 - \frac{y^3}{3} \right)_{6/5}^9 \right]$$

$$= 191/2 kN$$

(ب) با توجه به مقادیر $\bar{x} = 1/0$ و $\bar{y} = 6/5$ و این که $\bar{I}_{xy}$ به علت تقارن با محور مرکز جرم که با محور X موازی است، صفر می باشد. بنابراین $\bar{x} = x_p = 1m$ همچنین با جایگزینی در معادله ی (۲۴-۲) داریم.

$$y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y}A} = \frac{2 \times 1 \times 3 \times 2/5^2}{12 \times 6/5 \times 7/5} = 0/16m$$

یعنی مرکز فشار روی صفحه مسطح، $16/0m$ پایین تر از مرکز جرم قرار دارد.

(ج) از جایگزینی نیروی برآیند به جای نیروهای وارده از روغن و تعیین گشتاور حول CD داریم:

$$p \times 3 = 191/200 \times 1 \rightarrow p = 63/74 \text{ KN}$$

۶-۲ مؤلفه های نیروی مؤثر بر سطح های خمیده شکل

اگر سطح خمیده شکل باشد، جهت نیروهای وارد بر یک جزء آن سطح $Cp\delta A$ تغییر می کند. بنابراین مقادیر آنها به صورت برداری با هم جمع می شوند. یک کنج راست گوشه را در نظر می گیریم و از جمع مؤلفه های هم امتداد، سه مؤلفه در سه جهت بدست می آید. از جمع برداری این مؤلفه های سرانجام نیروی مؤثر بر سطح خمیده شکل بدست می آید و خطوط اثر این مؤلفه های نیز به آسانی قابل تعیین می باشند.

(آ) مولفه ی افقی نیروی مؤثر بر سطح خمیده شکل
این مولفه برابر با نیروی فشاری وارد بر تصویر سطح خمیده شکل است و صفحه عمودی حاصل از تصویر سطح خمیده شکل، عمود بر جهت مولفه ی افقی است. این مطلب در شکل (۸-۲) نشان داده شده است. اگر سطح کوچکی مانند δA را از این سطح در نظر بگیریم و فرض کنیم خط عمود بر این جزء کوچک با جهت منفی محور x زاویه θ بسازد، آنگاه داریم.

$$\delta F = P \delta A \cos \theta$$

اکنون با انتگرال گیری، مجموع تمام مؤلفه ها را در امتداد محور x بدست می آوریم.

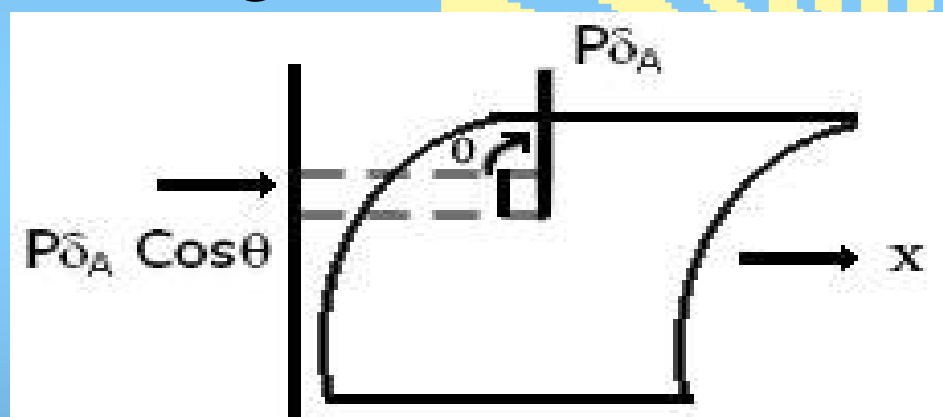
$$F = \int_A P \cos \theta dA$$

(۲-۲۵)

توجه داریم در رابطه‌ی بالا $\delta A \cos \theta$ تصویر δA روی صفحه‌ای عمود بر امتداد محور x است. حال اگر مولفه‌ی افقی یک نیروی فشاری روی یک سطح بسته مورد نظر باشد، تصویر سطح خمیده شکل مزبور روی یک صفحه قائم همواره صفر است. زیرا در برابر هر سطح تصویری سطح تصویری دیگری با علامت مخالف بوجود می‌آید که اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند.

شکل ۸-۲

مولفه‌ی افقی نیرو روی سطح خمیده



در تعیین خط اثر مولفه‌ی افقی نیروی موثر بر سطح خمیده شکل لازم است برآیند نیروهای موازی که از مولفه‌های نیرو وارد بر هر یک از اجزاء سطح تشکیل می‌شود، تعیین کرد. این برآیند، همان برآیند نیروی وارد بر سطح تصویر شده در امتداد مزبور است. بنابراین مرکز فشار بر سطح تصویر قرار می‌گیرد.

مثال ۵

معادله‌ی بیضوار که در آب غوطه‌ور شده است عبارتست از $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$ مرکز آن ۲m پایین‌تر از سطح آزاد قرار دارد. مولفه‌های نیروی افقی موثر را بر سطح خمیده شکل در $\frac{1}{8}$ اول پیدا کنید. فرض کنید صفحه‌ی xz افقی باشد و جهت مثبت y رو به بالا است.

حل

مساحت تصویر روی صفحه xz برابر با $\frac{\pi}{4} \times 2 \times 3m^2$ می‌باشد. بنابراین مرکز $(2 - \frac{4}{3}\pi \times 2)m$ جرم پایین‌تر از سطح آزاد قرار می‌گیرد. در نتیجه داریم.

$$F_x = -\left(\frac{\pi}{4} \times 6\right)\left(2 - \frac{8}{3\pi}\right)\gamma = -53 / 2kN$$

$$F_x = -\left(\frac{\pi}{4} \times 4\right)\left(2 - \frac{8}{3\pi}\right)\gamma = -32 / 4kN$$

(ب) مولفه‌ی قائم نیروی موثر بر سطح خمیده شکل

می‌دانیم مولفه‌ی قائم نیروی فشار موثر بر سطح خمیده مساوی با وزن مایع است که از سطح خمیده مزبور تا سطح آزاد به طور قائم قرار گرفته است.

از جمع برداری مولفه‌های نیرو فشاری موثر بر سطح کوچک δA می‌توان مولفه‌ی قائم نیروی موثر بر سطح خمیده را محاسبه کرد. با توجه به شکل (۲-۹) جزء کوچکی از سطح خمیده شکل است که با امتداد قائم زاویه θ می‌سازد. بنابراین مولفه‌ی قائم نیروی موثر بر این سطح برابر است با:

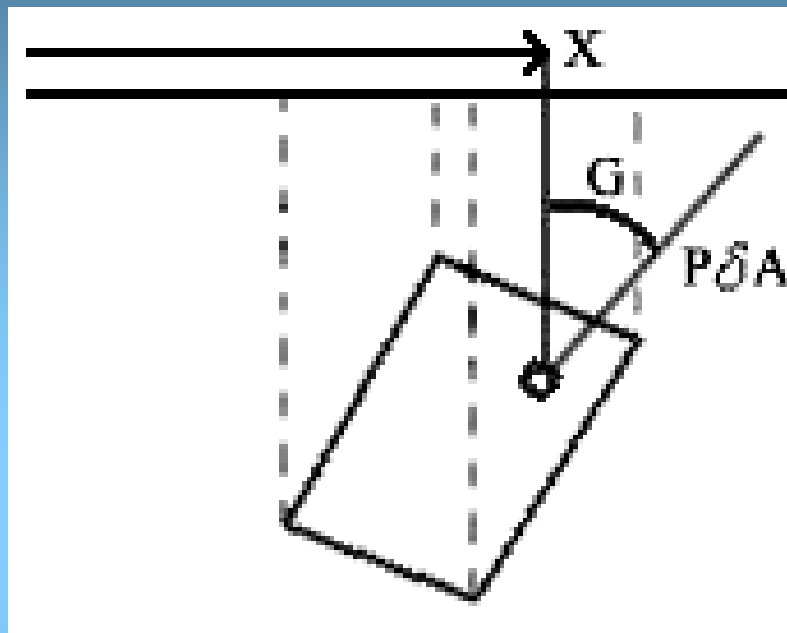
$$F_v = \int_A P \cos \theta dA \quad (2-26)$$

اکنون به جای P ، عبارت γh که h فاصله‌ی جزء مزبور تا سطح آزاد است، قرار می‌دهیم و می‌دانیم عبارت $\cos \theta \delta A$ تصویر δA بر روی سطح افقی است. در نتیجه معادله‌ی (۲-۲۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$F_v = \gamma \int h \cos \theta dA = \gamma \int_v dv = \gamma W \quad (2-27)$$

توجه داریم δv حجم منشوری است که ارتفاع آن h و مساحت قاعده‌ی آن برابر $\cos \theta \delta A$ می‌باشد و یا در واقع حجم مایعی است که به طور قائم روی جزء سطح مورد نظر قرار دارد.

شکل ۲-۹ مولفه‌ی عمودی نیروی وارد بر سطح خمیده شکل



اکنون می‌خواهیم خط اثر مولفه‌ی قائم نیرو را تعیین کنیم، برای این کار باید گشتاور مولفه‌های اجزای قائم نیرو را حول محوری مناسب در نظر گرفت و آن را برابر با گشتاور برآیند نیرو گرفت. به عنوان مثال در شکل (۲-۹) محوری را که از O گذر می‌کند در نظر می‌گیریم. در

$$F_v \bar{x} = \gamma \int x dv$$

این صورت داریم:

که در آن $\bar{x}$ فاصله‌ی نقطه‌ی 0 تا خط اثر است و چون $F_v = \mathcal{W}$ است ،
پس به آسانی می توان نتیجه گرفت:

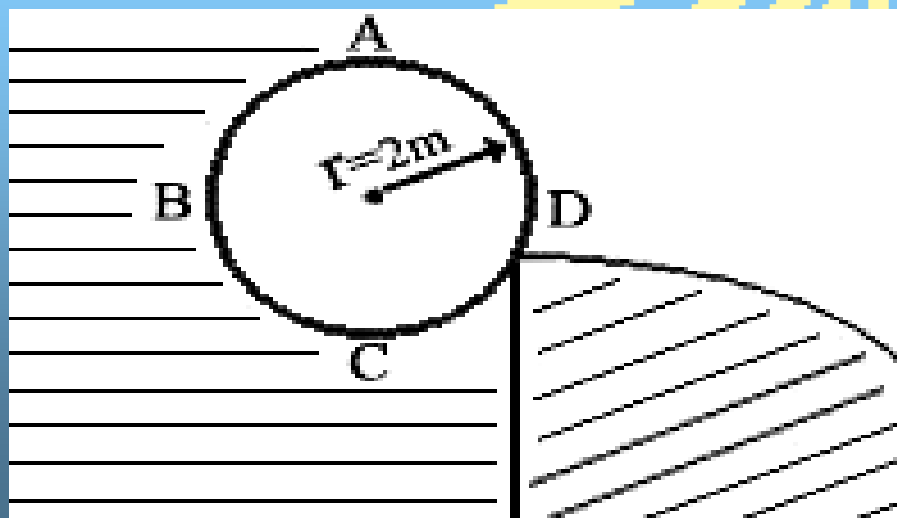
$$\bar{x} = \frac{1}{V} \int x dV$$

و این مقدار معادل فاصله تا مرکز جرم است . بنابراین خط اثر نیروی
قائم از مرکز جرم عبور می کند و در بالای سطح خمیده تا سطح آزاد
ادامه می یابد.

مثال ۶

مطابق شکل (۱۰-۲) مانع استوانه شکلی جلوی آب را گرفته است و
محل تماس بین استوانه و دیواره کاملاً صاف می باشد. به ازای یک
متر طول استوانه مطلوبست تعیین (الف) وزن آن و (ب) نیروی
وارد بر دیواره

شکل ۱۰-۲ مانع استوانه ای شکل



حل

(الف) در حالت تعادل ، وزن استوانه باید برابر با مولفه‌ی قائم نیروی باشد که از سوی آب وارد می شود (سطح آزاد فرضی برای CD در ارتفاع A است). نیروی قائم وارد به BCD برابر است با:

$$F_{vBCD} = \left(\frac{\pi r^2}{2} + 2r^2 \right) \gamma = (2\pi + 8)\gamma$$

و نیروی قائم وارد بر AB برابر است با:

$$F_{vAB} = -\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4} \right) \gamma = -(4 - \pi)\gamma$$

در نتیجه وزن واحد طول بدست می آید:

$$F_{vBCD} + F_{vAB} = (3\pi + 4)\gamma = 0/132 \text{ N}$$

(ب) می دانیم نیروی وارد بر دیواره برابر با نیروی افقی ABC منهای نیروی افقی وارد بر CD می باشد . اما تصویر BCD روی صفحه‌ی قائم صفر است، مولفه های افقی نیروی وارد بر CD-BC با یکدیگر حذف می شوند:

$$F_H = F_{HAB} = 2\gamma = 19/6 \text{ KN}$$

چون مساحت سطح تصویر شده 2 m^2 است ، بنابراین فشار در مرکز جرم سطح مزبور برابر با 9806 Pa می باشد.

۲-۷ نیروی شناوری

نیروی شناوری همان نیروی برآیند وارد از طرف یک سیال ساکن به جسمی است که داخل آن فرو رفته یا شناور باشد. این نیرو همواره به طور قائم و رو به بالا اثر می کند. این نیرو مؤلفه افقی ندارد زیرا تصویر جسمی که در مایع غوطه ور است یا قسمتی از آن در مایع شناور می باشد، همواره روی سطح قائم برابر صفر است.

این نیرو را می توان از تفاضل بین مؤلفه ی قائم نیروی فشاری که به قسمت تحتانی جسم وارد می شود و مؤلفه ی قائم نیروی فشاری که به فوقانی جسم مزبور وارد می شود، بدست آورد. اختلاف بین این دو نیرو، نیروی قائمی میشود که همواره به سمت بالا است که ناشی از وزن سیال جابجا شده توسط جسم مزبور است. شکل معادله ای آن به صورت زیر در می آید:

$$F_B = V\gamma$$

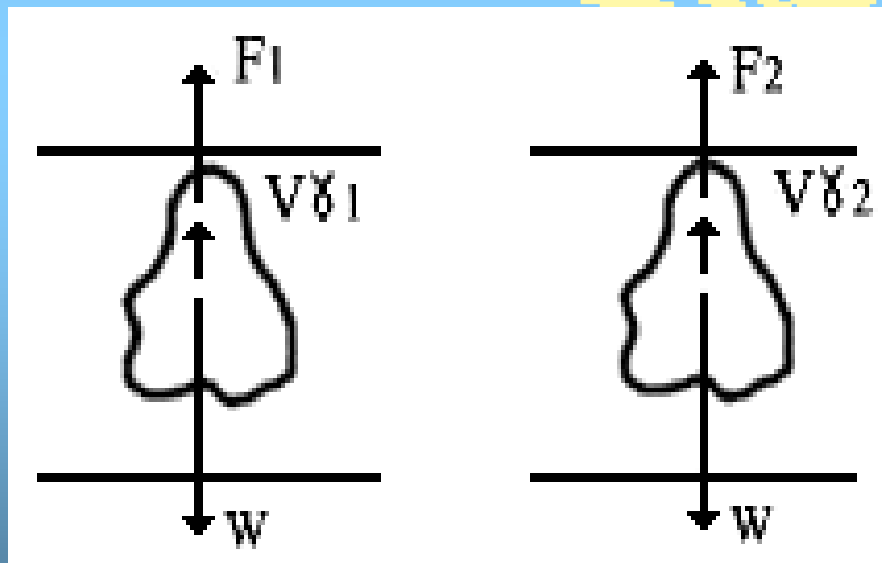
(۲-۲۸)

که در آن F_B نیروی شناوری و V حجم سیال جابجا شده و γ وزن مخصوص سیال مزبور است. همین فرمول در مورد جسمی که در مایعی شناور باشد نیز بکار می رود که در آن V حجم مایع جابجا شده است. توجه داریم خط اثر نیروی شناوری از مرکز جرم حجم جابجا شده ی سیال می گذرد و این مطلب برای اجسام شناور یا غوطه ور در مایع نیز صادق است. مرکز جرم حجم سیال جابجا شده را مرکز شناوری می نامند.

در حل مسایل ایستایی اجسام شناور یا غوطه ور، جسم را به عنوان جسم آزاد در نظر می گیرند و نیروی شناوری جایگزین عملکرد سیال می کنند و وزن جسم را که از مرکز جرم نیز می گذرد مانند سایر نیروهای تماسی را نشان می دهند.

یکی از کاربردهای شناوری، تعیین وزن، حجم، و وزن مخصوص و چگالی جسم نامشخص است که از دو سیال مختلف استفاده و جسم مزبور را در داخل آنها فرو می‌برند (شکل ۱۲-۲). F_1 و F_2 وزن های جسم بعد از فرورفتن در سیال است و γ_1 و γ_2 وزن مخصوص سیال اول و دوم و W و V نیز وزن و حجم مخصوصی است که می‌خواهیم آنها را تعیین کنیم. ابتدا شرایط تعادل را می‌نویسیم:

شکل ۲-۲۴ جسم غوطه‌ور در دو سیال



$$F_1 + V \gamma_1 = W \quad , \quad F_2 + V \gamma_2 = W$$

اکنون از این دو رابطه W, V را بدست آوریم:

$$V = \frac{F_1 - F_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad \text{و} \quad W = \frac{F_1 \gamma_2 - F_2 \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

کاربرد دیگر آن تعیین چگالی مایعات است که در چگالی سنج ها بکار می رود. در شکل (۲-۱۲) چگالی نسبی را نشان می دهد که در دو مایع فرو رفته است. چگالی نسبی یک ساق منشوری با سطح مقطع a دارد. فرض می کنیم مایع سمت چپ آب مقطر یعنی $S=1$ باشد. این چگالی هنگامی شناور می ماند که شرط زیر برقرار باشد.

$$V_o \gamma = W \quad (2-29)$$

که در آن V_o حجم قسمتی از جسم است که در آب مقطر غوطه ور می باشد و γ وزن مخصوص آب و W وزن چگالی نسبی است. در این شکل محل سطح مایع را به ازای چگالی واحد با علامت u روی ساق چگالی نسبی نشان داده ایم. حال آن را در مایع دیگری شناور می کنیم. بار دیگر معادله ی تقارن را می نویسیم.

$$(V_o - \Delta V) S \gamma = W \quad (2-30)$$

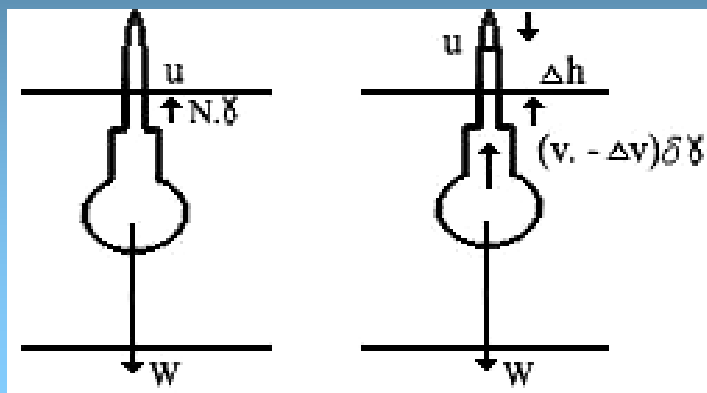
که در آن $\Delta V = a \Delta h$ می باشد. از دو رابطه ی اخیر Δh را بدست می آوریم:

$$\Delta h = \frac{V_o}{a} \frac{S - 1}{S} \quad (2-31)$$

به این ترتیب می توان ساق چگالی نسبی را مندرج کرد و آن در تعیین چگالی های مختلف بکار برد.

شکل ۱۳-۲

کاربرد چگالی نسبی در تعیین چگالی مایع



مثال ۲

قطعه سنگ معدنی در هوا ۵/۱N وزن دارد وقتی آن را به زیر آب فرو می برند ۱/۱N وزن خواهد داشت. حجم (بر حسب سانتی متر مکعب) و چگالی این قطعه سنگ را بدست آورید.

حل

با استفاده از شکل (۱۲-۲) می نویسیم:

$$5/1 = 1/1 + (9806) V$$

$$V = 8/8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$S = \frac{W}{\gamma V} = \frac{1.5}{9806 \times 0.0000408} = 3.75$$

۲-۸ دوران یکنواخت حول محور قائم

دوران یک سیال مانند جسم صلب ، حول یک محور مشخص را حرکت گردابی اجباری می نامند . در این دوران، سرعت زاویه ای تمام ذرات یکسان می باشد و این حرکت با حرکت گردابی آزادی که در آن هر ذره در مسیر دایره ای حرکت می کند و تغییرات سرعتش نسبت معکوس با فاصله از مرکز دارد، فرق خواهد داشت . مایع داخل ظرف پس از زمانی که این ظرف حول محور قائم با سرعت زاویه ای می چرخد، مانند یک جسم صلب عمل می کند. و در این حالت هیچ تنش برشی در مایع وجود نخواهد داشت و تنها شتابی که پدیدار می شود شتاب شعاعی که رو به داخل و به سمت محور چرخش می باشد.

با توجه به شکل (۲-۱۴) برداری که $\hat{i}$ را در امتداد r و $\hat{j}$ را در امتداد قائم (محور y ها) و به سمت بالا انتخاب می کنیم. معادله ی (۲-۸) را در تعیین تغییرات فشار در سرتاسر سیال بکار می بریم:

$$\vec{\nabla} P = -\hat{j}\gamma - \rho \vec{a} \quad (۲-۳۲)$$

فرض می کنیم سرعت زاویه ای ω ثابت باشد در نتیجه هر ذره ی سیال شتاب شعاعی رو به داخل و معادل $\omega^2 r$ خواهد داشت . در نتیجه $\vec{a} = -\hat{i} \omega^2 r$ خواهد بود . از جسم دو بردار $-\hat{j}\gamma$ و $-\rho \vec{a}$ ، گرادیان فشار $\vec{\nabla} P$ بدست می آید . فشار در امتداد عمود بر این خط تغییری نخواهد کرد . بنابراین اگر نقطه m را در سطح در نظر بگیریم، سطح آزاد عمود بر $\rho \vec{P}$ خواهد بود . ازدو معادله ی (۲-۳۲) چنین خواهیم داشت:

$$\hat{i}\frac{\partial p}{\partial r} + \hat{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial p}{\partial z} = -\hat{j}\gamma + \hat{i}\rho w^2 r$$

توجه داریم بردار یکه $\hat{k}$ در امتداد محور z است. از این معادله‌ی برداری داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho w^2 r \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2-33)$$

چون P فقط تابعی از y و r می باشد، بنابراین دیفرانسیل کامل $(dp)_P$ به صورت زیر بیان می شود.

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial r} dr$$

از جایگزینی روابط (2-33) در این رابطه نتیجه می شود:

$$dp = -\gamma dy + \frac{\gamma}{g} w^2 r dr \quad (2-34)$$

معمولاً برای یک مایع ثابت γ - V می باشد، بنابراین از انتگرال گیری رابطه‌ی بالا چنین بدست می آید.

$$P = \frac{\gamma}{g} w^2 \frac{r^2}{2} - \gamma y + c$$

که در آن C ثابت انتگرال گیری است . اگر فرض کنیم مقدار فشار در مبدأ برابر با P_0 باشد چون $C=P_0$ می شود. بنابراین داریم:

$$p = p_0 + \gamma \frac{w^2 r^2}{2g} - \gamma y \quad (۲-۳۵)$$

اگر سطح افقی طوری انتخاب شود که $P_0 = 0$ و $y=0$ باشد از تقسیم دو سمت معادله ی بالا بر γ نتیجه می شود

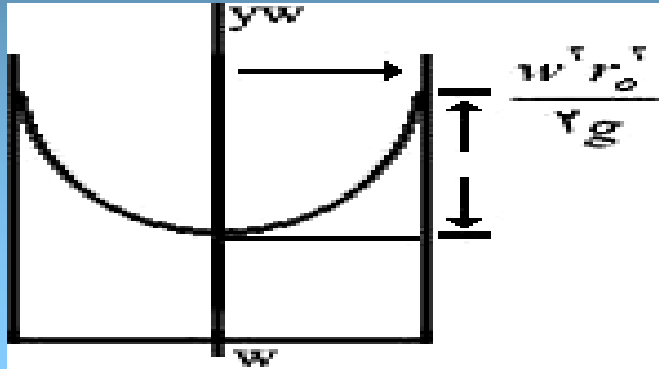
$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{w^2 r^2}{2g} \quad (۲-۳۶)$$

و این رابطه ی بسیار مهم است زیرا عمق مایع را نشان می دهد که با مجذور شعاع نسبت مستقیم دارد . بنابراین به هنگام دوران، شکل سطوحی که فشار روی آنها ثابت باشد، به صورت سهمی وار خواهد بود. فرض کنید ظرفی محتوی سیالی را به دوران در آوریم ، حجم زیر سطح آزاد که به شکل سهمی در آمده است برابر با حجم سیال اولیه است و شکل این سهمی فقط تابعی از سرعت زاویه ای دوران W است . اگر این ظرف به صورت استوانه باشد با توجه به معادله ی (۲-۳۶) ارتفاع حدود مایع مساوی با $\frac{W^2 r_o^2}{2g}$ خواهد بود. اما سهمی حاصل حجمی برابر با نصف استوانه ی هم ارتفاع خود دارد ، حجم مایع در بالای سطح گذرا بر

$$\pi r_o^2 \times \frac{1}{2} \frac{w^2 r_o^2}{2g}$$

پایین ترین نقطه سهمی برابر است با

به هنگام سکون، ارتفاع سطح آزاد مایع از پایین ترین نقطه سهمی برابر است با $\frac{1}{2} \frac{w^2 r_o^2}{2g}$ بنابراین همان مقدار که مایع در مرکز پایین می آید، در جداره ها بالا می رود و در نتیجه با مشخص بودن w و r_o پیش از چرخش، می توان پایین ترین نقطه را تعیین کرد (شکل ۱۳-۲)



مثال ۸

مایعی با چگالی نسبی ۲/۱ با سرعت ۲۰۰ rpm حول یک محور قائم دوران می کند و در نقطه ای چون A که از محور دوران ۱m فاصله دارد فشار برابر با ۷۰ kPa است. فشار داده B که ۲m بالاتر از A می باشد و از محور دوران ۵/۱m فاصله دارد، بدست آورید.

حل

معادله ی (۲-۳۵) را برای این دو نقطه می نویسیم:

$$P_A = P_0 + \gamma \frac{w^2 r^2 A}{2g} - \gamma y, P_B = P_0 + \gamma \frac{w^2 r^2 B}{2g} = \gamma y$$

این دو معادله را از هم کم و داده ها را جایگزین می کنیم:

$$70000 - P_B = 2 \times 11767 + \frac{11767}{2 \times 9806} (2095)^2 \times [1^2 - 1/5^2]$$

$$B = 375/6 \text{ kPa}$$

تست های فصل ۲

۲-۲-۱ در هر نقطه از سیال تنش عمودی در تمام جهت ها اگر
(الف) سیال بدون اصطکاک باشد، یکسان است (ب) سیال بدون اصطکاک و تراکم
پذیر باشد، یکسان است (ج) سیال با لزجت صفر و در حال سکون باشد، یکسان است
✓(د) هیچگونه حرکتی بین یک لایه از سیال و لایه مجاورش وجود نداشته باشد،
یکسان خواهد بود.

۲-۳-۱ فشار مطلق هوا در فضای بالای سطح روغنی با $S = 0.75$ در یک مخزن برابر
با 115 kPa abs است. فشار در ۲ متر زیر سطح این روغن بر حسب kPa برابر است
با

(الف) $14/71$ (ب) $5/116$ ✓(ج) $71/126$ (د) $1/134$

۲-۳-۲ معادله دیفرانسیل تغییر فشار در یک سیال ساکن به کدام صورت زیر بیان
می شود؟ γ رو به بالا و به طور عمودی است؟

✓(الف) $dp = -\gamma dy$ (ب) $dp = -\gamma dy$ (ج) $dy = -\rho dp$ (د) $dp = -\gamma dp$

۲-۳-۳ در اتمسفر تکدما

(الف) فشار ثابت باقی می ماند (ب) فشار به طور خطی با ارتفاع کاهش می یابد
(ج) فشار افزایش می یابد (د) فشار به طور توانی با ارتفاع افزایش می یابد

۱-۴-۲ کدام گزاره صحیح است؟

(الف) فشار آتمسفر محلی همواره پایین تر از فشار آتمسفر استاندارد است.

(ب) فشار آتمسفر محلی فقط به ارتفاع جغرافیایی آن محل بستگی دارد.

✓ (ج) فشار آتمسفر استاندارد، میانگین فشار آتمسفر محلی در سطح دریا است.

(د) بارومتر اختلاف بین فشار استاندارد و محلی را نشان می دهد.

۲-۴-۲ اگر بارومتری فشار 730 mmHg را نشان دهد، 10 kPa مکش معادل است با

(الف) $2/10 \text{ mH}_2\text{O}$ - (ب) $75/0 \text{ mHg}$

(ج) $91/8 \text{ mH}_2\text{O abs}$ ✓ (د) هیچکدام

۳-۴-۲ در شکل (۲-۴ ب) یک روغن مایع با چگالی نسبی $80/0$ موجود

است. اگر $h = 60 \text{ cm}$ باشد، فشار در نقطه‌ی A برابر است با

✓ (الف) $52 \text{ cm H}_2\text{O abs}$ - (ب) $48 \text{ cm H}_2\text{O}$ خلاء

(ج) 48 cm Hco مکش (د) $52 \text{ cm H}_2\text{O}$ خلاء

۴-۴-۲ در شکل (۴-۲ ج) لوله محتوی هوا است و مایع داخل مانومتر آب. اگر $h_1 = 500 \text{ mm}$ و $h_2 = 200 \text{ mm}$ باشد، فشار در نقطه‌ی A برابر است با:

- (الف) $14/10 \text{ mH}_2\text{O abs}$ (ب) $2/0 \text{ mH}_2\text{O}$ خلا
(ج) $2/0 \text{ m H}_2\text{O}$ مکش (د) 49.1 Pa ✓

۴-۴-۵ یک مانومتر آب - جیوه با اختلاف نسبی 500 mm است (اختلاف در ارتفاع سطح آزاد مایع) اختلاف فشار اندازه گیری شده بر حسب آب برابر است با:

- (الف) $5/0$ ✓ (ب) $3/6$ (ج) $8/6$ (د) $3/7$

۴-۵-۱ یک سطح مستطیل شکل به ابعاد ۳ در ۴ متر که لبه‌ی پایین افقی آن ۳ متر است، ۶ متر پایین تر از سطح آزاد روغن با $S = 8/0$ قرار گرفته است. این سطح نسبت به افق زاویه 30° درجه دارد. نیروی وارد بر یک وجه آن برابر است با:

- (الف) $45/38$ ✓ (ب) 485 (ج) $25/51$ (د) 6.5

۴-۵-۲ مرکز فشار پرسش قبلی، نسبت به افق و بر محور قائم چندمتر از سطح آزاد مایع پایین تر است؟

- (الف) $10/133 \text{ m}$ (ب) $133/5 \text{ m}$ ✓ (ج) $67/5 \text{ m}$ (د) $20/5 \text{ m}$

۳-۵-۲ مرکز فشار:

- (الف) در مرکز جرم سطح غوطه ور قرار دارد
- (ب) همواره در بالای مرکز جرم سطح واقع است
- (ج) بستگی به موقعیت سطح دارد
- ✓ (د) نقطه ای روی خط اثر نیروی برآیند است.

۴-۵-۲ دریچه مربعی شکل عمودی به ضلع $4m$ که سطح فوقانی آن همان سطح آزاد می باشد، برای نگهداری آب بکار می رود. گشتاور نسبت به پایین تر قسمت دریچه چقدر می باشد؟

- ✓ (الف) $75/42$ (ب) 575 (ج) 645 (د) $35/85$

۱-۶-۲ مولفه ی افقی نیروی موثر وارد به سطح خمیده شکل برابر است با:

- (الف) وزن مایعی که به طور قائم در بالای سطح خمیده قرار دارد.
- (ب) وزن مایعی که توسط سطح خمیده شکل نگه داشته می شود.
- (ج) حاصل ضرب فشار مرکز جرم در مساحت
- ✓ (د) نیروی وارد بر صفحه قائمی که تصویر سطح خمیده شکل می باشد.

۲-۶-۲ مؤلفه‌ی قائم نیروی فشاری موثر وارد به سطح خمیده شکل که در مایعی فرو برده شده است برابر می باشد با:

(الف) مؤلفه‌ی افقی خودش

(ب) نیروی وارد بر تصویر قائم سطح خمیده شکل

(ج) حاصل ضرب فشار مرکز ثقل در مساحت سطح مزبور

✓ (د) وزن مایعی که به طور قائم روی سطح خمیده شکل قرار دارد.

۲-۶-۳ استوانه‌ای به قطر ۳m و طول ۱۰m را پر از آب می کنیم و آن را به طور افقی قرار می دهیم. فشار در محور استوانه ۸/۹ KPa می باشد. مؤلفه‌ی قائم نیروی موثر بر نیمه فوقانی آن برحسب کیلو نیوتن چقدر است.

(الف) ۷/۹۴ - ✓ (ب) ۴/۵۲ - (ج) ۱/۹۸ (د) ۱/۱۴۷

۲-۷-۱ قطعه چوبی به ابعاد ۱ در ۱ در ۲۵/۰ متر با $S = ۵/۰$ با باری به وزن ۴۰۰N روی آب شناور است. حجم قسمت غوطه ور بر حسب متر مکعب برابر است با:

(الف) ۴۳/۰ (ب) ۱۲۵/۰ ✓ (ج) ۱۶۶/۰ (د) ۲۹۳/۰

۲-۷-۲ خط اثر نیروی شناوری موثر

- (الف) از مرکز جرم هر جسم غوطه ور می گذرد.
- (ب) از مرکز جرم حجم هر جسم شناور می گذرد.
- (ج) از مرکز حجم سیال جابجا شده عبور می کند.
- (د) از مرکز جرم تصویر افقی جسم عبور می کند.

۱-۸-۲ وقتی یک مایعی مانند یک جسم صلب حول محور قائم دوران می کند. فشار:

- (الف) با مجذور فاصله کاهش می یابد
- (ب) با فاصله شعاعی به طور خطی افزایش می یابد.
- (ج) به نسبت عکس ارتفاع در امتداد هر خط قائمی تغییر می کند.
- (د) با مجذور فاصله شعاعی تغییر می کند.

۲-۸-۲ اگر مایعی حول محور قائم مانند جسم صلب دوران کند به نحوی که فشار نقاط واقع بر محور برابر با فشار نقاطی که ۶۰ سانتی متر بالاتر و در فاصله ۶۰ سانتی متری از محور قرار دارند، باشند. سرعت زاویه ای بر حسب رادیان بر ثانیه برابر است با:

- (الف) ۰.۴/۴ (ب) ۴۳/۴ (ج) ۷۲/۵ (د) ۴۲/۵

۳-۸-۲ استوانه قائمی که قسمت فوقانی آن باز و از روغنی با چگالی ۲/۱ پر می باشد با چنان سرعتی به دوران در می آوریم که نیمی از مایع آن به بیرون می ریزد. فشار مرکز تحتانی آن:
√(الف) برابر صفر است

(ب) یک چهارم مقداری است که در حالت پر بودن داشته است
(ج) بزرگتر از حالتی است که به جای این مایع، آب قرار گرفته باشد.
(د) نصف مقداری است که در حالت پر بودن داشته است.

۴-۸-۲ گرداب اجباری:

(الف) خلاف گرداب آزاد می چرخد
(ب) همواره در رابطه با یک گرداب آزاد بوجود می آید
(ج) سرعتی دارد که به نسبت عکس شعاع کاهش می یابد.
√(د) هنگامی روی می دهد که سیال مانند یک جسم صلب دوران کند

مفاهیم جریان سیال و معادلات بنیادی

۱-۳ مقدمه

در فصل قبلی راجع به ایستایی سیالات بحث شد و علمی تقریباً دقیق است زیرا در ایستایی سیالات فقط کمیتی چون وزن مخصوص (یا چگالی) باید با آزمایش تعیین شود. اما واقعیت چیز دیگری است، به عبارت دیگر ماهیت یک جریان یک سیال واقعی بسیار پیچیده است و چون قوانین بیانگر حرکت کامل یک سیال را نمی توان به آسانی محاسبه کرد، لازم است از آزمایشات نیز کمک گرفته شود. با استفاده از تحلیل های مکانیکی، ترمودینامیکی و آزمایشات دقیق می توانیم سازه های هیدرولیکی بزرگ و روابط ارزشمند مکانیک سیالات را بدست آوریم.

در این فصل مفاهیم مورد نیاز در تحلیل حرکت سیالات ارائه می شود .
معادلات بنیادی که به کمک آنها می توانیم به پیش بینی رفتار یک سیال پردازیم.
این قوانین عبارتست از تئور حرکت ، پیوستگی و تکانه خطی و سرانجام
قوانین اول و دوم ترمودینامیک . ما در این فصل برای استنتاج معادلات پیوستگی ،
انرژی و تکانه از حجم کنترل استفاده می کنیم.

۲-۳ مشخصه های جریان

جریان یک سیال به انواع : تلاطمی ، آرام ، حقیقی ، آرمانی بازگشت پذیر و
بازگشت ناپذیر ، دائمی و غیردائمی ، یکنواخت و نایکنواخت ، گردشی و بی
گردشی رده بندی می شود. در این بخش انواع مختلف جریان را بررسی و مشخص
می کنیم.

در جریان تلاطمی ، ذرات سیال در مسیرهای نامنظمی حرکت می کنند و تکانه از یک بخش سیال به بخش دیگر انتقال می یابد . ابعاد ذرات سیال می تواند بسیار کوچک (چند هزار مولکول) تا بسیار بزرگ (هزاران مترمکعب در گردابه های رودخانه و غیره) باشند . افزایش جریان سبب می شود که تنش های برشی بزرگتر شوند و در نتیجه بازگشت ناپذیری ایجاد می کنند و اتلاف بیشتری روی می دهد . در تجربه معلوم شده است که در جریان تلاطمی ، اتلاف متناسب با توان $1/7$ تا 2 سرعت تغییر می کند. در صورتی که در جریان لایه ای این افت ها متناسب با سرعت تغییر می کند.

در جریان آرام ، ذرات سیال در امتداد مسیرهای همواری که در داخل غشاء یا لایه ها قرار دارند حرکت می کنند و یک لایه به آرامی روی لایه دیگر می لغزد. در جریان آرام قانون چسبندگی نیوتون برقرار است و تأثیر چسبندگی باعث کاهش تلاطمی و اغتشاش می شود . اگر چسبندگی کم باشد ، سرعت زیاد یا دبی جریان زیاد باشد ، جریان آرام دائمی نخواهد بود و تبدیل به جریان تلاطمی می شود . می توان معادله همانند قانون چسبندگی نیوتن برای یک جریان تلاطمی نوشت:

$$\delta = \eta \frac{du}{dy} \quad (3-1)$$

ضریب η فقط به ویژگی سیال بستگی ندارد، بلکه بستگی به حرکت سیال و چگالی نیز دارد. این ضریب را چسبندگی گردابی می نامند . اما سیال آرمانی، سیالی است که تراکم ناپذیر و بی اصطکاک باشد و آن را نباید با گاز کامل اشتباه گرفت. اگر بتوان سیالی را آرمانی فرض کرد در تجزیه و تحلیل جریان مفید خواهد بود . توجه داریم سیال بی اصطکاک فاقد چسبندگی و فرآیند جریان آن بازگشت پذیر است . لایه ی سیالی که در مجاورت جریان مرزی قرار دارد ، تحت اثر نیروی برشی چسبندگی واقع می شود و نسبت به مرز مزبور، سرعتی نسبی دارد. این لایه را لایه مرزی و این لایه مرزی می تواند آرام یا تلاطمی باشد.

در جریان بی دررو هیچ انتقال حرکت از سیال و یا به سیال پیش نمی آید. جریان بی در رو بازگشت پذیر (یعنی به در روی بدون اصطکاک) را جریان تک آنتروپی (ایزوتروپیک) می نامند. جریان دائمی هنگامی روی می دهد که شدیداً در هر نقطه ای از سیال نسبت به زمان تغییر نکند. همچنین در جریان دائمی در هیچ مکانی تغییری نسبت به زمان در چگالی ρ ، فشار P یا دما T روی نمی دهد بنابراین برای این نوع جریان داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2-3)$$

در جریان تلاطمی، به علت حرکت گردش ذرات سیال اندک نوسانی در هر نقطه پیش می آید. هنگامی که سرعت میانگین لحظه ای نسبت به زمان تغییر نکند، این جریان را می توان دائمی در نظر گرفت. جریان غیردائمی است که شرایط آن در هر نقطه نسبت به زمان تغییر کند ($\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$) آبی که با دبی ثابت به درون مخزن یا منبعی پمپ می شود، مثالی از جریان غیر دائمی است. جریان یکنواخت هنگامی روی می دهد که در هر لحظه برای تمامی نقاط آن بردار سرعت (جهت و هم مقدار سرعت) یکسان باشد یعنی $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ که در آن زمان ثابت و $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ جابجایی در تمام جهت ها است، اما در جریانی که بردار سرعت در هر لحظه از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می کند، دیگر این جریان یکنواخت نیست و آن را جریان غیریکنواخت می گویند.

مثال ها

جریان دائمی یکنواخت: مایعی که به مقدار ثابت در درون یک لوله‌ی دراز جریان دارد.

جریان غیردائمی یکنواخت: مایعی که در داخل لوله‌ی دراز جریان دارد و مقدارش کاهش می‌یابد.

جریان دائمی نایکنواخت: جریان در درون لوله‌ای انبساطی با دبی ثابت.

جریان غیر دائمی نایکنواخت: جریان در لوله‌ای انبساطی با افزایش مقدار دبی

گردش یک ذره‌ی سیال حول محور معینی چون Z عبارت از سرعت زاویه‌ای متوسط در پاره خط کوچکی است که در داخل ذره وجود دارد و برهم عمود و در جهت‌های معینی قرار دارند. اگر ذرات سیالی در ناحیه‌ای گردش حول یک محور داشته باشند، آن را جریان گردشی یا گردابی می‌نامند و در غیر این صورت آن را جریان بی‌گردشی می‌گویند.

در جریان یک بعدی از تغییرات سرعت ، فشار و غیره در امتداد عمود بر جهت اصلی جریان صرف نظر می شود و شرایط هر قطعی را بر حسب مقادیر سرعت ، چگالی و غیره بیان می کنند . خط جریان ، خط پیوسته ای است که می توان در سیال رسم کرد به طوری نمایانگر جهت بردار سرعت در هر نقطه ی آن باشد. رابطه ی دیفرانسیلی زیر بیانگر معادلات دیفرانسیل خط جریان است:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

(۳-۳)

که در آن u, v, w مولفه های بردار جریان $\vec{q}$ است.

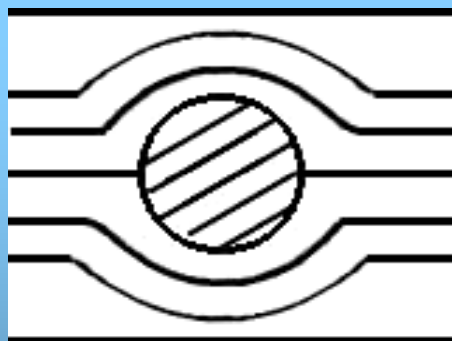
در شکل (۳-۱) جریان تراکم ناپذیر دو بعدی نشان داده شده است و در آن خطوط جریان به نحوی رسم شده است که اگر در جهت محور بر صحنه‌ی شکل، عمق را واحد فرض کنیم.

حجم سیال گذرا از بین دو خط جریان مجاور در واحد زمان برابر باشد. بنابراین هنگامی که خطوط جریان نزدیکتر بهم هستند، سرعت بیشتر خواهد بود و برعکس. اگر V سرعت متوسط بین دو خط جریان مجاور با فاصله h باشد، میزان جریان Δq برابر است با:

$$\Delta q = Vh$$

(۳-۴)

شکل ۳-۱ خطوط جریان آرام در اطراف یک استوانه



لوله جریان ، عبارتست از لوله ای که توسط تمامی خطوط گذرا از منحنی کوچک بسته ، ایجاد می شود . در جریان دائمی، این لوله در فضا ثابت می باشد و ممکن است هیچ جریانی از دیواره‌ی آن عبور نکند، زیرا بردار سرعت هیچ مؤلفه‌ی قائمی بر سطح لوله ندارد .

مثال ۱

در جریان دائمی تراکم نا پذیر که در اطراف یک سطح آئرو دینامیکی ایجاد شده است. خطوط جریان مداری قرار دارند که در فاصله‌ی دور از این سرعت^m ۴۰ می باشد و فاصله‌ی بین خطوط جریان ۱۰mm است. سرعت در نزدیکی این سطح که فاصله‌ی خطوط جریان 7/5 mm است، چقدر خواهد بود؟
حل

$$40 \times 0/01 \times 1 = 0/40 \quad m^3/s$$
$$7 \times 0/0075 = 0/40 \quad V = 53/3 \quad m/s$$

۳-۳ مفاهیم سیستم و حجم کنترل و کاربردهای آن

در فصل قبلی از نمودار آزاد به عنوان روشی مناسب در نمایش نیروهای وارد بر جسم ثابت بکار برده شد. این حالت، حالت خاصی از سیستم است. سیستم عبارتست از جرم مشخص از ماده که قابل تشخیص از دیگر مواد باشد. مواد خارج از سیستم را محیط می گویند و مرزهای یک سیستم تشکیل یک بسته خواهند داد. توجه داریم که ممکن است این سطح نسبت به زمان تغییر کند به طوری که در حین تغییر شرایط سیستم، جرم در آن ثابت بماند. از قانون پایستگی جرم می دانیم که جرم درون یک سیستم نسبت به زمان ثابت باقی می ماند. این قانون به شکل معادله ی زیر بیان می شود:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (3-5)$$

که در آن جرم کل سیستم است.

قانون دوم حرکت نیوتن برای یک سیستم به صورت زیر بیان می شود :

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}) \quad (۳-۶)$$

که در آن m جرم ثابت درون سیستم و $\Sigma \vec{F}$ برآیند نیروهای وارد به سیستم (و شامل نیروهای داخلی مانند وزن می باشد) و $\vec{v}$ سرعت مرکز جرم سیستم است . حجم کنترل ناحیه ای در داخل فضا است و بکار بردن به هنگام تجزیه و تحلیل حالتی که جریان به داخل یا به خارج فضا جریان می یابد مفید خواهد بود . مرز حجم کنترل را سطح کنترل می نامند . شکل و اندازه ی حجم کنترل اختیاری است ولی غالبا آن را منطبق بر مرزهای صلب آن ناحیه در نظر می گیرند .

اگر سیستم و محیط اطراف آن سرعتی یکسان داشته باشند ، بکارگیری حجم کنترل مناسب می باشد . مثلا در تعیین سرعت امواج صوتی در یک ماده از مفهوم حجم کنترل مناسب برای استنتاج معادلات پیوستگی و تکانه و انرژی استفاده می شود بلکه برای انواع دیگر مسایل نیز بکار برده می شود . این حجم را حتی در مورد سیستم باز نیز بکار می برند .

قطع نظر از ماهیت جریان ، تمامی جریانها از قوانین و شرایط پیروی می کنند .

۱- قوانین حرکت نیوتن ۲- رابطه پیوستگی (قانون پایستگی جرم)

۳- قوانین اول و دوم ترمودینامیک ۴- شرایط مرزی

ممکن است ، روابط و معادلات دیگری چون معادله حالت یا قانون چسبندگی نیوتن نیز وارد محاسبه شوند . ما در این بخش به کاربرد حجم کنترل در محاسبه روابط پیوستگی ، انرژی و تکانه ی خطی خواهیم پرداخت .

حالت کلی جریان را مطابق شکل (۲-۳) در نظر می گیریم که در آن سرعت سیال نسبت به دستگاه مختصات XYZ داده شده است . اگر در زمان t سیستمی که مرزهای آن با خط چین مشخص شده است ، جرم معینی داشته باشد و حجم کنترل در این لحظه کاملاً منطبق بر سیستم و نسبت به محورهای XYZ ثابت باشد . در زمان $t + \delta t$ سیستم مقداری حرکت می کند و بنابراین هر ذره ی آن با توجه به موقعیت خود با سرعت مشخص جابجا می شود .

فرض کنید N مقدار کل ویژگی (که می تواند جرم ، انرژی ، تکانه باشد) سیستم در لحظه ی t ، η مقدار این ویژگی در واحد جرم سیال باشد . اکنون می توانیم مقدار افزایش N نسبت به زمان را بر حسب حجم کنترل بنویسیم .

در زمان $t + \delta t$ سیستم شامل حجم های Π ، Π است ، در حالیکه در زمان t حجم Π را استفاده کرده بوده است . اما در سیستم ، افزایش ویژگی N در فاصله ی زمانی δt برابر خواهد بود:

$$N_{\text{syst}+\delta t} - N_{\text{syst}} = \left(\int_{\Pi} \eta \rho dV + \int_{\text{III}} \eta \rho dV \right)_{t+\delta t} - \left(\int_{\Pi} \eta \rho dV \right)_t$$

در این رابطه dV جزء حجم می باشد. اکنون به این رابطه جمله ی $(\int_I \eta \rho dV)_{t+\delta t}$ را اضافه و کم می کنیم تا بدست آید.

$$\frac{N_{syst+\delta t} - N_{syst}}{\delta t} = \frac{(\int_{II} \eta \rho dV + \int_I \eta \rho dV)_{t+\delta t} - (\int_{II} \eta \rho dV)_t}{\delta t} + \frac{(\int_{III} \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} - \frac{(\int_I \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t}$$

توجه داریم که عبارت سمت چپ برابر با افزایش متوسط N در فاصله ی زمانی δt است و اگر δt به سمت صفر میل کند این عبارت برابر با $\frac{dN}{dt}$ خواهد شد. در این حالت، دو انتگرال اول در سمت راست برابر با تعداد N در زمان $t + \delta t$ و انتگرال سوم برابر با مقدار N در زمان t برای حجم کنترل می باشد. حد انتگرال های مذکور برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho dV \quad (\text{اختصار CV به معنی کنترل حجم می باشد})$$

و عبارت چهارم در سمت راست را برای (۷-۳) بیانگر مقدار جریان خروجی N از حجم کنترل است و می توان نوشت:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\int_{III} \eta \rho dV)_{t+\delta t}}{\delta t} = \int_{\text{out flow area}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int \eta \rho V \cos \alpha \, dA \quad (۷-۸)$$

که در آن $d\vec{A}$ بردار سطح خروجی جریان است (شکل ۲-۳ ج). بردار $d\vec{A}$ عمود بر سطح خروجی حجم کنترل است و هنگامی که به سوی خارج باشد ، مثبت خواهد بود و x زاویه بین بردار سرعت و بردار سطح می باشد . آخرین عبارت رابطه ی (۳-۷) میزان جریان ورودی به حجم کنترل است و در حالت حدی برابر خواهد شد با :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_I \eta \rho dV \right)_{t+\delta t} - \left(\int_I \eta \rho dV \right)_t}{\delta t} = - \int_{\text{in flow area}} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$= - \int \eta \rho V \cos x \, dA \quad (3-9)$$

دو رابطه ی (۳-۸) و (۳-۹) را می توان به صورت یک عبارت درآورد و از آن در روی سطح کل حجم کنترل (CS) انتگرال گرفت:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\int_{III} \eta \rho dV \right)_{t+\delta t} - \left(\int_{III} \eta \rho dV \right)_t}{\delta t} + \frac{\left(\int_I \eta \rho dV \right)_{t+\delta t} - \left(\int_I \eta \rho dV \right)_t}{\delta t} \right]$$

$$= \int_{CS} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int_{CS} \eta \rho V \cos x \, dA$$

توجه داریم اگر هیچ جریانی به حجم کنترل داخل یا خارج نشود $\vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$ خواهد بود

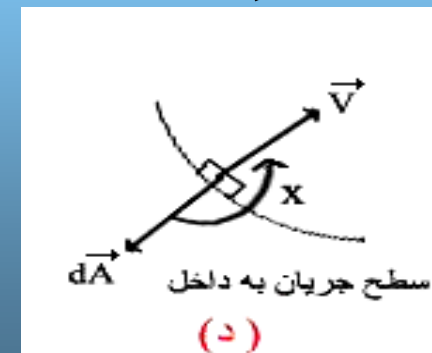
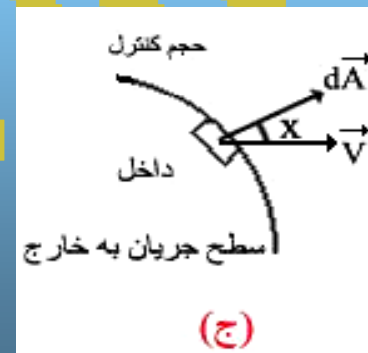
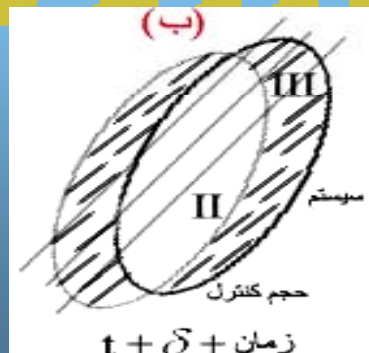
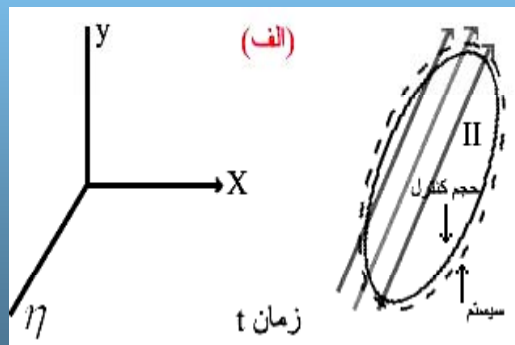
اکنون رابطه ی (۳-۷) را در حالت حدی به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dv + \int_{CS} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (۳-۹)$$

از معادله ی (۳-۹) متوجه می شویم که میزان افزایش کمیت فیزیکی N در سیستم دقیقاً برابر با مجموع میزان افزایش ویژگی N در حجم کنترل و میزان خالص جریان N از مرزهای حجم کنترل مزبور است. در این فصل از معادله ی (۳-۹) استفاده خواهد شد. روش حجم کنترل را روش اوایلر می نامند و در این روش سیستم به حجم کنترل ثابت خواهد بود. چون محورهای XYZ می تواند با سرعت ثابت دلخواه حرکت کند و هیچ تاثیری بر دینامیک سیستم و محیط آن نگذارد، بنابراین معادله ی (۳-۹) برای حالتی که شکل و اندازه ی حجم کنترل ثابت باشد و با سرعت یکسانی انتقال یابد نیز معتبر خواهد بود.

۳-۳-۱ کاربرد حجم کنترل

اکنون به کاربرد حجم کنترل در مورد پیوستگی، انرژی و تکانه خطی می پردازیم.
(I) پیوستگی



شکل ۳-۲ سیستمهایی با حجم کنترل یکسان در زمان t در میدان سرعت

معادلات پیوستگی از قانون کلی پایستگی جرم معادله ی (۳-۵) بدست می آید .
این قانون می گوید که جرم درون سیستم نسبت به زمان ثابت خواهد ماند

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

یعنی

اکنون در معادله (۳-۹) فرض می کنیم $N=m$ باشد , بنابراین η جرم در واحد حجم یا $\eta = 1$ خواهد بود .

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3-10)$$

از معادله ی (۳-۱۰) معلوم می شود که میزان افزایش جرم در حجم کنترل دقیقاً برابر با میزان جرم خالص ورودی به حجم کنترل می باشد.

(II) معادله انرژی

از قانون اول ترمودینامیک می دانیم که تفاضل QH گرمای اضافه شده به سیستم و W کاری که سیستم انجام داده است , فقط بستگی به حالت‌های اولیه و نمایی آن دارد و این حالت‌ها ویژگی سیستم است و تفاوت آنها مستقل از مسیری است که بین دو حالت اولیه و نهایی طی می شود . این ویژگی را انرژی داخلی E می نامند. یعنی داریم :

$$QH - UV = E_2 - E_1 \quad (3-11)$$

E را انرژی داخلی در واحد جرم می گیریم . با استفاده از معادله ی (۹-۳) و جایگزینی $N=E$ و $\eta = \frac{\rho e}{P}$ داریم :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} \rho e \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

با جایگزینی رابطه ی (۱۱-۳) در این رابطه داریم :

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W}{\delta t} = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} \rho e \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (۱۲-۳)$$

اکنون کاری را که سیستم انجام می دهد به دو قسمت تقسیم می کنیم : W_{pr} کار نیروهای فشاری بر مرزهای متحرک و W_S کار نیروهای برشی ، اما کار نیروهای فشاری در زمان δt برابر است با :

$$\delta w_{pr} = \delta + \int p v dA$$

با استفاده از تعریف کار ، معادله ی (۱۲-۳) به صورت زیر در می آید :

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_S}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} \left(\frac{P}{\rho} + e \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (۱۳-۳)$$

اگر بتوانیم از اثرات هسته ای ، الکتریکی ، مغناطیسی ، کشش سطحی صرف نظر کنیم ، انرژی داخلی e ماده ای خالص برابر با جمع انرژی پتانسیل ، جنبشی و ذاتی خواهد بود . اما انرژی ذاتی در واحد جرم u ناشی از نیروهای بین مولکولی است و بستگی به پارامترهای T ، ρ ، P دارد :

$$e = gz + \frac{v^2}{2} + U$$

(III) معادله ی تکانه خطی

فرض می کنیم N برابر با تکانه ی خطی سیستم ، (mv) و η و η تکانه ی خطی در واحد جرم باشد . با استفاده از معادله های (۳-۶) و (۳-۹) داریم :

$$\Sigma F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho v dV + \int_{cs} \rho v \cdot \vec{dA} \quad (3-15)$$

از این معادله معلوم می شود که نیروی وارد به حجم کنترل برابر با مجموع افزایش تکانه ی خطی در حجم کنترل و مقدار خالص تکانه ی خروجی از حجم کنترل است .

۳-۴ معادله ی پیوستگی

اکنون در این بخش کاربرد معادله ی (۳-۱۰) را بررسی می کنیم. فرض کنید جریان یکنواختی از درون بخشی از لوله بگذرد (شکل ۳-۳) ، بنابراین اولین عبارت معادله ی (۳-۱۰) برابر با صفر خواهد شد بنابراین :

$$\int_{cs} \rho \vec{v} \cdot \vec{dA} = 0 \quad (3-16)$$

از این معادله مشخص می شود که جرم خالص خروجی از حجم کنترل باید برابر صفر باشد. اما در قطع ۱ جریان خالص خروجی برابر با $\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{dA}_1 = -\rho_1 v_1 dA_1$ و در مقطع ۲ مقدار آن برابر با $\rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{dA}_2 = -\rho v_2 dA_2$ است . چون از دیواره ی لوله هیچ جریانی نمی گذرد بنابراین داریم :

$$\rho_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{dA}_1 = -\rho v_2 dA_2 \quad (3-17)$$

اما اگر سطح مقطع لوله ها تغییر کند (مانند شکل ۳-۴) و ρ_1 چگالی متوسط در مقطع ۱ و ρ_2 چگالی متوسط در مقطع ۲ باشد داریم:

$$\dot{m} = \rho_1 \bar{v}_1 A_1 = \rho_2 \bar{v}_2 A_2 \quad (3-18)$$

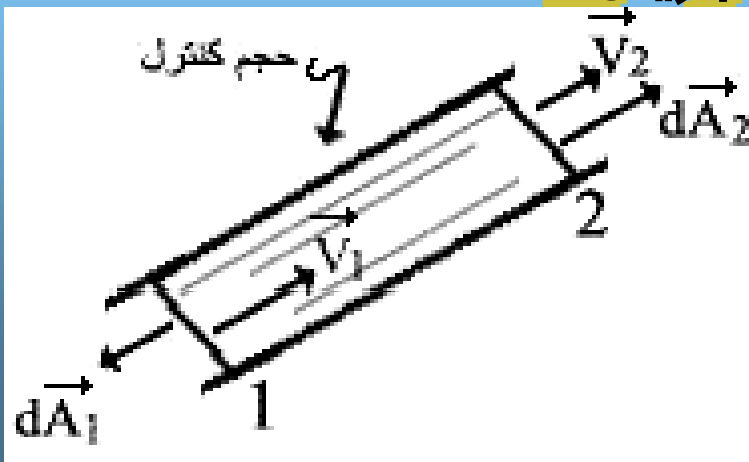
که در آن $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ سرعت های متوسط در دو مقطع و $\dot{m}$ دبی جرمی است. توجه داریم سرعت متوسط در روی سطح مقطع از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

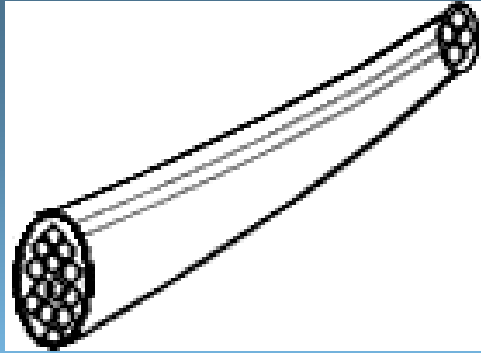
$$\bar{v} = \frac{1}{A} \int V dA \quad (3-19)$$

اگر دبی Q به صورت زیر تعریف شود

$$Q = A \bar{V} \quad (3-20)$$

شکل ۳-۳- جریان یکنواخت در لوله ی جریان





شکل ۳-۴ مجموعه ی لول هایی با جریان ثابت بین مرزها
معادله پیوستگی به صورت زیر در می آید.

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \quad (۳-۲۱)$$

اما اگر جریان تراکم ناپذیر دائمی باشد، رابطه ی زیر شکل بهتری از معادله ی پیوستگی است.

$$Q = A_1 \bar{V}_1 = A_2 \bar{V}_2 \quad (۳-۲۲)$$

مثال ۲

لوله ای آب را منتقل می کند در مقطع ۱ سرعت 3 m/s و قطر 2 m و در مقطع ۲ قطر 3 m می باشد، دبی لوله و سرعت را در مقطع ۲ بیابید.

$$Q = \bar{V}_1 / A_1 = (3/0)\pi = 9/42 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\bar{V}_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{9/42}{2/25\pi} = 1/33 \text{ m/s}$$

از معادله ی (۳-۲۲) داریم

در بررسی جریانهای دو یا سه بعدی باید از شکل دیفرانسیلی معادله ی پیوستگی استفاده کرد. اگر دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی را بکار ببریم، معادله ی (۳-۱۰) برای حجم کنترلی به انبار $\delta x \delta y \delta z$ و مرکزی در x, y, z داشته باشد بکار می رود. (شکل ۳-۵) مولفه های سرعت در این حجم کنترل به ترتیب u, v, w و چگالی جریان ρ فرض می شود. ابتدا جریان خروجی از دو قطعی که عمود بر محور x است در نظر بگیریم. در سمت راست عبور جریان برابر است با:

$$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z$$

در این رابطه $\rho u \delta y \delta z$ بیانگر فشار جرمی عبوری از سطح عمود بر محور x است.

جمله دوم به نشانه ی میزان افزایش فشار جرمی نسبت به x که در فاصله ی $\frac{\delta x}{2}$ ضرب شده است همین طور برای قطع سمت چپ داریم:

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z$$

در نتیجه فشار خالص گذرا از دو سطح مقطع برابر است با:

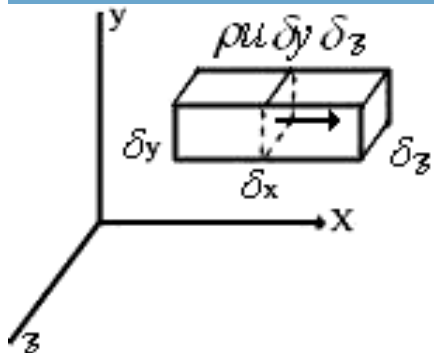
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \delta y \delta z$$

در دو محور دیگر مختصات نیز رابطه های مشابهی چون رابطه بالا بدست

می آید. بنابراین جرم خالص گذار از حجم کنترل برابر است با:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] \delta x \delta y \delta z$$

شکل ۳-۵ حجم کنترل در دستگاه مختصات دکارتی



سمت راست معادله ی (۱۰-۳) برای یک جزء کوچک حجم به صورت زیر در می آید.

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$$

حال با فرض این که $\delta x \delta y \delta z$ به سمت میل کند رابطه ای پیوستگی در فضای ۳ بعدی دکارتی به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

سمت چپ این معادله را می توان با استفاده از عملگر ρ به صورت زیر درآورد.

$$\rho \cdot (PV) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-23)$$

و این معادله دیفرانسیل پیوستگی در فضای سه بعدی است. برای جریان تراکم ناپذیر رابطه بالا به صورت زیر در می آید.

$$\rho \cdot v = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3-24)$$

توجه داریم که $\vec{v}$ ، $\vec{v}$ را واگرایی یا دیورژانس بردار سرعت می گویند.

مثال ۳

توزیع سرعت در یک جریان دو بعدی تراکم ناپذیر به صورت زیر است:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

نشان دهید این روابط می تواند در معادله ی پیوستگی صدق کند.

حل

با استفاده از معادله (۲۴-۳)، برای جریان دو بعدی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

اکنون با مشتق گیری از u, v نشان می دهیم که در رابطه ی بالا صدق می کند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

و حکم ثابت می شود.

۵-۳ معادله کویلر و رابطه ی آن با قوانین ترمودینامیک

علاوه بر معادله ی پیوستگی ، معادلات کنترلی مانند معادله ی اویلر ، معادله برنولی ، معادله تکانه و معادله ی انرژی که مبتنی بر قوانین اول و دوم ترمودینامیک است نیز وجود دارند . دراین بخش به معادله ی اویلر می پردازیم و سپس رابطه ی آن با قوانین ترمودینامیک نشان خواهیم . اکنون به معادله ی اویلر برای جریانی که در امتداد خط جریان است خواهیم پرداخت. در شکل (۳-۶) حجم کنترل محدود بسیار کوچکی با سطح

مقطع و طول نشان داده شده است . فرض می کنیم سرعت سیال در امتداد خط جریان می باشد. اگر چسبندگی صفر یا سیال بی اصطکاک

باشد ، تنها نیرویی که در امتداد x به حجم کنترل وارد می شود دو نیروی وزن و نیروهای فشار در سطح مقطع هاست. معادله ی تکانه (۱۵-)

$$\sum F_s = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \sum_{cs} \rho V_s A_s \quad (3-25)$$

۳ را در امتداد S و برای حجم کنترل بکار می آوریم.

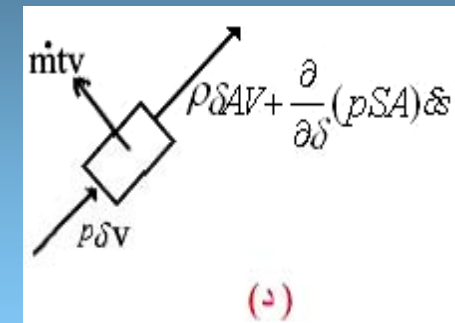
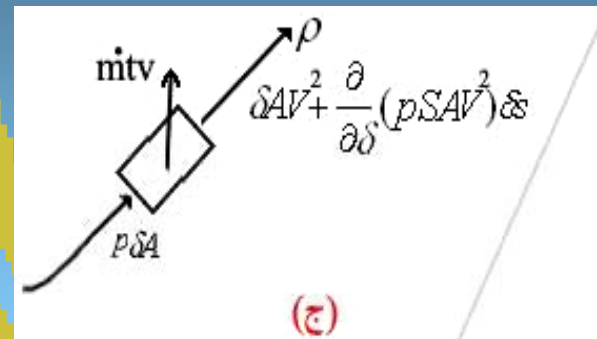
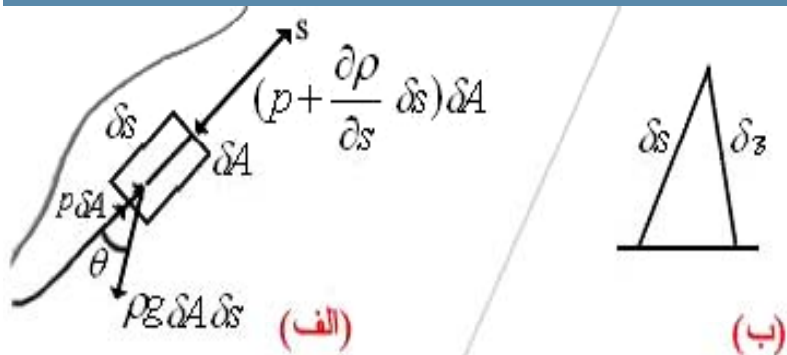
که در آن SS و SA تابع زمان نیستند . نیروهای وارد بر حجم کنترل عبارتند از :

$$\sum F_s = pSA - \left(pSA + \frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta A \right) - \rho g \delta s \delta A \cos \theta$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial s} \delta s \delta A - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \delta s \delta A$$

(۳-۲۶)

توجه داریم $\cos\theta = \frac{\partial z}{\partial s}$ است. برای فشار خالص تکانه ، باید جریان گذرا از سطح بدنه استوانه ($\dot{m}\tau$) و جریان سطوح انتهایی را در نظر گرفت.



شکل ۳-۶ کاربرد معادلات پیوستگی و تکانه دریک جسم کنترل در جهت S

$$\sum_{CS} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \dot{m}\tau + \rho \delta A V^2 + \left[\rho \delta A V^2 + \frac{\partial}{\partial s} (\rho \delta A V^2) \delta s \right]$$

اکنون برای تعیین $\dot{m}\tau$ معادله پیوستگی (۳-۱۰) را برای حجم کنترل بکار می بریم:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \delta A \delta s + \dot{m}\tau + \frac{\partial}{\partial s} (\rho v) \delta A \delta s$$

و با حذف $\dot{m}\tau$ از دو معادله ی اخیر و اندکی عملیات جبری بدست می آید:

$$\sum_{CS} \rho \vec{v} \cdot \int \vec{A} = \left(\rho v \frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) \delta A \delta s$$

(۳-۲۷)

سرانجام با جایگزین (۳-۲۶) (۳-۲۷) (۳-۲۵) نتیجه می شود:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} + \rho \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \delta A \delta s = 0$$

با تقسیم رابطه بالا بر $\rho \delta A \delta s$ و میل مقادیر δA و δs به سوی صفر ، معادله ی آسانی به شکل زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + g \frac{\partial \zeta}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (3-28)$$

توجه داریم این معادله بر اساس دو فرض استوار است : (۱) جریان در امتداد خط جریان است (۲) جریان بی اصطکاک است. حال اگر جریان دائمی باشد، معادله ی (۳-۲۸) به صورت زیر ساده می شود.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + g \frac{\partial \zeta}{\partial s} + V \frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

چون در معادله ی بالا تنها متغیر مستقل S است، بنابراین می توان از شکل دیفرانسیل کامل استفاده کرد و نوشت:

$$\frac{d\rho}{\rho} + g d\zeta + V dV = 0 \quad (3-29)$$

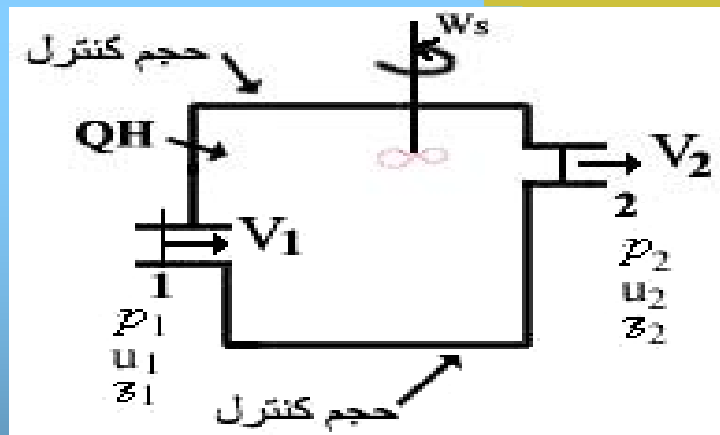
اکنون به بررسی ارتباط بین معادله ی اویلر و قوانین ترمودینامیک می پردازیم.
 با استفاده از معادله ی (۳-۱۳) برای حجم کنترل شبیه شکل (۷-۳) که دارای جریان
 دائمی است، انتگرال حجم از بین می رود و معادله تبدیل می شود به

$$\frac{\delta QH}{\delta \tau} + \left(\frac{\rho_1}{\rho_1} + g\tilde{z}_1 + \frac{V_1^2}{2} + u_1 \right) \rho_1 v_1 A_1 = \frac{\delta Ws}{\delta \tau} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_2} + g\tilde{z}_2 + \frac{V_2^2}{2} + u_2 \right) \rho_2 v_2 A_2$$

بهتر است این معادله را بر دبی جرم در واحد زمان تقسیم $(\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2)$ در نتیجه
 داریم:

$$qH + \frac{p_1}{\rho_1} + g\tilde{z}_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 = ws + \frac{p_2}{\rho_2} + g\tilde{z}_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 \quad (۳-۳۰)$$

شکل ۷-۳ حجم کنترل با جریان محور بر سطح کنترل



که در آن qH حرارت اضافه شده در واحد جرم سیال و Ws کار محور در ازای واحد
 جرم سیال می باشد. معادله ی فوق معادله ی انرژی برای جریان دائمی درون حجم
 کنترل. ما در بخش بعدی راجع به معادله ی انرژی مفصل تر بحث خواهیم کرد

شکل دیفرانسیلی معادله ی (۳-۳۰) در حالتی که جریان لوله ای فاقد کار محوری است، چنین خواهد بود.

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) + gd\zeta + Vdv + du - dq_H = 0$$

که با اندکی فکر به صورت زیر در می آید

$$\frac{dp}{\rho} + gd\zeta + Vdv + du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - dq_H = 0$$

با توجه به معادله ی اویلر، برای جریان بی اصطحاک مجموع سه جمله ی اول برابر با صفر خواهد بود و به عبارت بعدی صورت دیگری از قانون اول ترمودینامیک برای سیستم است:

$$dq_H = \rho d\left(\frac{1}{\rho}\right) + du \quad (3-32)$$

اگر کار محوری وجود داشته باشد، قانون اول ترمودینامیک با استفاده از معادله ی

$$dws + \frac{dp}{\rho} + vdv + gd\zeta + du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - dq_H = 0 \quad (3-31) \text{ بدست می آید:}$$

به جای $du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$ از معادله ی (۳-۳۳) مقدار Tds را قرار می دهیم.

$$dws + \frac{dp}{\rho} + vdv + gd\zeta + Td - dq_H = 0 \quad (3-34)$$

اما از نا مساوی کلازیوس داریم :

$$ds \geq \frac{dq_H}{T}$$

و یا

$$Tds \geq dq_H \rightarrow Tdds - dq_H \geq 0 \quad (3-35)$$

[بعد از رابطه ی (۳-۳۲) بیاید]

در جریان برگشت پذیر S آنتروپی در واحد جرم به صورت زیر تعریف می شود.

$$ds = \left(\frac{dq_H}{T} \right)_{\text{rev}} \quad (3-33)$$

که در آن T دمای مطلق و آنتروپی یک ویژگی سیال است و در درس ترمودینامیک به تفصیل راجع به آن بحث شده است. چون معادله ی (۳-۳۲) برای سیال بی اصطکاک (برگشت پذیر) می باشد می توان dq_H را از دو معادله ی (۳-۳۲) و (۳-۳۳) حذف کرد تا نتیجه شود:

$$Tds = du + p d\left(\frac{1}{p}\right)$$

علامت تساوی مربوط به فرآیندهای برگشت پذیر است اگر مقدار برگشت ناپذیری یا اتلاف به صورت زیر بیان شود:

$$d(\text{اتلاف}) \equiv Tds - dq_H \quad (3-36)$$

و با جایگزینی این رابطه در (۳-۳۴) داریم

$$dw_s + \frac{dp}{\rho} + vdv + g d\mathfrak{Z} + d(\text{اتلاف}) = 0 \quad (3-37)$$

و این معادله بسیار مهم از کاربر معادله ی اوایلر در ترمودینامیک می باشد.

۳-۶ معادله ی برنولی

اگر از معادله ی (۳-۲۹) در حالتی که چگال ثابت باشد، انتگرال بگیریم ، منتهی به معادله ی برنولی می شود:

$$g\mathfrak{Z} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{ثابت} \quad (3-38)$$

توجه داشته باشید که چهار فرض انجام شده است. تا معادله ی برنولی بدست آید. هر جمله ی بعد نیوتون - متر بر کیلوگرم دارند یعنی

$$\frac{\text{mN}}{\text{kg}} = \frac{\text{m.kg.m/s}^2}{\text{kg}} = \text{m}^2/\text{s}^2$$

بنابراین معادله ی (۳-۳۸)، انرژی در واحد جرم است. اگر این معادله را بر g تقسیم کنیم:

$$\mathfrak{Z} + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \text{ثابت} \quad (3-40)$$

و معادله ی بالا انرژی در واحد زمان می باشد . این معادله در حالتی که مایع سطح آزاد دارد، مناسب است.
از ضرب معادله ی (۳-۳۹) در p بدست می آید:

$$\text{ثابت} = \gamma \mathfrak{S} + \rho \frac{v^2}{2} + P =$$

(۳-۴۱)

این معادله برای گازها مناسب است ، زیرا در مورد گازها، تغییرات ارتفاع مهم نیست و می توان Z را حذف کرد. در معادله ی بالا هر جمله ی آن انرژی در واحد حجم است.
هر جمله ی معادله ی برنولی بیانگر یک نوع انرژی است : اولین عبارت به نشانه ی انرژی پتانسیل در واحد جرم و جمله بعدی همان انرژی جنبش ذره و آخرین جمله انرژی جریان در واحد جرم است.

مثال ۴

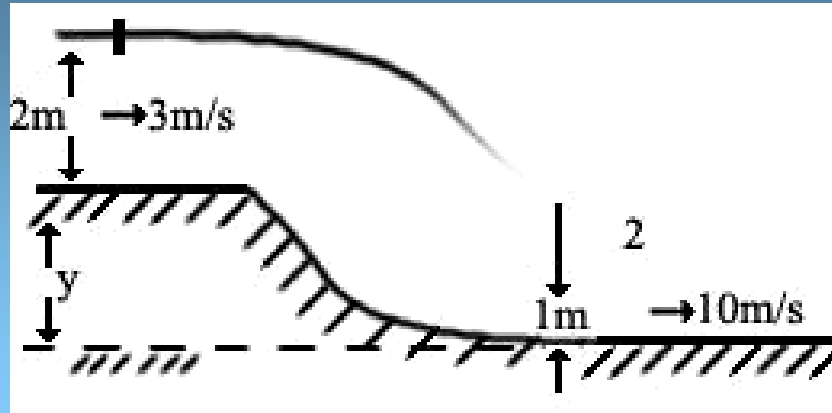
آب داخل کانال بازی به عمق ۲m با سرعت 3 m/s جریان دارد (شکل ۸-۳) سپس این آب به درون کانال وارد می شود که افت آن ۱m و سرعت آب 10 m/s می شود . فرض کنید جریان بی اصطحکاک باشد و اختلاف ارتفاع کف کانالها را بدست آورید (سرعت در سطح مقطع ثابت و فشار هیدرواستاتیکی است)

حل

اگر ارتفاع کف کانالها y باشد، با استفاده از معادله ی برنولی داریم

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + \mathfrak{S}_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \mathfrak{S}_2$$

$$\frac{3^2}{2 \times 9.807} + 0 + y + 2 = \frac{10^2}{2 \times 9.806} + 0 + 1$$



شکل ۸-۳ جریان در کانال باز
و در نتیجه $g = 9.806/3 \text{ m}$

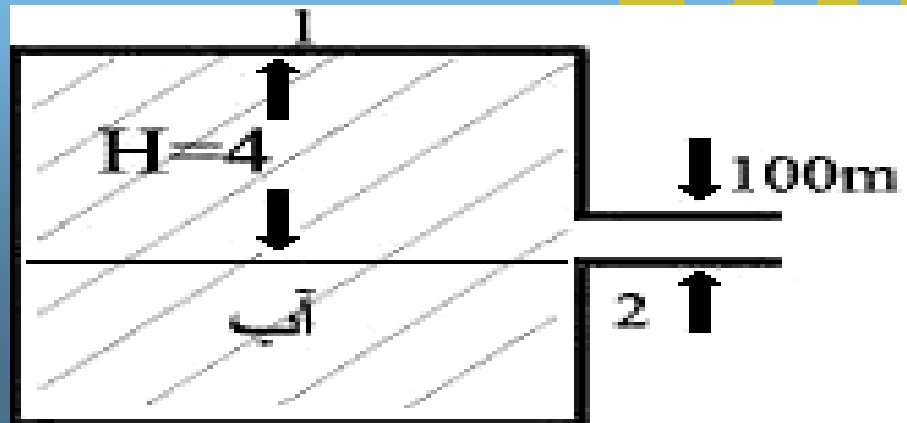
مثال ۵

با توجه به مخزن شکل (۹-۳) سرعت خروجی از نازل و دبی آن را محاسبه کنید.
حل

معادله ی برنولی را برای دو سطح ۱ و ۲ می نویسیم

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + \mathfrak{Z}_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \mathfrak{Z}_2$$

شکل ۹-۳ جریان در نازل خروجی مخزنی



فشار جو را مبنا می گیریم بنابراین $p_1 = p_2 = 0$ و $\mathfrak{T}_2 = 0$ ، $\mathfrak{T}_1 = H$ سرعت در سطح مخزن برابر صفر است. بنابراین

$$0 + 0 + H = \frac{V_2^2}{2g} + \dots \rightarrow V_2 = \sqrt{2gH} = 8.89 \text{ m/s}$$

از رابطه ی بالا معلوم می شود که سرعت خروجی برابر با سرعت سقوط آزاد و از سطح مخزن است و آن را فرضیه ی توریچلس می نامند.
برای محاسبه ی دبی باید سرعت خروجی را در مساحت قطع جریان ضرب کنیم.

$$Q = A_2 V_2 = n(0.05)^2 (8.86) = 0.07 \text{ m}^3/\text{s} = 70 \text{ L/s}$$

۷-۳- کاربرد معادله ی تکانه ی خطی : رانش جهت و مکانیک راکتها

در بخش (۳-۳) با استفاده از قانون دوم نیوتن ، معادله تکانه ی فعلی بدست آمد.

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{CV} \rho \vec{v} dv + \int_{CS} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

و این یک رابطه برداری است. اگر فقط جهت X مورد نظر باشد داریم.

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{CV} \rho v_x dv + \int_{CS} \rho v_x \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (3-40)$$

اگر می خواهیم حجم کنترل را انتخاب کنیم بهتر است در محل هایی که جریان سطح را قطع می کند سطوح را عمود بر جهت سرعت بگیریم . حتی اگر سرعت در تماس سطوح ثابت باشد دیگر نیازی به بکارگیری انتگرال سطحی نیست . در شکل (۳-۱۰) برای جریان دائمی، سطح کنترل نشان داده شده است . و نیروهای وارد بر حجم کنترل (Fx) از معادله ی (۳-۴۰) محاسبه می شود.

$$F_x = \rho_2 A_2 v_2 V_x - \rho_1 A_1 V_1 x_1$$

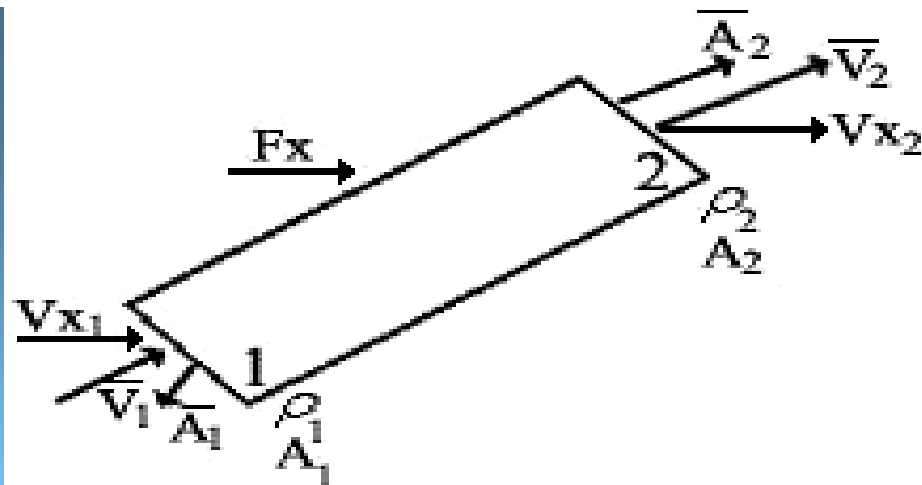
به طوری که جرم ورودی و خروجی از حجم کنترل برابر است با $\rho Q = \rho_1 Q = \rho_2 Q_2$ حال اگر سرعت در نمای سطح مقاطع کنترل ثابت نباشد ، با استفاده از ضریب تعیین تکانه P میتوان سرعت متوسط را محاسبه کرد:

$$\int \rho v^2 dA = \beta \rho \bar{V}^2 A \quad (۳-۴۱)$$

در معادله بالا β بدون بعد است و داریم:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^2 dA \quad (۳-۴۲)$$

از تجربه مشخص شده است که β برابر $\frac{4}{3}$ است . برای جریان یکنواخت تعداد β برابر است و هرگز از یک در هر حالتی نمی تواند کمتر باشد . به هنگام استفاده از معادله ی تکانه باید دقت داشت که حجم کنترل و نیروهای وارد به آن به وضوح مشخص شده باشد و باید به علامت جملات توجه کرد .



شکل ۳-۱۰ حجم کنترل با جریانهای ورودی و قربالی یکنواخت عمود بر سطح کنترل
مثال ۶

زانوی نشان داده شده در شکل (۳-۱۱) در صفحه ی قائم قرار دارد. درون این زانو

$$Q = 8/5 \text{ m}^3/\text{s}, \quad D_2 = 1/3 \text{ m}, \quad D_1 = 2 \text{ m}$$

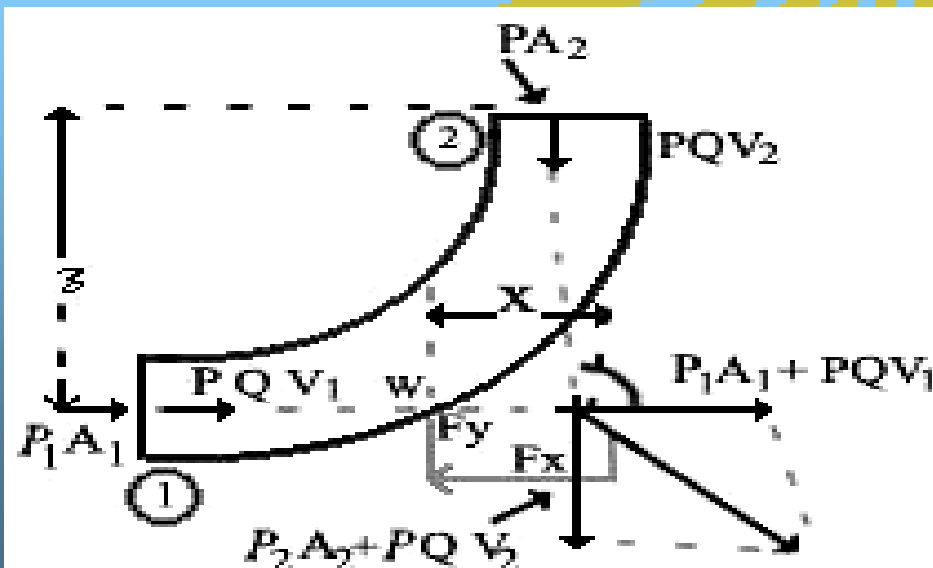
$$x = 2 \text{ m}, \quad \mathcal{I} = 3 \text{ m}, \quad \theta = 120^\circ, \quad p_1 = 280 \text{ kPa}, \quad W = 80 \text{ kN}$$

آب جریان
دارد و

و $\beta_1 = \beta_2 = 1$ و اتلاف درون زانو برابر

با $\frac{0.57^2}{2g} \frac{\text{m.N}}{\text{N}}$ است. مقادیر F_x و F_y و خط اثر نیروی برآیند را تعیین کنید.

شکل ۳-۱۱ نیروهای وارد به زانویی که باعث کاهش سطح مقطع می شود.



حل

سطح داخلی زانو شامل آن قسمت از سطح کنترل است که جریانی از آن عبور

نمی کند مقاطع محوری ۱ و ۲ سطح کنترل را کامل می کند.

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{8/5}{\pi} = 2/706 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A^2} = \frac{8/5}{\pi(1/3)^2/4} = 6/404 \text{ m/s} \quad (3-37)$$

با استفاده از معادله ی و تعیین آن برای سیال تراکم ناپذیر ، داریم :

$$\frac{P_1^2}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \text{افت} \quad 1-2 \quad (3-42)$$

اکنون داده ها را جایگزین در معادله ی بالا می کنیم تا p_2 به دست آید.

$$\frac{280}{9806} + \frac{(2/706)^2}{2 \times 9/806} + 0 = \frac{p_2}{9806} + \frac{(6/404)^2}{2 \times 9/806} + 3 + \frac{(6/404)^2}{2 \times 9/806}$$

و با اندکی محاسبه نتیجه می شود $P_2 = 223/ \text{Kpa}$ برای محاسبه F_x از معادله

$$p_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta - F_x = \rho Q (v_2 \cos \theta - v_1) \quad (3-40) \text{ داریم:}$$

$$280000 \pi - 223500 \frac{\pi}{4} (1/3)^2 \cos 120 - F_x = 1000 \times 8/5 (6/404 \cos 120 - 2/706)$$

$$\sum F_y = \rho Q (v_{y2} - v_{y1}) \quad \text{و یا } F_x = 1078 \text{ np}$$

$$F_y - w - p_2 A_2 \sin \theta = \rho Q v_2 \sin \theta$$

$$F_y - 80000 - 223500 \frac{\pi}{4} (1/3)^2 \times 0/866 = 1000 \times 8/5 \times 6/404 \times 0/866$$

$$F_y = 384 \text{ KN}$$

و یا

در تعیین خط اثر برآیند نیروها از بردارهای تکانه و داده های زیر استفاده می شود .
(شکل ۱۱-۳):

$$\rho_2 A_2 = 297 \text{ KN} , \quad P_1 A_1 = 880 \text{ KN} , \quad \rho Q v_1 = 23 \text{ KN} , \quad \rho Q v_2 = 45/4 \text{ KN}$$

با ترکیب این نیروها و بردار وزن W نیروی نهایی برابر با $146/1 \text{ MN}$ بدست می آید که در خلاف جهت F_x و F_y است.

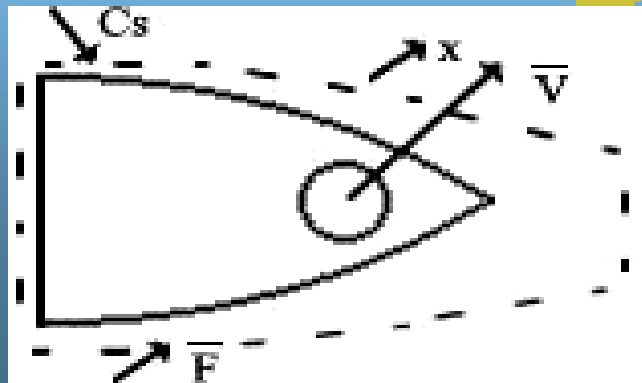
مثال ۷

از درون نازلی که سدی قایقی سوار شده است، نواری آبی با قطر 80 mm و سرعت 40 m/s در جهت افقی خارج می شود. چه نیرویی لازم است تا قایق را ساکن نگه دارد؟
حل

اگر حجم کنترل را مانند شکل (۱۲-۳) بگیریم ، فشار خالص تکانه برابر خواهد بود:

$$F_x = \rho Q (v x_2 - v x_1) = \rho Q v = 1000 \times \frac{\pi}{4} (0.08)^2 (40)^2 = 8.04 \text{ KN}$$

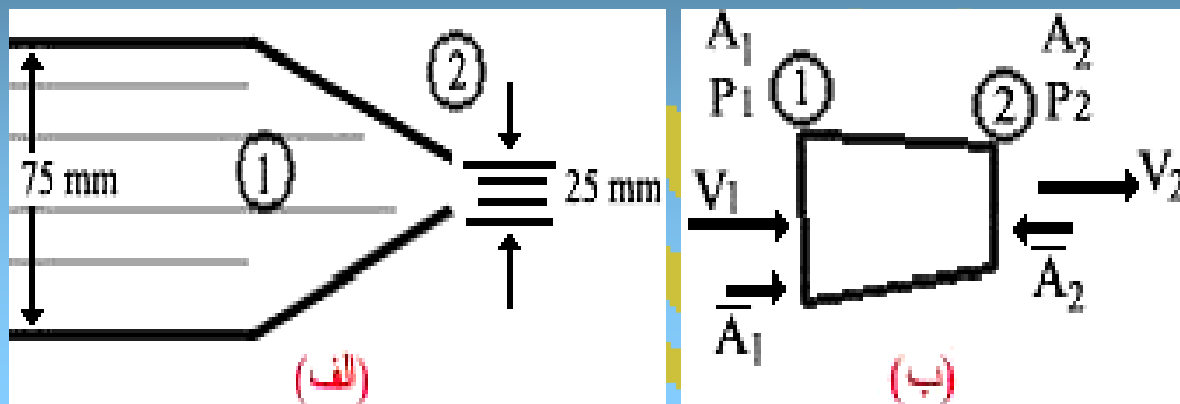
نیروی وارد بر قایق در جهت x برابر با 8.04 kN خواهد بود.



شکل (۱۲-۳) نازل نصب شده روی قایق

مثال ۸

نیروی وارد از طرف نازل به لوله ی شکل (۳-۱۳) الف را محاسبه کنید. سیال روغنی با $S=0.85$ و $P_1=700000 \text{ Pa}$ است. از اتلاف صرف نظر کنید.



حل

برای تعیین دبی ، معادله ی بهتری را بین قطع ۱ و نقطه ای از پایین دست جریان که فشار آن صفر است می نویسیم:

$$\mathfrak{T}_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{700000}{0.85(9806)} = \mathfrak{T}_2 + \frac{v_2^2}{2g} + 0$$

چون $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ و $v_2 = (D_1/D_2)^2 V_1 = 9V_1$ است داریم

$$\frac{v_1^2}{2g} (1-81) + \frac{700000}{0.85(9806)} = 0$$

$$V_2 = 833/4 \text{ و}$$

$$V_1 = 837/4 \text{ m/s} \text{ بنابراین داریم}$$

$$Q = 4/537 \frac{\pi}{4} (0.075)^2 = 0.02004 \text{ m}^3/\text{s}$$

فرض می کنیم P_x (مطابق شکل ۱۲-۳ ب) نیروی اعمالی از طرف نازل به حجم کنترل مایع باشد. با استفاده از معادله ی (۳-۴۰) داریم.

$$(0/7) \frac{n}{4} (0/075)^2 - R_x = (1000)(0/85)(0/02004) \\ (40/833 - 4/537)$$

به آسانی نتیجه می شود:

$$P_x = 2474N$$

سینی روغن نیرویی برابر $2474N$ از راست به چپ به نازل وارد می کند و نازل نیز نیروی کشش $2474N$ را به لوله اعمال می دارد.

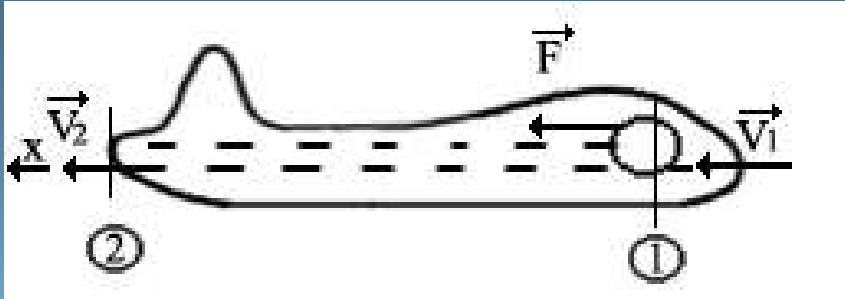
۱-۷-۳ رانش جت

پروانه یک نوع رانش فواره ای است که در آن فواره ی تولید شده باعث ایجاد نیروی رانش می شود. در موتورهای جت، هوا به داخل موتور مکیده می شود و با مقدار کمی سوخت محترق می شود. سپس گازها با سرعت خیلی بیشتر از سرعت جریان لغزشی پروانه ها به خارج رانده می شود. قطر فواره باید کوچکتر از جریان لغزشی پروانه باشد. اگر از جرم مواد سوزا صرف نظر شود نیروی پروانه ای F را می توان از معادله ی (۳-۴۰) چنین بدست آورد:

$$F = \rho Q v_{abs}$$

(۳-۴۴)

که در آن $v_{abs} = \Delta v$ برابر با سرعت مطلق سیال جت و ρQ برابر با جرم خروجی در واحد زمان می باشد (شکل ۱۴-۳)



جداره های مسیر گذر

جریان موتورهای جت با فرض حالت پایدار به عنوان سطح کنترل هواپیما مد نظر گرفته شده است. بازدهی مکانیکی جت ها مانند بازدهی پروانه هاست و آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$e = \frac{\text{توان خروج}}{\text{توان + افت}} = \frac{271}{v_2 + v_1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{2v_1}} \quad (3-45)$$

اما برای محاسبه وزن مواد سوزا در هواپیمایی، فرض می کنیم هر $\dot{m}_{\text{هو}}$ جرم هوا در واحد زمان و ۲ نسبت جرم مواد سوزا به هوا باشد. با توجه به شکل (۱۳-۳) مقدار نیروی رانش برابر است با

$$F = \dot{m}_{\text{هو}} (v_2 - v_1) + r \dot{m}_{\text{هو}} v_2$$

جمله دوم در سمت راست این معادله برابر با جرم مواد سوزا در واحد زمان ضرب در تغییر سرعت سوخت می باشد. با فاکتور گیری داریم:

$$F = \dot{m}_{\text{هو}} [v_2(1 + r) - v_1] \quad (3-46)$$

اکنون بازده مکانیکی را به صورت نسبت کار مفید به مجموع کار مفید و انرژی جنبش باقی مانده تعریف می کنیم. در نتیجه داریم.

$$e = \frac{Fv_1}{Fv_1 + n\dot{m} \frac{(1+v)(v_2 - v_1)^2}{2}} \quad (3-47)$$

سرانجام با جایگزین (۳-۴۶) در (۳-۴۷) بدست می آوریم:

$$e = \frac{1}{1 + (1+v)[(v_2/v_1)^2 - 1] \frac{2}{2} [(1+r)(v_2/v_1) - 1]}$$

اگر $v_1 = v_2$ باشد بازده برابر واحد خواهد شد. در این حالت محصولات احتراق به حالت سکون در می آید و هیچ انرژی جنبشی در فواره باقی نخواهد ماند.

مثال ۸

هوایمایی به ازای ۲۰ کیلوگرم، یک کیلوگرم مواد سوزا مصرف می کند و گازهای داغ را با سرعت $V = 1800 \text{ m/s}$ از لوله ی عقب خارج می کند بازده ی این هوایما را به ازای سرعت ۱۰۰ و 150 m/s به دست می آورید.

حل

به ازای $V = 300 \text{ m/s}$ داریم $r = 0.5$ و $300/1800 = 6/18 = 1/3$ در نتیجه از معادله ی (۳-۴۷) داریم:

$$e = \frac{1}{1 + (1 + 0.05)(6 - 1)^2 [(2/6(1.05) - 1)]} = 0.287$$

همچنین به ازای $V = 150 \frac{m}{s}$ مقدار $V = 12 = \frac{1800}{150} = \frac{71}{72}$ خواهد شد پس

$$e = \frac{1}{1 + (1 + 0/05)(12 - 1)^2 [(2/12)(1 + 0/05) - 1]} = 0/154$$

۲-۷-۳ مکانیک راکتها

موتور راکت یک جسم اکسید کننده را با خود حمل می کند. این جسم با مواد سوزا مخلوط می شود و تولید نیروی رانشی می کند. نیروی رانشی بستگی به ماده ای که راکت در آن حرکت می کند ندارد. چون در توربین ها گاز، سوخت با هوا مخلوط می شود، جرم گازهای داغ خارجی از توربین گازی چندین برابر جرم مواد سوزایی است که راکت حمل می کند. در تعیین شتاب راکت به هنگام پرواز، بهتر است حجم کنترل را منطبق بر سطوح خارجی راکت و صفحه ی عمود بر فواره ی خروجی از نازل بگیریم. (شکل ۱۵-۳) سرعت حجم کنترل برابر با سرعت راکت می باشد. اگر R مقاومت هوا و M_r جرم بدنه ی راکت و m جرم مواد سوزا و v سرعت اشتعال سوخت و V_r سرعت گاز خروجی نسبت به راکت و V_1 برابر با سرعت حقیقی راکت (و سرعت دستگاه مرجع) و V برابر با سرعت راکت نسبت به دستگاه مرجع مختصات باشد. در این صورت V برابر با صفر و $\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dt}$ برابر با شتاب راکت خواهد شد. معادله اصلی تکانه را برای محور قائم می نویسیم.

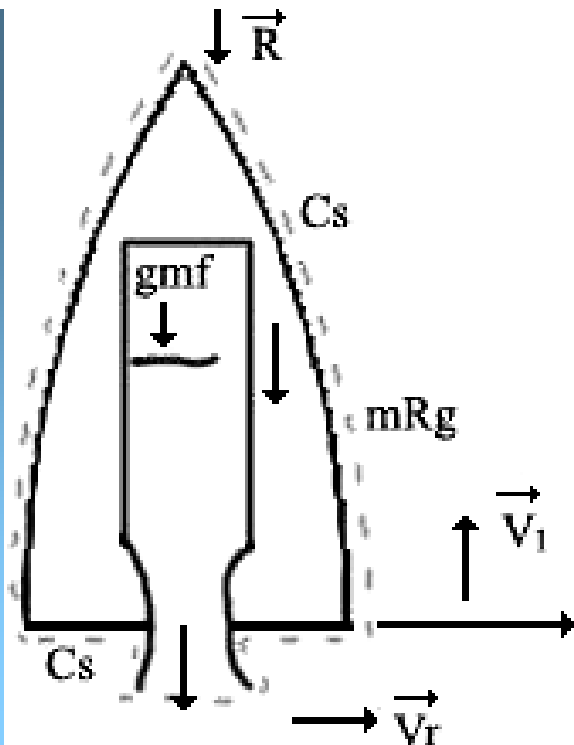
$$\left| \sum F_y = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{cv} \rho v_y dv \tau \int_{cs} \rho v_y \vec{V} \cdot d\vec{A} \right|$$

در نتیجه داریم:

$$-R - (m_R + m_f)y = \frac{\partial}{\partial \tau} [m_R + m_f]v - m v_r$$

(۳-۴۹)

شکل ۱۵-۳ سطح کنترل برای تجزیه و تحلیل شتاب گیری راکت.



اما V تنها تابعی از t است بنابراین معادله ی بالا را می توان به صورت دیفرانسیلی زیر درآورد.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\dot{m}_r - g(m_f + m_R) - R}{m_R + m_f}$$

اگر $\dot{m}_r$ مدبی ثابت سوخت باشد $m_f = m_{f0} - \dot{m}_r t$ خواهد بود که m_f جرم اولیه مواد سوزا و اکسید کننده است.

حال جرم راکت و مواد سوزا را باهم در نظر می گیریم . تفاضل نیروی رانش ($\dot{m}_r V_r$) و مجموع وزن و مقاومت هوا دقیقاً برابر با حاصل ضرب جرم کلی حرکت و مواد

سوزا در شتاب راکت می باشد. از تجربه مشخص شده است

که با افزایش سرعت راکت بازده های موتور راکت نیز افزایش می یابد. اگر E انرژی مفید در واحد جرم ماده سوزا باشد به هنگامی که ماده سوزا مشتعل می شود، انرژی مفیدی تبدیل به انرژی جنبشی $E = \frac{V_r^2}{2}$ خواهد شد که V_r سرعت فواره نسبت به راکت خواهد بود.

برای راکتی که سرعت آن نسبت به محورهای ثابت روی زمین V_1 باشد، توان مفید برابر $\dot{m} V_1$ خواهد بود. مقداری از انرژی جنبش به صورت موادسوزای محترق نشده تلف میشود. $(\dot{m} V_1^2 / 2)$ و مقداری از آن در اثر احتراق از بین می رود ($\dot{m} E$) بنابراین نتیجه می گیریم:

$$\text{انرژی مفید ورودی در واحد زمان} = \dot{m} \left(E + \frac{V_1^2}{2} \right) \quad (3-51)$$

و بازده ی مکانیکی از رابطه زیر بدست می آید.

$$e = \frac{\dot{m} V_1 \sqrt{2E}}{\dot{m} (E + V_1^2 / 2)} = \frac{2 \sqrt{2 / V_1}}{1 + (V_{\pi} / V_1)^2} \quad (3-52)$$

به ازای $V_{\pi} / V_1 = 1$ ، بازده ی حداکثر $e=1$ بدست می آید و در این حالت سرعت مطلق گاز خروجی صفر خواهد بود.

مثال ۱۰

(الف) زمان احتراق راکتی را حساب کنید که وزن اولیه آن $4/903 \text{ MN}$ باشد و 70% وزن آن را ماده سوزا تشکیل دهد. این راکت سوخت را با دبی ثابت مصرف می کند و رانش اولیه ای 10% بیشتر از وزنش می باشد و $V_r = 3300 \text{ m/s}$ (ب) با فرض ثابت بودن g و این که در هنگام پرواز قائم هیچ مقاومتی وجود نداشته باشد، سرعت راکت و ارتفاع آن را از بین در لحظه ای پایان مواد سوزا و اوج راکت را بدست

آورید.

$$(g = 9/8 \text{ m/s}^2)$$

(الف) با استفاده از رابطه رانش داریم:

$$m \dot{v}_r = 1/10 \dot{W} = 1/10 (4/903 \text{ N}) = 5/393 \text{ MN} = m 3300$$

بنابراین $\dot{m} = 3/1634 \text{ kg/s}$ (جرم مفید مواد سوزا 350000 kg می باشد). حال زمان احتراق را می توان بدست آورد:

$$\frac{350000}{1634/3} = 214/26$$

(ب) از معادله ی (۳-۵۰) داریم

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1634/3 \times 3300 - 9/8 [350000 - (1634/3)t + 150000]}{150000 + 350000 - (1634/3)t}$$

با اندکی عملیات جبری بدست می آید.

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{299/95 + 9/8t}{305/94 - t} = -9/8 + \frac{3298/16}{305/94 - t}$$

و با انتگرال گیری نتیجه می شود

$$V_1 = -9/8 + -(3298+16) \ln(305/94 - t) + \text{مقدار ثابت}$$

می دانیم به ازای $V_1 = 0, t = 0$ است پس

$$V_1 = 9/8t - (3298/16) \ln(1 - \frac{t}{305/94})$$

حال به ازای $V_1, t = 214/2$ محاسبه می شود: $V_1 = 24/1873 \text{ m/s}$

و ارتفاع راکت به ازای این زمان نیز بدست می آید.

$$y = \int_0^{214/2} v dt = -9/8 \frac{t^2}{2} - 3298/16 \int_0^{214/2} \ln(1 - \frac{t}{305/54}) dt = 117/22 \text{ km}$$

اما پس از اتمام مواد سوزا راکت می تواند تا ارتفاع $\frac{V_1^2}{2g}$ بالاتر برود پس اوج راکت برابر است با:

$$H = 117220 \text{ m} + \frac{(1873/24)^2}{2 \times 9/8} = 296/25 \text{ km}$$

تست های فصل ۳

۳-۲-۱ جریان یک بعدی عبارت است از

الف) جریان دائمی یکنواخت

ب) جریان یکنواخت

✓ج) جریانی که در آن از تغییرات شیب صرف نظر می شود

د) جریان که مجبور است به خط مستقیم حرکت کند.

۳-۲-۲ جریان ایزوتروپیک عبارتست از

الف) جریان بی درروی با برگشت پذیر

ب) جریان گاز کامل

✓ج) جریان سیال آرمانی

د) جریان بی درروی برگشت پذیر

۳-۲-۳ در جریان تلاطمی

الف) ذرات سیال منظم حرکت می کند

ب) انتقال تکانه فقط در حدود مولکولی روی می دهد

✓ج) یک لایه سیال به آرامی روی لایه دیگر می لغزد

د) معمولاً تنش های برشی بزرگتر از جریان آرام مشابه است

۴-۲-۳ در جریان تلاطمی، ضریب $\eta = \delta / (du / dy)$

(الف) یک خاصیت فیزیکی است

√(ب) وابسته به جریان و چگالی است

(ج) تابعی از دما و فشار سیال می باشد

(د) مستقل از ماهیت جریان است.

۵-۲-۳ در جریان آرام

√(الف) قانون چسبندگی نیوتون بکار می رود

(ب) وزارت سیال در مسیرهای نامنظم و تصادفی حرکت می کند

(ج) چسبندگی بی اهمیت است

(د) ضریب $\delta / (du / dy)$ بستگی به جریان دارد.

۶-۲-۳ سیال آوانی کدام است؟

(الف) یک سیال خیلی چسبناک است

(ب) سیالی است که از قانون چسبندگی نیوتون پیروی می کند

(ج) فرض مفیدی است که در مسایل جریان در کانالها بکار می رود

√(د) سیالی است بدون اصطکاک و تراکم ناپذیر

- ۷-۲-۳ جریان دائمی هنگامی روی می دهد که
- الف) شرایط در هیچ نقطه ای نسبت به زمان تغییر نکند .
 - ب) شرایط به طور یکنواخت نسبت به زمان تغییر کند
 - ج) شرایط در نقاط مجاور در هر لحظه یکسان باشد
 - د) $\frac{\partial v}{\partial t}$ ثابت بماند
-

- ۸-۲-۳ جریان یکنواخت کی اتفاق می افتد؟
- الف) جریان یکنواخت باشد
 - ب) $\frac{\partial v}{\partial t}$ در تمام نقاط صفر باشد
 - ج) بردار سرعت در هر نقطه ثابت بماند
 - د) $\frac{\partial v}{\partial s}$ باشد
-

- ۹-۲-۳ کدام جریان دائمی نایکنواخت است؟
- الف) حرکت آب در اطراف کشتی در دریاچه
 - ب) حرکت رودخانه در اطراف پایه های پل
 - ج) افزایش یکنواخت جریان داخل یک لوله
 - د) کاهش یکنواخت جریان داخل یک مسیر همگرا
-

۱۰-۲-۳ در جریان دو بعدی اطراف یک استوانه، فاصله خطوط جریان در فاصله ای دور از استوانه که سرعت $\frac{m}{s}$ ۱۰۰ است، برابر با ۵۰mm می باشد. در نقطه ای نزدیک به استوانه فاصله خطوط ۵/۳۷mm می شود، سرعت متوسط برابر است با (برحسب $\frac{m}{s}$)

الف) ۷۵ ب) $\frac{m}{s}$ ۱۳۳ ج) ۱۵۰ د) ۲۰۰

۱۱-۲-۳ یک خط جریان

الف) خط ارتباطی مرکز سطح مقطع های عبور جریان است.
ب) تنها در مورد جریان یکنواخت تعریف می شود
ج) عمود بر بردار سرعت در هر نقطه رسم می شود
د) در جریان دائمی در فضا ثابت می باشد.

۱-۳-۳ در سیستم باز

الف) یک سطح آزاد وجود دارد
ب) جرمی معینی موجود است
ج) یک حجم کنترل وجود دارد
د) هیچ ارتباطی بین سیستم و محیط وجود ندارد

۲-۳-۳ حجم کنترل عبارتست از

√الف) ناحیه ای ثابت در فضا

ب) جرم مشخص

ج) یک سیستم بسته

د) یک سیستم مجزا

۳-۳-۳ قانون اول ترمودینامیک برای جریان یکنواخت :

√الف) شامل تمام انرژی های ورودی و خروجی حجم کنترل می شود

ب) عبارتست از توازن انرژی برای حجم مشخص از سیال

ج) بیانگر پایداری تکانه ی خطی است.

د) اصولاً مرتبط به انتقال حرکت است

۱-۴-۳ معادله ی پیوستگی ممکن است به این صورت باشد:

الف) $Q=PAV$ ب) $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2$ ج) $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$ د) $AV_1 = A_2 V_2$

۲-۴-۳ معادله ی پیوستگی

الف) محتاج است که قانون سوم نیوتن برای تمام نقاط سیال صادق باشد

ب) بیانگر ارتباط بین انرژی و کار است

ج) تکانه در واحد حجم بین دو نقطه سیال را بهم مرتبط می کند

د) در ارتباط با دبی جرمی جریان در امتداد لوله است √

۳-۴-۳ دو لوله ای به قطر ۵۰cm ، سرعت متوسط آب 3 m/s است دبی لوله بر حسب متر مکعب در ثانیه برابر است با

الف) ۵۸۹/۰ ب) ۵۰/۱ ج) ۳۵۶/۲ د) ۷۱/۴

۳-۴-۴ معادله ی پیوستگی در جریان سیال حقیقی

الف) بیانگر این است که دبی خالص ورودی به هر حجم کوچکی باید صفر باشد ب) تنها در هنگامی که پتانسیل سرعت وجود داشته باشد، صادق است ج) تنها برای جریان بی گردش بکار می رود د) بیانگر این است که انرژی در امتداد خط جریان ثابت است.

۳-۵-۱ معادله ی $Tds = (اتلاف) d$ محدود است به

الف) جریان ایزوتروپیک ب) جریان برگشت پذیر ج) جریان بی دررو د) جریان گاز کامل

۳-۵-۲ در یک فرآیند برگشت پذیر لازم است که :

الف) انتقال دما وجود نداشته باشد ب) قانون چسبندگی نیوتن صادق باشد ج) دمای سیستم و محیط برابر باشد د) در سیستم اصطکاک چسبندگی یا خشک وجود نداشته باشد .

۳-۵-۳ آنتروپی در فرآیند برگشت پذیر بدین صورت تعریف می شود.

(الف) $ds = du + \rho d\left(\frac{1}{\rho}\right)$

(ب) $ds = Td \int H$

(ج) $s = u + pv_s$

(د) $ds = d \int \frac{H}{T}$

۳-۶-۱ بعد معادله ی ثابت $\rho + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} =$ برابر است:

(الف) $\frac{m \cdot N}{s}$ (ب) N (ج) $\frac{m \cdot N}{kg}$ (د) $\frac{m \cdot N}{N}$

۳-۶-۲ کاری که مایع با استفاده از فشار انجام می دهد بر حسب نیوتن - متر بر نیوتن عبارتست از

(الف) Z (ب) P (ج) $\sqrt{P/\gamma}$ (د) $\frac{v^2}{2g}$

۳-۷-۱ در معادله $\sum F_x = \rho Q(V_{xout} - V_{xin})$ کدام دو فرض از فرضهای زیر صادق است؟

- ۱- سرعت در روی مقاطع پایان ثابت است ۲- جریان دائمی
- ۳- جریان یکنواخت ۴- سیال بی اصطکاک
- (الف) ۱ و ۲ (ب) ۱ و ۴ (ج) ۱ و ۳ (د) ۲ و ۴

۲-۷-۳ ضریب تعیین تکانه با کدامیک از عبارتهای زیر بیان می شود

(الف) $\frac{1}{A} \int_A \frac{V}{V} dA$

(ب) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{V}{V}\right)^2 dA$

(ج) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{V}{V}\right)^3 dA$

(د) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{V}{V}\right)^4 dA$

۳-۷-۳ سرعت روی یک سوم مساحت یک سطح صفر و در روی باقی مانده ی سطح یکسان می باشد. ضریب تقسیم تکانه برابر است با

(الف) ۱ (ب) ۳/۴ (ج) ۲/۳ (د) ۲

۴-۷-۳ برای زانویی ۹۰° که قطر آن ۲۰۰mm و فشار درون آن Mpa ۹۸/۰ است، مقدار نیروی لازم برای ثابت نگه داشتن زانو در هنگامی که جریان از آن نمی گذرد برابر است با (برحسب KN):

(الف) ۵/۶۱ (ب) ۵/۴۳ (ج) ۸/۳۰ (د) صفر

۵-۷-۳ زانویی 90° با قطر ۳۰cm آب را با سرعت 5 m/s و فشار ۳۵kpa - انتقال می دهد . مولفه ی نیروی لازم بر حسب نیوتن برای این که زانو در جای خود نگه داشته شود برابر است با:

الف) صفر ب) $5/70$ ج) $141\sqrt{}$ د) ۵۱۵

۶-۷-۳ توان مفید در فواره ی آبی که مساحت مقطع آن 0.04 m^2 و سرعت 20 m/s می باشد ، برابر است با :

الف) $495/0$ ب) $0.16\sqrt{}$ ج) $2/17$ د) ۳



فصل ۴

پس از مطالعه ی کامل این فصل باید بتوانید یکاها و ابعاد کمیت های فیزیکی مورد استفاده در مکانیک سیالات را تعریف کنید رابطه های مربوط را بنویسید و همچنین پارامترهای بی بعد مهم در مکانیک سیالات را با فرمولهای مربوطه تعریف و در حل مسایل از آنها استفاده کنید.

۱-۴ مقدمه

پارامترهای بی بعد درک و فهم را از پدیده های ناشی از جریان سیال عمیق تر می کند. در بالا بر هیدرولیکی، نسبت قطر پیستونها که عددی بدون بعد است مزیت مکانیکی را بدست می دهد. همچنین عددهای بدون بعدی موجب آن می شود که بتوان نتایج آزمایشگاهی را برای شرایطی که با شرایط آزمایشگاهی متفاوت باشند نیز بکار برد. بسیاری از پارامترهای بی بعد نسبت دو نیروی سیال است.

مقدار نسبی این نسبت ها بیانگر اهمیت نسبی یکی از نیروها به دیگری است.

اگر در مورد خاصی بعضی از نیروها خیلی بزرگتر از دیگر نیروها باشند، اغلب می توان از اثر نیروهای کوچکتر چشم پوشی کرد و پدیده مزبور را بر حسب نیروهای عمده بررسی کرد. در این صورت می توان برای حل مساله از روشهای آزمایشگاهی مناسب و ریاضی آسان تری استفاده کرد. در حالتی که چندین نیرو با ارزش یکسانی وجود داشته باشند مانند نیروهای لختی، چسبنده و گرانشی از روشهای خاصی استفاده می شود. در این فصل راجع به اهمیت پارامترهای بی بعد می پردازیم. ابتدا کمیت های مهمی که در مکانیک سیالات بکار می رود با نماد و ابعاد آنها ارائه می شود.

۲-۴ یکاها و ابعاد

می دانیم ابعاد مکانیکی عبارتست از نیرو، طول و جرم و این ابعاد از قانون دوم نیوتن بایکدیگر ارتباط دارند.

$$F=ma \quad (۱-۴)$$

پیش از این با یکاهای نیرو و جرم آشنا شدیم. برای تمام دستگاههای فیزیکی ضروری است که حداقل دو بعد در نظر گرفته شود. یکی در ارتباط با الکترومغناطیس و دیگری با اثرات گرمایی. برای کار تراکم پذیر، ضرورتی ندارد یکای گرمایی را منظور کنیم زیرا معادلات حالت، ارتباط بین فشار، چگالی و دما را بیان می کند.

شکل ابعادی قانون دوم نیوتن به صورت زیر است.

$$F = MLT^{-2}$$

(۴-۲)

از این معادله ملاحظه می شود که تنها سه بعد مستقل وجود دارد که در آن F بعد نیرو، M بعد جرم، L بعد طول و T بعد زمان است. در جدول (۴-۱) بعضی از کمیت‌های مورد استفاده در مکانیک سیالات با نماد و رابطه ی ابعادی آنها آمده است.

جدول ۱-۴ کمیت های فیزیکی مورد استفاده در مکانیک سیالات

ابعاد	نماد	کمیت
L	l	طول
T	t	زمان
M	m	جرم
MLT^{-2}	F	نیرو
LT^{-1}	V	سرعت
LT^{-2}	a	شتاب
L^2	A	سطح
L^3T^{-1}	Q	دبی تخلیه
$ML^{-1}T^{-2}$	ΔP	فشار
LT^{-2}	g	گرانی
ML^{-3}	ρ	چگالی
$ML^{-2}T^{-2}$	γ	وزن مخصوص
$ML^{-1}T^{-2}$	μ	چسبندگی دینامیکی
L^2T^{-1}	ν	چسبندگی سینماتیکی
MT^{-2}	δ	کشش سطحی
$ML^{-1}T^{-2}$	K	مدول کشسانی حجمی

۳-۴ پارامترهای بی بعد

در ارتباط با داده های آزمایشگاهی ، پنج پارامتر بی بعد: ضریب فشار، عدد رینولدز، عدد فرود ، عدد وبر و عدد ماخ بااهمیت اند. در بخش راجع به این پنج پارامتر بحث می کنیم و در فصلهای بعدی از آنها استفاده خواهیم کرد.

الف) ضریب فشار

ضریب فشار برابر است با نسبت فشار به فشار دینامیکی:

$$\Delta p / (\rho V^2 / 2) \quad (۳-۴)$$

اگر این مقدار را در مساحت سطح ضرب کنیم نتیجه برابر با نسبت نیروی فشار به نیروی

لختی است. یعنی $\left(\rho V^2 / 2 \right) A$ برابر با نیروهای لازم جهت کاهش سرعت تا نزدیکی صفر

خواهد شد.

اما معادله داریسی - وایسباخ رابطه ای بین h_1 اتلاف با طول L و قطر D و سرعت V است، این معادله به صورت زیر است:

$$h_1 f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

(۴-۴)

اگر به صورت مجهول معادل $f \frac{L}{D}$ را بدست آوریم:

$$f \frac{L}{D} = \frac{h_1}{V^2 / 2g}$$

(۴-۵)

ملاحظه می شود که سمت راست رابطه ی بالا همان ضریب فشار است در صورتی که آن را بر γ تقسیم می کردیم. پس نتیجه می گیریم $f \frac{L}{D}$ برابر با ضریب فشار است. در این رابطه f ضریب اصطکاک بدون بعد می باشد.

(ب) عدد ماخ

اگر K برابر مدول حجمی کشسانی باشد، می دانیم سرعت صوت در یک مایع از رابطه ی $C = \sqrt{K/\rho}$ بدست می آید. از سوی دیگر این سرعت برابر است با $C = \sqrt{KRT}$ که در آن K ضریب گرمای ویژه و T دمای مطلق گاز کامل می باشد. نسبت V/C یا $V\sqrt{K/\rho}$ را عدد ماخ می گویند و آن سنجه نسبت نیروهای لختی به نیروهای کشسانی است.

اگر V/C را مجذور کنیم و صورت و مخرج این کسر را در $\rho A/2$ ضرب کنیم، آنگاه صورت کسر جدید برابر با نیروی دینامیکی و مخرج برابر نیروی دینامیکی در جریانی که سرعت صوت دارد، خواهد شد.

همچنین می توان نشان داد که عدد ماخ سنجه نسبت انرژی جنبشی جریان به انرژی داخلی سیال است. اثرات عدد ماخ در جریان گازهایی که افت فشار زیادی دارند (یعنی به هنگامی که عدد ماخ نزدیک به یک است) می تواند اهمیت زیادی داشته باشد. همچنین اگر سرعتها نزدیک یا بیشتر از سرعت صوت باشد، این عدد مهمترین ارتباطی است.

ج) عدد رینولدز

نسبت $\frac{\rho}{\mu} V D$ را عدد رینولدز می گویند و برابر با نسبت نیروهای لختی به نیروهای چسبنده است. عدد رینولدز بحرانی بیانگر نوع جریان در لایه های مرزی و اطراف جسم غوطه ور می باشد. در جریانهای تراکم پذیر، معمولاً عدد ماخ مهمتر از عدد رینولدز است.

د) عدد فرود

نسبت $V \sqrt{g_e}$ را عدد فرود می نامند. اگر این نسبت را مجذور و صورت و مخرج کسر را در ρA ضرب کنیم نتیجه برابر است با نسبت نیروی دینامیکی به وزن می باشد در جریان مایعاتی که سطح آزاد دارند، ماهیت جریان (تند یا کند) بستگی به این دارد که عدد فرود بزرگتر یا کمتر از یک باشد.

این عدد در محاسبات جهش هیدرولیکی ، طراحی سازه های
هیدرولیکی و کششی مفید می باشد.

هـ) عدد وبر

این عدد برابر با $V^2 \lambda \rho / \delta$ است و بیانگر نسبت نیروهای لختی به
نیروهای کشش سطحی می باشد. در سطح مشترک گاز - مایع یا
مایع به مایع عدد وبر اهمیت دارد.

۴-۴ چکیده

ابعاد مکانیکی نیرو F و جرم M و طول t است رابطه ی بین آنها از قانون دوم نیوتن

$$F=ma$$

مشخص می شود:

بنابراین رابطه ی ابعادی نیرو برابر با MLT^{-2} می باشد. در جدول (۱-۴) دیگر

کمیت های مهم فیزیکی که در مکانیک سیالات مورد استفاده می باشند، آمده است.

پنجم پارامتر بدون بعد مهم در مکانیک سیالات عبارتند از

(آ) ضریب فشار $\Delta P / (\rho v^2 / 2)$

(ب) عدد ماخ $V \sqrt{K / \rho}$

(ج) عدد رینولدز $VD\rho / \mu$

(د) عدد فرود $V / \sqrt{ge}$

(هـ) عدد وبر $V^2 \lambda \rho / \delta$

تست های فصل ۴

۴-۲-۱ یک ترکیب بدون بعد از $\Delta P, \rho, \lambda, Q$ کدام است؟
الف) $\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho} \frac{Q}{L^2}}$ (ب) $\Delta P \lambda Q / P$ (ج) $PQ / \Delta P \lambda^2$ (د) $\sqrt{\frac{\lambda}{\Delta P} \frac{Q}{L^2}}$

۴-۳-۱ کدام عبارت بیانگر عدد رینولدز است؟
الف) $u \lambda / V$ (ب) $VD \mu / p$ (ج) V / gD (د) $\frac{\Delta P}{P V^2}$

۴-۳-۲ ضریب فشار را می توان به کدام صورت زیر نوشت؟
الف) $\Delta P / \gamma H$ (ب) $\Delta P / p v^2 / 2$ (ج) $\frac{\Delta P}{\lambda \mu V}$ (د) $\Delta P \frac{P}{\mu^2 \lambda^4}$

۴-۳-۳ ضریب فشار برابر است با نسبت نیروهای فشاری به
الف) نیروهای چسبنده
ب) $\sqrt{\quad}$ نیروهای لختی
ج) نیروهای گرانی
د) نیروهای کشش سطحی

۴-۳-۴ در جریان آرام بین دو صفحه ی موازی کدام دو نیرو با اهمیت تراند؟

الف) لختی و چسبنده
ج) گرانی و فشار

ب) فشاری و لختی
د) چسبنده و فشار



فصل ۵

مقاومت سیال

۵-۱ مقدمه

در فصل معادلات بنیادی و مهم در تجزیه و تحلیل جریان سیالات را ارائه کردیم و در آنجا فرض کردیم که سیال بدن اصطکاک باشد. در این فصل راجع به سیالات واقعی بحث خواهیم کرد. یعنی وضعیتی را مطرح می کنیم که بازگشت ناپذیری عاملی مهم باشد و چسبندگی سیال عامل ایجاد برگشت ناپذیری و اتلاف خواهد بود. بدون چسبندگی در یک سیال، هیچ مقاومتی مشاهده نخواهد شد. حالت‌های آسان تری چون جریان دائمی، آرام را ابتدا بررسی می کنیم و سپس مقاومت در مقابل جریان دائمی، یکنواخت، تراکم ناپذیر در کانال‌های باز و بسته مطرح خواهد شد. و سرانجام بخشی به پدیده انتقال اختصاص داده خواهد شد.

معادلات حرکت یک سیال واقعی را می توان از اثر نیروهای وارد بر جزء کوچکی از سیال که شامل تنش‌های برشی ناشی از حرکت سیال و چسبندگی است، بدست آورد. چگونگی تعیین این معادلات را که معادلات ناویر - استوکس می نامند، از سطح درس بالاتری باشد و مطرح نمی شود. اما با روش آسانی می توان چنین گفت که اگر قانون اول نیوتن را در مورد چسبندگی (درک معادله ۱-۱) در جریان آرام یک بعدی را به جریان سه بعدی تعمیم دهیم، داریم:

$$\delta_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \delta_{y\zeta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \delta_{\zeta x} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \quad (5-1)$$

سه رابطه بالا را قانون چسبندگی استوکس می نامند. در این سه رابطه زیرنویس اول بیانگر تنش برشی در جهت عمود بر صفحه ای است که مولفه ی برشی در آن وجه عمل می کند و

زیرنویس دوم جهت مولفه ی برشی را مشخص می کند.

در فصل ۳ به هنگام بحث راجع به معادلات اوایلر و انرژی، ζ را مختص عمودی در نظر گرفتیم و بنابراین ζ اندازه ای از انرژی پتانسیل در واحد وزن بود. در این فصل سیستم مختصات را راستگرد فرض می کنیم تا محاسبه آسان شود. می دانیم نیروی گرانی همواره رو به پایین عمل می کند، بنابراین b را به عنوان جهتی در نظر می گیریم که به سمت بالا مثبت باشد و $\frac{\partial h}{\partial x}$ کسینوس زاویه ی بین محور x و محور h خواهد بود. همین موضوع را می توان برای y و نیز عمل کرد. اگر معادلات ناویر-استوکس را محدود به سیالات تراکم ناپذیر کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) + \nu \nabla^2 u &= \frac{du}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) + \nu \nabla^2 v &= \frac{dv}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) + \nu \nabla^2 w &= \frac{dw}{dt} \end{aligned} \quad (5-2)$$

در معادلات V چسبندگی سینماتیکی است و ثابت فرض می شود، $\frac{d}{dt}$ مشتق گیری نسبت

$$\frac{d}{dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{به حرکت است.} \quad (5-3)$$

و عملگر ∇^2 چنین تعریف می شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \quad (5-4)$$

برای سیال ناپسبنده، معادلات ناویر استوکس به معادلات اوایلر برای حرکت سه بعدی تبدیل می شود.

اگر جریان یک بعدی را برای سیال واقعی در جهت λ وقتی که h در جهت عمودی و روبه بالا و y عمود بر λ باشد (یعنی $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$, $v = 0$, $w = 0$) (شکل ۵-۱) آنگاه در نظر بگیریم معادلات ناویر - استوکس به صورت زیر خواهند آمد:

$$1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda} (p + \gamma h) + \frac{u}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{du}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) = 0$$

(۵-۵)

و برای جریان دائمی داریم

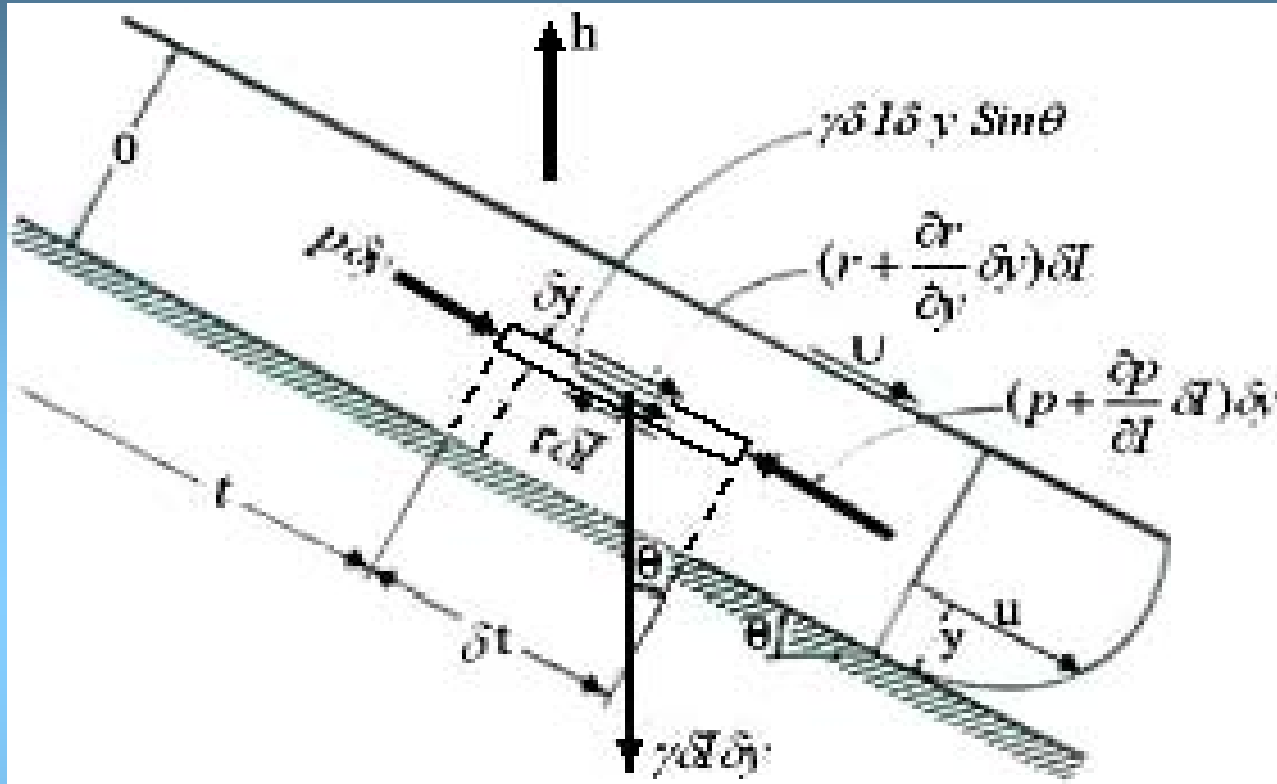
$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (p + \gamma h) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

و $(p + \gamma h)$ فقط تابعی از λ خواهد بود. از آنجا که u فقط تابعی از y و برای جریان یک بعدی $\delta = \mu \frac{du}{dy}$ است، نتیجه می شود:

$$\frac{d\delta}{dy} = \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h)$$

(۵-۶)

شکل ۵-۱ جریان سیال بین صفحات موازی شیبدار با صفحه ی فوقانی در حال حرکت



۵-۲ جریان آرام، تراکم ناپذیر و دائمی بین صفحات موازی

فرض می کنیم جریان آرامی بین دو صفحه ی موازی شیبدار به صورت دائمی جاری و صفحه فوقانی سرعت ثابت U داشته باشد (شکل ۵-۱) در این شکل صفحه ی فوقانی موازی با جهت سیال حرکت دارد بنابراین درجهت تغییر فشار وجود دارد. اکنون لایه ی نازکی با پهنای واحد در مسیر جریان در نظر می گیریم. در جریان یکنواخت این لایه با سرعت ثابت U حرکت می کند:

$$p \delta y - \left(p \delta y + \frac{dp}{dl} \delta l \delta y \right) - \gamma \delta l + \left(\gamma \delta l + \frac{d\gamma}{dy} \delta y \delta l \right) + \gamma \delta l \delta y \sin \theta = 0$$

می دانیم $\sin \theta = -\frac{\partial h}{\partial \lambda}$ و رابطه ی بالا برابر عنصر حجم تقسیم می کنیم تا بدست آید:

$$\frac{d\delta}{dy} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(p + \gamma h) \quad (5-7)$$

اما u تابعی از y است بنابراین $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{d\zeta}{dy}$ می باشد، و $p + \gamma h$ از نظر مقدار در جهت y تغییر نمی کند (زیرا شتاب وجود ندارد)، $p + \gamma h$ فقط تابعی از λ است. پس

$$\partial(p + \gamma h) / \partial \lambda = d(p + \gamma h) / d\lambda$$

در نتیجه معادله ی (5-7) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d\zeta}{dy} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d}{d\lambda}(p + \gamma h) \quad (5-8)$$

از معادله ی بالا نسبت به y انتگرال می گیریم.

$$\mu \frac{du}{dy} = y \frac{d}{d\lambda}(p + \gamma h) + A$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{d\lambda}(p + \gamma h)y^2 + \frac{A}{\mu}y + B \quad (5-9)$$

توجه داریم A, B دو ثابت انتگرال گیری است. با جایگزینی $(Y=0, U=0)$ و $U=u, y=a$ در رابطه ی (5-9) نتیجه می شود:

$$B=0 \quad \text{و} \quad U = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{d\lambda}(p + \gamma h)a^2 + \frac{Aa}{\mu} + B$$

سر انجام با حذف A و B در معادله ی (5-9) بدست می آید:

$$u = \frac{Uy}{a} - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{d\lambda}(p + \gamma h)(ay - y^2) \quad (5-10)$$

اگر صفحات افقی باشند ، دیگر گرادیان ناشی از فشار یا ارتفاع وجود ندارد، یعنی توزیع فشار هیدرولیکی $p + \gamma h = c$ است و توزیع سرعت به خط مستقیم خواهد بود. اما اگر صفحات شیبدار ولی ثابت باشند $U=0$ است و در نتیجه توزیع سرعت سهوی شکل خواهد شد. برای تعیین مقدار دبی خروجی در سطح مقطع ثابت کافی است از معادله ی (۵-۱۰) نسبت به

$$Q = \int_0^a u dy = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) a^3$$

انتگرال بگیریم.
(۵-۱۱)

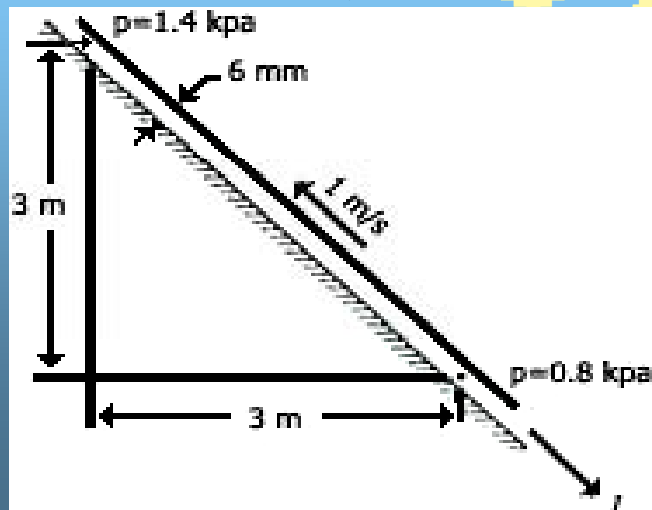
و توجه داریم در حالت کلی، سرعت پیشینه در صفحه ی میانی نیست.

مثال ۱

در شکل (۵-۲) ، یک صفحه نسبت به دیگری حرکت می کند. $\mu = 0.08 \text{ Pa.s}$ و $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ ، توزیع سرعت، دبی خروجی و تنش برشی وارد بر صفحه ی فوقانی را محاسبه کنید. حل در صفحه فوقانی داریم :

$$p + \gamma h = 1400 + 850 \times 9.81 \times 3 = 26450 \text{ Pa}$$

شکل ۵-۲ جریان روی صفحات شیبدار



و در نقطه پایینی:

بنابراین

$$p + \gamma h = 100 \text{ pa}$$
$$\frac{d}{d\lambda}(p + \gamma h) = \frac{800 - 26405}{3\sqrt{2}} = -6035 \text{ N/m}^3$$

با توجه به شکل مزبور $U = -1 \text{ m/s}$ و $a = -0.6 \text{ m}$ است بنابراین از معادله ی (۱۰-۵) داریم:

$$U = \frac{(-1)(y)}{0.006} + \frac{6035}{2(0.08)} (0.006 y - y^2)$$

$$U = 59.646 y - 37718 y^2$$

سرعت پیشینه هنگامی پیش می آید که $\frac{du}{dy} = 0$ باشد و یا $y = 0.00079$ در نتیجه $U_{max} = 0.236 \text{ m/s}$ خواهد شد.

Q مقدار دبی خروجی در واحد پهنا برابر است با

$$Q = \int_0^{0.006} u dy = 29.832 y^2 - 12573 y^3 \Big|_0^{0.006} = 0.00164 \text{ m}^2/\text{s}$$

که رو به بالا می باشد. اکنون تنش برشی بر صفحه ی فوقانی را محاسبه می کنیم.

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0.006} = 59.646 - 75436 y \Big|_{y=0.006} = -392.97 \text{ s}^{-1}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 0.08 (-392.97) = -31.44 \text{ pa}$$

لذا نیروی برشی در صفحه ی فوقانی برابر با $44/31 \text{ pa}$ است که در مقابل حرکت صفحه مقاومت می کند.

۵-۳ جریان آرام در لوله ها و در فاصله ی بین دولوله ی هم محور

برای جریان آرام، تراکم ناپذیر و یکنواخت درون لوله یا در فاصله ی بین دو لوله ی هم محور یک جزو استوانه ای را مطابق شکل (۵-۳) به عنوان جسم آزاد در نظر می گیریم. شتاب را برابر صفر فرض می کنیم و معادله ی حرکت را در جهت λ بکار می بریم:

$$2\pi r \delta r p - \left(2\pi r \delta r p + 2\pi r \delta r \frac{dp}{d\tau} \delta \lambda \right) + 2\pi r \delta \lambda \zeta$$

$$- \left[2\pi r \delta \lambda \zeta + \frac{d}{dr} (2\pi r \delta \lambda \zeta) \delta r \right] + \gamma 2\pi r \delta \lambda \delta r \sin \theta = 0$$

می دانیم $\sin \theta = - \frac{dh}{d\lambda}$ و رابطه ی بالا بر حجم جسم آزاد یعنی $(2\pi r \delta r \delta \lambda)$ تقسیم می کنیم. در نتیجه بدست می آید:

$$\frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\zeta r) = 0$$

(۵-۱۱)

اما $d(p + \gamma h) / d\lambda$ تابع r نیست، بنابراین معادله بالا را در $r\delta r$ ضرب و نسبت به r انتگرال می گیریم تا معادله ی حرکت به صورت زیر در آید:

$$\frac{r^2}{2} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) + \zeta r = A \quad (5-12)$$

که در آن A مقدار ثابت انتگرال گیری است. برای یک لوله با قاعده ی مستدیر شکل این معادله در صورتی که $r=0$ باید صدق کند پس $A=0$ با جایگزینی

$$\delta = -\mu \frac{du}{dr}$$

در رابطه ی (5-12) داریم (توجه شود که علامت منفی ضروری است زیرا u با افزایش r کاهش می یابد):

$$du = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) r dr - \frac{A}{\mu} \frac{dr}{r}$$

و با انتگرال گیری مجدد رابطه ی برای u بدست می آید.

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) - \frac{A}{\mu} \lambda \ln r + B \quad (5-13)$$

حال اگر سیال در فاصله ی بین دو لوله ی هم محور جریان داشته باشد، می دانیم اگر $r=b$ (شعاع داخلی لوله) $u=0$ و به اجزای $r=a$ و $u=0$ خواهد بود.

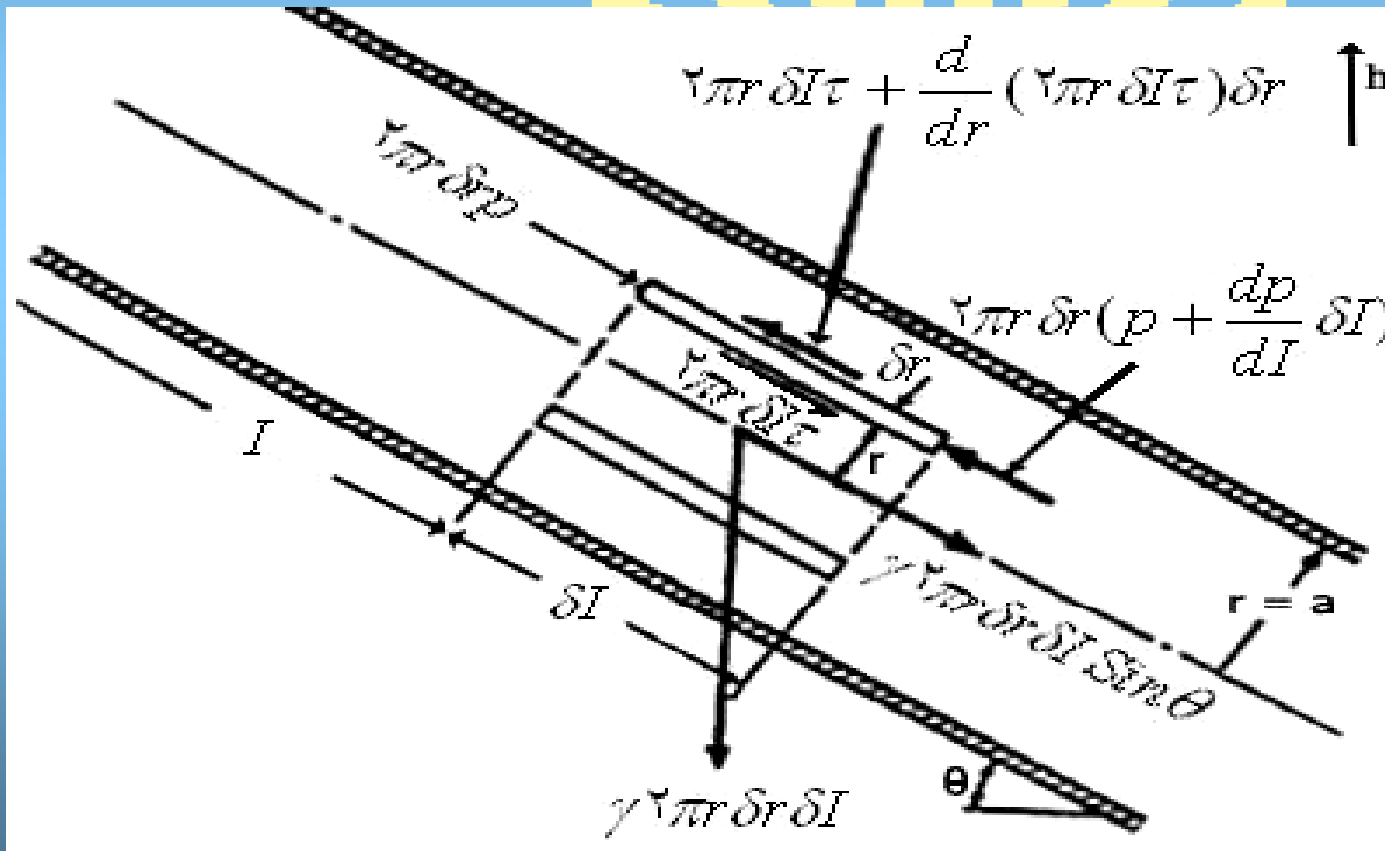
بنابراین با این شرایط در معادله برای A و B بدست می آید و سرانجام با جایگزینی در معادله ی (5-13) نتیجه می شود:

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) \left(a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{a}{r} \right) \quad (5-14)$$

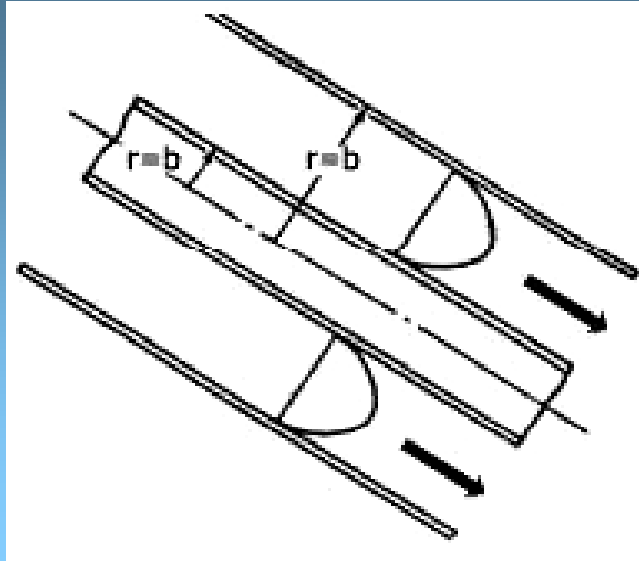
معادله ی (۵-۱۴) همان معادله ی سرعت سیال در فاصله ی بین دو لوله محور است.
 اکنون Q دبی خروجی را برای این حالت محاسبه می کنیم (شکل ۵-۴):

$$Q = \int_b^a 2\pi r u dr = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) \left[a^4 - b^4 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{\lambda n b/a} \right] \quad (5-15)$$

شکل ۵-۳ نمودار آزاد یک جزء استوانه ای در جریان آرام درون لوله ی شیبدار



شکل ۵-۴ جریان در فاصله ی بین دو لوله ی هم محور



لوله ای با قاعده ی مستدیر

برای لوله های معمولی در معادله ی (۵-۱۳) $A=0$ است و به ازای $r=a$ ، $u=0$ خواهد شد:

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) \quad (5-15)$$

و این سرعت سیال درون لوله ای با قاعده ای به شعاع a است.
به ازای $r=0$ ، سرعت بیشینه u_{max} بدست می آید:

$$u_{max} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) \quad (5-16)$$

چون توزیع سرعت سهمی وار است، حجم آن برابر با نصف حجم استوانه محاط بر آن است.
بنابراین سرعت متوسط آن برابر با نصف بیشینه سرعت خواهد شد:

$$V = \frac{a^2}{8\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) \quad (5-17)$$

و مقدار دبی خروجی برابر با $V \pi a^2$ است:

$$Q = -\frac{\pi a^2}{8\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) \quad (5-18)$$

مورد خاص: لوله های افقی

مقدار دبی خروجی را می توان با انتگرال گیری از u روی سطح مزبور بدست آورد (برای لوله های افقی ثابت h است):

$$Q = \int_0^a u 2\pi r dr \quad (5-19)$$

با توجه به این که افت فشار $\Delta\rho$ در طول L از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{\Delta\rho}{L} = -\frac{d\rho}{d\lambda} \quad (5-20)$$

و اگر قطر لوله برابر با D باشد داریم:

$$Q = \frac{\Delta\rho \pi D^4}{128 \mu L} \quad (5-21)$$

و رابطه ی سرعت متوسط با دبی خروجی به صورت زیر است:

$$V = \frac{\Delta P D^2}{32 \mu L} \quad (5-22)$$

اگر معادله ی را برای افت فشار حل کنیم، نتیجه می شود:

$$\Delta P = \frac{128 \mu L Q}{\pi D^4} \quad (5-23)$$

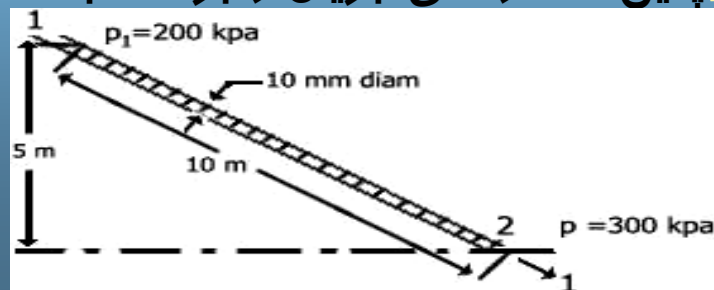
از رابطه ی بالا مشاهده می شود که افت فشار با چسبندگی، طول و دبی خروجی نسبت مستقیم و با توان چهارم قطر لوله نسبت عکس دارد. توجه داریم که زبری لوله در این معادلات مطرح نشده است. معادله ی (5-22) را در سال ۱۸۳۹ هاگن به صورت تجربی بدست آورد و چندین سال بعد، ویدمان در سال ۱۸۵۶ آن را به روش تحلیلی نتیجه گرفت. نتایج بدست آمده از معادله ی (5-12) تا (5-22) برای دهانه ی ورودی لوله معتبر نیست. اگر جریانی از مخزنی از مدخلی کاملاً مدور وارد لوله ای شود، سرعت در ابتدا یکنواخت خواهد بود. اثر تنش برشی باعث کاهش سرعت سیال در نزدیکی جداره می شود، L طول گذار برای ایجاد سرعت سهموی تابع از عدد رینولدز است. لانگهار برای نخستین بار رابطه ی نظری به صورت زیر بدست آورد:

$$L'/D = 0.058 R \quad (5-24)$$

که امروزه با مشاهدات عملی توافق دارد و آن را رابطه ی لانگهار می نامند.

مثال ۲

جهت جریان را در لوله ی شیبدار شکل (5-5) تعیین کنید. در صورتی $\mu = 0.04 \text{ Pa.s}$ ، $\gamma = 8000 \text{ N/m}^3$ باشد. همچنین مقدار کمی جریان را بر حسب لیتر در ثانیه و عدد رینولدز جریان را تعیین کنید.



شکل 5-5

حل

در نقطه ی ۱:

$$P + \gamma h = 200000 + (8000)(5) = 240 \text{ kPa}$$

در نقطه ی ۲:

$$p + \gamma h = 300 \text{ kPa}$$

اگر مبنای ارتفاع را در نقطه ی ۲ بگیریم، جریان از ۲ به ۱ است، زیرا انرژی در نقطه ی ۲ بیشتر است.

اکنون مقدار جریان را محاسبه می کنیم:

$$\frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) = \frac{300000 - 240000}{10} = 6000 \text{ N/m}^2$$

توجه داریم مقدار از ۱ به ۲ مثبت است. با جایگزینی در معادله ی (۱۸-۵) بدست می آید

$$Q = -\frac{\pi(0/005)^4}{8(0/04)} \times \dots = \dots \times 368 \text{ m}^3/\text{s} = \dots \times 368 / \text{s}$$

و سرعت متوسط از معادله ی $Q = V\pi a^2$ محاسبه می شود:

$$V = \frac{0/0000368}{\pi(0/005)^2} = 2986 \text{ m/s}$$

اکنون برای محاسبه ی عدد رینولدز داریم:

$$R = VD \frac{\rho}{\mu} = \frac{(0/4686)(0/01)}{(0/04)} \left(\frac{8000}{9/806} \right) = 95/6$$

۵-۴ نیروی کشش بر اجسام غوطه ور

نیروی کششی مولفه ای از نیرو است که از سوی سیال متحرک به جسم وارد می شود و موازی سرعت نزدیکی نسبی است. نمودارهای ضریب کشش کره و دیسک های سندیر در شکل (۵-۶) ارائه شده است و در شکل (۵-۷) نمودار ضریب کشش برای استوانه ی مستدیر با طول بینهایت نسبت به عدد رینولدز رسم شده است. در هر حال CD ضریب کشش به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{نیروی کشش} = C_D A \frac{\rho U^2}{2} \quad (۵-۲۵)$$

که در آن A تصویر سطح جسم روی صفحه ای عمود بر مسیر جریان است. در جدول (۵-۱) ضرایب کشش نمونه ای برای چندین استوانه داده شده است. در حالت کلی این تصاویر برای آن برد اعداد رینولدز داده شده است که در آن ضرایب کشش با عدد رینولدز اندکی تغییر میکند.

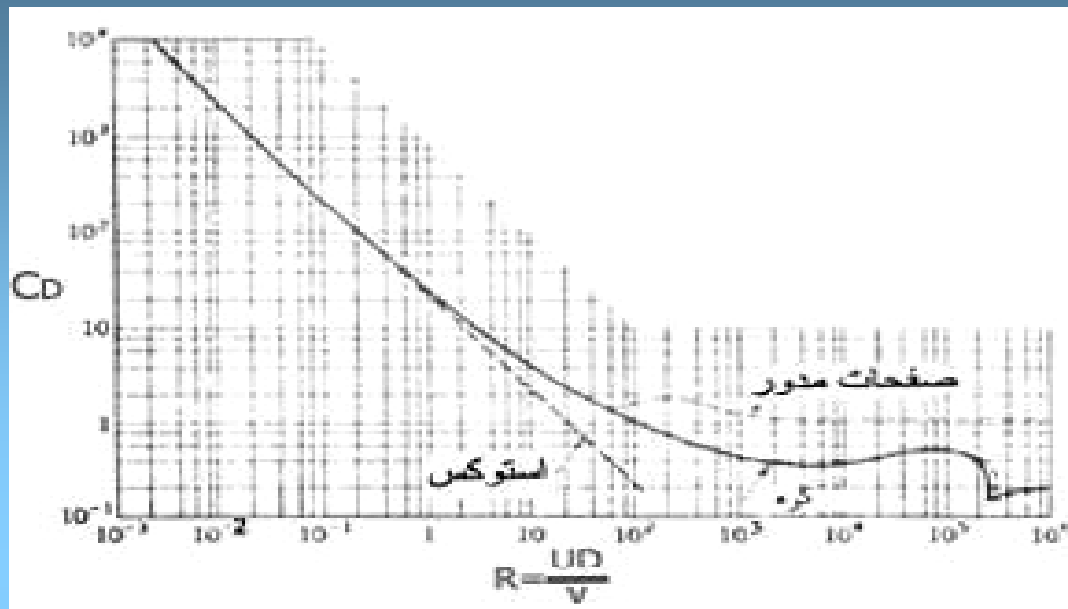
نمودار نیروی کشش و نیروی بالابر برای یک سطح آیرودینامیکی در شکل (۵-۸) دیده میشود. نیروی بالابر مولفه ای از نیرو است که از سوی سیال به جسم تحت زاویه ی قائم نسبت به سرعت نزدیک نسبی وارد می شود. ضریب نیروی بالابر CL به صورت زیر تعریف می شود.

$$\text{نیروی بالابر} = C_L A \frac{\rho U^2}{2} \quad (۵-۲۶)$$

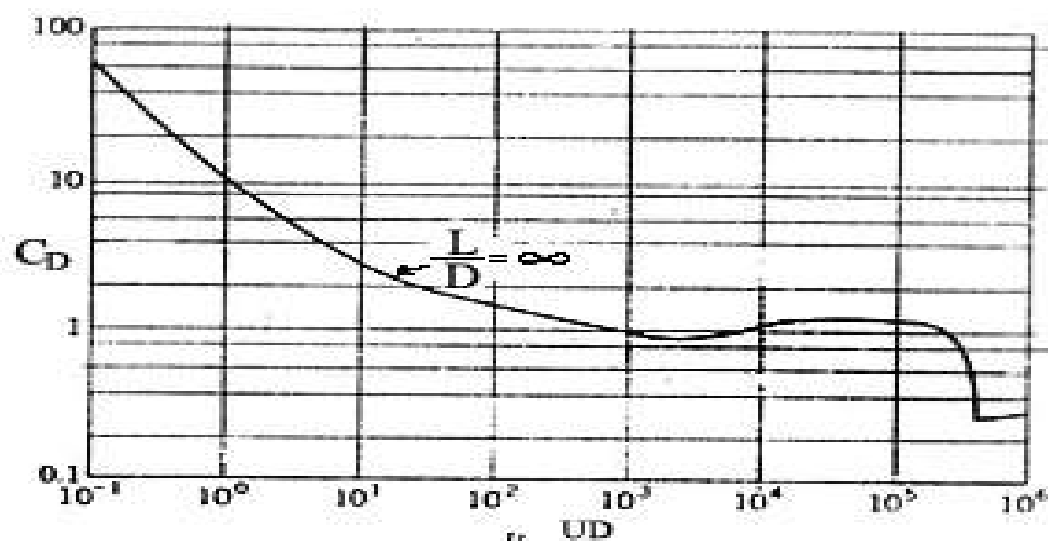
که در آن A مربوط به طول قوس ضربدر طول یال برای نیروی کشش و نیروی بالابر در

سطح آیرودینامیکی است.

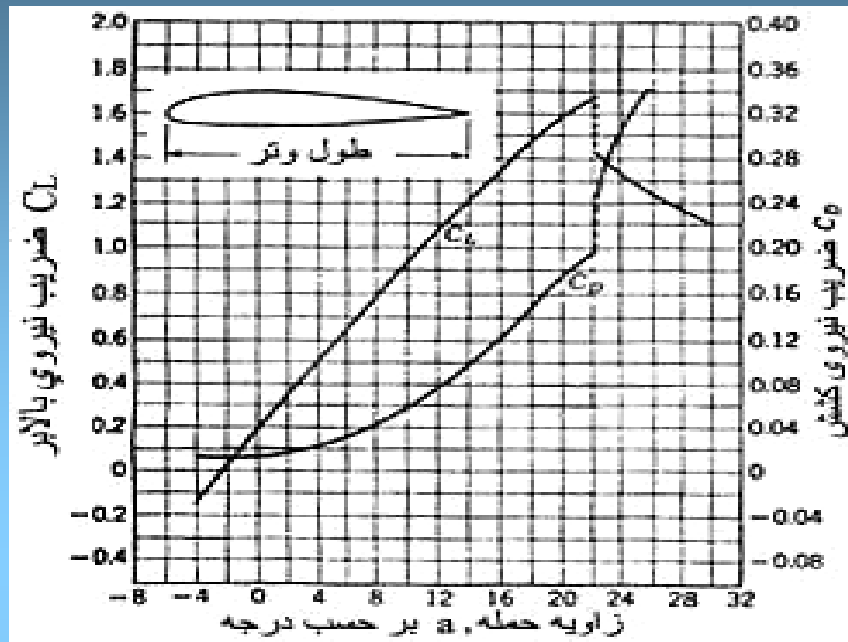
شکل (۵-۶) ضرایب نیروی کشش برای کره و دیسکهای سنجید



شکل (۵-۷) ضرایب نیروی کشش برای استوانه ی ستدیر



شکل ۸-۵ ضرایب نیروی کشش و نیروی بالابر برای تشکیل آیرودینامیکی



جدول ۱-۵ ضرایب نیروی کشش برای انواع استوانه ها در دو بعدی ؟

اثر تراکم پذیری بر نیروی کشش

در تعیین کشش برای جریان گاز با سرعت بالا، اثر تراکم پذیری که با عدد ماخ بیان می شود ، مهم تر از عدد رینولدز است. M عدد ماخ نسبت سرعت سیال به سرعت صوت در سیال تعریف می شود. اگر جریان در سرعت بحرانی C باشد، همان سرعت موج صوت را دارد و بنابراین امواج فشاری کوچکی نمی توانند به سویی بالا دست جریان حرکت کنند.

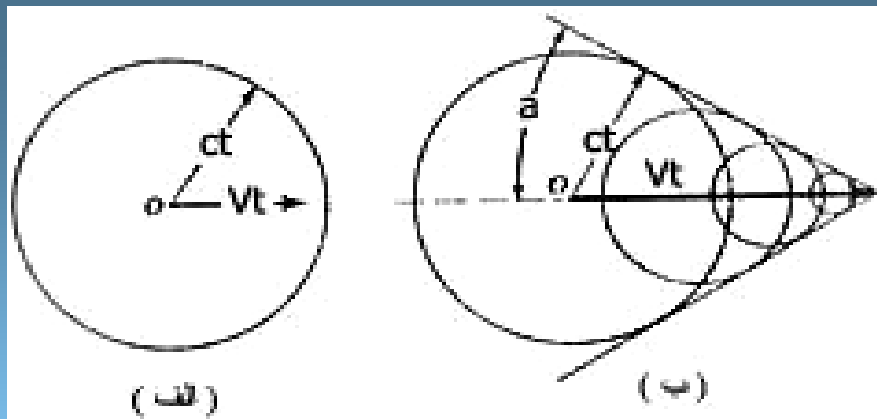
در این شرایط $M=1$ است و اگر M بزرگتر از ۱ باشد، جریان مافوق صوت و اگر M کمتر از ۱ باشد جریان مادون صوت است. هر نوع اغتشاش کوچکی با سرعت صوت انتشار می یابد. به عنوان مثال اغتشاش در هوای ساکن به شکل موج فشاری کروی به طرف خارج حرکت می کند

در حالی که منبع تولید اغتشاش با سرعتی کمتر از c حرکت می کند. در شکل (۵-۹) این موضوع نشان داده شده است. چون موج جلوتر از جسم متحرک قرار گیرد. مادامی که جسم فاصله ی Vt را طی می کند، موج اغتشاش به مقدار $r=ct$ از نقطه ی ۰ دور شده است. در تمام موارد مادون صوت، این امواج همواره داخل اولین موج کروی ایجاد شده قرار می گیرند. اما در حرکت مافوق صوت جسم سریعتر از امواج کروی ارسالی حرکت می کند و در نتیجه امواج مخروطی شکل با یک راس در جسم ایجاد می شود. نصف زاویه ی α را زاویه ماخ گویند.

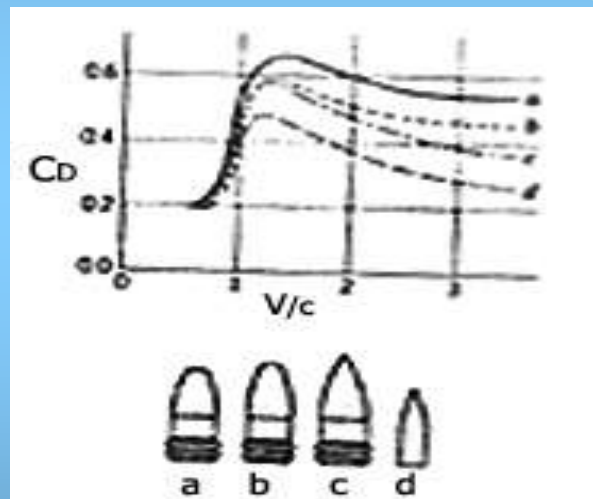
$$\alpha = \sin^{-1} \frac{ct}{Vt} = \sin^{-1} \frac{C}{V} \quad (۵-۲۷)$$

نیروی کشش بر اجسام به مقدار زیادی تحت تاثیر عدد ماخ است و اگر تراکم پذیری مهمتر شود، وابستگی خود را به عدد رینولدز از دست می دهد. در شکل (۵-۱۰) ضرایب کشش برای ϵ جسم پرتابه ای نسبت به عدد ماخ رسم شده است. برای اعداد ماخ کوچک، جسم باید دارای پیشانی مدور و دماغه ای پهن و بدنه ای مخروطی شکل کشیده داشته باشد تا نیروی کشش به کمیته برسد. به ازای اعداد ماخ بزرگ (۷ یا بیشتر) نیروی کشش به سرعت زیاد می شود و در این صورت جسم دماغه ای تیز داشته و لبه های جلویی آن نازک است.

شکل ۵-۹ گسترش موج حاصل از یک متحرک الف با سرعت مادون صوت وب سرعت مافوق صوت



شکل ۱۰-۵ ضرایب کشش گلوله ها به صورت تابعی از عدد ماخ



قانون استوکس

استوکس در سال ۱۸۵۱، جریان سیالات تراکم ناپذیر چسبنده را در پیرامون کره با ۱ عدد رینولدز متفاوت ($U^2 a / \nu$) کمتر از ۱ حل کرد. او دریافت که کشش (نیروی وارد بر کره توسط جریان سیال پیرامونش) برابر است با:

$$6\pi\mu U = \text{نیروی کشش}$$

(۲۸-۵)

که در آن a شعاع کره و U سرعت کره نسبت سیال در فاصله y زیاد می باشد در محاسبه سرعت نهایی کره ای که در سیال سقوط می کند (فرض می کنیم سیال ساکن باشد) ، نیروی شناوری به اضافه ی نیروی کشش باید برابر با وزن کره باشد:

$$\frac{4\pi}{3} \pi a^3 \gamma + 6\pi a \mu U = \frac{4\pi}{3} \pi a^3 \gamma_s \quad (5-9)$$

که در آن γ وزن مخصوص مایع و γ_s وزن مخصوص کره است. از حل این رابطه ، سرعت نهایی U بدست می آید:

$$U = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu} (\gamma_s - \gamma) \quad (5-30)$$

در شکل (5-6) ، خط راست بیانگر قانون استوکس است. کاربرد قانون استوکس در جداسازی سرد کننده از ذرات براده های فلزی در ماشینکاری ، نمک زدایی جریان رودخانه ها و در بهداشت محیط زیست جهت تصفیه آبها و فاضلابها است.

مثال ۳

از هواپیمای جتی ، ذرات جامدی به قطر $10 \mu m$ و $S=2/5$ در ارتفاع ۱۱۰۰ متری، ذرات جامدی به درون جت ریخته می شود. اگر μ چسبندگی هوا از رابطه ی $\mu = 1/75 \times 10^{-6} - 3/06 \times 10^{-10} y$ بدست آید که در آن y بر حسب متر نسبت به سطح دریا اندازه گیری می شود. زمان لازم را برای این که ذرات به سطح دریا برسند محاسبه کنید. از جریان هوا و اثرات باد چشم پوشی شود.

حل

اگر معادله ی (5-30) را جایگزین کنیم و وزن مخصوص هوا بسیار کمتر از وزن مخصوص ذرات جامد باشد، آنگاه داریم:

$$-\frac{dy}{dc} = \frac{2 a^2 \gamma_s}{9 \mu}$$

$$\int_0^T dt = - \int_{1100}^0 \frac{9}{2} (1/78 \times 10^{-3} - 3/06 \times 10^{-10} y) \times \frac{1}{(5 \times 10^{-6})^2} \cdot \frac{1}{2/5 \times 9806} dy$$

$$T = \frac{1}{86400} \left[1/78 y - \frac{3/06 \times 10^{-5} y^2}{2} \right]_{1100}^{11000} \times 73/45 = 15/07$$

۵-۵ مقاومت در برابر جریان درهم سیالات در مجاری باز و بسته

در جریان تراکم ناپذیر درهم و یکنواخت دائمی در مجرای با سطح مقطع ثابت، تنش برشی جداره تقریباً متناسب با مجذور سرعت متوسط تغییر می کند:

$$\delta_o = \lambda \frac{\lambda}{2} V^2 \quad (5-30)$$

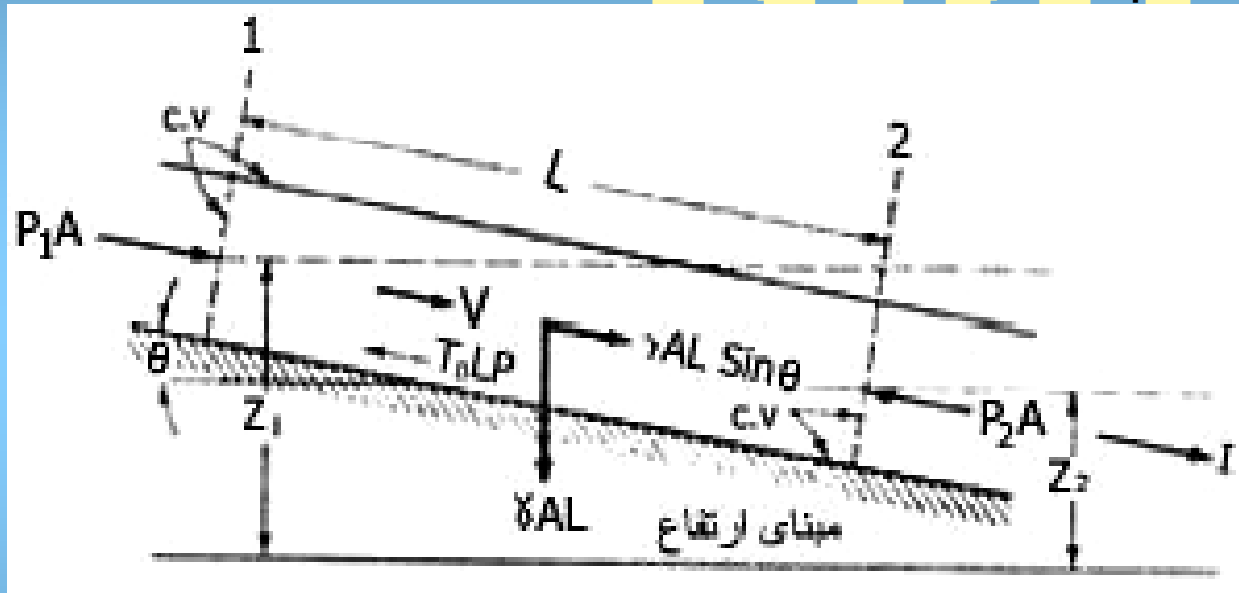
که در آن λ ضریب بدون بعدی است. در کانالهای باز و مجاری غیر مستدیر بسته، تنش برشی روی سطح ثابت نیست، در این موارد δ_o را به صورت مقدار متوسط تنش برشی در جداره بکار می برند.

در شکل (۵-۱۱) جریان یکنواختی در مجرای باز یا بسته نشان داده شده است. در حالت باز بودن کانال P_1 برابر با P_2 است و جریان به دلیل کاهش انرژی پتانسیل به مقدار $Z_1 - Z_2$ می افتد. اما در مجرای بسته انرژی لازم جهت ایجاد جریان با افت انرژی پتانسیل و همچنین با افت فشار $P_1 - P_2$ تامین می شود. P_2 را می توان در جهت جریان افزایش داد ولی کاهش انرژی پتانسیل $Z_1 - Z_2$ باید بیشتر از $(P_2 - P_1)/\gamma$ باشد تا انرژی لازم جهت غلبه بر تنش برشی جداره فراهم آید.

معادله ی انرژی در این حالت به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \text{افت ۱-۲} \quad (۵-۳۱)$$

شکل ۵-۱۱ نیروهای محور بر حجم کنترل درون یک مجرا



$$\text{نیروی بالابر} = C_L \frac{\rho U^2}{2}$$

نیروی بالابر

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1} C/V$$

زاویه ماخ

قانون استوکس (سیال تراکم ناپذیر چسبنده)

$$U = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu} (\gamma_s - \gamma)$$

تنش برشی در جریان تراکم ناپذیر در هم و یکنواخت دائمی

$$Z_0 = \lambda \frac{\lambda}{2} V^2$$

معادله انرژی در مجاری باز و بسته

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2y} + \mathfrak{F}_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2y} + \mathfrak{F}_2 + \text{افت } 1-2$$

معادله افت

$$\text{افت } 1-2 = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2 = \frac{z_{oLP}}{\gamma A} = \lambda \frac{\lambda}{2} \frac{V^2 LP}{\gamma A} = \lambda \frac{L}{R} \frac{V^2}{2g}$$

افت در واحد وزن در واحد طول کانال

$$S = \frac{\lambda V^2}{R 2g}$$

فرمول شزی

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{RS} = C \sqrt{RS}$$

چون حد سرعت $\frac{V^2}{2g}$ همانند است:

$$\text{افت } 1-2 = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + z_1 - z_2$$

(۵-۳۲)

اگر جریان یکنواخت باشد ، معادله ی تکانه ی خطی درجهت λ بکاربرده می شود:

$$\sum F\lambda = 0 = (p_1 - p_2)A + \gamma A L \sin\theta - \zeta_o LP \quad (5-33)$$

که در آن P بخش از محیط که جداره در تماس با سیال است. چون $L \sin\theta = Z_1 - Z_2$ بنابراین

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2 = \frac{\zeta_o LP}{\gamma A} \quad (5-34)$$

اگر از معادلات (5-32) و (5-34) و (5-30) استفاده کنیم نتیجه می شود:

$$\text{افت} \quad 1-2 = \frac{\zeta_o LP}{\gamma A} = \lambda \frac{\rho V^2 LP}{2 \gamma A} = \lambda \frac{L}{R} \frac{V^2}{2g} \quad (5-35)$$

که در آن $R = A/P$ و شعاع هیدرولیکی مجرا نامیده می شود. برای لوله مستدیر ، شعاع هیدرولیکی برابر با $R = D/4$ است.

عبارت مربوط به افت در معادله ی (5-35) بر حسب متر - نیوتن بر نیوتن است و آن را hf یا افت هد ناشی از اصطکاک می نامند. اگر S را افت در واحد وزن در واحد طول کانال بگیریم:

$$S = hf / L = \frac{\lambda V^{-2}}{R 2g} \quad (5-36)$$

و این معادله را برای V حل کنیم:

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{RS} = C \sqrt{RS} \quad (5-37)$$

این معادله را فرمول شزی می نامند و ضریب λ یا C را باید به روش تجربی تعیین کرد. برای

لوله ها ، هنگامی که $\lambda = f/4$ و $R = D/4$ باشد، معادله ی دارسی – وایسباخ بدست می آید.

$$hf = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (5-38)$$

که در آن D قطر داخلی لوله است. برای کانالهای باز این معادله به صورت زیر در می آید.

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{RS} \quad (5-39)$$

۵-۶ جریان یکنواخت – دائمی در کانالهای باز

برای جریان دائمی تراکم ناپذیر در عمق ثابت درون کانال باز منشوری شکل فرمول مگینگ بکار برد می شود . این فرمول را با جایگزینی رابطه ی

$$C = \frac{C_m}{n} R^{1/6} \quad (5-40)$$

در فرمول شزی بدست آورده می شود:

$$V = \frac{C_m}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (5-41)$$

مقدار C_m برابر با یک، V سرعت متوسط در سطح مقطع مزبور R ، شعاع هیدرولیکی و S افت در واحد وزن در واحد طول کانال یا شیب کف کانال می باشد. به نظر می رسد که ضریب n ضریب زبری مطلق تنها و ابسته به زبری سطح باشد ، ولی n بستگی به نامعلومی به ابعاد و شکل سطح مقطع کانال دارد.

مقدار ضریب n را در چندین آزمایش در کانالهای واقعی بدست آورده اند که در جدول (۵-۲) آورده ایم توجه داریم این مقادیر در سیستم SI است.
جدول ۵-۲ مقادیر متوسط ضریب زبری سینگ مواد مختلف

-----؟-----

اگر معادله (۵-۴۱) را در سطح مقطع A ضرب شود، فرمول مفینگ به صورت زیر در می آید:

$$Q = \frac{C_m}{n} A R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}} \quad (۵-۴۲)$$

که Q همان دبی خروجی است.

مثال ۴

مقدار دبی خروجی از کانال ذوزنقه شکل (۵-۱۲) را که عرض قاعده $b=3m$ و وجوه آن شیب یک به یک دارد بدست آورید. در صورتی که عمق کانال $۲m$ و شیب کف آن برابر $۹/۰ \dots$ و سطح واقعی کانال از سیمان ساخته شده است.

حل

با استفاده از جدول (۵-۲) $h=۰.۱۲/۰$ و مساحت برابر است :

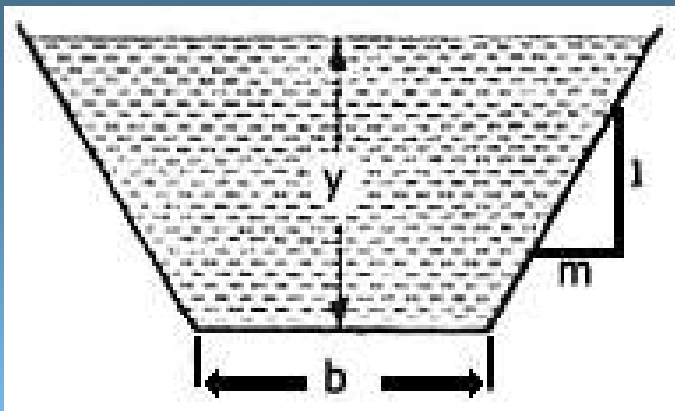
$$A = 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10 m^2$$

$$p = 3 + 2 \times 2\sqrt{2} = 8.66 m$$

و محیط خیس :

با جایگزینی در معادله (۵-۴۲) بدست می آید.

$$Q = \frac{1.49}{0.012} 10 \left(\frac{10}{8.66} \right)^{\frac{2}{3}} (0.0009^{\frac{1}{2}}) = 27.52 m^3/s$$



شکل ۱۲-۵ سطح مقطع دوزنقه شکل

مثال ۶

به چه عمقی نیاز داریم اگر بخواهیم جریان $4 \text{ m}^3/\text{s}$ در یک کانال چوبی مربع شکل به عرض 2 m و شیب کف معادل 0.002 بوجود آید؟

حل

اگر عمق را y بگیریم، $A=2y$ و $p=2+2y$ خواهد بود. از جایگزینی دو معادله (۴۲-۵) نتیجه می شود:

$$4 = \frac{1/00}{0/012} 2y \left(\frac{2y}{2+2y} \right)^{2/3} 0/002^{1/2}$$

$$f(y) = y \left(\frac{y}{1+y} \right)^{2/3} = 0/536$$

پس از ساده کردن :

اگر $y=1$ آنگاه $f(y) = 0/63$ پس با فرض $y=0/89 \text{ m}$ و $f(y) = 0/538$ می شود. بنابراین عمق

درست برابر $0/89 \text{ m}$ است.

مثال ۷

شخصی نیاز به کانال دارد که در آن از فرسایش خاک نیز جلوگیری شود. کانال ذوزنقه ای شکل و شیب ۰/۹۰۰ و قاعده ی آن ۳m و شیب وجوه آن ۲ به است (افقی به عمودی). اگر او از قلوه سنگهای کروی زبر برای آستر کانال استفاده کند $C \gamma_s = 21200 \frac{N}{m^3}$ حداقل D_{50} قلوه سنگها که می تواند استفاده کند، چقدر است؟ دبی جریان در طراحی $28 \frac{m^3}{s}$ فرض شده است و تنشی که قلوه سنگها در مقابل آن مقاومت می کند یا معادله ی

$$\delta = 0/040(\gamma_s - \gamma)D_{50} \quad Pa$$

مشخص می شود که در آن γ_s واحد وزن قلوه سنگها و D_{50} قطر متوسط قلوه سنگها بر حسب متر است.

حل

با مراجعه به جدول (۵-۲) ضریب n قلوه سنگها برابر با ۰/۲۵ با جایگزینی در معادله ی (۵-۴۲)

$$28 = \frac{1/0}{0/03} \frac{[g(3+2y)]^{5/3}}{(3+2\sqrt{5}y)^{2/3}} 0/25$$

بدست می آید.

از حل این معادله ، عمق $y = ۶۲۶/۲$ و شعاع هیدرولیک $R = ۴۷/۱m$ بدست می آید. از معادلات (۵-۳۵) و (۵-۳۶) داریم:

$$\zeta_0 = \gamma R S = 9806 \times 1/47 \times 0/0009 = 12/97 Pa$$

برای محاسبه ی D_{50} از برابری $\delta = \zeta C$ داریم:

$$۰/۴۰(۲۱۲۰۰-۹۸۰۶)D_{50} = ۹۷/۱۲$$

یا

$$D_{50} = ۸۴/۲ \text{ cm}$$

۵-۷ چکیده

توزیع سرعت در جریان آرام ، تراکم ناپذیر دائمی بین صفحات موازی از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$u = \frac{uy}{\alpha} - \frac{1}{2\mu} \frac{d}{d\lambda} (\rho + \gamma h)(ay - a^2)$$

اگر صفحات افقی باشند توزیع فشار هیدرولیکی $P + \gamma h$ برابر با مقداری ثابت است و توزیع سرعت به خط مستقیم خواهد بود . اما اگر صفحات شیبدار ولی ثابت باشند $U=0$ و در نتیجه سرعت سهموی شکل است. و مقدار دبی خروجی در سطح ثابت از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$Q = \int_0^A u dy = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h)a^3$$

برای جریان آرام ، تراکم ناپذیر و یکنواخت بین دو لوله هم محور با شعاع داخلی b و شعاع خارجی a ، توزیع سرعت برابر است با

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h) \left(a^2 - r^2 + \frac{a^2 - b^2}{\ln b/a} \ln a/r \right)$$

اما اگر فقط یک لوله مستدیر شکل به شعاع a داشته باشیم:

$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h)$$

و این سرعت سیال درون لوله مزبور است.

سرعت متوسط نیز چنین خواهد شد.

$$V = -\frac{a^2}{8\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h)$$

که برابر بانصف پیشینه سرعت سیال است و تعداد دبی خروجی برابر است با

$$Q = -\frac{\pi a^2}{8\mu} \frac{d}{d\lambda} (p + \gamma h)$$

لانگهار برای نخستین بار رابطه ی نظری به صورت زیر بدست آورد:

$$L' / D = 0.058 R$$

که L' طول گذار برای ایجاد سرعت سهوی است و R عدد رینولدز می باشد. نیروی کشش به صورت زیر تعریف می شود.

$$\text{نیروی کشش} = C_D A \frac{\rho U^2}{2}$$

که در آن C_D ضریب کشش و A تصویر سطح جسم روی صفحه ای عمود بر مسیر جریان است. نیروی بالابر مولفه ای از نیرو است که از سوی سیال به جسم تحت زاویه ای قائم نسبت به سرعت نزدیکی نسبی وارد می شود.

$$\text{نیروی بالابر} = C_L \frac{A \rho U^2}{2}$$

که در آن C_L ضریب نیروی بالابر است و A مربوط به طول قوس ضربدر طول مایل برای نیروی کشش و نیروی بالابر در سطح آیرودینامیکی می باشد.

نصف زاویه α زیر را زاویه ی ماخ می نامند.

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{ct}{vt} = \sin^{-1} \frac{c}{v}$$

استوکس دریافت که کشش ، نیروی وارد بر کره توسط جریان سیال پیرامونش برابر است با :

$$\text{نیروی کشش} = 6\pi a \mu V$$

که در آن a شعاع کره و u سرعت کره نسبت به سیال در فاصله ی زیادی باشد و رابطه ی زیر برای سرعت نهایی می باشد.

$$U = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu} (\gamma_s - \gamma)$$

که در آن γ وزن مخصوص مایع و γ_s وزن مخصوص کره است.
در جریان تراکم ناپذیر درهم و یکنواخت دائمی در مجرای با سطح مقطع ثابت، تنش برشی
جداره از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$\tau_0 = \lambda \frac{\lambda}{2} V^2$$

که در آن λ ضریب بدون بعدی است و معادله ی انرژی به صورت زیر در می آید.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + \mathfrak{T}_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \mathfrak{T}_2 + \text{افت} \quad 1-2$$

اگر S را افت در واحد وزن در واحد طول کانال بگیریم ، داریم:

$$S = \lambda \frac{V^2}{R 2g}$$

و فرمول شزی به صورت زیر بدست می آید.

$$V \frac{\sqrt{2g}}{8} \sqrt{RS} = C \sqrt{RS}$$

برای جریان دائمی تراکم ناپذیر در عمق ثابت درون کانال باز منشوری شکل داریم.

$$V = \frac{cm}{n} R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}}$$

که در آن مقدار cm برابر با یک ، V سرعت متوسط در سطح مقطع مزبور و R شعاع هیدرولیکی و S افت در واحد وزن در واحد طول کانال یا شیب کف کانال می باشد و n ضریب زبری مطلق است (رجوع شود به جدول ۲-۵) و دبی خروجی برابر است با

$$Q = \frac{cm}{n} A R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}}$$



تست های فصل ۵

۵-۲-۱ تنش برشی در یک سیال که بین دو صفحه موازی جریان دارد :
(الف) در تمام سطح مقطع ثابت است (ب) در روی دو صفحه
صفر است و تا نقطه ی مبنا به طور خطی افزایش می یابد.
(ج) در سطح مقطع مورد نظر به شکل سهمی تغییر می کند
(د) در نقطه ی میانی صفر است و با افزایش فاصله از آن نقطه بطور
خطی تغییر می کند

۵-۲-۲ توزیع سرعت برای جریان سیال بین دو صفحه موازی و ثابت:
(الف) در تمام سطح مقطع ثابت است (ب) در نزدیکی صفحات
صفر است و به طور خطی به طرف مرکز افزایش می یابد
(ج) در سطح مقطع مورد نظر به شکل سهمی تغییر می کند
(د) متناسب با توان $2/3$ فاصله تا نقطه ی میانی تغییر می کند

۵-۲-۳ دبی خروجی سیال از بین دو صفحه موازی که فاصله ی آنها از
یکدیگر a است و یکی از آنها سرعت u دارد و تنش برشی در صفحه
ثابت صفر می باشد برابر است با :

(الف) $ua/3$ (ب) $ua/2$ (ج) $2ua/3$ (د) ua

۵-۲-۴ سیالی در بین دو صفحه موازی آرام حرکت می کند . یکی از صفحات حرکت می کند و تحت گرادیان فشار قرار دارد به طوری که دبی خروجی از بین آنها در هر سطح مقطع ثابتی صفر است . حداقل سرعت در نقطه ای روی می دهد که فاصله آن از صفحه ی ثابت برابر باشد با :

الف) $a/6$ ب) $a/3$ ج) $a/2$ د) $2a/3$

۵-۲-۵ در تست ۵-۲-۴ مقدار حداقل سرعت برابر است با

الف) $-3u/4$ ب) $-2u/3$ ج) $-u/2$ د) $-u/3$

۵-۲-۶ رابطه ی بین فشار و تنش برشی در جریان آرام یک بعدی در جهت X کدام است؟

الف) $dp/dx = \mu dz/dy$ ب) $dp/dy = dz / dx$
 ج) $dp/dy = \mu dz/dx$ د) $dp/dx = dz / dy$

۵-۳-۱ تنش برشی در سیال جاری در لوله :
(الف) در تمام سطح مقطع ثابت است (ب) در جداره صفر است و به
طرف مرکز به طور خطی افزایش می یابد (ج) در مرکز صفحه صفر
و متناسب با شعاع به طور خطی زیاد می شود (د) به شکل سهمی
تغییر می کند

۵-۳-۲ اگر افت فشار برای ۳۰ متر طول از یک خط لوله به قطر
900mm برابر 70Kpa باشد تنش برشی در جدار بر حسب پاسکال
برابر است با :
الف) ۰ (ب) ۳۵۰ (ج) ۷۰۰ (د) ۱۴۰۰

۵-۳-۳ در جریان آرام در لوله ، دبی :
(الف) بطور خطی با تغییر چسبندگی تغییر می کند
(ب) متناسب با مربع شعاع تغییر میکند
(ج) نسبت عکس با افت فشار دارد
(د) نسبت عکس با چسبندگی دارد

۴-۳-۵ اگر لوله ای شیب دار باشد ، بجای $p-dp/d$ از کدام رابطه زیر استفاده می شود ؟

الف) $p-dh/d$ ب) $\gamma dh/dp$ ج) $\rho(P+h)/d$ د) $\rho(p+\gamma h)/d$

۱-۴-۵ در جریان سیال با چسبندگی کم :
الف) اثر چسبندگی به طور چشم گیری کشش وارد بر جسم را افزایش نمی دهد

ب) قضیه ی پتانسیل بیانگر نیروی کشش بر جسم است
ج) اثر چسبندگی محدود به ناحیه ای باریکی در پیرامون جسم می شود
د) کشش ناشی از تغییر شکل روی جسم همواره غالب می شود

۲-۴-۵ نیروی بالابر وارد بر جسم غوطه‌ور در جریان سیال :
الف) ناشی از نیروی شناوری است

ب) همواره در جهت مخالف با جهت گرانی است
ج) مولفه ی نیروی دینامیکی سیال وارد بر جسم عمود بر سرعت نزدیکی نسبی است
د) مولفه ی نیروی دینامیکی سیال وارد بر جسم موازی با سرعت نزدیکی نسبی است

۳-۴-۵ نیروی کشش فشاری ناشی از :

- الف) اصطحاک سطحی است ب) تغییر شکل است
ج) جریان برگشتی است د) شکست جریان پتانسیلی در
نزدیکی نقطه ی سکون پیکانی جسم است

۴-۴-۵ جسمی با دماغه ی محدود و دنباله ای دراز و مخروطی شکل
همواره جهت :

- الف) جریان آرام مناسب است ب) جریان مادون صوت
متلاطم مناسب است
ج) جریان مافوق صوت مناسب است د) جریان در سرعت صوت
مناسب است

۵-۴-۵ اثر تراکم پذیری بر نیروی کشش عبارتست از :

- الف) افزایش آن به مقدار زیاد در نزدیکی سرعت صوت
ب) کاهش آن در نزدیکی سرعت صوت
ج) افزایش سریعتر آن متناسب با توان دوم سرعت به ازای اعداد
ماخ بالا د) کاهش آن در تمامی محدوده ی جریان

۵-۴-۶ سرعت نمایی کره ای که درون سیال چسبنده ای رو به پایین سقوط می کند :

- الف) با توان اول قطر آن تغییر می کند
- ب) به صورت عکس با چسبندگی سیال تغییر می کند
- ج) به صورت عکس مربع قطر آن تغییر می کند
- د) به صورت عکی قطر آن تغییر می کند

۵-۵-۱ شعاع هیدرولیک از

- الف) محیط خیس تقسیم بر سطح بدست می آید
- ب) سطح تقسیم بر مربع محیط خیس بدست می آید
- ج) ریشه ی دوم مساحت مشخص می شود
- د) مساحت تقسیم بر محیط خیس تعیین می شود

۵-۵-۲ شعاع هیدرولیک یک کانال باز با عرض 60mm و عمق 120mm بر حسب میلی متر برابر است با:

- | | | | |
|---------|-------|-------|-------|
| الف) ۳۰ | ب) ۲۴ | ج) ۴۰ | د) ۶۰ |
|---------|-------|-------|-------|

۱-۶-۵ افت جریان در کانال باز به طور کلی
(الف) متناسب با زبری به توان یک تغییر می کند
(ب) متناسب با عکس زبری تغییر می کند
(ج) متناسب با مربع سرعت تغییر می کند
(د) متناسب با سرعت تغییر می کند

۲-۶-۵ آسان ترین مورد محاسبه ی جریان کانال باز عبارتست از
(الف) یکنواخت دائمی (ب) نایکنواخت دائمی (ج) یکنواخت
غیر دائمی (د) به تدریج متغیر

۳-۶-۵ در کانال بازی با عرض زیاد ، شعاع هیدرولیک برابر است با :
(الف) $y/3$ (ب) $y/2$ (ج) $2y/3$ (د) y

فصل ۶

جریان تراکم پذیر

پس از مطالعه ی این فصل باید بتوانید روابط گازهای کامل، آنتروپی، قانون اول و دوم ترمودینامیک، سرعت امواج صوتی و عدد ماخ، جریان ایزوتوپی، شرایط بحرانی، خطوط ریلی و فانو، جریان بی دررو با اصطکاک در کانالها با فرضیات مربوط به آن، حداکثر طول دراین شرایط و جریان بی اصطکاک داخل کانالها با انتقال گرما بنویسید و بخوبی فراگیرید که چگونه در حل مسائل از آنها استفاده می شود.

۶-۱ مقدمه

در فصل قبلی راجع به جریان تراکم ناپذیر و چسبنده بحث کردیم. دراین فصل به جریان تراکم پذیر می پردازیم و متغییر جدیدی به نام چگالی و معادله ای دیگر به نام معادله ی حالت که رابطه ی بین فشار و چگالی را مشخص می کنیم. ارائه خواهد شد. در تجزیه و تحلیل جریان سیال تراکم پذیر از معادلات دیگری چون پیوستگی، تکانه و قانون اول و دوم ترمودینامیک استفاده می شود در بررسی جریان یکنواخت یک بعدی، سرعت و چگالی در هر مقطعی ثابت است. اگر تغییرات چگالی به تدریج و ناچیز باشد، می توان از چگالی متوسط استفاده کرد و سیال را تراکم ناپذیر فرض کرد.

۲-۶ روابط گاز کامل

در فصل ۱ ملاحظه شد که گاز کامل به صورت سیالی است که ثابتهای گرمای ویژه دارد و از قانون گاز زیر پیروی می کند.

$$P = \rho RT$$

(۶-۱)

که در آن ρ فشار، T دما، هم چگالی و R ثابت گاز است. در این بخش نسبت گرمای ویژه و رابطه ی ثابت گرماهای ویژه و ثابت گاز ارائه خواهد شد و رابطه ی انرژی داخلی با آنتالپی و دما مطرح می شود و سرانجام روابط مربوط به آنتروپی و فرآیندهای ایزوتروپی و پلی تروپی برگشت پذیر معرفی می شوند.

C_v گرمای ویژه در حجم ثابت به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

(۶-۲)

که در آن u انرژی داخلی باید به واحد جرم گاز اضافه شود (در حجم ثابت) تا دمای گاز را یک درجه بالا ببرد.

C_p گرمای ویژه در فشار ثابت از رابطه زیر بدست می آید.

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

(۶-۳)

که در آن h آنتروپی در واحد جرم است و از رابطه ی $h = u + \frac{p}{\rho}$ بدست می آید. اما $\frac{p}{\rho} = RT$ و u برای گاز کامل فقط تابعی از دماست. بنابراین h فقط به دما بستگی دارد. در بعضی از گازهای معمولی چون بخار آب، هیدروژن، اکسیژن، و منواکسید کربن و هوا تغییرات گرمای ویژه بین دمای ۰ تا ۳۰۰ بسیار کم است بنابراین برای آنها مقدار متوسطی در نظر گرفته می شود و مانند گاز کامل از آنها استفاده می کنند.

در جدول (۶-۱) گرمای ویژه - برخی از گازهای معمولی در دمای $۷/۲۶^{\circ}\text{C}$ ارائه شده است.

جدول ۶-۱ خواص گازها در فشار کم و دمای $۷/۲۶^{\circ}\text{C}$

گاز	فرمول شیمیایی	جرم مولکولی نسبی	R ثابت گاز j/kg.k	گرمای ویژه Kj/kg.k		گرمای ویژه K
				Cp	Cv	
Air		29.0	287	1.004	0.716	1.40
Carbon Monoxide	CO	28.0	297	1.043	0.745	1.40
Helium	He	4.00	2077	5.233	3.153	1.66
Hydrogen	H ₂	2.02	4121	14.361	10.216	1.40
Nitrogen	N ₂	28.0	297	1.038	0.741	1.40
Oxygen	O ₂	32.0	260	0.917	0.657	1.40
Water vapor	H ₂ O	18.0	462	1.863	1.403	۱.۳۳

برای گازهای کامل، معادله (۶-۲) و (۶-۳) را به صورت زیر می نویسند:

$$du = c_v dT, \quad dh = c_p dT$$

(۶-۴)

و از رابطه ی (۳-۶) داریم:

$$h = u + \frac{p}{\rho} = u + QT \quad (۵-۶)$$

و یا مشتق گیری

$$dh = du + RdT$$

و از جایگزینی (۴-۶) در رابطه ی بالا نتیجه می شود

$$C_p = C_v + R \quad (۶-۶)$$

معادله ی بالا برای تمام گازهایی که از معادله ی (۱-۶) پیروی می کنند ، برقرار است و k نسبت دمای ویژه به صورت زیر تعریف می شود.

$$k = \frac{C_p}{C_v} \quad (۷-۶)$$

با استفاده از این معادله و معادله (۶-۶) داریم

$$C_v = \frac{R}{k-1}, \quad C_p = \frac{K}{K-1}R \quad (۸-۶)$$

رابطه ی آنتروپی

از قانون اول ترمودینامیک می دانیم، گرمای اضافه شده به سیستم برابر با کار انجام شده ی آن سیستم به اضافه افزایش انرژی داخلی سیستم می باشد. اگر S را آنتروپی بگیریم این قانون به صورت زیر در می آید.

$$Tds = du + p d\frac{1}{\rho} \quad (۹-۶)$$

این رابطه برای تمام خالص برقرار است. تغییر انرژی داخلی گاز کامل برابر است با

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) \quad (6-10)$$

و تغییر آنتالپی :

$$h_2 - h_1 = C_p (T_2 - T_1) \quad (6-11)$$

بنابراین تغییر در آنتروپی برابر است با

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{P}{T} d \frac{1}{\rho} = C_v \frac{dT}{T} + R \rho d \frac{1}{\rho} \quad (6-12)$$

و سرانجام با انتگرال

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (6-13)$$

و به کمک معادلات (6-6) و (6-8) نتیجه می شود:

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{k-1} \right] \quad (6-13 \text{ الف})$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] \quad (6-14 \text{ ب})$$

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^K \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-K} \right] \quad (۱۵-۶ ج)$$

معادلات (۱۴-۶)، صورتهای مختلف قانون دوم ترمودینامیک است. اگر فرآیند برگشت پذیر باشد $ds = dqH/T$ و بی دررو باشد $dqH=0$ خواهد بود. بنابراین در فرآیند بی دررو برگشت پذیر $ds=0$ و یا مقدار ثابت S خواهد بود. پس یک فرآیند بی دررو برگشت پذیر، ایزوتروپی می باشد با استفاده از این شرط $S_2=S_1$ و یا

$$\frac{P_1}{\rho_1^k} = \frac{P_2}{\rho_2^k} \quad (۱۵-۶)$$

از ترکیب معادله ی (۱۵-۶) با قانون عمومی گازها به نتیجه زیر می رسیم:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(K-1)/K} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1} \quad (۱۶-۶)$$

تغییر آنتالپی برای فرآیند ایزوتروپی برابر است با

$$h_2 - h_1 = C_P (T_2 - T_1) = C_P T_1 \left[\frac{T_2}{T_1} - 1 \right] = C_P T_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(K-1)/K} - 1 \right] \quad (۱۷-۶)$$

توجه داریم فرآیند پلی تروپی با رابطه ی زیر تعریف می شود:

$$\frac{P}{\rho^n} = \text{مقدار ثابت} \quad (۱۸-۶)$$

رابطه ی بالا تقریبی برای فرآیندهای واقعی است.

مثال ۱

برای هلیوم $C_p = 23/5 \text{ kJ/kg.K}$ و $R = 0.77/2 \text{ kJ/kg.K}$ است ، مقدار C_v و K را بدست آورید.

$$K = \frac{C_p}{C_p - R} = \frac{5/23}{5/23 - 2/077} = 1/66$$

حل

$$C_v = \frac{C_p}{K} = \frac{5/23}{1/66} = 3/15$$

می دانیم

مثال ۲

مقدار R را برای هوا با استفاده از C_p و K در جدول (۱-۶) بدست آورید.

$$R = \frac{k-1}{k} C_p = \frac{1/4-1}{1/4} (1/004) = 0/287 \text{ kJ/kg.K}$$

مثال ۳

تغییرات آنتالپی ۵ کیلوگرم اکسیژن را که در آغاز $p_1 = 13 \cdot \text{kPa abs}$ و $t_1 = 10^\circ \text{C}$ و در پایان $p_2 = 5 \cdot \text{kPa abs}$ و $t_2 = 95^\circ \text{C}$ باشد، محاسبه کنید.

حل

آنتالپی فقط تابعی از دماست ، با توجه به معادله ی (۱۱-۶) داریم:

$$H_2 - H_1 = (5) [C_p (T_2 - T_1)] = 5 \times 0/917 (95 - 10) = 389/7 \text{ kJ}$$

مثال ۴

تغییرات آنتروپی ۵ کیلوگرم بخار آب را در شرایط $p_2=280\text{kPa}$ $t_1 = 43^\circ\text{C}$, $p_1=42\text{ kPa}$ و $t_2 = 3^\circ\text{C}$ تعیین کنید.

حل

با استفاده از معادله ی (۱۴-۶ ج) و جدول (۱-۶) داریم:

$$S_2 - S_1 = 1/403 \ln \left[\left(\frac{273+3}{273+43} \right)^{1/33} \left(\frac{280}{42} \right)^{-0/33} \right] = -1/131 \text{ kJ/kg.K}$$

$$S_2 - S_1 = 4 \times (-1/131) = -4/524 \text{ kg/k}$$

مثال ۵

استوانه حاوی ۲kg نیتروژن تحت فشار $14/0 \text{ Mpa abs}$ و دمای 5°C قرار دارد. اگر فشار به طور ایزونتروپی به $3/0 \text{ Mpa}$ برسد، دمای نهایی و کار انجام شده را محاسبه کنید.

حل

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(k-1)/K}$$

$$= (273 + 5) \left(\frac{0/3}{0/14} \right)^{(1/4-1)/1/4} = 345/6^\circ\text{K} = 72/6^\circ\text{C}$$

از رابطه ی (۱۶-۶) داریم

بنابر پایستگی انرژی، کار انجام شده روی گاز باید برابر با افزایش انرژی داخلی باشد.

بنابراین از فرآیند ایزونتروپی هیچ انتقال گرمایی انجام نمی گیرد، یعنی

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) = \text{کار} / \text{kJ}$$

$$\text{کار} = (2)(0/741)(345/6 - 278) = 100/2 \text{ kJ}$$

مثال ۶

۴۴kg هوا فرآیند پلی تروپی برگشت پذیر را طی می کند و در آن شرایط اولیه از $p_1 = 85 \text{ kPa}$ و $t_1 = 17^\circ \text{C}$ به $p_2 = 140 \text{ kPa}$ تغییر می کند. حجم هوا برابر $28/3 \text{ m}^3$ است. مطلوبست تعیین (الف) فرمول این فرآیند (ب) کار انجام شده روی هوا (ج) تعداد انتقال گرما و (د) تغییرات آنتروپی

حل
(الف)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{85}{0.287(273+16)} = 1.025 \text{ kg/m}^3$$

همچنین

$$\rho_2 = \frac{44}{28/3} = 1.555 \text{ kg/m}^3$$

از معادله ی (۱۸-۶) داریم:

$$\frac{p_1}{\rho_1^n} = \frac{p_2}{\rho_2^n}$$

از این معادله n را بدست می آوریم.

$$n = \frac{\ln(p_2 / p_1)}{\ln(\rho_2 / \rho_1)} = \frac{\ln(140/85)}{\ln(1.555/1.025)} = 1.20$$

بنابر این مقدار ثابت $\frac{p}{\rho^{1/2}} =$ که بیانگر فرآیند پلی تروپی است.

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \text{کار انجام شده هوا} \quad (\text{ب})$$

ولي

$$P_1 V_1^n = P_2 V_2^n = P V^n$$

با انتگرال گیری از رابطه بالا داریم :

$$W = P_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-n} = \frac{mR}{1-n} (T_2 - T_1)$$

ابتدا V_1 را محاسبه می کنیم.

$$V_1 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/n} = 28/3 \left(\frac{140}{85} \right)^{1/1/2} = 42/89 \text{ m}^3$$

در نتیجه کار بدست می آید.

$$W = \frac{140 \times 28/3 - 85 \times 42/89}{1-1/2} = -1582 \text{ kJ}$$

بنابراین کار انجام شده روی گاز برابر با $+1582 \text{ kJ}$ می باشد.

(ج) با توجه به قانون اول ترمودینامیک ، گرمای اضافه شده منهای کار انجام شده توسط گاز باید برابر با افزایش انرژی داخلی باشد:

$$QH - W = U_2 - U_1 = C_v m (T_2 - T_1)$$

ابتدا T_2 را محاسبه می کنیم

$$T_2 = \frac{P_2}{\rho_2 R} = \frac{140000}{1/555 \times 287} = 313/7 K$$

در نتیجه داریم $QH = -1582 + 0/716 \times 44(7/313 - 289) = -8.6 KJ$ یعنی مقدار

$8.6 KJ$ گرما از هوا انتقال یافته است.

(د) برای محاسبه تغییرات آنتروپی از معادله ی (۱۴-۶) استفاده می کنیم.

$$S_2 - S_1 = 0/716 \ln \left[\frac{140}{85} \left(\frac{1/025}{1/555} \right)^{1/4} \right] = -0/0605 \text{ kJ/kg, K}$$

و یا

$$S_2 - S_1 = -0/605 \times 44 = -2/662 \text{ kJ/K}$$

۳-۶ سرعت امواج صوتی و عدد ماخ

سرعت یک اغتشاش کوچک را می توان با بکار گیری معادله ی تکانه و معادله ی پیوستگی تعیین کرد. اکنون سئوالی پیش می آید و آن مربوط به امکان وقوع در کانالی است که آیا امکان تغییر کوچک مانایی در سرعت ، فشار و چگالی وجود دارد؟
با توجه به شکل (۱-۶) ، معادله پیوستگی به صورت زیر در می آید.

$$\rho VA = (\rho + d\rho)(V + dV)A$$

که در آن A سطح مقطع کانال است و این معادله ساده می شود.

$$\rho dV + Vd\rho = 0$$

هنگامی که معادله تکانه را برای حجم کنترل درون خط چین بکار ببریم، داریم

$$PA - (P + d\rho)A = \rho VA(V + dV - V)$$

$$dp = -\rho VdV$$

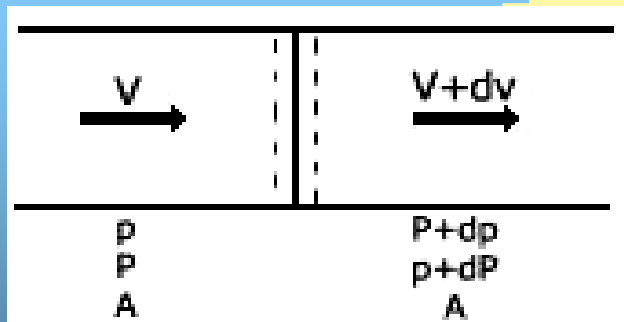
اگر ρdV را از دو معادله ی اخیر حذف کنیم نتیجه می شود.

$$V^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

(۶-۱۹)

شکل ۶-۱

جریان یکنواخت در کانال منشوری همراه با تغییر ناگهانی و کوچک سرعت ، فشار و چگالی



بنابراین اغتشاش کوچک یا تغییر ناگهانی در شرایط جریان پایدار فقط وقتی روی می دهد

که سرعتی معادل $V = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ وجود داشته باشد.

اکنون این مساله را می توان به جریان ناپایدار با اغتشاش کوچک در سیال ساکنی تبدیل کرد و این عمل از برهمتهی تمام سیستم و محیط آن (با بردن سرعت V به سمت چپ) انجام می شود. این سرعت را سرعت صوت در محیط C می نامند. اغتشاش از یک منبع نقطه ای باعث امواج کروی می شود ولی در فاصله ی از منبع این امواج به صورت خطی یا یک بعدی می باشد. معادله ی سرعت به صورت زیر است:

$$C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (6-20)$$

مدول کشسانی حجمی به صورت زیر تعریف می شود.

$$K = - \frac{dp}{dV/V} \quad (6-21)$$

که در آن V حجم سیالی است که تحت تغییرات فشار dp قرار گرفته است. اما

$$\frac{dV}{V} = \frac{dV_s}{V_s} = - \frac{d\rho}{\rho}$$

بنابراین این مدول به صورت زیر در می آید.

$$k = \frac{\rho dP}{d\rho} \quad (6-22)$$

در نتیجه معادله ی (6-20) چنین می شود:

$$c = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (6-23)$$

این معادله برای مایعات و هم گازها بکار برده می شود.
 به علت گذر امواج صوتی، تغییرات فشار و دما بسیار کوچک است. بنابراین فرآیند مزبور تقریباً برگشت پذیر است. همچنین وقتی فرآیند گذر موج نسبتاً سریع و تغییرات دما ناچیز باشد، آن را بی دررو در نظر می گیرند. در حد، این فرآیند را می توان ایزوتروپی گرفت، یعنی

$$p\rho^{-k} = \text{مقدار ثابت} \quad \text{یا} \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{Kp}{\rho}$$

پس

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$$

(۶-۲۲)

و با استفاده از قانون گاز کامل یعنی $p = \rho RT$ داریم:

$$C = \sqrt{KRT}$$

(۶-۲۳)

یعنی سرعت صوت در گاز کامل فقط تابعی از دماست. در نتیجه در جریان تکدما، سرعت صوت ثابت باقی می ماند.

اما در فصل ۴ ملاحظه کردیم که عدد ماخ نسبت سرعت سیال به سرعت موضعی صوت در همان محیط تعریف می شود.

$$M = \frac{V}{C}$$

(۶-۲۴)

بنابراین مجذور عدد ماخ یعنی M^2 را می توان نسبت انرژی جنبشی سیال به گرمایی آن در نظر گرفت.

عددماخ سنجه ی قدر تراکم پذیری را نشان می دهد. در سیال تراکم ناپذیر k نامتناهی است و $m=0$ اما برای گاز کامل

$$K=kp \quad (۲۵-۶)$$

می باشد. هنگامیکه تراکم به صورت ایزوتروپی باشد.

مثال ۷

مدول کشسانی حجمی و چگالی تترا کلرید کربن به ترتیب برابر با $۲۴/۱ \text{ Gpa}$ و ۱۵۹۳ kg/m^3 می باشد. سرعت صوت را در این محیط بدست آورید.

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1/124 \times 10^9}{1593}} = 840 \text{ m/s}$$

حل

مثال ۸

سرعت صوت در هوای خشک سطح دریا به ازای $t = 20^\circ \text{C}$ و در طبقه ی فوقانی جو به ازای $t = -20^\circ \text{C}$ چقدر است؟

$$C = \sqrt{1/4 \times 287(273 + 20)} = 343 \text{ m/s}$$

حل در سطح دریا :

$$C = \sqrt{1/4 \times 287(273 - 20)} = 319 \text{ m/s}$$

در طبقه ی فوقانی جو :

۴-۶ جریان ایزونتروپی

جریان ایزونتروپی یا بی دررو بدون اصطکاک ، جریانی آرمانی است که در جریان گازهای حقیقی نمی توان به آن دست یافت. اما به هنگام گذر جریان از شیبورها و ونتوری مترها که در آنها اثرات اصطکاک بدلیل کوتاهی مسیر ناچیز است و انتقال گرما به دلیل تغییرات بسیار کم ذرات کم است و کوچک بودن گرادیان دما تا حدودی می توان به جریان ایزونتروپی نزدیک شد. دراین بخش راجع به جریان دائمی یک بعدی گاز کامل در کانالهای همگرا و واگرا - همگرا بحث می شود.
با چشم پوشی از تغییرات ارتفاع به معادله اویلر به صورت زیر در می آید:

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (۶-۲۵)$$

و معادله ی پیوستگی عبارتست از :

$$\rho AV = \text{مقدار ثابت} \quad (۲۶/۶)$$

از رابطه بالا دیفرانسیل می گیریم و سپس بر ρAV تقسیم می کنیم:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (۶-۲۷)$$

اکنون از معادله ی (۶-۲۰) $d\rho$ را بدست می آوریم و آن را در معادله ی (۶-۲۵) جایگزین میکنیم.

$$VdV + C^2 \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (۶-۲۸)$$

از حذف $\frac{d\rho}{\rho}$ در دو معادله ی (۶-۲۷) (۶-۲۸) نتیجه می شود:

$$\frac{dA}{dV} = \frac{A}{V} \left(\frac{v^2}{v^2} - 1 \right) = \frac{A}{V} (M^2 - 1) \quad (6-29)$$

توجه داریم معادله اخیر بر این فرض استوار است که جریان دائمی و بی اصطحاک باشد. از معادله (۶-۲۹) معلوم می شود که اگر جریان مادون صوت ($M < 1$) باشد، مقوله $\frac{dA}{dv}$ همواره منفی است. یعنی سطح کانال برای افزایش سرعت باید کاهش یابد. اما اگر $m=1$ باشد، $\frac{dA}{dv} = 0$ و سرعت فقط تا سطح مقطع کمینه یا گلوگاه افزایش می یابد. همچنین برای اعداد ماخ بزرگتر از واحد $\frac{dA}{dv}$ مثبت است برای افزایش سرعت باید سطح مقطع افزایش یابد. بنابراین سیالی که در یک منبع در حالت سکون قرار دارد، برای این که به سرعت مافوق صوت برسد باید ابتدا از داخل یک کانال همگرا و سپس از داخل یک کانال واگرا گذر کند. اگر جریان ایزونتروپی باشد، معادله ی (۶-۱۵) را می توان به صورت زیر در آورد:

$$p = p_1 p_1^{-K} \rho^K \quad (6-28)$$

با مشتق گیری از رابطه ی بالا و جایگزین dp در معادله ی (۶-۲۵) نتیجه می شود:

$$VdV + K \frac{p_1}{\rho_1} \rho^{K-2} d\rho = 0 \quad (6-29)$$

اکنون انتگرال می گیریم:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{K}{K-1} \frac{p}{\rho_1^K} \rho^{K-1} = \text{مقدار ثابت} \quad (6/30)$$

و یا

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K-1} \frac{P_2}{\rho_2} \quad (6-31)$$

اگر این معادله بر حسب دما بیان شود بسیار مفید است ($P = \rho RT$):

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{K}{K-1} RT_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K-1} RT_2 \quad (6-32)$$

برای جریان بی دررویی از یک منبع با شرایط P_0 و p_0 و T_0 در هر سطح مقطعی داریم:

$$\frac{V^2}{2} = \frac{KR}{K-1} (T_0 - T) \quad (6-33)$$

اکنون روابط قبلی را بر حسب عدد ماخ $C_2 = KRT$ می نویسیم، ابتدا داریم:

$$M^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{2kR(T_0 - T)}{(K-1)KRT} = \frac{2}{K-1} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) \quad (6-34)$$
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{K-1}{2} M^2$$

به کمک این معادله و معادله ی (۶-۱۶) به معادلات جریان ایزونتروپی می رسیم:

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{K-1}{2} M^2 \right)^{\frac{K}{K-1}} \quad (6-35)$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{K-1}{2} M^2 \right)^{1/(K-1)} \quad (6-36)$$

هنگامیکه سرعت برابر سرعت صوت شود، شرایط در گلوگاه را شرایط بحرانی گویند و در متن این شرط را با علامت ستاره نشان می دهیم. یعنی به ازای $c^* = v^* = \sqrt{KRT}$, $M = 1$ معادلات (۶-۳۴) تا (۶-۳۶) در گلوگاه در شرایط بحرانی به ازای $K = 4/1$ به صورت زیر در می آیند:

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{2}{K+1} = 0/833 \quad (6-37 \text{ الف})$$

$$\frac{P^*}{P_o} = \left(\frac{2}{K+1} \right)^{K/(K-1)} = 0/528 \quad (6-37 \text{ ب})$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_o} = \left(\frac{2}{K+1} \right)^{1/(K-1)} = 0/634 \quad (6-37 \text{ ج})$$

از این روابط مشخص می شود که برای جریان هوا، دمای مطلق تا ۱۷ درصد از مخزن تا گلوگاه کاهش می یابد. و فشار بحرانی ۸/۵۲ درصد فشار مخزن است و چگالی به حدود ۳۷ درصد کاهش می یابد.

تغییر سطح را می توان به کمک عدد ماخ و معادله پیوستگی برای شرایط بحرانی بدست آورد.

$$\rho AV = \rho^* A^* V^* \quad (6-38)$$

که در آن برای گلوگاه کمینه است. رابطه بالا را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V} \quad (6-38 \text{ الف})$$

اکنون $V^* = c^* = \sqrt{KRT^*}$, $v = cM = M\sqrt{KRT}$ پس :

$$\frac{V^*}{V} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{T^*}{T}} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{1 + [(K-1)/2]M^2}{(k+1)/2} \right\}^{1/2} \quad (6-39)$$

به همین روش برای ρ داریم:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \left\{ \frac{1 + [(k-1)/2]M^2}{(k+1)/2} \right\}^{1/(k-1)} \quad (6-40)$$

با جایگزینی (6-39) و (6-40) در (6-38) نتیجه می شود:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{1 + [(K-1)/2]M^2}{(K+1)/2} \right\}^{(K+1)/2(K-1)} \quad (6-41)$$

معادله اخیر تغییرات سطح کانال را بر حسب عددماخ بدست می دهد. توجه داریم A/A^* هرگز نمی تواند کمتر از واحد شود و به ازای هر مقدار بزرگتر از واحد دو مقدار برای عدد ماخ بدست می آید : یکی کمتر از واحد و دیگری بزرگتر از واحد . به ازای $K=1.4$ معادله (6-41) به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{5 + M^2}{6} \right)^3 \quad (6-42)$$

پیشینه ی آهنگ جریان جرم $\dot{m}_{\max}$ بر حسب مساحت گلوگاه و شرایط مخزن برابر است با :

$$\dot{m}_{\max} = \rho^* A^* V^* = \rho^* \left(\frac{2}{K+1} \right)^{1/(k-1)} A^* \sqrt{\frac{k R T_o}{K+1}} \quad (6-42)$$

اگر در این رابطه جای ρ^* را با ρ^*/RT_o عوض نتیجه می شود:

$$\dot{m}_{\max} = \frac{A^* P_o}{T_o} \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(k-1)}} \quad (6-43)$$

اکنون به ازای $k=1.4$ نتیجه می شود:

$$\dot{m}_{\max} = 0.686 \frac{A^* P_o}{\sqrt{R T_o}} \quad (6-44)$$

بنابراین ملاحظه می شود که آهنگ جریان جرم به طور خطی با A^* ، P_o تغییر می کند و نسبت عکس با جذر T_o دارد.

برای جریان مادون صوت در کانال همگرا - واگرا، سرعت در گلوگاه باید کمتر از سرعت صوت یا $Mt < 1$ باشد (زیر نویس t به معنی گلوگاه است). آهنگ جریان جرم از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\dot{m} = \rho V A = A \sqrt{2 P_o \rho} \cdot \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{p_o} \right)^{2/k} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{(k-1)/k} \right] \quad (6-45)$$

این معادله برای هر سطح مقطعی برقرار است و مادامی که سرعت در گلوگاه مادون صوت است بکار می رود.

جدول (۶-۲) در حال مسائل که در آنها جریان ایزونتروپی و $k = 1.4$ می باشد بسیار مفید است.

مثال ۹

در طرحی برای کانال که بتواند عدد ماخ $3/1$ در خروجی ایجاد کند، مورد نظر است. به ازای فشار $p_0 = 90 \text{ kPa}$ و دمای $t_0 = 25^\circ \text{C}$ آهنگ جریان جرم برابر 1 kg/s است. مطلوبست محاسبه ی (الف) سطح مقطع گلوگاه (ب) سطح مقطع خروجی (ج) سرعت، فشار و دما و چگالی خروجی

جدول ۶-۲ رابطه های ایزونتروپی یک بعدی (برای گاز کامل با $k = 1.4$)

M	ALA^*	P/P_0	ρ/ρ_0	T/T_0	M	ALA^*	P/P_0	ρ/ρ_0	T/T_0
0.00		1.000	1.000	1.000	0.78	1.03	0.669	0.750	0.891
0.01	57.87	0.9999	0.9999	0.9999	0.80	1.04	0.656	0.740	0.886
0.02	28.94	0.9997	0.9999	0.9999	0.82	1.03	0.643	0.729	0.881
0.04	14.48	0.999	0.999	0.9996	0.84	1.02	0.630	0.719	0.876
0.06	9.67	0.997	0.998	0.999	0.86	1.02	0.617	0.708	0.871
0.08	7.26	0.996	0.997	0.999	0.88	1.01	0.604	0.698	0.865
0.10	5.82	0.993	0.995	0.998	0.90	1.01	0.591	0.687	0.860
0.12	4.86	0.990	0.993	0.997	0.92	1.01	0.578	0.676	0.855
0.14	4.18	0.986	0.990	0.996	0.94	1.00	0.566	0.666	0.850
0.16	3.67	0.982	0.987	0.993	0.96	1.00	0.553	0.655	0.844
0.18	3.28	0.978	0.984	0.994	0.98	1.00	0.541	0.645	0.839
0.20	2.96	0.973	0.980	0.992	1.00	1.00	0.528	0.632	0.833
0.22	2.71	0.967	0.976	0.990	1.02	1.00	0.516	0.623	0.828
0.24	2.50	0.961	0.972	0.989	1.04	1.00	0.504	0.613	0.822
0.26	2.32	0.954	0.967	0.987	1.06	1.00	0.492	0.602	0.817
0.28	2.17	0.947	0.962	0.985	1.08	1.01	0.480	0.592	0.810
0.30	2.04	0.939	0.956	0.982	1.10	1.01	0.468	0.582	0.805
0.32	1.92	0.932	0.951	0.980	1.12	1.01	0.457	0.571	0.799
0.34	1.82	0.923	0.944	0.977	1.14	1.02	0.445	0.561	0.794
0.36	1.74	0.914	0.938	0.975	1.16	1.02	0.434	0.551	0.788
0.38	1.66	0.905	0.931	0.972	1.18	1.02	0.423	0.541	0.782
0.40	1.59	0.896	0.924	0.969	1.20	1.03	0.412	0.531	0.776
0.42	1.53	0.886	0.917	0.966	1.22	1.04	0.402	0.521	0.771
0.44	1.47	0.876	0.909	0.963	1.24	1.04	0.391	0.512	0.765
0.46	1.42	0.865	0.902	0.959	1.26	1.05	0.381	0.502	0.759
0.48	1.38	0.854	0.893	0.956	1.28	1.06	0.371	0.492	0.753
0.50	1.34	0.843	0.885	0.952	1.30	1.07	0.361	0.483	0.747
0.52	1.30	0.832	0.877	0.949	1.32	1.08	0.351	0.474	0.742
0.54	1.27	0.820	0.868	0.945	1.34	1.08	0.342	0.464	0.736
0.56	1.24	0.808	0.859	0.941	1.36	1.09	0.332	0.455	0.730
0.58	1.21	0.796	0.850	0.937	1.38	1.10	0.323	0.446	0.724
0.60	1.19	0.784	0.840	0.933	1.40	1.11	0.314	0.437	0.718
0.62	1.17	0.772	0.831	0.929	1.42	1.13	0.305	0.429	0.713
0.64	1.16	0.759	0.821	0.924	1.44	1.14	0.297	0.420	0.707
0.66	1.13	0.747	0.812	0.920	1.46	1.15	0.289	0.412	0.701
0.68	1.12	0.734	0.802	0.915	1.48	1.16	0.280	0.403	0.695
0.70	1.09	0.721	0.792	0.911	1.50	1.18	0.272	0.395	0.690
0.72	1.08	0.708	0.781	0.906	1.52	1.19	0.265	0.387	0.684
0.74	1.07	0.695	0.771	0.901	1.54	1.20	0.257	0.379	0.678
0.76	1.06	0.682	0.761	0.896	1.56	1.22	0.250	0.371	0.672

حل

(الف) از معادله ی (۴۴-۶) داریم:

$$A^* = \frac{\dot{m}_{\max} \sqrt{RT}}{P_o} = \frac{(1) \sqrt{287(273+25)}}{0.686(90000)} = 0.00474 \text{ m}^2$$

(ب) با استفاده از جدول (۲-۶) سطح مقطع خروجی محاسبه می شود:

$$\frac{A}{A^*} = 4/23 \rightarrow A = 423(0.00474) = 0.0200 \text{ m}^2$$

(ج) بار دیگر از جدول مزبور داریم

$$\frac{P}{P_o} = 0.027, \quad \frac{\rho}{\rho_o} = 0.076, \quad \frac{T}{T_o} = 0.357$$

با استفاده از قانون گاز کامل داریم

$$\rho_o = \frac{P_o}{RT_o} = \frac{90000}{(287)(273+25)} = 1.0523 \text{ kg/m}^3$$

بنابراین مقادیر خروجی بدست می آید:

$$P = 0.27 \cdot (90000) = 24300 \text{ Pa}$$

$$T = 0.357 \cdot (273+25) = 100.6 \text{ K} = -172.6^\circ \text{C}$$

$$\rho = 0.076 \cdot (1.0523) = 0.08 \text{ kg/m}^3$$

و سرانجام با استفاده از معادله ی پیوستگی، سرعت خروجی را محاسبه می کنیم

$$V = \frac{\dot{m}_{\max}}{\rho} = \frac{1}{(0.08)(0.020)} = 925 \text{ m/s}$$

مثال ۱۰

تونل واگرا - همگرایی هوا که سطح مقطع گلوگاه آن 372 Cm^2 و سطح مقطع خروج آن 929 Cm^2 است، در نظر بگیرید. فشار مخزان 21 kPa و در حال آن 16°C است. محدوده های عدد ماخ و فشار خروجی را برای جریان ایزونتروپی بدست آورید.
حل :

با استفاده از جدول (۶-۲) یا معادله ی (۶-۴۲) 0.24 و $M=44/2$ بدست می آید. به ازای هر کدام از این عدد ماخ در خروجی شرایط بحرانی وجود دارد. بنابراین برد عدد ماخ برای جریان ایزونتروپی از 0 تا 0.24 و تک تعداد $44/2$ است. اما از همین جدول یا معادله ی (۶-۳۷) به ازای $M=44/2$ و $p=44/13 \text{ kPa}$ و $m=0.24$ و $p=8/21 \text{ kPa}$ می باشد. برد فشار پایین است از $8/21 \text{ kPa}$ تا 21 می باشد و به ازای نقطه ای منحصر بفرد برابر با $44/13 \text{ kPa}$ است.

از معادله ی (۶-۴۴) پیشینه آهنگ جریان جرم بدست می آید.

$$\dot{m}_{\max} = \frac{0.686 \times 0.0372 \times 210000}{\sqrt{287(273+16)}} = 18.61 \text{ kg/s}$$

مثال ۱۱-۶

کانال همگرا - واگرا در مسیر پایین دست جریان هوای خروجی از مخزنی با گلوگاهی به قطر 50 mm قرار دارد. آهنگ جریان جرم را به ازای $P_0=8 \text{ Mpa}$ و $t_0=33^\circ \text{C}$ و $P=5$ در گلوگاه به دست می آید.

$$\rho_0 = \frac{P_0}{RT} = \frac{800000}{(287)(273+33)} = 9.109 \text{ kg/m}^3$$

حل : داریم

از معادله ی (۴۵-۶) نتیجه می شود:

$$n = \frac{\pi}{4} (0.05)^2 \sqrt{2(800000)(9/109) \frac{1/4}{1/4-1} \left(\frac{5}{8}\right)^{2/1/4}} \times \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{0/4} \frac{1/4}{1/4}} = 3.554 \text{ kg/s}$$

۴-۵ امواج متحرک و خطوط ریلی و فانو

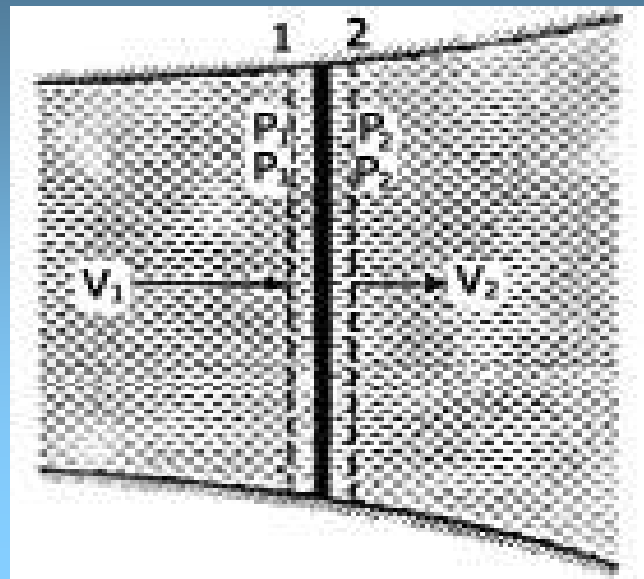
در جریان یک بعدی تنها نوع موج شوکی که پیش می آید موج سقوط تراکم عمودی است. در بحث کامل جریان همگرا - واگرا برای برد فشار پایین دست باید امواج شوک مایل که در خروجی بوجود می آید، در نظر گرفته شود. در بخش قبلی مربوط به جریان ایزونتروپی نشان داده شده که در کانال همگرا - واگرا به ازای برد فشار پایین است. جریان به مادون صوت است و در قسمت واگرا برای جریان مافوق صوت اتفاق می افتد. یعنی در جریان ایزونتروپی، موج شوک در جریان مافوق صوت اتفاق می افتد و جریان را به جریان مادون صوت تبدیل می کند. ضخامت موج شوک بسیار کوچک و از مرتبه ی پویش متوسط آزاد مولکول گاز است. با توجه به شکل (۲-۶)، معادلات حجم کنترل برای جریان بی دررو به صورت زیر می باشد:

$$\text{پیوستگی: } G = \frac{m^0}{A} = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (۴۶-۶)$$

$$\text{انرژی: } \frac{V_1^2}{2} + h_1 = \frac{V_2^2}{2} + h_2 = h_o = \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho} \quad (۴۷-۶)$$

توجه داریم که در آن h آنتالپی است و از رابطه ی $h = u + \frac{p}{\rho} = C_p T$ بدست می آید و h_o مقدار آنتالپی در حال سکون است.

معادله‌ی (۴۷-۶) برای سیالات واقعی و برای بالا است و پایین است جریان برقرار می باشد.
 شکل ۲-۶ موج شوک تراکمی عمودی



در بررسی دقیق تر طبیعت تغییر جریان در فاصله‌ی کوتاه عرض موج شوک که در آن سطح را می توان ثابت فرض کرد، معادلات پیوستگی و انرژی را برای جریان دائمی، بی اصطکاک و بی دررو ترکیب می کنیم. اگر در شرایط بالا است جریان P_1, V_1, ρ_1 ثابت باشد، یک منحنی برای تمام شرایط ممکن در مقطع ۲ رسم می کنیم. خطوطی را که برای جریان جرم ثابت G رسم می شود، خطوط فانو می نامند. اغلب این منحنی را در دستگاه آنتروپی - آنتالپی رسمی می کنند (نمودار h_s). از بخش ۱، معادله‌ی آنتروپی گاز کامل به صورت زیر است:

$$S - S_1 = C_V \ln \left[\frac{P}{P_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^k \right] \quad (۴۸-۶)$$

همچنین از معادله‌ی (۶-۴۷)، برای جریان بی دررو بدون تغییر ارتفاع داریم:

$$h_o = h + \frac{V^2}{2} \quad (۶-۴۹)$$

و معادله‌ی پیوستگی به ازای هیچ تغییری در سطح مقطع (معادله‌ی ۶-۴۶):

$$G = \rho V \quad (۶-۵۰)$$

اما از معادله‌ی حالت می توان بر حسب kh بر حسب P و ρ به صورت زیر بیان کرد:

$$h = C_p T = \frac{C_p P}{R\rho} \quad (۶-۵۱)$$

از حذف V , ρ , P از این چهار معادله نتیجه می شود:

$$S = S_1 + C_v \ln \left[\frac{\rho_1^K}{P_1} \frac{R}{C_v} \left(\frac{\sqrt{2}}{G} \right)^{K-1} \right] + C_v \ln [h(h_o - h)^{(k-1)/2}] \quad (۶-۵۲)$$

که در شکل (۶-۳) بدون مقیاس این منحنی رسم شده است. اگر بخواهیم آنتروپی پیشینه را بدست آوریم از معادله‌ی (۶-۵۲) نسبت به h مشتق می گیریم و حاصل را برابر صفر قرار میدهیم.

(مقدار پیشینه را با زیرنویس a نشان می دهیم):

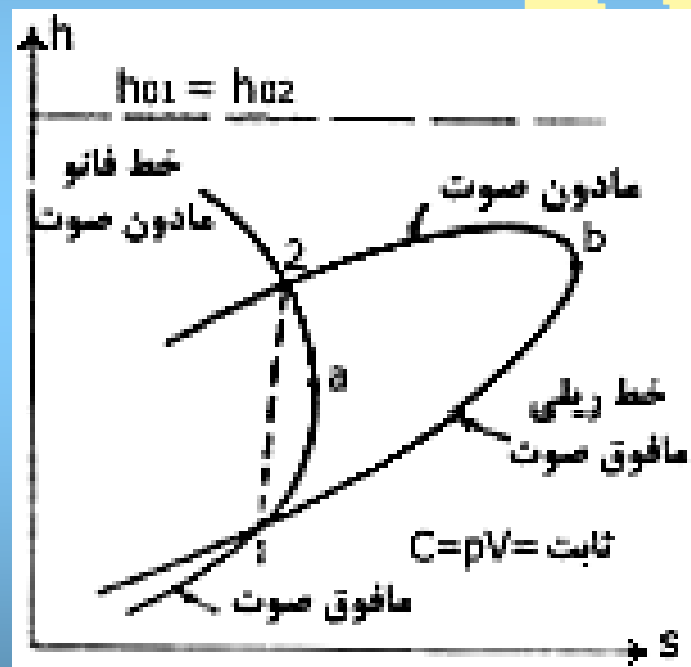
$$\frac{ds}{dh} = 0 = \frac{1}{ha} - \frac{k-1}{2} \frac{1}{h_o - h_a} \quad \text{یا} \quad h_a = \frac{2}{k+1} h_o$$

$$h_o = \frac{K+1}{2} h_a = h_a + \frac{Va^2}{2}$$

بنابراین Va بدست می آید:

$$V_a^2 = (k-1)h_a = (k-1)C_p T_a = (k-1)\frac{KR}{k-1}T_a = KRT_a = C_a^2 \quad (۶-۵۳)$$

شکل ۳-۶ خطوط ریلی و فانو



در نتیجه، آنتروپی پیشینه در نقطه‌ی a به ازای $M=1$ یا شرایط صوتی برقرار است و به ازای $h > h_a$ جریان مادون صوت و $h < h_a$ جریان ما فوق صوت است. دو شرط، قبل و بعد از شوک باید روی خط فانو قرار گیرد. توجه شود که در بحث خطوط فانو از معادله‌ی تکانه استفاده نکرده ایم.

خطوط ریلی

شرایط قبل و بعد از شوک باید نیز در معادلات پیوستگی و تکانه صدق کنند. فرض می کنیم شرایط بالا دست جریان و سطح مقطع ثابت باشد. با استفاده از معادلات (۶-۴۸) و (۶-۵۰) و (۶-۵۱) و (۶-۴۶) خطوط ریلی بدست می آید. از حذف V در معادلات پیوستگی و تکانه نتیجه می شود:

$$P + \frac{G^2}{\rho} = B \quad \text{مقدار ثابت} \quad (۶-۵۴)$$

اکنون P را از این معادله و معادله آنتروپی حذف می کنیم:

$$S = S_1 + C_V \ln \frac{\rho_1^K}{P_1} + C_V \ln \frac{B - G^2 / P}{\rho^K} \quad (۶-۵۵)$$

آنتالپی را نیز بر حسب ρ و شرایط بالا دست جریان بیان می کنیم:

$$h = C_V T = C_V \frac{P}{R P^0} = \frac{C_V}{R} \frac{1}{\rho} (B - G^2 / \rho) \quad (۶-۵۶)$$

از دو معادله S بر حسب h و پارامتر ρ تعیین می شود و نمودار آن در شکل (۶-۳) رسم شده است و این خط ریلی است. مقدار آنتروپی پیشینه از محاسبه $dh/d\rho$ و $ds/d\rho$ و تقسیم آن دو و برابری با صفر بدست می آید:

$$\frac{dS}{dh} = \frac{C_V}{C_P} R \rho_b \frac{G^2 / [\rho_b (B - G^2 / \rho_b)] - k}{2G^2 / \rho_b - B} = 0$$

توجه داریم باید مخرج کسر بالا مخالف صفر باشد. پس

$$k = \frac{G^2}{\rho_b (B - G^2 / \rho_b)} = \frac{\rho_b^2 V_b^2}{\rho_b P_b}$$

یا

$$V_b^2 = \frac{kPb}{\rho b} = C_b^2$$

(۵۷-۶)

یعنی $M=1$ می باشد. چون شرایط جریان باید روی هر دو منحنی قرار داشته باشد، بنابراین دقیقاً قبل و بعد از موج شوک، باید از یک نقطه تقاطع سریع به نقطه تقاطع دیگر تغییر کند. چون آنتروپی کاهش نمی یابد، نقطه بالا دست جریان باید در محل تقاطع با خط آنتروپی باشد. برای کلیه گازها، این تلاقی در قسمت مادون صوت، آنتروپی بزرگتر دارد. بنابراین شوک از مافوق به مادون صوت انجام می شود.

۶-۶ جریان بی در رو با اصطکاک در کانالها

ابتدا توجه داریم که در این بخش فرضهای زیر انجام می شود:

- ۱- گاز کامل است یعنی گرمای ویژه ثابت می باشد.
 - ۲- جریان دایمی و یک بعدی است.
 - ۳- جریان بی در رو است.
 - ۴- ضریب اصطکاک در سر تا سر طول لوله ثابت می باشد.
 - ۵- قطر موثر کانال چهار برابر شعاع هیدرولیکی است (سطح مقطع تقسیم بر محیط).
 - ۶- تغییرات ارتفاع نا چیز است.
 - ۷- هیچ کاری به جریان داده یا از آن گرفته نمی شود.
- و معادلات کنترل عبارتند از: پیوستگی، انرژی تکانه و حالت و سطح مقطع کانال یا لوله ثابت فرض می شود. بنابراین یک ذره در انتهای بالا دست جریان درون کانال را می توان با نقطه ای روی خط فانو و با در نظر گرفتن آنتالپی سکون h_0 و آهنگ جریان جرم G در واحد سطح نشان داد.

همان طوری که ذره به پایین دست جریان حرکت می کند، خواص آن تغییر خواهد کرد، زیرا اصطحاک یا بازگشت ناپذیری در جریان بی در رو باعث می شود آنتروپی همواره افزایش یابد. از این رو نقطه ای که بیانگر این ویژگی هاست در امتداد خط فانو به سوی بیشینه ی نقطه S حرکت می کند که در آن نقطه $M=1$ است. اگر کانال با شیپوره ی همگرا - واگرا جریان را هدایت کند و در آغاز جریان مافوق صوت باشد آنگاه سرعت در پایین دست جریان کاهش می یابد و همین طور بر عکس اگر جریان در آغاز مادون صوت باشد در پایین دست سرعت افزایش می یابد.

می توان طول یک لوله را با توجه به شرایط بالا دست جریان، آنچنان دقیق تعیین کرد که سرعت در پایین دست جریان لوله مساوی صوت $M=1$ شود. بنابراین برای لوله های کوتاه تر از این لوله، سرعت جریان در خروجی به سرعت صوت نمی رسد ولی برای لوله های طویل تر از لوله ی مزبور اگر جریان مافوق صوت باشد، امواج شوک و اگر جریان مادون صوت باشد، خفگی بوجود می آید. خفگی یعنی حالتی است که در آن آهنگ جریان جرم مشخص انجام نمی گیرد و جریان کمتری اتفاق می افتد.

در جدول (۳-۶) تغییر خواص گاز را در جریان بی در رو از درون کانالی با سطح مقطع ثابت نشان می دهد. توجه داریم در کانال با سطح مقطع ثابت، سرعت نمی تواند به تدریج از مادون صوت به مافوق صوت و برعکس تغییر کند.

معادله ی تکانه را برای طول δx کانال می نویسیم (شکل ۴-۶):

$$PA - CP + \frac{dP}{dx} \delta x) A - \zeta_o \pi D \delta x = \rho VA \left(V + \frac{dv}{dx} \delta x - V \right)$$

و یا

$$dp + \frac{3\zeta_o}{D} dx + \rho V dv = 0$$

(۵۸-۶)

اگر ζ_o را بر حسب ضریب اصطکاک داریسی - وایسباخ f بنویسیم:

$$\zeta_o = \frac{\rho f V^2}{8} \quad (6-59)$$

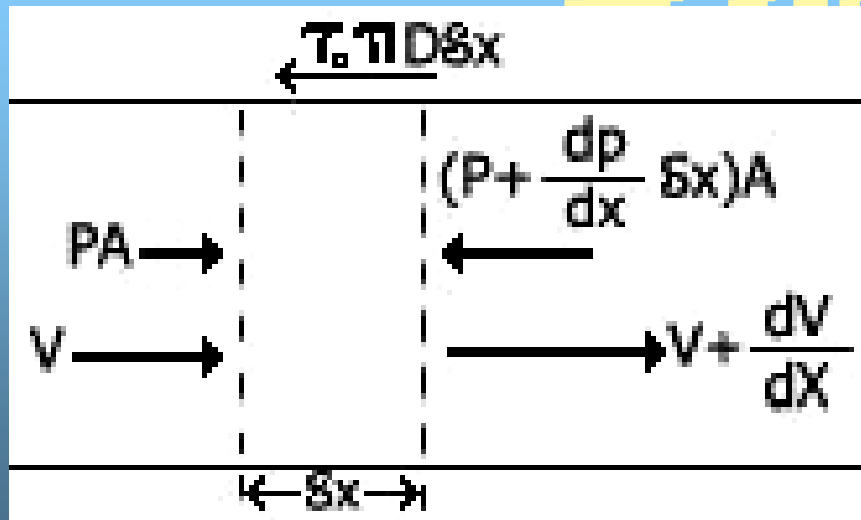
آنگاه نتیجه می شود

$$dp + \frac{f \rho V^2}{2D} dx + \rho V dv = 0 \quad (6-60)$$

اگر f ثابت باشد، این معادله را می توان به معادله ای بر حسب x به طوری که تابعی از عدد N باشد، تبدیل کرده برای این عمل، معادله ی بالا بر P تقسیم می کنیم:

$$\frac{dp}{p} + \frac{f}{2D} \frac{\rho V^2}{P} dx + \frac{\rho V}{P} dv = 0 \quad (6-61)$$

شکل ۴-۶ کاربرد معادله ی تکانه



اکنون هر جمله را بر حسب M بیان می کنیم. درجمله‌ی میانی با استفاده از تعریف $M = \frac{V}{C}$ داریم:

$$V^2 = M^2 \frac{kp}{\rho} \quad (۶-۶۲ \text{ الف})$$

یا

$$\frac{\rho V^2}{P} = kM^2 \quad (۶-۶۲ \text{ ب})$$

همچنین معادله‌ی (۶-۶۲ الف) را به صورت زیر در می آوریم:

$$\frac{\rho V dv}{P} = kM^2 \frac{dV}{V} \quad (۶-۶۳)$$

اکنون $\frac{dV}{V}$ را بر حسب M بیان می کنیم، از معادله‌ی انرژی زیر مشتق می گیریم:

$$h_o = h + \frac{V^2}{2} = CpT + \frac{V^2}{2} \quad (۶-۶۴)$$

یعنی

$$CpdT + VdV = 0 \quad (۶-۶۵)$$

معادله‌ی بالا را بر $V^2 = M^2 KRT$ تقسیم می کنیم تا نتیجه شود.

$$\frac{C_p}{R} \frac{1}{kM^2} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{V} = 0 \quad (۶-۶۶)$$

$$\text{اما } C_p R = \frac{K}{(k-1)} \text{ پس}$$

$$\frac{dT}{T} = -M^2 (k-1) \frac{dV}{V} \quad (۶-۶۷)$$

همچنین با مشتق گیری از $V^2 = M^2 KRT$ و تقسیم آن بر V^2 نتیجه می شود:

$$2 \frac{dV}{V} = 2 \frac{dM}{M} + \frac{dT}{T} \quad (6-68)$$

اکنون $\frac{dT}{T}$ از دو معادله ی اخیر حذف می کنیم:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\frac{dM}{M}}{[(k-1)/2]M^2 + 1} \quad (6-69)$$

و سرانجام از معادله ی اخیر و معادله ی (6-63) $\frac{dV}{V}$ را حذف می کنیم تا نتیجه شود:

$$\frac{\rho V}{P} dv = \frac{KMdM}{[(k-1)/2]M^2 + 1} \quad (6-70)$$

و بالاخره $\frac{dP}{P}$ را بر حسب M بیان می کنیم. از $P = \rho RT$ و $C = \rho V$ داریم.

$$PV = GRT \quad (6-71)$$

با مشتق گیری از آن داریم

$$\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \quad (6-72)$$

و از معادلات (6-67) و (6-69) استفاده کنیم تا $\frac{dT}{T}$ و $\frac{dV}{V}$ حذف شوند:

$$\frac{dP}{P} = - \frac{(k-1)M^2 + 1}{[(k-1)/2]M^2 + 1} \frac{dM}{M} \quad (6-73)$$

اکنون با جایگزینی معادلات (۶-۶۲) و (۶-۷۰) و (۶-۷۳) در معادله‌ی (۶-۶۱) بدست می‌آید:

$$\frac{f}{D} dx = \frac{2(1-M^2)}{kM^3 \{[(k-1)/2]M^2 + 1\}} dM \quad (۶-۷۴ \text{ الف})$$

و یا

$$\frac{f}{D} dx = \frac{2dM}{kM^3} - \frac{k+1}{k} \frac{dM}{M \{[(k-1)/2]M^2 + 1\}} \quad (۶-۷۴ \text{ ب})$$

اکنون از معادله‌ی (۶-۷۴) می‌توان انتگرال گرفت و با فرض ($x=0$, $M=M_o$) و ($X=\lambda$, $M=M$) نتیجه می‌شود:

$$\frac{f\lambda}{D} = -\frac{1}{KM^2} \left| \frac{M}{M_o} - \frac{K+1}{2K} \ln \frac{M^2}{[(k-1)/2]M^2 + 1} \right| \frac{M}{M_o} \quad (۶-۷۵ \text{ الف})$$

و یا

$$\frac{f\lambda}{D} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{M_o^2} - \frac{1}{M^2} \right) + \frac{k+1}{2k} \ln \left[\left(\frac{M_o}{M} \right)^2 \frac{(k-1)M^2 + 2}{(k-1)M_o^2 + 2} \right] \quad (۶-۷۵ \text{ ب})$$

به ازای $K = \epsilon/1$ معادله‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{f\lambda}{D} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_o^2} - \frac{1}{M^2} \right) + \frac{6}{7} \ln \left[\left(\frac{M_o}{M} \right)^2 \frac{M^2 + 5}{M_o^2 + 5} \right] \quad (۶-۷۶)$$

اگر M_o بزرگتر از ۱ باشد، M نمی‌تواند کمتر از ۱ شود و برعکس اگر M_o کمتر از ۱ باشد، M نمی‌تواند بزرگتر از ۱ شود. برای شرایط دومی $M=1$ و $K = \epsilon/1$ داریم:

$$\frac{fL_{\max}}{D} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_o^2} - 1 \right) + \frac{6}{7} \ln \frac{6M_o^2}{M_o^2 + 5} \quad (۶-۷۷)$$

مثال ۱۲

هوا از درون لوله ای به قطر داخلی ۵۰ میلی متر و $f=0.02$ جریان دارد. اگر عدد ماخ در ورودی لوله برابر با ۳۰٪ باشد. حداکثر طول لوله را محاسبه کنید.

حل

از معادله‌ی (۶-۷۷) داریم:

$$\frac{0.02}{0.05} L_{\max} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{0.3^2} - 1 \right) + \frac{6}{7} \ln \frac{6 \times 0.3^2}{0.3^2 + 5}$$

پس

$$L_{\max} = 13/25 \text{ m}$$

با انتگرال گیری، فشار و سرعت دما را نیز می توان بر حسب عدد ماخ بیان کرد. برای این که این عمل آسان شود، معادلات مزبور را بین شرایط بالا دست جریان و شرایطی که در آن $M=1$ باشد و با P^* , T^* , V^* نشان داده شده است بدست می آوریم:

$$\frac{P^*}{P_o} = M_o \sqrt{\frac{(k-1)M_o^2 + 2}{k+1}} \quad (6-78)$$

$$\frac{V^*}{V_o} = \frac{1}{M_o} \sqrt{\frac{(k-1)M_o^2 + 2}{k+1}} \quad (6-79)$$

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{(k-1)M_o^2 + 2}{k+1} \quad (6-80)$$

مثال ۱۳

در بالا دست جریان درون لوله ای به قطر داخلی ۱۰۰mm و $f = ۰.۰۲$ هوا با فشار ۱۰۰kPa و $t = ۱۶^{\circ}\text{C}$ و عدد ماخ مساوی ۳ جریان دارد. مقادیر T^* , $L_{\max}$, P^* , V^* را محاسبه کنید.

حل

از معادله‌ی (۶-۷۷) داریم:

$$\frac{0.02L_{\max}}{0.1} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{6} - 1 \right) + \frac{6}{7} \ln \frac{6 \times 3^2}{3^2 + 5}$$

$$L_{\max} = ۶۱/۲ \text{ m}$$

پس

سرعت ورودی برابر است با:

$$V = \sqrt{KRTM} =$$

$$= \sqrt{1/4 \times 287(273 + 16) \times 3} = 1022 \text{ m/s}$$

از معادله‌ی (۶-۷۸) داریم:

$$\frac{p^*}{100000} = 3 \sqrt{\frac{0.4 \times 3^2 + 2}{2.4}} = 4/583 \rightarrow P^* = 458 \text{ kPa}$$

و از معادله‌ی (۶-۷۹) نتیجه می‌شود:

$$\frac{V^*}{1022} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{0.4 \times 3^2 + 2}{2.4}} = 0.509 \rightarrow V^* = 520 \text{ m/s}$$

و سرانجام از معادله‌ی (۶-۸۰) داریم:

$$\frac{T^*}{289} = \frac{0.4 \times 3^2 + 2}{2.4} = \frac{7}{3} \rightarrow T^* = 674 \text{ K}$$

مثال ۱۴

با توجه به مثال ۱۳ مقادیر P_o' , T_o' , V_o' را در جایی که $M=0.2$ است بدست آورید.
حل همان محاسبات مثال قبلی را انجام می دهیم ولی $M=2$ می گیریم.

$$\frac{0.02}{0.1} L_{\max} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) + \frac{6}{7} \ln \frac{6 \times 2^2}{2^2 + 5}$$

$$L_{\max} = 526/1 \text{ m}$$

و یا

بنابراین فاصله ی مقطعی که $M=2$ تا قسمت بالا دست جریان برابر است با

$$61/2 - 53/1 = 0.8/1 \text{ m}$$

برای محاسبه ی T_o' , V_o' , P_o' داریم

$$\frac{458000}{P_o'} = 2 \sqrt{\frac{0.4 \times 2^2 + 2}{2.4}} = 2/45 \rightarrow P_o' = 187 \text{ kPa}$$

$$\frac{520}{V_o'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0.4 \times 2^2 + 2}{2.4}} = 0.6124 \rightarrow V_o' = 849 \text{ m/s}$$

$$\frac{674}{T_o'} = \frac{0.4 \times 2^2 + 2}{2.4} = \frac{3}{2} \rightarrow T_o' = 449 \text{ K}$$

۶-۷ جریان بی اصطکاک داخل کانالها با انتقال گرما

در این بخش جریان دائمی گاز کامل را داخل کانالی با سطح مقطع ثابت بررسی می کنیم. فرض می شود اصطکاک وجود نداشته باشد و هیچ کاری روی جریان یا توسط جریان انجام نگرفته باشد. معادلات لازم در تجزیه و تحلیل این به قرار زیر است.

پیوستگی $G = \frac{m}{A} = \rho V$ (۶-۸۱)

تکانه $P + \rho V^2 = \text{مقدار ثابت}$ (۶-۸۲)

انرژی $q_H = h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$ (۶-۸۳)

$$= C_p (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = C_p (T_{o2} - T_{o1})$$

T_{o2} , T_{o1} دماهای سکون ایزونتروپی است یعنی: دماهای مقطعی که در آن جریان به طور ایزونتروپی به حالت سکون درآید.

خط ریلی که از حل معادلات تکانه و پیوستگی برای قطع ثابتی با چشم پوشی از اصطکاک بدست می آید، بسیار مفید است. ابتدا V را در معادلات (۶-۸۱) و (۶-۸۲) حذف می کنیم. داریم.

$$P + \frac{G^2}{\rho} = \text{مقدار ثابت} \quad (۶-۸۴)$$

که همان معادله‌ی (۶-۵۴) است و نمودار آن مانند شکل (۶-۵) خواهد شد. چون هیچ افقی نداریم، بنابراین آنتروپی زمانی افزایش می‌یابد که گرما اضافه شود و در نتیجه باید خواص گاز مطابق شکل (۶-۵) تغییر کند. یعنی به طرف نقطه‌ای که آنتروپی بیشینه را نشان می‌دهد، حرکت کند. در نقطه‌ای که آنتروپی حداکثر است، به ازای تغییرات کوچک h ، آنتروپی تغییر نمی‌کند و شرایط ایزونتروپی در این نقطه بکار می‌رود. سرعت صوت در این شرایط از معادله‌ی $C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ بدست می‌آید. از معادله‌ی (۶-۸۴) دیفرانسیل می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{G^2}{\rho^2} = V^2 \quad (۶-۸۵)$$

بنابراین روی خط ریلی در نقطه‌ای که آنتروپی بیشینه است $V = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ و $M=1$ خواهد شد یعنی شرایط صوتی برقرار است.

از معادله‌ی (۶-۸۳) ملاحظه می‌شود که افزایش در فشار سکون ایزونتروپی معیاری در مقدار گرمای اضافه شده می‌باشد. از رابطه‌ی گاز کامل و $V^2 = M^2 KRT$ و پیوستگی داریم

$$PV = GRT, \quad pV^2 = Kpm^2$$

اکنون از معادله‌ی تکانه داریم

$$P_1 + KP_1M_1^2 = P_2 + KP_2M_2^2$$

و یا

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 + KM_2^2}{1 + KM_1^2} \quad (۶-۸۶)$$

و در حالت $P_2 = P^*$ و $M_2=1$ داریم.

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+K}{1+KM^2} \quad (6-87)$$

که در آن P فشار هر نقطه ی کانال و M عدد ماخ همان نقطه است. در حالت مادون صوت، با افزایش M به سمت راست، P باید کاهش یابد و در حالت مافوق صوت، با کاهش M به سمت راست، P باید افزایش یابد. در ادامه ی بحث، از معادله ی انرژی استفاده می کنیم.

$$CPT_o = \frac{KR}{K-1} T_o = \frac{KR}{K-1} T + \frac{V^2}{2}$$

که در آن T_o دمای سکون ایزونتروپی و T دمای جریان آزاد همان مقطع است. معادله ی بالا را در مقطع ۱ بکار می بریم، پس از تقسیم بر $(K-1)RT_1$ داریم.

$$\frac{T_{o1}}{T_1} = 1 + (K-1) \frac{M_1^2}{2} \quad (6-88)$$

و همین طور در مقطع ۲:

$$\frac{T_{o2}}{T_2} = 1 + (K-1) \frac{M_2^2}{2} \quad (6-89)$$

اگر دو معادله اخیر را بر هم تقسیم کنیم:

$$\frac{T_{o1}}{T_{o2}} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2} \quad (6-90)$$

اکنون ثبت $\frac{T_1}{T_2}$ را بر حسب اعداد ماخ بدست می آوریم:

قانون گاز کامل را برای دو حالت ۱ و ۲ می نویسیم و بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (۶-۹۱)$$

از پیوستگی داریم $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}$ و از تعریف عدد ماخ

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{KRT_1}}$$

$$M_2 = \frac{V_2}{\sqrt{KRT_2}}$$

و

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

بنابراین

پس

$$(۶-۹۲)$$

از دو معادله ی (۶-۹۱) و (۶-۹۲) $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ را حذف می کنیم تا بدست آید:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \right)^2$$

$$(۶-۹۳)$$

با جایگزینی این معادله در (۶-۹۰) نتیجه می شود:

$$\frac{T_{o1}}{T_{o2}} = \left(\frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \right)^2 \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2}$$

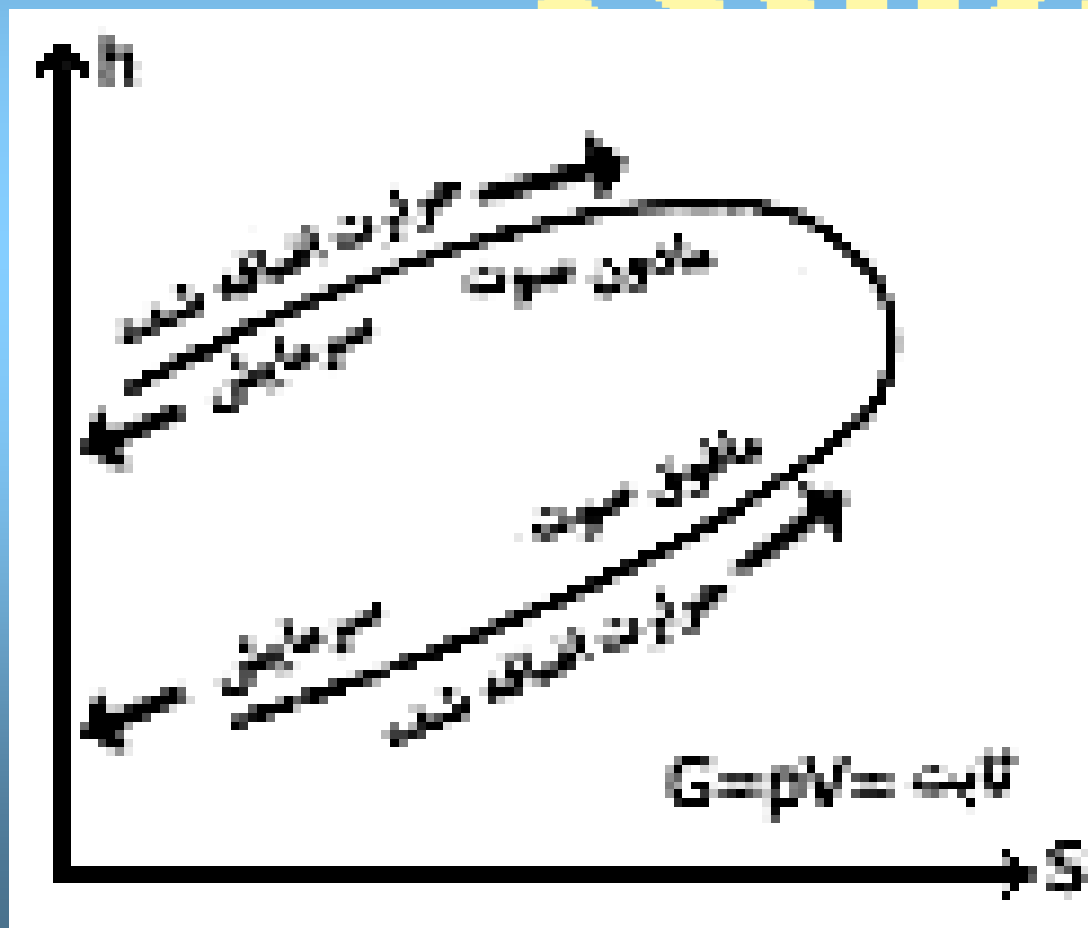
$$(۶-۹۴)$$

اگر این معادله برای مقطع پایین دست جریان به ازای $T_{o2}=T_o^*$ و $M_2=1$ بکار رود و زیرنویس را برای مقطع بالادست جریان حذف کنیم، بدست می آید:

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{M^2(k+1)[2+(k-1)M^2]}{(1+kM^2)^2} \quad (۹۵-۶)$$

تغییرات خواص جریان در جدول (۶) آمده است.

شکل ۵-۶ خط ریلی



جدول ۴-۶ روند تغییرات خواص

-----؟-----

مثال ۱۵

هوا با $V_1 = 91 \text{ m/s}$ و $P = 280 \text{ kPa}$ و $t = 16^\circ \text{C}$ در داخل کانالی به قطر 100 mm جریان دارد. اگر بخواهیم در خروجی شرایط صوتی داشته باشیم، چه مقدار انتقال گرما در واحد جرم لازم می باشد؟ فشار، دما و سرعت را در خروجی تعیین کنید.

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{KRT_1}} = \frac{91}{\sqrt{1/4 \times 287(273 + 16)}} = 0.267$$

حل

دمای سکون ایزونتروپی در ورودی برابر است با:

$$T_{o1} = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) = 289(1 + 0.2 \times 0.267^2) = 293 \text{ K}$$

دمای سکون در خروجی برابر است با:

$$T_o^* = \frac{T_o (1 + kM^2)^2}{(k+1)M^2 [2 + (k-1)M^2]}$$

$$= \frac{293(1 + 1/4 \times 0.267^2)^2}{2/4 \times 0.267^2 [2 + 0/4 \times 0.267^2]} = 1021 \text{ K}$$

گرمای انتقالی از یک کیلوگرم هوای جاری برابر است با:

$$q_H = C_p (T_o^* - T_{o1}) = 1004(1021 - 293) = 731 \text{ kJ/kg}$$

$$P^* = P \frac{1 + kM^2}{k+1} = \frac{280}{2/4} (1 + 1/4 \times 0.267^2) = 128.3 \text{ kPa}$$

و فشار خروجی (معادله ۴-۸۷):

و دما (معادله‌ی ۹۳-۶):

$$T^* = T \left[\frac{1 + kM^2}{(k+1)M} \right]^2 = 289 \left[\frac{1 + 1/4 \times 0/267^2}{2/4 \times 0/267} \right]^2 = 851/3 \text{ K}$$

و سرعت در خروجی:

$$V^* = C^* = \sqrt{kRT^*} = \sqrt{1/4 \times 287 \times 851/3} = 585 \text{ m/s}$$

مثال ۱۶

با توجه به مثال قبلی فشار و دما و سرعت را در جایی که $M=0.7$ است محاسبه کنید.
حل

از معادله‌ی (۸۷-۶) داریم:

$$P = P^* \frac{k+1}{1+kM^2} = \frac{128/3 \times 2/4}{1+1/4 \times 0/7^2} = 182/6 \text{ kPa}$$

و از معادله‌ی (۹۳-۶) دما را محاسبه می‌کنیم:

$$T = T^* \left[\frac{(k+1)M}{1+kM^2} \right]^2 = 851/3 \left[\frac{2/4 \times 0/7}{1+1/4 \times 0/7^2} \right]^2 = 845 \text{ K}$$

و سرانجام سرعت را بدست می‌آوریم.

$$V = M \sqrt{kRT} = 0/7 \sqrt{1/4 \times 287 \times 845} = 407/8 \text{ m/s}$$

۸-۶ چکیده

رابطه‌ی گاز کامل بصورت $P = \rho RT$ به کمک انرژی داخل و از آن گرمای ویژه در حجم ثابت

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{k-1}$$

گرمای ویژه در فشار ثابت

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P = \frac{k}{k-1} R$$

و نسبت گرمایی ویژه به صورت زیر تعریف می شود.

$$K = C_P / C_V$$

بدست می آید.

رابطه‌ی آنتروپی برای این گازها به صورت زیر است.

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{k-1} \right] = C_V \ln \left[\frac{P_2}{P_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right]$$

$$= C_V \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^k \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1-k} \right]$$

رابطه‌ی فرآیند ایزوتروپی به صورت زیر است:

$$\frac{P_1}{\rho_1^k} = \frac{P_2}{\rho_2^k}$$

و فرآیند پلی تروپی با رابطه‌ی زیر تعریف می شود:

$$\frac{P}{\rho^n} = \text{مقدار ثابت}$$

معادله‌ی سرعت صوت از رابطه‌ی مشخص می شود:

$$C = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{KRT}$$

و مدول کشسانی حجمی چنین تعریف می شود:

$$K = -\frac{dP}{dV/V}$$

و عدد ماخ $M = V/C$ است.

معادلات جریان ایزونتروپی به صورت زیر می باشد.

$$\frac{P_o}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{k/(k-1)}$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/(k-1)}$$

پیشینه‌ی آهنگ جریان جرم از رابطه زیر بدست می آید.

$$\dot{m}_{\max} = A * \frac{P_o}{T_o} \sqrt{\frac{K}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)}}$$

معادله‌ی پیوستگی به صورت زیر تعریف می شود:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho_1 v_1 = \rho_2 V_2$$

و معادله‌ی انرژی چنین می باشد:

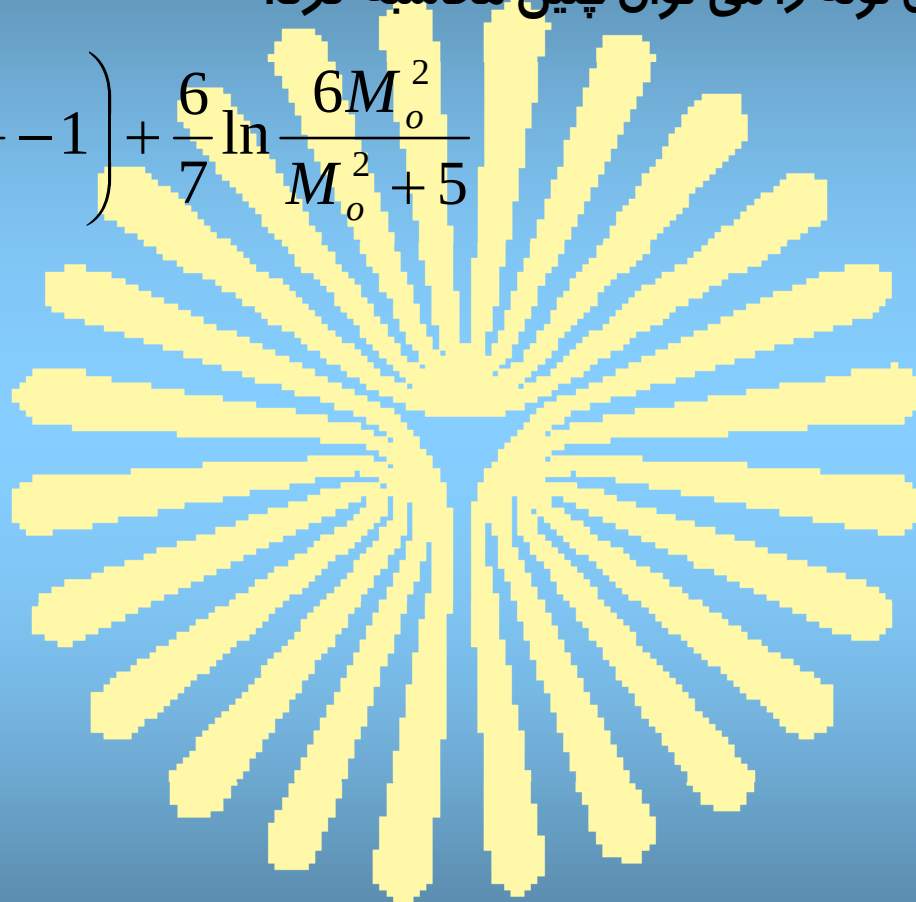
$$\frac{V_1^2}{2} + h_1 = \frac{V_2^2}{2} + h_2 = h_o = \frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P}{\rho}$$

f ضریب اصطحاک داری - وایسباخ از رابطه‌ی زیر بدست می آید.

$$\zeta_o = \frac{\rho f v^2}{8}$$

و رابطه‌ی حداکثر طول لوله را می توان چنین محاسبه کرد:

$$\frac{fL_{\max}}{D} = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{M_o^2} - 1 \right) + \frac{6}{7} \ln \frac{6M_o^2}{M_o^2 + 5}$$



تست های فصل ۶

۱-۲-۶ گرمای ویژه در حجم ثابت با کدام رابطه تعریف می شود:

(الف) KC_p	(ب) $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p$	(ج) $\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_v$	(د) $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$ ✓
--------------	--	--	--

۲-۲-۶ گرمای ویژه در فشار ثابت گاز کامل برابر است با:

(الف) KC_v	(ب) $\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$ ✓	(ج) $\frac{h_2 - h_1}{T_2 - T_1}$	(د) $\frac{\Delta u + \Delta(p/\rho)}{\Delta T}$
--------------	--	-----------------------------------	--

۳-۲-۶ آنتالپی گاز کامل:

- (الف) همواره به علت افت افزایش می یابد.
- (ب) فقط به فشار بستگی دارد.
- (ج) ✓ فقط به دما بستگی دارد.
- (د) اگر انرژی داخلی کاهش یابد، ممکن است افزایش یابد.

۴-۲-۶ C_p و C_v با کدام رابطه به یکدیگر مربوط می شود؟

(الف) ✓ $k = C_p / C_v$	(ب) $k = C_p C_v$	(ج) $k = C_v / C_p$	(د) $C_p = (C_v)^k$
-------------------------	-------------------	---------------------	---------------------

۵-۲-۶ اگر $C_p = 1/26 \text{ kJ/kg.K}$ و $k = 66/1$ باشد C_v بر حسب J/kg.K برابر است با:

- (الف) ۷۶/۰ (ب) ۰۹/۲ (ج) ۷۶۰ (د) ۲۰۹۰

۶-۲-۶ اگر $C_v = 1/26 \text{ kJ/kg.K}$ و $k = 33/1$ باشد، ثابت گاز بر حسب ژول بر کیلوگرم بر درجه کلوین برابر است با:

- (الف) ۰۴۱۶/۰ (ب) ۹۳۶/۲ (ج) ۴۱۶ (د) ۲۹۳۶

۷-۲-۶ اگر $C_p = 1/17 \text{ kJ/kg.K}$ و $R = 315 \text{ J/kg.K}$ باشد، k توان فرآیند ایزوتروپی چقدر است؟

- (الف) ۲/۱ (ب) ۳۷/۱ (ج) ۶۶/۱ (د) ۸۹/۱

۸-۲-۶ نسبت گرمای ویژه از کدام رابطه زیر بدست می آید؟

- (الف) $\frac{1}{1 - R/C_p}$ (ب) $1 + C_v/R$ (ج) $\frac{C_p}{C_v} + R$ (د) $\frac{1}{1 - C_v/R}$

۹-۲-۶ تغییرات آنتروپی گاز کامل

(الف) همواره مثبت است.

(ب) فقط تابعی از دماست.

(ج) فقط تابعی از انرژی داخلی است.

✓ (د) یک ویژگی ترمودینامیکی است که به فشار و دما بستگی دارد.

۱۰-۲-۶ فرآیند ایزوتروپی همواره

(الف) برگشت پذیر و بی دررو است.

(ب) برگشت پذیر و تکدماست.

✓ (ج) آنتروپی ثابت است.

(د) بدون اصطکاک و برگشت ناپذیر است.

۱۱-۲-۶ رابطه‌ی ρ^k (مقدار ثابت) = P فقط برای فرآیندهایی برقرار است که:

(الف) پلی تروپی و برگشت پذیر باشد.

(ب) ایزوتروپی باشد.

(ج) تکدما بدون اصطکاک باشد.

(د) برگشت ناپذیر بی دررو باشد.

۱۲-۲-۶ فرآیند پلی تروپی برگشت پذیر
(الف) بدون اصطکاک و بی در رو است.

(ب) با رابطه‌ی مقدار ثابت $\frac{P}{\rho}$ مشخص می شود.

(ج) با رابطه‌ی مقدار ثابت $p\rho^k$ مشخص می شود.

✓ (د) با رابطه‌ی مقدار ثابت $\frac{P}{\rho^n}$ مشخص می شود.

۱۳-۲-۶ فرآیند پلی تروپی برگشت پذیر با کدام رابطه مشخص می شود؟

✓ (الف) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{n-1}$ (ب) $\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{\rho_{21}}{\rho_1}\right)^n$ (ج) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{n-1}$ (د) $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{(n-1)/n}$

۱-۳-۶ عبارتی که مفهوم سرعت امواج صوتی را نمی رساند مشخص کنید.

(الف) $\sqrt{KR}$ ✓ (ب) $\sqrt{k\rho/P}$ (ج) $\sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$ (د) $\sqrt{\frac{KP}{\rho}}$

۲-۳-۶ سرعت صوت در آب تحت شرایط معمولی چقدر است؟
(بر حسب $\frac{m}{s}$)

(الف) ۴۶۹ (ب) ۱۴۸۳ ✓ (ج) ۱۷۵۵ (د) ۴۶۹۰

۲-۳-۶ مجذور سرعت صورت در گاز آرمانی به طور مستقیم با:
(الف) چگالی تغییر می کند.

(ب) فشار مطلق تغییر می کند.

√ (ج) دمای مطلق تغییر می کند.

(د) مدول کشسانی حجمی تغییر می کند.

۱-۴-۶ معادله‌ی دیفرانسیل انرژی جریان ایزونتروپی به کدام صورت بیان می شود؟

$$\frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{ب}) \quad dp + d(\rho V^2) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (\text{د}) \quad \sqrt{\quad} \quad 2VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (\text{ج})$$

۲-۵-۶ در جریان ایزونتروپی، پای آن

√ (الف) از دمای منبع نمی تواند بیشتر باشد.

(ب) به عدد ماخ بستگی ندارد.

(ج) تنها تابعی از عدد ماخ است.

(د) در کانال ثابت می ماند.

۳-۴-۶ نسبت فشار بحرانی برای جریان ایزونتروپی منواکسید کربن
برابر است با:

✓ (الف) ۵۲۸/۰

(ب) ۶۳۴/۰

(ج) ۸۳۳/۰

(د) ۰/۱

۴-۴-۶ با توجه به جریانی که داخل یک لوله همگرا-واگرا گذر می کند. کدام جمله صحیح ترین است؟

✓ (الف) اگر عدد ماخ در خروجی بزرگتر از واحد باشد، موج متحرک در لوله اتفاق نمی افتند.

(ب) هنگامی که نسبت فشار بحرانی زیاد می شود، عدد ماخ در گلوگاه بزرگتر از واحد است.

(ج) عدد ماخ در گلوگاه همواره واحد است.

(د) چگالی در پایین دست در امتداد مسیر قسمت همگرای لوله زیاد می شود.

۱-۵-۶ در اثر امواج شوک عمودی در جریان یک بعدی:
(الف) سرعت، فشار و چگالی زیاد می شود.
(ب) $\sqrt{\text{فشار، چگالی و دما زیاد می شود.}}$
(ج) سرعت، دما و چگالی افزایش می یابد.
(د) آنتروپی ثابت می ماند.

۲-۵-۶ یک موج شوک عمودی
(الف) بازگشت پذیر است.
(ب) ممکن است در لوله‌ی همگرا پیش بیاید.
(ج) $\sqrt{\text{بازگشت ناپذیر است.}}$
(د) ایزونتروپی است.

۳-۵-۶ در عرض موج عمودی که در یک نازل همگرا - واگرا روی می دهد، کدام گزاره صحیح است؟

(الف) معادلات پیوستگی، انرژی، معادله‌ی حالت، رابطه ایزوتروپی صادق اند.

(ب) معادلات انرژی، تکانه، معادله‌ی حالت و رابطه‌ی ایزوتروپی برقرارند.

✓ (ج) معادلات پیوستگی، انرژی، تکانه، معادله‌ی حالت، صادق اند.

(د) معادلات حالت، تکانه و رابطه‌ی ایزوتروپی و اصل پایستگی جرم برقرار اند.

۴-۵-۶ در مقطع موج شوک عمودی:

(الف) P, M, S افزایش می یابد.

✓ (ب) S, P افزایش ولی M کاهش می یابد.

(ج) P افزایش اما S, M کاهش می یابد.

(د) P, N, T افزایش می یابد.

۵-۵-۶ خط ریلی از معادلات زیر بدست می آید.

- ✓(الف) تکانه و پیوستگی
(ب) انرژی و پیوستگی
(ج) تکانه و انرژی
(د) تکانه، پیوستگی و انرژی
-

۶-۵-۶ صحیح ترین گزاره درباره‌ی خطوط فانو و ریلی کدام است؟

(الف) دو نقطه که آنتروپی یکسانی دارند، شرایط قبل و بعد از شوک را نشان می دهد.

(ب) PV در طول خط ثابت نگه داشته می شود.

(ج) عدد ماخ همواره با آنتروپی افزایش می یابد.

✓(د) آنتالپی در بخش مادون صوت منحنی از آنتالپی در بخش مادون صوت آن بیشتر است.

۱-۶-۶ خفگی در جریان داخل یک لوله به معنی اینست که:
(الف) یک شیر در مسیر بسته شده است.

(ب) انسدادی در مسیر جریان پیش آمده است.

✓(ج) جریان جرم به مقدار معین شده بوجود نیاید.

(د) جریان مافوق صوت در جایی از مسیر پیش آمده است.

۲-۶-۶ در جریان بی در روی مادون صوت در درون یک لوله:

✓(الف) V, M, S افزایش ولی P, T, ρ کاهش می یابد.

(ب) M, P, V افزایش اما T, ρ کاهش می یابد.

(ج) P, M, S افزایش ولی V, T, ρ کاهش می یابد.

(د) ρ, M, S افزایش اما V, T, P کاهش می یابد.

۳-۶-۶ در جریان بی در روی مافوق صوت در درون یک لوله:

(الف) V, M, S افزایش ولی P, T, ρ کاهش می یابد.

(ب) P, T, S افزایش اما V, ρ, M کاهش می یابد.

(ج) P, M, S افزایش ولی V, T, ρ کاهش می یابد.

✓(د) P, T, ρ, S افزایش اما V, M کاهش می یابد.

۱-۷-۶ اگر در داخل کانالی جریان بی اصطکاک با انتقال گرما وجود داشته باشد، کدام گزاره صحیح ترین است؟

(الف) افزایش گرما به جریان مافوق صوت، عدد ماخ را زیاد می کند.

✓ (ب) افزایش گرما به جریان مادون صوت، عدد ماخ را زیاد می کند.

(ج) سرمایش جریان مافوق صوت، عدد ماخ را کاهش می دهد.

(د) دمای سکون ایزونتروپی در طول لوله ثابت می ماند.

۲-۷-۶ کدام گزاره در زیر تغییرات خواص جریان را در کانال بی اصطکاک با گرمای انتقالی به لوله ای که در آن $M < 1$ است، نشان می دهد.

(الف) V, P افزایش و T, T_0, ρ کاهش می یابد.

(ب) T_0, V افزایش و P, ρ کاهش می یابد.

(ج) T, ρ, P افزایش و T_0, V کاهش می یابد.

(د) T, V افزایش و T_0, ρ, P کاهش می یابد.

۳-۷-۶ برای سرمایش در کانال بی اصطکاک با جریان $M > 1$ ، صحیح ترین گزاره کدام است؟

(الف) V افزایش و T ، ρ ، P ، T_0 کاهش می یابد.

(ب) V, P افزایش و T ، ρ ، T_0 کاهش می یابد.

(ج) V, ρ ، P افزایش و T ، T_0 کاهش می یابد.

(د) ρ ، P افزایش و T ، V ، T_0 کاهش می یابد.

