ایران عرضه
فروشگاه کالاهای دانلودی
IRANARZE.IR



IranArze.ir
@iranarze

تعداد صفحات
۲۴۴

آخرین بروزرسانی
۳۰ مهر ۱۴۰۵

جزوه

مقاومت مصالح

- شامل جزوات آموزشی درس مقاومت مصالح
- ویژه آزمون های استخدامی و اخذ مدرک

انتشار یا استفاده غیر تجاری از این جزوه، بدون حذف لوگوی ایران عرضه "مجاز" می باشد
IRANARZE.IR

لینک های مفید آزمون ها	
خرید سوالات مقاومت مصالح	**خرید سوالات بانکدار مهندسی ساختمان (عمران) بانک سینا**
خرید سوالات بانکدار مهندسی ساختمان (مکانیک) بانک سینا	**خرید سوالات بانکدار مهندسی ساختمان (معماری) بانک سینا**
خرید سوالات کارشناس ساختمان و تاسیسات	**شبکه های اجتماعی ایران عرضه** (فایل های رایگان + تخفیفات هفتگی + اخبار)
(برای مشاهده هر بخش روی آن بزنید)	

فهرست مطالب

- فصل اول: خلاصه مقاومت مصالح به کوشش رامین برزگر - صفحه ۴
- فصل دوم: خلاصه مقاومت مصالح ۱ - صفحه ۵۰
- فصل سوم: خلاصه مقاومت مصالح ۲ - صفحه ۹۸

IRANARZE.IR
فروشگاه کالاهای دانلودی





مقاومت مصالح

Strength of Material

مدرس:
رامین برزگر

1

منابع

۱ – کتاب مقاومت مصالح – نوشته Beer Johnston

۲ – کتاب مقاومت مصالح – نوشته پوپوف (popov)

2

سرفصلها

۱ – مفاهیم عمومی تنش

۲ – تحلیل تنش در میله های تحت بار محوری

۳ – کرنش و تغییر شکل در اعضای تحت اثر بار محوری

۴– قانون هوک

۵– تنش برشی

۶ – پیچش

۷ – نظریه های تسلیم مواد

3

مقاومت مصالح Strength of Material

شاخه ای از علم مکانیک است که با استفاده از روشهای تحلیل به بررسی و تعیین مقاوم، صلبیت و پایداری ارتجاعی اعضای باربر می پردازد.

4

سیستمهای یکاها:

سیستم بین المللی یکاها (یکاهای SI)

در طی سالهای اخیر تقریباً کلیه کشورهای جهان سیستم بین المللی آماد یا به زبان فرانسه (system International d' units) که مختلف آن SI می باشد را برای تمامی کارهای مهندسی و علوم انتخاب کردند. در این سیستم یکاهای اصل، یکاهای طول، جرم و زمان هستند که آنها را به ترتیب (m) و کیلوگرم (kg) و ثانیه (s) می نامند.

یکاهای نیرو در این سیستم یک یکای فرعی است که به آن نیوتن (N) گویند و بنا به تعریف یک نیوتن نیرویی است که به یک جرم یک کیلوگرمی شتابی برابر با $1^{m}/_{s^2}$ بدهند.

$$1N = (1kg)(1\frac{m}{s^2}) = 1kg.\frac{m}{s^2}$$

5

پیشوند واحدها:

نماد	پیشوند	مقدار
G	گیگا	$1000/000/000=10^{9}$
M	مگا	10^{6}
K	کیلو	10^{3}
m	میلی	$0/001=10^{-3}$
μ	میکرو	10^{-6}
n	نانو	10^{-9}

6

$1mm = 0.001\ m$ $1Mg = 1000\ kg$ $3.82km = 3820m$

$1g = 0.001kg$ $47.2mm = 0.0472m$ $3.82KN = 3.82\times10^{3}N$

$47.2mm = 47.2\times10^{-3}mm$

7

تعاریف پایه

ماده:

ماده عبارت از وجودی است که فضاگیر باشد.

جسم:

ماده ای را گویند که توسط یک سطح بسته محدود شده باشد.

جسم صلب:

جسمی که بین ذراتش هیچ جابجایی نسبی موجود نباشد.

یک جسم صلب جسمی است که بر اثر اعمال نیرو، شکل و ابعاد آن تغییر نمی کند. بسیاری از اجسام را تا حدودی می توان صلب فرض کرد ولی در عمل هیچ جسمی مطلقا صلب نیست.

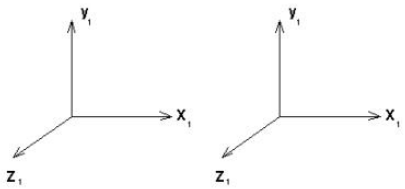
8

جسم تغییر شکل پذیر:

جسمی که دارای خواص تغییر شکل پذیری باشد.

جسم همگن:

جسمی است که دارای خاصیت یکسان در تمام نقاط باشد . تمام اجسام مورد مطالعه در این درس همگن فرض می شوند.

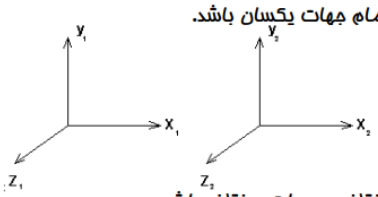


$$x_1 = y_1 - z_1$$

9

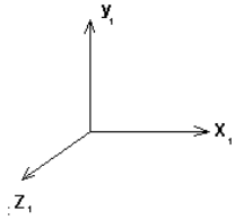
جسم ایزوتروپیک:

جسمی است که در یک نقطه بخصوص ، خواص آن در تمام جهات یکسان باشد.



جسم غیرایزوتروپیک:

جسمی است که در یک نقطه بخصوص ، دارای خواص مختلف در جهات مختلف باشد.



$$x_1 \neq y_1 \neq z_1$$

10

تنش‌ها

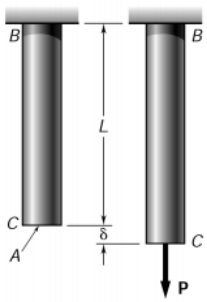
وقتی نیروهای خارجی به یک جسم وارد می‌شوند، تمایل دارند تا شکل جسم را تغییر دهند. این در حالی است که مواد تشکیل دهنده جسم در مقابل تغییر شکل مقاومت می‌کنند.

تنش نشان دهنده نیروی وارد شده بر واحد سطح است و آن را با واحدهایی مانند نیوتون بر میلی‌متر مربع (مگاپاسکال) یا کیلوگرم نیرو بر سانتی‌متر مربع می‌سنجند.

11

تنش محوری و تنش برشی

اگر میله ای را با نیروی P در راستای محور میله بکشیم، طول آن به اندازه‌ی δ زیاد می شود (نمادِ δ، دلتا تلفظ می شود). در اثر ورود نیرو به میله، تنش قائم و کُرنش ایجاد شده در میله برابر می شود با:



$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

σ تنش قائم وارد بر میله (نیوتن بر متر مربع) — P نیرو (نیوتن) — A سطح مقطع میله (متر مربع)

ε کُرنش ایجاد شده در میله — δ تغییر طول میله (متر) — L طول اولیه میله (متر)

نماد σ، سیگما تلفظ می شود.

اگر طول میله زیاد شود، علامت تنش و کرنش، مثبت است و اگر طول میله کم شود، علامت تنش و کرنش، منفی است.

12

مثال۱

یک میله فولادی به قطر ۱۰ میلی‌متر، تحت تأثیر نیروی کششی ۲۰۰۰۰ نیوتون قرار گرفته است، تنش به وجود امده در آن از چه نوعی است و مقدار آن چقدر است؟

$$F = ۲۰۰۰۰\,N$$

$$A = \frac{\pi d^۲}{۴} = \frac{۳/۱۴ \times (۱۰\,mm)^۲}{۴} = ۷۸/۵\ mm^۲$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{۲۰۰۰۰\,N}{۷۸/۵\,mm^۲} = ۲۵۵\,N/mm^۲$$

13

مثال۲

یک قطعه فلزی به ابعاد ۱۰۰ میلی‌متر در ۱۰۰ میلی‌متر به ارتفاع ۵۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی فشاری ۴۵ کیلونیوتون قرار دارد، مقدار تنش چند مگاپاسکال است؟

$$F = ۴۵\,kN = ۴۵ \times ۱۰^۳\,N$$

$$A = (۱۰۰\,mm)(۱۰۰\,mm) = ۱۰^۴\,mm^۲$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{۴۵ \times ۱۰^۳\,N}{۱۰^۴\,mm^۲} = ۴/۵\,N/mm^۲ = ۴/۵\,MPa$$

14

مثال۳

یک میله آلومینیومی نیروی کششی ۴۵kN را تحمل می‌کند. قطر میله را به نحوی تعیین کنید که تنش وارد شده به میله از ۵۶/۶ MPa بزرگ‌تر نشود.

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{\sigma}$$

سطح مقطع موردنیاز برای تحمل نیرو

$$A = \frac{۴۵ \times ۱۰^{۳} N}{۵۶/۶ MPa} = ۷۹۵ mm^{۲}$$

$$A = \frac{\pi d^{۲}}{۴} \rightarrow d = \sqrt{\frac{۴A}{\pi}}$$

◀ حداقل قطر میله برای تحمل نیروی ۴۵kN

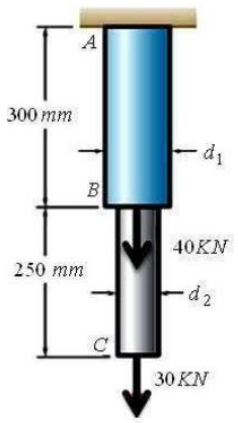
$$d = \sqrt{\frac{۴ \times ۷۹۵}{۳/۱۴}} = ۳۱/۸۲ mm$$

با درنظر گرفتن عدم تولید میله به قطر ۳۱/۸۲ mm، میله‌ای به قطر ۳۲ mm انتخاب می‌کنیم.

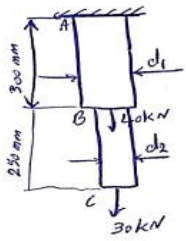
15

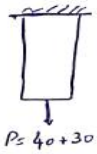
مثال۴

مطابق شکل دو میله AB با طول ۳۰۰ میلیمتر و قطر d_1 و BC با طول ۲۵۰ میلیمتر و قطر d_2 در نقطه B به هم جوش داده شده و تحت بارگذاری نشان داده شده قرار گرفته اند. با فرض حداکثر تنش مجاز $140MPa$ در هر دو میله کمترین مقدار مجاز قطر d_1 و d_2 را بدست آورید.



16





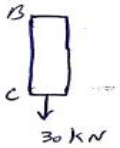
حل مثال (F)

$F_{AB} = 40+30 = 70\ kN$ $\quad \sigma = 140\ MPa$

$A = \frac{\pi}{4} \times d_1^2$

$\sigma = \frac{F_{AB}}{A} \Rightarrow 140 = \frac{70 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times d_1^2} \Rightarrow d_1^2 = \frac{70 \times 10^3 \times 4}{140 \times \pi} = 636\ mm^2$

$\Rightarrow d_1 = 25,2\ mm$



$F_{BC} = 30kN = 30 \times 10^3\ N$ $\quad \sigma = 140\ MPa$

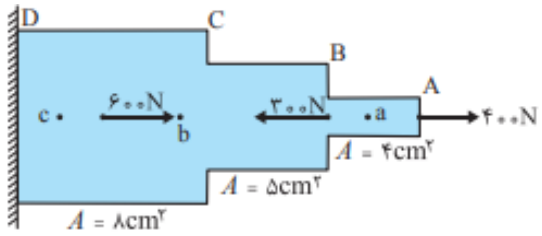
$A = \frac{\pi}{4} \times d_2^2$

$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow 140 = \frac{30 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times d_2^2} \Rightarrow d_2^2 = \frac{30 \times 10^3 \times 4}{140 \times \pi} = 272,9\ mm^2$

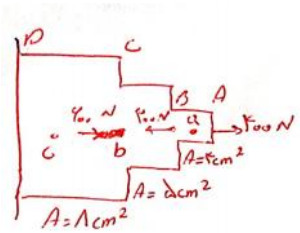
$\Rightarrow d_2 = 16,5\ mm$

تمرین۱

تنش در نقاط c,b,a را محاسبه نمایند.



حل تمرین۱



$$\sigma_a = \frac{500(N)}{100(mm^2)} = 5\,MPa$$

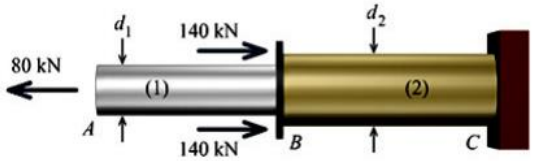
$$\sigma_b = \frac{500 - 300}{100} = 2\,MPa = 2000\,kPa$$

$$\sigma_c = \frac{500 - 300 + 500}{100} = 7\,MPa$$

19

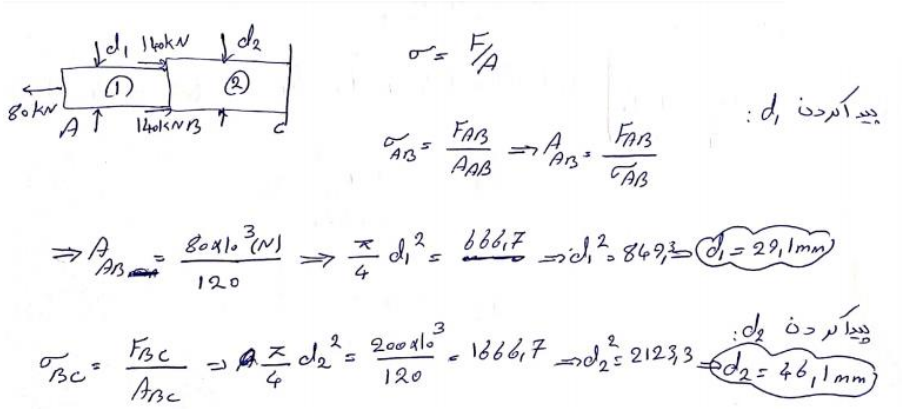
تمرین۲

مطابق شکل میله های فولادی ($E = 200GPa$) AB و BC در نقطه B به هم متصل شده و تحت بارگذاری نشان داده شده قرار گرفته اند (نقطه C محل تکیه گاه ثابت است). اگر حداکثر تنش عمودی مجاز برای هر دو میله $120MPa$ باشد، کمترین قطر ممکن برای هر میله را به دست آورید.



20

حل تمرین۲



$\sigma = F/A$

پیدا کردن d_1:

$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} \Rightarrow A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{AB}}$

$\Rightarrow A_{AB} = \frac{80\times10^3\,(N)}{120} \Rightarrow \frac{\pi}{4} d_1^2 = 666{,}7 \Rightarrow d_1^2 = 849{,}3 \Rightarrow d_1 = 29{,}1\,mm$

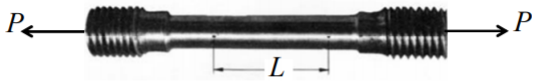
پیدا کردن d_2:

$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} \Rightarrow \frac{\pi}{4} d_2^2 = \frac{200\times10^3}{120} = 1666{,}7 \Rightarrow d_2^2 = 2123{,}3 \Rightarrow d_2 = 46{,}1\,mm$

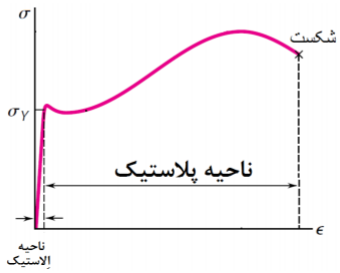
21

آزمایش کشش میله:

در آزمایش کشش، میله ای به صورت شکل زیر آماده می کنند. دو نقطه به فاصله L روی میله مشخص می کنند. میله را در دستگاه کشش قرار می دهند. دستگاه کشش، دستگاهی است که میله را از دو طرف گرفته و می‌کِشد. دستگاه در ابتدا نیروی کمی بر میله وارد می‌کند و به مرور زمان نیرو را افزایش می دهد. با افزایش نیرو و گذشت زمان، طول میله نیز پیوسته زیاد می شود.



هرچه تنش وارد بر جسم افزایش یابد، کرنش آن نیز بیش تر می شود. نمودار تنش ایجاد شده در میله بر حسب کرنش به صورت زیر است:



22

این شکل نشان می دهد که هنگامی که تنش کمتر از σ_y است، تنش به صورت خطی بر حسب کرنش تغییر می کند. اگر تنش ایجاد شده در میله کم‌تر از σ_y باشد، به محض قطع کردن نیرو، میله به همان طول اولیه خود بر می‌گردد. این ناحیه را ناحیه اِلاستیک یا کِشسان می‌گویند. یعنی اگر مواد، تنشی کمتر از σ_y داشته باشند، در ناحیه اِلاستیک قرار داشته و رفتار فنری دارند. تنش σ_y را «تنش تسلیم» می‌گویند و برای هر ماده مقدار مشخصی دارد و مقدار آن در کتاب های مقاومت مصالح موجود است.

اگر بر یک ماده، به اندازه ای نیرو وارد کنیم که تنش ایجاد شده در آن، بیشتر از تنش تسلیم شود، ماده وارد حالت پلاستیک می شود یعنی اگر نیرو را حذف کنیم، دیگر میله به طول اولیه خود بر نمی گردد و دچار تغییر شکل دائم می شود. تغییر شکل ماده در ناحیه الاستیک بسیار کم است ولی اگر ماده وارد ناحیه پلاستیک شود، تغییر شکل آن بسیار زیاد می شود و در نهایت دچار شکست می شود.

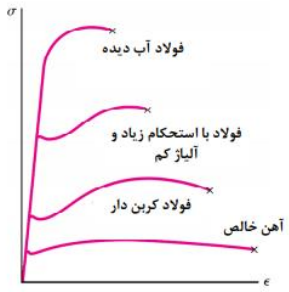
23

قانون هوک:

در اکثر کاربردهای صنعتی، تغییر شکل ها در ناحیه‌ی خطی (الاستیک) هستند. در این ناحیه، رابطه‌ی تنش بر حسب کرنش به صورت زیر است » » » » » » » » » » » » » » » $\boxed{\sigma = E\varepsilon}$

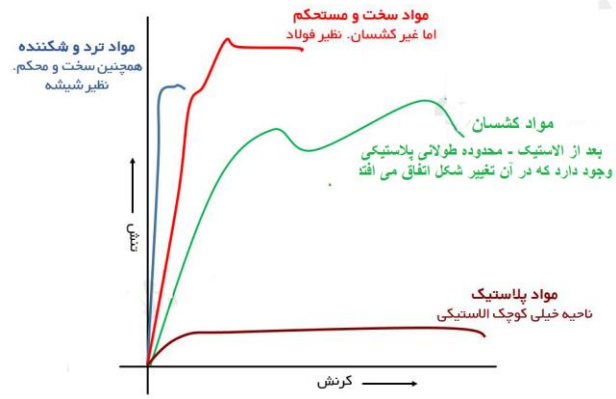
رابطه‌ی بالا را قانون هوک می‌گویند که کاربرد بسیار زیادی در مقاومت مصالح دارد.

مقدار E در رابطه بالا، ضریب (یا مُدول) الاستیسیته یا ضریب یانگ یا ضریب ارتجاعی نامیده می شود. هر ماده تا تنش تسلیم (σ_y) از قانون هوک تبعیت می کند. مقدار E در واقع همان شیب نمودار تنش-کرنش در ناحیه‌ی خطی است. شکل زیر، نمودار تنش-کرنش چند نوع فولاد را نشان می دهد. در شکل زیر، تنش تسلیم فولادها با یکدیگر متفاوت ولی تمام آن ها یک ضریب الاستیسیته دارند.



24

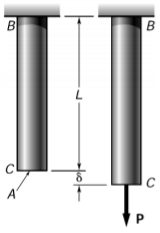
در ادامه نمودار تنش کرنش چند ماده نشان داده شده است.
شیشه شکننده است و آنقدر قوی است که می تواند تنش زیادی را بدون تغییر شکل تحمل کند. اما یک ناحیه کوچک پلاستیک دارد که اگر پس از این نقطه تنش اعمال شود بدون هیچ تغییر شکلی به راحتی می‌شکند.
فولاد محکم است و ناحیه الاستیک بزرگی دارد و می تواند برای ساخت پل و غیره استفاده شود. اما ناحیه پلاستیک کوچکی دارد و بنابراین نباید برای ساخت سیم ها از آن استفاده شود زیرا به سادگی می شکنند.
اما مواد داکتیل یا کشسان، دارای ناحیه پلاستیک طولانی هستند و به همین خاطر می شود تغییر شکل زیادی در آن ها بوجود آورد و یا با کشش از آن ها جهت تولید سیم استفاده کرد.



25

تغییر طول میله در بارگذاری محوری:

گفتیم که وقتی نیروی محوری به میله ای وارد می شود داریم:



$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E\varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E\frac{\delta}{L} \rightarrow \boxed{\delta = \frac{PL}{AE}}$$

δ تغییر طول میله (متر) — P نیروی وارد بر میله (نیوتن) — L طول اولیه میله (متر)

A سطح مقطع میله (متر مربع) — E ضریب ارتجاعی (نیوتن بر متر مربع)

معادله بالا را برای میله ای که سطح مقطع ثابت دارد و نیرو در دو انتهای آن وارد می شود، می توان نوشت.

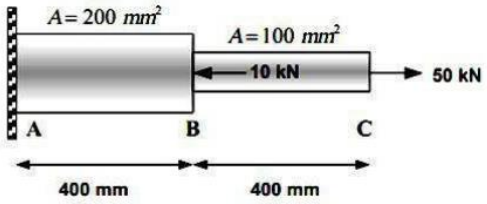
26

مثال ۵

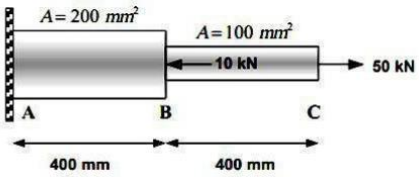
- برای میله فولادی ($E = 200GPa$) با نیروهای نشان داده شده، مطلوبست محاسبه ی:

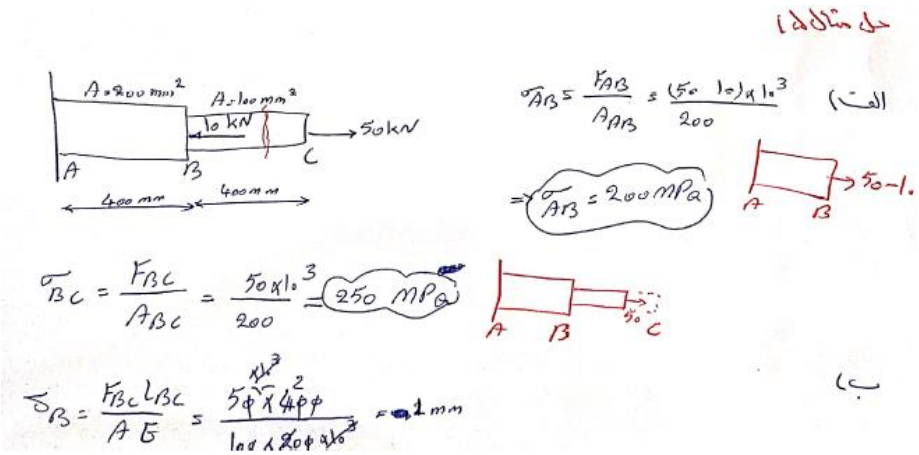
الف- تنش در قسمت های AB و BC میله.

ب- جابجایی نقطه B.



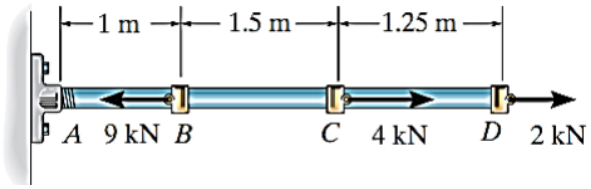
27





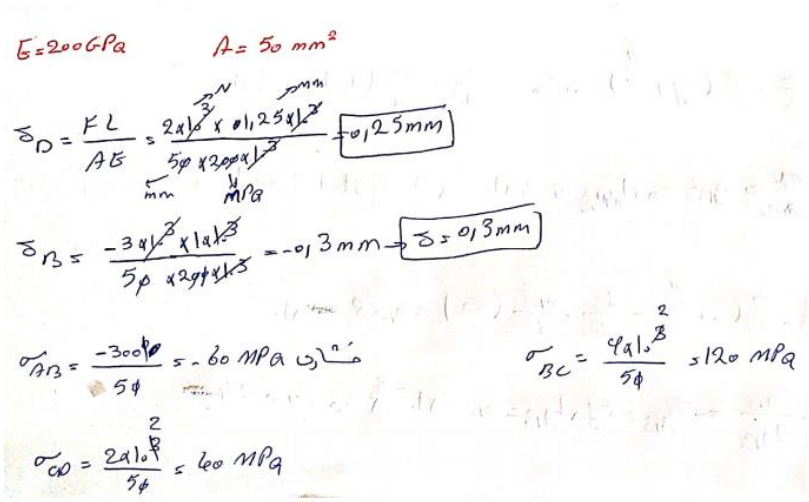
تمرین ۳

میله فولادی($E = 200GPa$) نشان داده شده در معرض بارهای محوری قرار گرفته است. تنش در قسمت های AB ، BC و CD میله و جابجایی نقاط D و B میله را بدست آورید. سطح مقطع عرضی میله را $A = 50mm^2$ در نظر بگیرید. (از اندازه کوپلینگ در نقاط اعمال بار صرف نظر کنید)



29

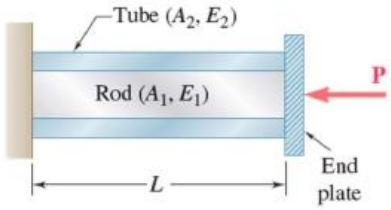
حل تمرین ۳



30

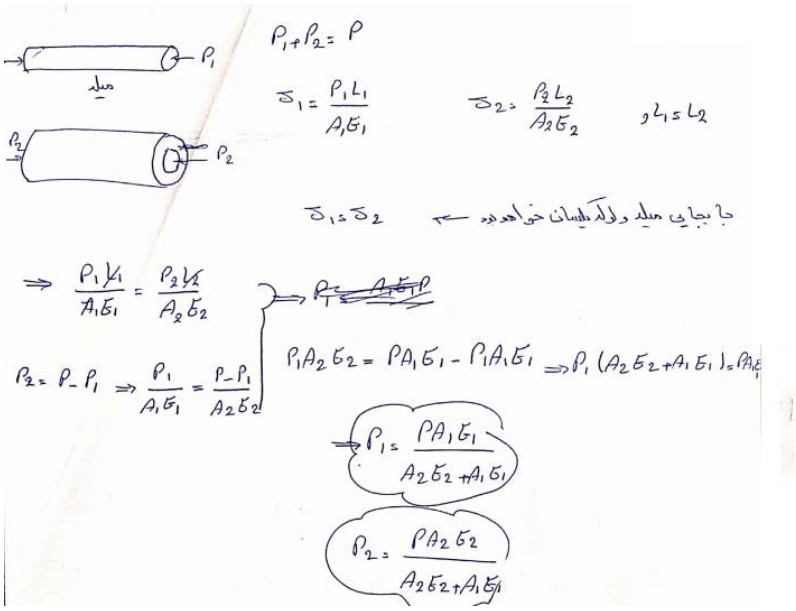
تمرین۴

مثال: میله‌ای به طول L، سطح مقطع A_1 و ضریب ارتجاعی E_1 درون لوله‌ای به همان طول L، سطح مقطع A_2 و ضریب ارتجاعی E_2 قرار گرفته است. تغییرشکل میله و لوله وقتی یک نیروی **P** بر صفحه صلب انتهایی وارد می‌شود چقدر است؟



31

حل تمرین۴



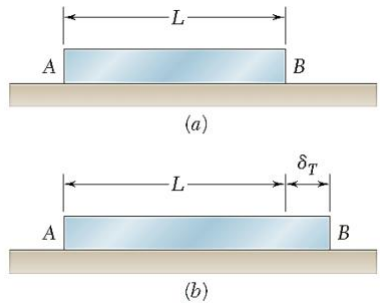
32

اثرات تغییر دما:

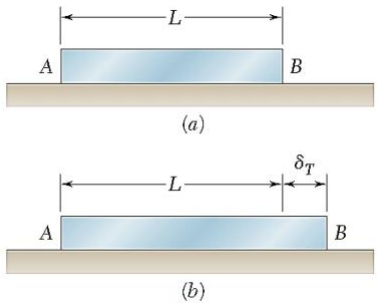
اگر میله‌ای به طول L را به اندازه‌ی ΔT افزایش دما دهیم، دچار تغییر طول به اندازه مقدار روبرو می‌شود: $\boxed{\delta_T = L\alpha\Delta T}$

α را ضریب انبساط حرارتی گویند. واحد ضریب انبساط حرارتی $\frac{1}{^\circ C}$ است. مقدار ضریب انبساط حرارتی برای هر ماده، مشخص بوده و در جداولی در کتابهای مقاومت مصالح موجود است.

قبلاً گفتیم که کرنش برابر است با تغییر طول تقسیم بر طول اولیه. لذا مقدار کرنش ایجاد شده در اثر تغییر دمای جسم برابر با $\varepsilon_T = \alpha\Delta T$ است که ε_T را کرنش حرارتی گویند. حرارت دادن به سازه ها باعث ایجاد تنش در آن ها می شود.



33

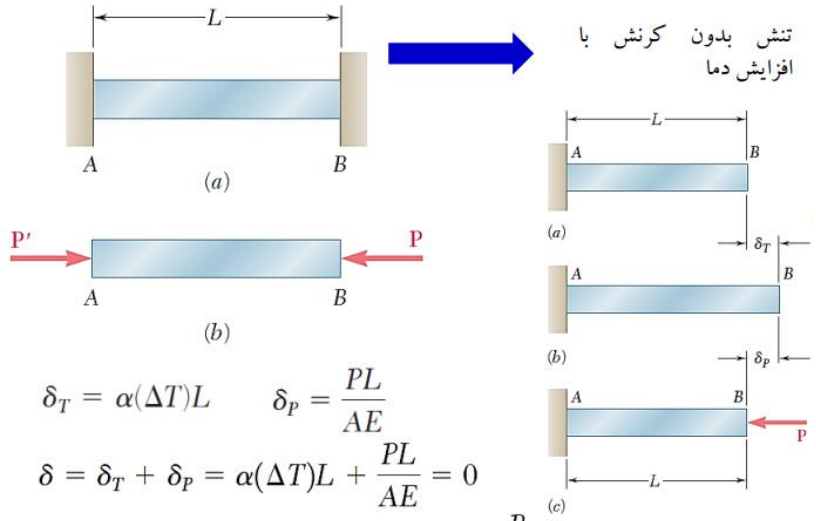


$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$ تغییر طول ناشی از گرما

$$\epsilon_T = \delta_T/L$$

$$\epsilon_T = \alpha\Delta T$$ ⟹ کرنش گرمایی بدون تنش

34



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \qquad \delta_P = \frac{PL}{AE}$$

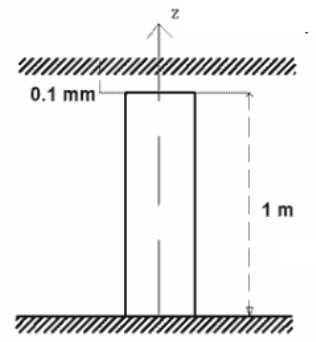
$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = -AE\alpha(\Delta T) \qquad \sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

35

مثال۶

چنانچه میله شکل مقابل 30° گرم شود ، تنش ایجاد شده در آن چقدر خواهد بود .



$$\alpha = 17\times10^{-6}\frac{1}{c^\circ}, E = 110000\frac{kg}{cm^2}$$

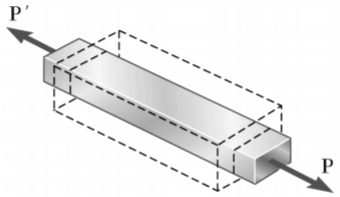
$$\Delta L = L\alpha\Delta T = 100\times17\times10^{-6}\times30 = 0.051cm$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\delta = 0.041}{L = 100} = 0.00041 \Rightarrow \sigma_z = E.\varepsilon_z = 45.1\frac{kg}{cm^2}$$

36

نسبت پُواسون:

وقتی یک میله را در جهت محوری می کِشیم، در سایر جهات نیز دچار تغییر اندازه (کرنش) می شود. در شکل زیر میله ای تحت نیروی محوری P قرار گرفته است. شکل اولیه ی میله با خط چین های سیاه رنگ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود، بعد از اعمال نیروی P، علاوه بر اینکه طول میله زیاد شده است، سطح مقطع آن نیز کم شده است.



نکته: حجم میله قبل و بعد از اعمال نیرو برابر نیست زیرا اعمال نیرو باعث تغییر در ساختار میله شده و چگالی جسم تغییر می کند.

اگر نیرویی در جهت x بر میله وارد کنیم (مطابق شکل زیر)، کرنش ε_x در راستای x ایجاد خواهد شد. در این صورت کرنش ایجاد شده در جهات y و z می شود » » »

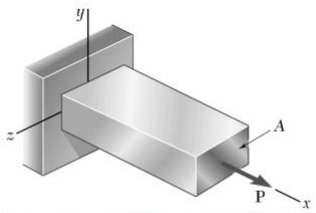
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

نماد ν، «نو» تلفظ می شود. ν را ضریب پواسون گویند که برای هر ماده ای مقدار مشخص و ثابتی دارد.

$$\nu = -\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} \qquad \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E}$$

37

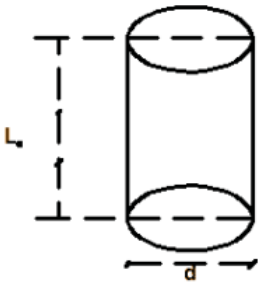


علامت منفی در رابطه بالا به این دلیل است که اگر در جهت x، طول جسم زیاد شود (کرنش مثبت)، در جهت های y و z طول جسم کم می شود (کرنش منفی). پس علامت کرنش در جهت x با علامت کرنش در جهات y و z باید مختلف باشد.

38

مثال۷

میله ای مطابق شکل تحت اثر نیروی کششی 15ton قرار گرفته و در طول مشخص شده $L_\circ = 25cm$ با مقطع دایره ای به قطر d=5cm تغییر طول $\Delta L = 0.25mm$ اندازه گیری شد و مشاهده گردید که قطر میله به اندازه 0.01mm کاهش یافته است . مطلوبست محاسبه ν, E



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_\circ} = \frac{0.25}{250} \Rightarrow \varepsilon_x = 0.001$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0.01}{50} \Rightarrow \varepsilon_y = -2\times10^{-4}$$

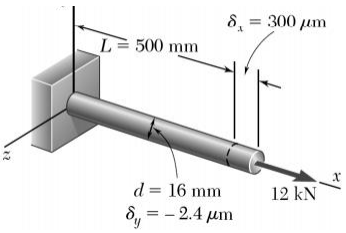
$$\nu = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{2\times10^{-4}}{0.001} \Rightarrow \upsilon = 0.2$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{15000}{\pi\times\frac{5^2}{4}} = 763.97\frac{kg}{cm^2} \Rightarrow E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{763.97}{0.001} \Rightarrow$$

$$E = 7.64\times10^5 \, kg/cm^2$$

مثال۷

میله‌ی شکل زیر تحت بارگذاری نشان داده شده، دچار تغییر طول ۳۰۰میکرومتر ($300\mu m$) و کاهش قطر $2.4\mu m$ می‌شود. ضریب ارتجاعی (E) و نسبت پواسون (ν) این میله را بیابید.



پاسخ: مساحت سطح مقطع میله می شود: $A = \pi r^2 = \pi\left(8\times10^{-3}\right)^2 = 201\times10^{-6}m^2$

تنش و کرنش در راستای x می شود:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12\times10^3}{201\times10^{-6}} = 59.7\times10^6 Pa = 59.7MPa \qquad \varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{300\times10^{-6}}{500\times10^{-3}} = 600\times10^{-6}$$

طبق قانون هوک داریم: $\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{59.7\times10^6}{600\times10^{-6}} = 99.5\times10^9 Pa = 99.5GPa$

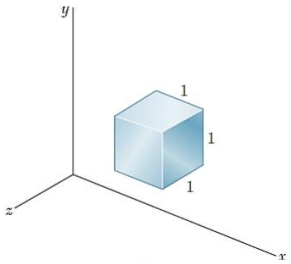
کرنش در راستای y می شود: $\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4\times10^{-6}}{16\times10^{-3}} = -150\times10^{-6}$

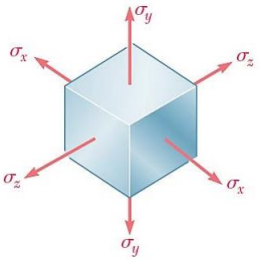
از رابطه پواسون داریم: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \longrightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{-150\times10^{-6}}{600\times10^{-6}} = 0.25$

تعمیم قانون هوک برای اجسام ایزوتروپ و سه بعدی:

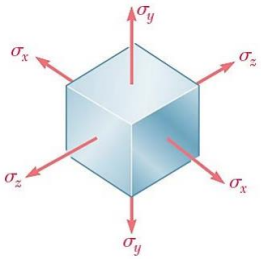
به اجسامی که خواص مکانیکی آن از جهت تغییر شکل پذیری در تمام جهات یکسان است ایزوتروپ گویند. قبلاً قانون هوک را برای اعضای با نیروی محوری بعنوان رابطه تنش در امتداد طول عضو و تغییر شکل نسبی در امتداد طول عضو بصورت $\sigma = E.\varepsilon$ معرفی کردیم که E را مدول الاستیسیته نامیدیم.

در حالت کلی برای اجسامی که تحت اثر تنش در امتداد یک، دو یا سه محور قرار گیرند به فرم کلی زیر بیان می کنیم که به قانون هوک کلی برای اجسام ایزوتروپ معرف است.





41



$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$
$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$
$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

قانون هوک تعمیم‌یافته

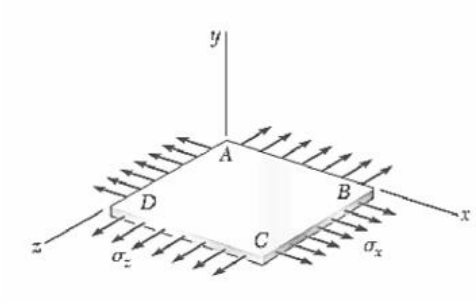
42

مثال ۸

ورق مربعی نشان داده شده با ابعاد $50mm \times 50mm$ تحت تنش های صفحه ای $\sigma_x = 50MPa$ و $\sigma_z = 20MPa$ قرار می گیرد. مقدار تغییر مساحت صفحه ΔA را بیابید.

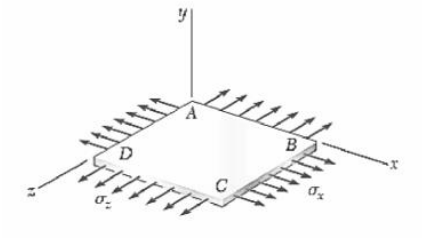
$E = 200GPa$

$\nu = 0.25$



43

حل مثال ۸



$\sigma_x = 50\ MPa \qquad \sigma_z = 20\ MPa \qquad E = 200\ GPa = 200\times10^3\ MPa$

$\nu = 0.25$

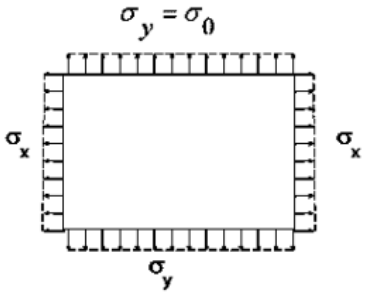
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z) = \frac{50}{200\times10^3} - \frac{0.25}{200\times10^3}(20) = 0.225\times10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x) = \frac{20}{200\times10^3} - \frac{0.25}{200\times10^3}(50) = 0.0375\times10^{-3}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \varepsilon_x + \varepsilon_z \Rightarrow \Delta A = (0.225+0.375)\times10^{-3}\times(50\times50) = 0.1656\ mm^2$$

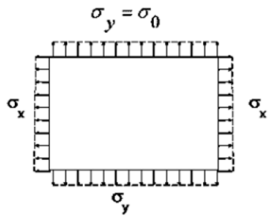
مثال۹

صفحه مستطیلی مقابل تحت اثر تنشهای یکنواخت σ_y, σ_x قرار دارد.در صورتیکه $\varepsilon_x = 0, \sigma_y = \sigma_0$ باشد نسبت $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_y}$ را تعیین کنید.



45

حل مثال۹



$\sigma_y = \sigma_0 \quad \varepsilon_x = 0 \quad \sigma_z = 0 \quad \frac{\sigma_0}{\varepsilon_y} = ?$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_0 \Rightarrow \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_0 = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu\sigma_0$

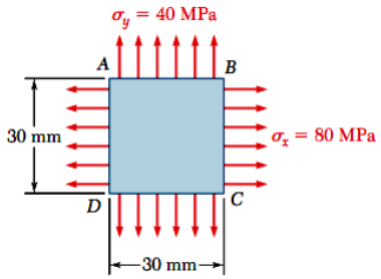
$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\nu}{E}(\nu\sigma_0) \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_0}{E}(1 - \nu^2)$

$\Rightarrow \frac{\sigma_0}{\varepsilon_y} = \frac{E}{1-\nu^2}$

46

تمرین ۵

یک ورق مربع شکل به ابعاد $30mm \times 30mm$ تحت بارگذاری دو محوری قرار دارد. تنش های قائم در این ورق عبارتند از $\sigma_x = 80MPa$ ، $\sigma_y = 40MPa$. برای این ورق $E = 200GPa$ و $\nu = 0.3$.
مطلوبست تغییر طول الف) ضلع BC ب) ضلع AB



47

حل تمرین ۵

$\sigma_x = 80\ MPa \qquad \sigma_y = 40\ MPa \qquad E = 200\ GPa \qquad \nu = 0.3$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \overset{0}{\sigma_z}) \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{80}{200\times10^3} - \frac{0.3}{200\times10^3}(40) = 0.34\times10^{-3}$

الف) $\delta_{BC} = ?$

$\varepsilon_x = \frac{\delta_{BC}}{L_{BC}} \Rightarrow \delta_{BC} = \varepsilon_x \times L_{BC} = 0.34\times10^{-3} \times 30 = 0.0102\ mm \Rightarrow \delta_{BC} = 0.0102\ mm$

ب) $\delta_{AB} = ?$

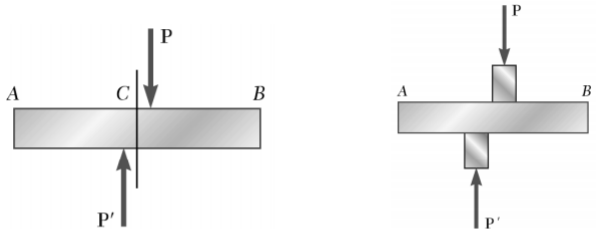
$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \overset{0}{\sigma_z}) = \frac{40}{E} - \frac{0.3}{E}(80) = 0.08\times10^{-3}$

$\varepsilon_y = \frac{\delta_{AB}}{L_{AB}} \Rightarrow \delta_{AB} = \varepsilon_y \times L_{AB} = 0.08\times10^{-3} \times 30 = 0.0024$

48

تنش برشی:

در شکل زیر، صفحه تحت اثر نیروهای P قرار داشته و می خواهد توسط این نیروها برش داده شود.



نیروی وارد شده به مقطع C یک نیروی برشی است. لذا تنش برشی متوسط در مقطع C به این صورت تعریف می شود:

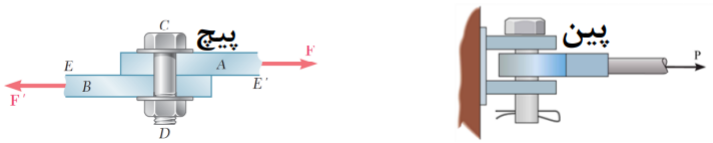
$$\tau = \frac{P}{A}$$

τ تنش برشی (نیوتن بر متر مربع) P نیروی وارد بر مقطع (نیوتن) A مساحت قسمت برش خورده (متر مربع)

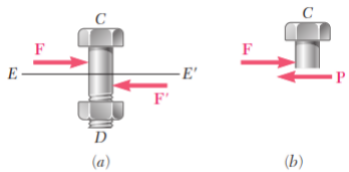
نماد τ به صورت «تاو» تلفظ می شود.

فرض کنید در اثر نیروی برشی وارد شده، جسم بُریده شود. در این صورت سطح مقطع قسمت برش خورده، همان A در رابطه بالا است.

تنش برشی معمولاً در پین ها، پرچ ها و پیچ و مهره ها به وجود می آید. در تصویر سمت راست از شکل زیر، یک پین تحت بارگذاری برشی نشان داده شده است و در تصویر سمت چپ از شکل زیر یک پیچ تحت بارگذاری برشی نشان داده شده است.





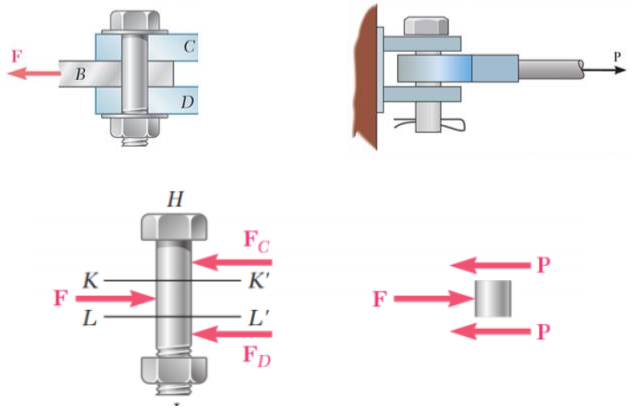


$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$$

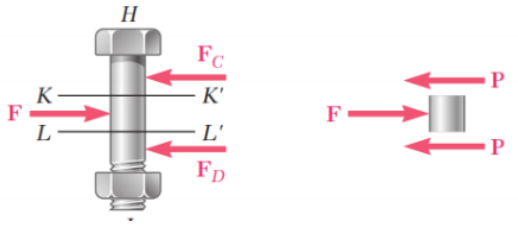
تنش برشی دوگانه:

اگر قطعه ای که تحت نیروی برشی قرار دارد (پیچ، پین یا . . .) به دو صفحه متصل باشد، آن قطعه تحت تنش برشی ساده قرار دارد و تنش برشی در قطعه از رابطه ای که پیش تر ارائه شد ($\tau = P/A$) به دست می آید، مانند تصویر پیچ در شکل بالا.

اگر قطعه ای که تحت نیروی برشی قرار دارد (پیچ، پین یا . . .) به سه صفحه متصل باشد، آن قطعه تحت تنش برشی دوگانه قرار دارد. مثلاً در تصویر چپ شکل زیر، پیچ به سه صفحه‌ی B، C و D متصل است. همچنین در تصویر سمت راست نیز، پین به سه صفحه متصل شده است، پس تنش برشی دوگانه در پیچ و پین وجود دارد.



51



در قطعاتی که تنش برشی دوگانه دارند، در یک سمت قطعه، دو صفحه و در سمت دیگر قطعه، یک صفحه وجود دارد. مثلاً در تصویر سمت چپ شکل بالا، صفحه‌ی B به صورت تکی و در سمت چپِ پیچ، و صفحات C و D در سمت راست پیچ قرار دارند.

تنش برشی دوگانه در یک پیچ یا پین از رابطه زیر به دست می آید:

$$\tau = \frac{P}{2A}$$

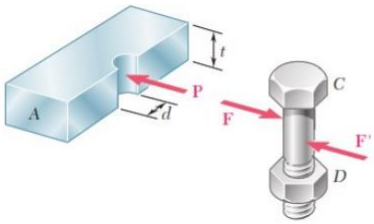
τ تنش برشی (پاسکال) P نیروی وارد بر صفحه‌ی تکی (نیوتن) A مساحت قسمت برش خورده (مترمربع)

نکته مهم: در پیچ ها و پین هایی که به سه صفحه متصل هستند، نیروی دو صفحه ای که در یک سمت پیچ قرار دارند با هم برابر بوده و به اندازه‌ی نصف نیروی صفحه‌ی تکی می باشد.

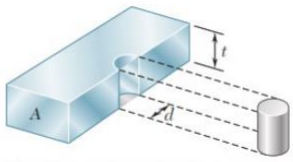
52

تنش لهیدگی

تعریف تنش لهیدگی: به توزیع نیرو بر روی تصویر سطح مقطع محل فشردگی تنش لهیدگی گفته می شود:

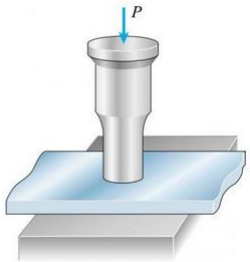


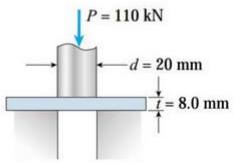
$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td}$$



مثال ۱۰

در تصویر زیر، وسیله‌ای به نام **پانچ** نمایش داده شده است که برای ایجاد حفره در صفحات فولادی مورد استفاده قرار می‌گیرد. **قطر** این پانچ **۲۰ میلی‌متر** و **ضخامت** صفحه فولادی **۸ میلی‌متر** است. اگر **نیروی مورد نیاز برای ایجاد یک حفره** درون صفحه فولادی **۱۱۰ کیلو نیوتن** باشد، مقدار تنش برشی میانگین در صفحه و تنش فشاری میانگین در پانچ چقدر خواهد بود؟





حل مثال ۱۰

تنش برشی میانگین از تقسیم نیروی **P** بر مساحت برش صفحه به دست می‌آید. **مساحت برش** (A_s) در این مثال برابر است با **حاصل‌ضرب محیط حفره در ضخامت صفحه:**

$$A_s = \pi dt = \pi(20\text{ mm})(8.0\text{ mm}) = 502.7\text{ mm}^2$$

d: قطر پانچ؛ **t**: ضخامت صفحه

بنابراین، برای محاسبه تنش برشی میانگین داریم:

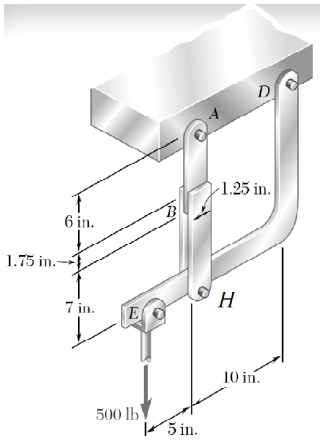
$$\tau_{\text{aver}} = \frac{P}{A_s} = \frac{110\text{ kN}}{502.7\text{ mm}^2} = 219\text{ MPa}$$

تنش فشاری میانگین نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_c = \frac{P}{A_{\text{punch}}} = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{110\text{ kN}}{\pi(20\text{ mm})^2/4} = 350\text{ MPa}$$

A_{punch}: مساحت سط مقطع پانچ

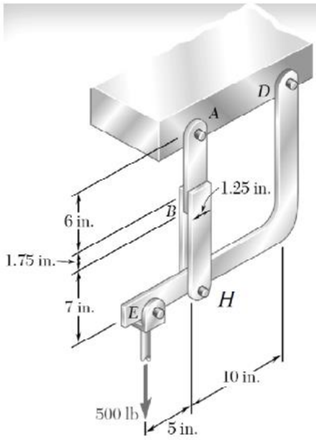
مثال ۱۱



در شکل مقابل، میله ABH از دو قسمت تشکیل شده است. میله AB به ضخامت 0.375in و میله های BH که ضخامت هر کدام 0.25in است. میله‌های AB و BH با چسب به هم متصل شده اند. قطر پین های A و H به ترتیب 0.375in و 0.25in است. این موارد را بیابید:

** تنش برشی در پین A و پین H

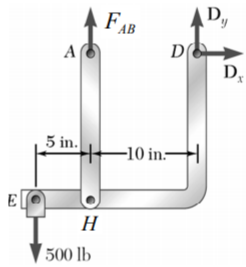
** اگر تنش برشی قابل تحمل توسط فلزی که پین ها از آن ساخته شده اند، ۷۰۰۰ پوند بر اینچ مربع باشد، آیا پین های A و H شکسته خواهد شد؟



پاسخ: ابتدا نمودار آزاد کل جسم را رسم می کنیم (شکل زیر) تا نیروی تکیه‌گاه A را بیابیم.

$$\sum M_D = 0 \rightarrow 500\times 15 - F_{AB}\times 10 = 0 \rightarrow F_{AB} = 750lb$$

پین A به دو صفحه متصل است (یک صفحه همان قطعه‌ی AB و صفحه‌ی دیگر، همان دیوار است که پین به آن متصل است).



پس پین A تنش ساده دارد. لذا خواهیم داشت « « « « « « « « « « « «

$$\tau_A = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{750}{\frac{1}{4}\pi(0.375)^2} = 6790\frac{lb}{in^2}$$

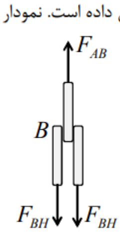
57

پس پین A دچار شکست نمی شود چون تنش آن کمتر از ۷۰۰۰ است. اگر پین A برش بخورد، قسمت برش خورده به صورت دایره‌ای به قطر 0.375in (یعنی همان قطر پین) خواهد بود لذا A (در رابطه تنش برشی که در بالا نوشته شده است) برابر با مساحت دایره ای به قطر 0.375in است.

پین H به سه صفحه متصل است (دو صفحه در یک سمت پین که مربوط به قطعه BH است و یک صفحه در سمت دیگر پین که مربوط به قطعه BHD است). پس پین H تنش دوگانه دارد. برای محاسبه ی تنش برشی در پین H، باید نیروی دو

صفحه ای که در یک سمت پین H هستند را بیابیم. دو صفحه ای که در یک سمت پین H هستند، همان دو صفحه ی تشکیل دهنده ی قطعه BH هستند. پس نیروی دو صفحه ی تشکیل دهنده ی قطعه BH را محاسبه می نماییم.

در شکلِ صورت مسئله، قسمتی که با نام B مشخص شده است را در نظر بگیرید (این قسمت را اتصال B می‌نامیم). در واقع، اتصال B، قطعه AB را به دو صفحه ی BH جوش داده است. نمودار آزاد این قسمت به صورت شکل زیر است.



به دلیل تقارن، نیروی دو صفحه ی تشکیل دهنده ی قطعه BH با هم برابر است به همین دلیل در نمودار آزاد، دو نیروی به سمت پایین، با اندازه های یکسان در نظر گرفته شد.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AB} - F_{BH} - F_{BH} = 0 \rightarrow F_{BH} = \frac{F_{AB}}{2} = \frac{750}{2} = 375lb$$

58

پس نیروی هر یک از صفحات تشکیل دهنده ی قطعه BH برابر با ۳۷۵ پوند است. لذا نیروی هر یک از دو صفحه ای که در یک سمت پین H هستند نیز ۳۷۵ پوند است. بنابراین طبق نکته ای که قبلاً در متن درس گفته شد، نیروی صفحه ی تکی که در یک سمت پین H است برابر با دو برابر نیروی دو صفحه دیگر است. لذا نیروی صفحه تکی برابر با ۷۵۰ پوند است. از طرفی، اگر پین H برش بخورد، قسمت برش خورده به صورت دایره ای به قطر 0.25in (یعنی همان قطر پین) خواهد بود لذا A (در رابطه تنش برشی) برابر با مساحت دایره ای به قطر 0.25in است.

پس تنش برشی در پین H می شود: $\tau_H = \frac{F}{2A} = \frac{750}{2\times\left(\frac{1}{4}\pi(0.25)^2\right)} = 7640\frac{lb}{in^2}$

لذا پین H دچار شکست می شود چون تنش آن بیش تر از ۷۰۰۰ است (باید قطر پین H را بیش تر نمود تا از شکست آن جلوگیری شود).

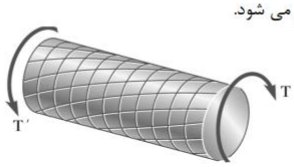
59

پیچش

در کاربردهای زیادی در مهندسی، به قطعاتی برخورد می کنیم که دچار پیچش می شوند. به عنوان مثال میل گردان های انتقال که برای انتقال قدرت از نقطه ای به نقطه دیگر استفاده می شوند. در شکل زیر، میله ای با مقطع دایره ای نشان داده شده که به دو طرف آن، دو کوپل پیچشی وارد شده و باعث پیچش جسم شده است.

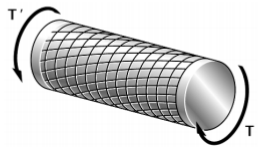


وقتی به یک میله با مقطع دایره ای، کوپل پیچشی وارد کنیم، هر کدام از سطح مقطع های میله، صاف و صفحه ای باقی می ماند و دچار تابیدگی نمی شود. در شکل زیر مشاهده می شود که بعد از اعمال کوپل پیچشی به جسم، تمام سطح مقطع های میله، شکل دایره ای خود را حفظ کرده و تغییر حالت نداده اند. میله های با مقاطع غیر دایره ای چنین خاصیتی ندارند و تحت پیچش، سطح مقطع آن ها دچار تابیدگی می شود.



60

برای اینکه تمام سطح مقطع های میله، به صورت صفحه ای و دایره ای باقی بمانند و تابیدگی پیدا نکنند، دو انتهای میله نیز باید در حین بارگذاری دچار تابیدگی نشوند. نحوه اعمال نادرست کوپل پیچشی به دو انتهای میله باعث ایجاد تابیدگی در دو صفحه انتهایی میله می‌شود و لذا تابیدگی در سایر سطح مقطع ها نیز ایجاد می شود. برای این کار، کوپل های پیچشی را بر دو صفحه دایره ای صُلب اعمال می کنند که به طور محکم، به دو انتهای میله نصب شده است. صفحات صُلب یعنی صفحاتی که تغییر شکل نمی دهد.



61

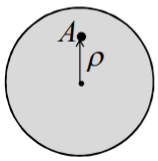
تنش ایجاد شده در میله تحت پیچش:

تنش برشی ایجاد شده در اثر گشتاور T که به یک میله با مقطع دایره ای وارد می شود به صورت زیر است:

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

T گشتاور وارد شده به میله (نیوتن متر)

τ تنش ایجاد شده در شعاع ρ از میله (تنش بر حسب پاسکال و شعاع بر حسب متر است)



مثلاً در شکل روبرو، نقطه A در شعاع ρ از مرکز میله قرار دارد.

J ممان اینرسی قطبی مقطع میله (بر حسب m^4) است که از روابط زیر به دست می آید:

برای میله با مقطع دایره ای، داریم:

$$J = \frac{1}{2}\pi c^4$$

برای میله با مقطع به شکل دایره توخالی داریم:

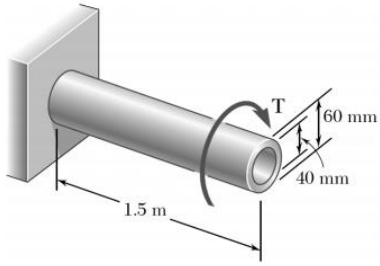
$$J = \frac{1}{2}\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right)$$

که c_1 شعاع داخلی و c_2 شعاع خارجی است.

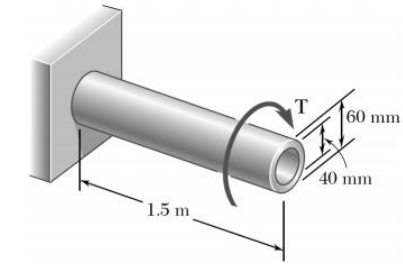
62

مثال ۱۲

تنش برشی مجاز میله‌ی با مقطع دایره‌ای توخالیِ شکل زیر، 120MPa است. قطر داخلی میله 40mm و قطر خارجی آن 60mm است. بیشترین گشتاوری که می توان به آن اعمال نمود چقدر است؟ در حالتی که بیشترین گشتاور ممکن بر میله اعمال شود، کمترین تنش ایجاد شده چقدر و در کجا خواهد بود؟



63



پاسخ: داریم: $\tau = \frac{T\rho}{J}$. بیشترین تنش برشی در بیشترین شعاع اتفاق می افتد پس $\rho = 30mm$

ممان اینرسی قطبی میله می شود: $J = \frac{1}{2}\pi\,(c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2}\pi(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad \rightarrow \quad 120\times10^6 = \frac{T\times(30\times10^{-3})}{1.021\times10^{-6}} \quad \rightarrow \quad T = 4.08\times10^3\,N.m$$

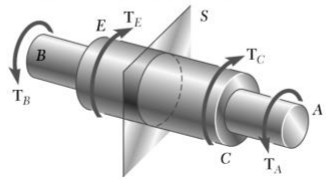
کمترین تنش برشی در کمترین شعاع اتفاق می افتد یعنی در شعاع داخلی میله. پس داریم:

$$\tau_{\min} = \frac{T\rho_{\min}}{J} = \frac{(4.08\times10^3)\times(20\times10^{-3})}{1.021\times10^{-6}} = 80\times10^6\,Pa = 80MPa$$

64

تنش ایجاد شده در میله تحت پیچش:

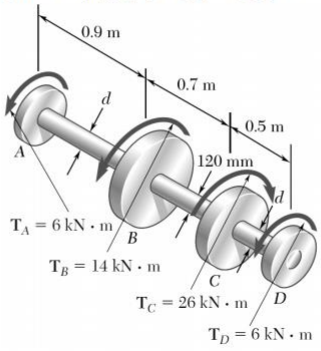
رابطه روبرو را برای میله ای که سطح مقطع آن ثابت باشد و در وسط میله، گشتاور خارجی دیگری اعمال نشده باشد می توان نوشت. اگر میله ای با سطح مقطع متغیر و با گشتاورهای متعدد در نقاط مختلف موجود باشد، برای هر قسمت از میله که سطح مقطع ثابت و گشتاور خارجی نیز در وسط آن موجود نباشد، می توان رابطه بالا را نوشت. در این صورت، T در رابطه بالا گشتاور داخلی هر قسمت است که نحوه محاسبه آن در مثال بعد خواهد آمد. مثلاً در میله‌ی شکل زیر، نمی توان رابطه بالا را برای قسمت های BS، AE و AB نوشت ولی می‌توان برای قسمت های AC، CE و BE نوشت.



65

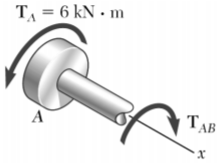
مثال ۱۳

قطر داخلی و خارجی میله توخالی BC به ترتیب 90mm و 120mm است. قطر میله‌های توپر AB وCD برابر با d است. تنش برشی مجاز تمام میله‌ها 130MPa است. بیشترین و کمترین تنش برشی در میله BC و بیشترین مقدار ممکن برای d را بیابید.



66

پاسخ: میله از سه قسمت AB، BC و CD تشکیل شده است که هر قسمت سطح مقطع ثابت داشته و در وسط هر قسمت نیز، گشتاور خارجی وجود ندارد. برای هر یک از سه قسمت بالا، باید با رسم نمودار آزاد، مقدار گشتاور داخلی را محاسبه نمود. ابتدا می خواهیم گشتاور داخلی قسمت AB را بیابیم. باید قسمت AB را از وسط برش بزنیم (شکل زیر).



در قسمتی که برش خورده (یعنی وسط میله AB) یک گشتاور به نام T_{AB} قرار می دهیم که این همان گشتاور داخلی قسمت AB است که باید آن را بیابیم. چون جهت این گشتاور را نمی دانیم، به سمت دلخواهی آن را رسم می کنیم. یک گشتاور خارجی 6kN.m هم در نقطه A وارد می شود که آن را در نمودار آزاد، رسم نموده ایم. حال معادله‌ی تعادل گشتاور را می نویسیم، تا T_{AB} به دست آید. جهت مثبت و منفی را به صورت دلخواه انتخاب می کنیم. مثلاً ما در این مثال، گشتاورهایی که در جهت گشتاور T_A باشد را مثبت در نظر می‌گیریم و گشتاورهایی که خلاف آن باشد را منفی در نظر می گیریم. حال معادله تعادل گشتاورها به صورت زیر می شود:

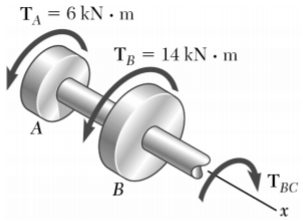
$$\sum M = 0 \longrightarrow +6000 - T_{AB} = 0 \longrightarrow T_{AB} = 6000 N.m$$

علامت T_{AB} مثبت به دست آمد یعنی جهتی که انتخاب کردیم درست بوده است.

67

علامت T_{AB} مثبت به دست آمد یعنی جهتی که انتخاب کردیم درست بوده است.

نمودار آزاد قسمت BC را دقیقاً با همان روند نمودار آزاد قسمت AB رسم می کنیم (شکل زیر):



معادله‌ی تعادل گشتاورها به صورت روبرو می‌شود: $\sum M = 0 \rightarrow +6000 + 14000 - T_{BC} = 0 \rightarrow T_{BC} = 20000 N.m$

اگر نمودار آزاد قسمت CD را به همان روش قبلی رسم کنیم، معادله تعادل گشتاورها به صورت زیر می شود (نمودار آزاد این قسمت رسم نشده است و فقط معادله تعادل گشتاورها را می نویسیم):

$$\sum M = 0 \rightarrow +6000 + 14000 - 26000 - T_{CD} = 0 \rightarrow T_{CD} = 6000 N.m$$

برای میله توخالی BC، شعاع خارجی 60mm و شعاع داخلی 45mm است، لذا داریم:

$$J_{BC} = \frac{1}{2}\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right) = \frac{1}{2}\pi\left(0.06^4 - 0.045^4\right) = 13.92 \times 10^{-6} m^4$$

68

بیشترین تنش میله BC در شعاع خارجی آن اتفاق می افتد، لذا داریم:

$$(\tau_{BC})_{\max} = \frac{T_{BC}c_2}{J_{BC}} = \frac{20000\times(60\times10^{-3})}{13.92\times10^{-6}} = 86.2\times10^{6}\,Pa = 86.2MPa$$

کمترین تنش برشی در میله BC در شعاع داخلی اتفاق می افتد، لذا داریم:

$$(\tau_{BC})_{\min} = \frac{T_{BC}c_1}{J_{BC}} = \frac{20000\times(45\times10^{-3})}{13.92\times10^{-6}} = 64.7\times10^{6}\,Pa = 64.7MPa$$

برای میله های AB و CD که توپُر و با قطر d هستند داریم:

$$J_{AB} = J_{CD} = \frac{1}{2}\pi c^4 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi d^4}{32}$$

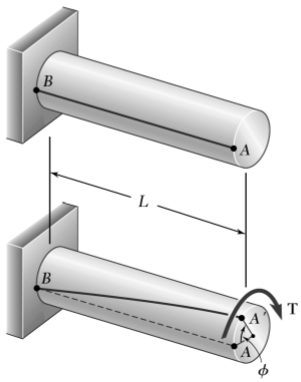
در صورت سؤال گفته شد که تنش برشی مجاز در تمام میله ها 130MPa است. از طرفی می دانیم، هر چه قطر میله بیش تر باشد، میله مقاوم تر می شود و لذا تنش وارد بر آن کمتر است. پس باید ببینیم اگر تنش وارد بر میله 130MPa باشد (که بیش ترین تنش مجاز است)، قطر میله چقدر خواهد بود.

$$(\tau_{AB})_{\max} = \frac{T_{AB}\rho_{AB}}{J_{AB}} = \frac{6000\times\left(\frac{d}{2}\right)}{\left(\frac{\pi d^4}{32}\right)} = \frac{6000\times32}{2\times\pi\times d^3} = \frac{30558.7}{d^3} \xrightarrow{(\tau_{AB})_{\max}=130MPa} 130\times10^{6} = \frac{30558.7}{d^3} \rightarrow d = 6.17cm$$

69

تغییر شکل میله تحت پیچش:

میله ای با مقطع دایره ای را در نظر بگیرید که از یک طرف به دیوار متصل شده و از طرف دیگر تحت کوپل پیچشی T قرار گرفته است. انتهای آزاد میله که تحت اثر کوچل T است به اندازه زاویه ϕ می‌پیچد. ϕ را زاویه پیچش می گویند. می‌خواهیم رابطه بین زاویه پیچش و کوپل پیچشی را بیابیم.



زاویه پیچش میله ای که گشتاور T به آن وارد می شود از رابطه زیر به دست می آید » » »

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

ϕ زاویه پیچش (رادیان) T گشتاور وارد شده به میله (N.m) L طول میله (متر)

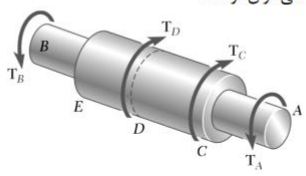
J ممان اینرسی قطبی مقطع میله (m^4) که روابط آن قبلاً گفته شد

G ضریب ارتجاعی برشی (بر حسب نیوتن بر متر مربع که همان Pa است)

70

زاویه پیچش در میله های چند تکه:

اگر یک میله شامل چند قسمت باشد، زاویه پیچش کلی، از جمع زوایای پیچش هر قسمت به دست می آید. مثلاً برای میله EC در شکل زیر، نمی توان رابطه $\phi = TL/JG$ را نوشت زیرا در وسط میله EC یک گشتاور اعمال شده است. همچنین برای میله BD نمی توان رابطه فوق را نوشت چون سطح مقطع میله در وسط آن عوض شده و J عوض می شود. لذا رابطه بالا را فقط برای قسمت های AC، CD، DE و BE می توان نوشت.



هر کدام از چهار قسمت میله، یک زاویه پیچش به صورت زیر دارند:

$$\phi_{AC} = \frac{T_{AC}L_{AC}}{J_{AC}G_{AC}} \qquad \phi_{CD} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}G_{CD}} \qquad \phi_{DE} = \frac{T_{DE}L_{DE}}{J_{DE}G_{DE}} \qquad \phi_{BE} = \frac{T_{BE}L_{BE}}{J_{BE}G_{BE}}$$

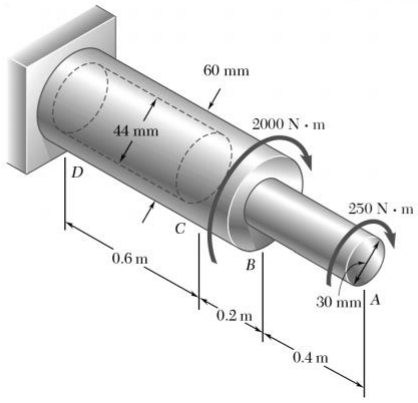
زاویه پیچش کلی در کل میله (یعنی در میله AB) می شود:

$$\phi_{AB} = \phi_{AC} + \phi_{CD} + \phi_{DE} + \phi_{BE} = \frac{T_{AC}L_{AC}}{J_{AC}G_{AC}} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}G_{CD}} + \frac{T_{DE}L_{DE}}{J_{DE}G_{DE}} + \frac{T_{BE}L_{BE}}{J_{BE}G_{BE}}$$

71

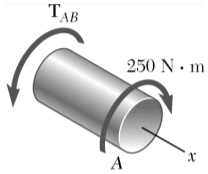
مثال ۱۳

میله فولادی روبرو به نکیه گاه ثابتی متصل است. قسمت CD میله، توخالی بوده و قطر داخلی آن 44mm است. زاویه پیچش انتهای A را بیابید. برای فولاد G=77GPa



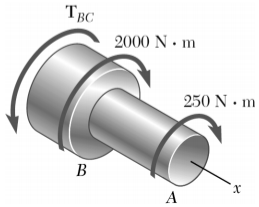
72

پاسخ: این میله شامل سه قسمت AB و BC و CD است که هر قسمت باید جداگانه تحلیل شود. ابتدا گشتاور داخلی هر یک از قسمت‌ها را می‌یابیم. به همان شیوه ای که در مثال های قبل گفته شد، نمودار آزاد هر قسمت را رسم نموده و سپس گشتاور داخلی هر قسمت را می‌یابیم. قسمت AB را برش می‌دهیم و نمودار آزاد آن را رسم می‌کنیم که به صورت شکل زیر خواهد شد:



$$\sum M = 0 \;\rightarrow\; T_{AB} - 250 = 0 \;\rightarrow\; T_{AB} = 250N.m$$

علامت T_{AB} مثبت به دست آمد، یعنی جهتی که برای آن انتخاب کرده بودیم درست بوده است. حال قسمت BC را برش می‌دهیم و نمودار آزاد آن را رسم می کنیم که به صورت شکل زیر خواهد شد:



$$\sum M = 0 \;\rightarrow\; T_{BC} - 2000 - 250 = 0 \;\rightarrow\; T_{BC} = 2250N.m$$

علامت T_{BC} مثبت به دست آمد، یعنی جهتی که برای آن انتخاب کرده بودیم درست بوده است.

73

اگر مقطع CD را نیز برش بزنیم، به طریق مشابه خواهیم داشت: $T_{CD} = 2250N.m$

T_{CD} نیز مثبت به دست می آید یعنی جهت T_{CD} نیز در همان جهت های T_{AB} و T_{BC} خواهد بود. پس اکنون هر سه گشتاور داخلی قسمت‌های AB، BC و CD در خلاف جهت گشتاور 2000N.m هستند. جهت گشتاور داخلی در هر قسمت، نشان‌دهنده‌ی جهتی است که آن قسمت از میله پیچیده می شود. لذا در این مثال، چون گشتاور داخلی هر سه قسمت، در یک جهت هستند پس هر سه قسمت میله در یک جهت می پیچند (جهت پیچش هر سه قسمت یکسان است).

حال ممان اینرسی قطبی قسمت های مختلف میله را می یابیم:

$$J_{AB} = \frac{1}{2}\pi c_{AB}^4 = \frac{1}{2}\pi \times \left(15\times10^{-3}\right)^4 = 0.0795\times10^{-6}m^4$$

$$J_{BC} = \frac{1}{2}\pi c_{BC}^4 = \frac{1}{2}\pi \times \left(30\times10^{-3}\right)^4 = 1.272\times10^{-6}m^4$$

$$J_{CD} = \frac{1}{2}\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right) = \frac{1}{2}\pi \times \left[\left(30\times10^{-3}\right)^4 - \left(22\times10^{-3}\right)^4\right] = 0.904\times10^{-6}m^4$$

اکنون مقدار پیچش در هر سه قسمت را محاسبه نموده و با هم جمع می کنیم تا مقدار پیچش در کل میله یعنی پیچش مقطع A به دست آید (جهت پیچش در سه قسمت میله را در نظر بگیرید):

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{J_{AB}G_{AB}} = \frac{250\times0.4}{(0.0795\times10^{-6})\times(77\times10^{9})} = 0.01634$$

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{J_{BC}G_{BC}} = \frac{2250\times0.2}{(1.272\times10^{-6})\times(77\times10^{9})} = 0.00459$$

$$\phi_{CD} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{J_{CD}G_{CD}} = \frac{2250\times0.6}{(0.904\times10^{-6})\times(77\times10^{9})} = 0.01939$$

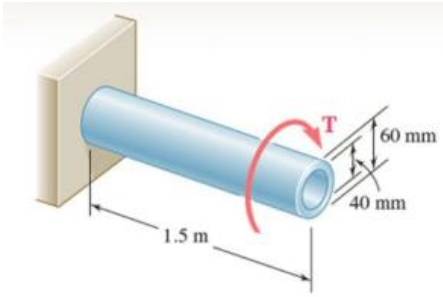
پیچش کلی میله می شود: $\phi_A = \phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CD} = 0.01634 + 0.00459 + 0.01939 = 0.0403\,rad$

74

$$\phi_A = 0.0403rad \times \frac{180\deg}{3.14rad} = 0.0403\times\frac{180}{3.14}\deg = 2.309\deg$$

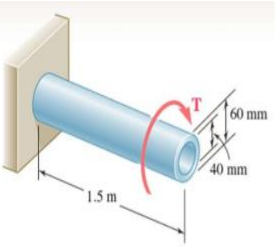
تمرین ۶

بر انتهای شفت زیر چه گشتاوری باید وارد گردد تا زاویه پیچش $2°$ ایجاد شود؟ این شفت از جنس فولاد با ضریب برشی $G = 77\ \text{GPa}$ است.



75

حل تمرین ۶



$$T = \frac{JG}{L}\phi \qquad G = 77 \times 10^9\ \text{Pa} \qquad L = 1.5\ \text{m}$$

$$\phi = 2°\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{360°}\right) = 34.9 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$J = \tfrac{1}{2}\pi\,(c_2^4 - c_1^4) = \tfrac{1}{2}\pi\,(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

$$T = \frac{JG}{L}\phi = \frac{(1.021 \times 10^{-6}\ \text{m}^4)(77 \times 10^9\ \text{Pa})}{1.5\ \text{m}}(34.9 \times 10^{-3}\ \text{rad})$$

$$T = 1.829 \times 10^3\ \text{N·m} = 1.829\ \text{kN·m}$$

76

ضریب ایمنی:

تنش نهایی، مقدار تنشی است که اگر به جسمی وارد شود، شکسته می شود. همیشه باید طوری سازه ها را طراحی نمود که در حین عملکرد دچار شکست نشوند. مثلاً یک پل که بر روی یک رودخانه است باید طوری طراحی شود که در بدترین حالت (که کامیون های زیاد و با سرعت بالا از روی آن عبور کنند) دچار شکست نشود. همیشه سازه ها را طوری طراحی می کنند که تنش در آن ها به تنش نهایی نزدیک نشود.

مهندسان طراح، یک تنش به عنوان تنش مجاز در نظر می گیرند که تنش ایجاد شده در آن سازه نباید از آن تنش مجاز بیش تر شود. تنش مجاز کمتر از تنش نهایی جسم است. مثلاً اگر تنش نهایی که اسکلت فلزی یک پل می تواند تحمل کند 200GPa باشد، مهندسان طوری طراحی پل را انجام می دهند که تنش در پل، کمتر از 160GPa باشد. در این مثال، تنش نهایی 200GPa و تنش مجاز 160GPa است.

ضریب اطمینان برابر است با تنش نهایی تقسیم بر تنش مجاز. پس در مثال بالا، ضریب اطمینان 1.25 است. انتخاب ضریب اطمینان با مهندس طراح یک سازه است. اگر ضریب اطمینان کم انتخاب شود، احتمال شکست سازه در حین کار وجود دارد. اگر ضریب اطمینان خیلی زیاد انتخاب شود، هزینه ساخت سازه بیش از حد بالا می رود. دلایل استفاده از ضریب اطمینان به صورت زیر است:

77

۱- تغییرات اجزای سازه: برخی از اجزای سازه ممکن است در حین فرآیند تولید یا نصب دچار آسیب های جزیی شده و عملکرد و مقاومت ان ها کم شود.

۲- بارگذاری های متعدد: وقتی بارگذاری های متعددی بر یک سازه اعمال می شود، احتمال شکست سازه در طولانی مدت افزایش می یابد. این پدیده را خستگی می گویند. مثلاً یک پل که روزانه به دفعات زیاد تحت بارگذاری قرار می گیرد (در اثر عبور ماشین ها)، در معرض خستگی است.

۳- نوع بارگذاری: نوع بارگذاری بر مقاومت سازه اثر دارد. مثلاً بارگذاری های خیلی سریع، باعث کاهش مقاومت سازه می شود.

۴- جنس مواد: اگر سازه ما از جنس مواد ترد باشد باید ضریب اطمینان بیشتری برای ان در نظر بگیریم زیرا مواد ترد بدون هیچ علامتی و به طور ناگهانی دچار شکست می شوند ولی مواد نرم (چکش خوار) ابتدا دچار تغییر طول های زیاد شده سپس می شکنند لذا می توان نزدیک بودن شکست ان ها را تشخیص داده و جلوگیری نمود.

۵- خطای روش های تحلیلی: تقریباً تمامی روش های تحلیلی اندکی خطا دارند. لذا باید از ضریب اطمینان استفاده نمود.

۶- عوامل پیش بینی نشده: همیشه برای یک سازه باید عوامل پیش بینی نشده در نظر گرفت که ممکن است باعث شکست سازه شوند. به همین دلیل باید از ضریب اطمینان استفاده نمود.

۷- حساسیت کاربرد سازه: مثلاً ضریب اطمینان در یک هواپیمای مسافربری بیش تر از ضریب اطمینان در یک هواپیمای بدون سرنشین در نظر گرفته می شود.

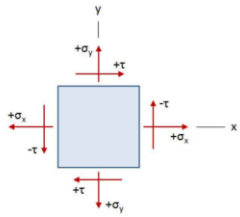
78

تنش قائم بیشینه و نظریه‌های تسلیم مواد

تنش های اصلی

حالت کلی تنش در هر نقطه‌ای از یک جسم تحت بارگذاری را می‌توان با استفاده از سه تنش نرمال (یک تنش در هر راستا) و شش تنش برشی (دو تنش در هر راستا) نشان داد. اندیس‌های موجود در کنار نام هر یک از **تنش‌های نرمال** (σ)، نشان دهنده راستای آن تنش در دستگاه مختصات است. در کنار نام تنش‌های برشی نیز اندیس‌هایی وجود دارند؛ با این تفاوت که برخلاف نام‌گذاری در تنش‌های نرمال، این اندیس‌های تنش‌های برشی دارای دو مؤلفه هستند. مؤلفه اول، راستای سطح عمود بر تنش و مؤلفه دوم، راستای تنش در دستگاه مختصات را مشخص می‌کند.

عموماً، تنش‌های موجود در یک راستا هنگامی صفر می‌شوند که حالت کلی تنش بر روی یک صفحه منفرد اعمال شده باشد (شکل زیر). به این حالت، **تنش صفحه‌ای** گفته می‌شود. تنش صفحه‌ای، در صفحات نازک و همچنین سطوح خارجی تمام سازه‌های تحت بارگذاری رخ می‌دهد. از آنجایی که تنش خمشی و پیچشی، در سطح اجسام به حداکثر مقدار خود می‌رسند، تنش‌های صفحه‌ای معمولاً به عنوان مهم‌ترین تنش‌های موجود در محاسبات به حساب می‌آیند.



79

در شکل بالا، σ_x و σ_y ، تنش‌های نرمال و τ ، تنش برشی هستند. در این حالت، وضعیت تنش‌ها به گونه‌ای است که نقطه مورد نظر در حالت تعادل استاتیکی قرار داشته باشد. از آنجایی که مقدار تمام تنش‌های برشی با هم برابر است، اندیس‌های آن‌ها به منظور ساده‌سازی حذف شده‌اند. با این وجود، توجه داشته باشید که علامت تنش‌های **هم‌راستا با محور x** ، **مثبت** و تنش‌های **هم‌راستا با محور y** ، **منفی** خواهد بود.

قواعد علامت‌گذاری صحیح، به گونه‌ای است که در شکل بالا نشان داده شده. برای **تنش‌های نرمال**، علامت **تنش کششی، مثبت** و علامت **تنش فشاری، منفی** در نظر گرفته می‌شود. برای **تنش‌های برشی**، علامت تنش **در جهت عقربه‌های ساعت، مثبت** و **برخلاف جهت عقربه‌های ساعت، منفی** خواهد بود.

در هر نقطه از ماده، زوایایی را می‌توان یافت که تنش‌های نرمال و برشی صفحه در آن‌ها به مقادیر ماکسیمم و مینیمم خود می‌رسند. به **تنش‌های نرمال ماکسیمم و مینیمم**، **تنش‌های اصلی** گفته می‌شود .**تنش‌های برشی ماکسیمم و مینیمم** را نیز **تنش‌های برشی حداکثری** می‌گویند.

تنش‌های اصلی:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

تنش‌های برشی حداکثری:

$$\tau_1, \tau_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

80

تنش‌های اصلی:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

تنش‌های برشی حداکثری:

$$\tau_1, \tau_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

- جمع تنش‌های نرمال، مقدار ثابتی است.

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

- تنش برشی حداکثر، برابر است با نصف تفاضل تنش‌های اصلی.

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

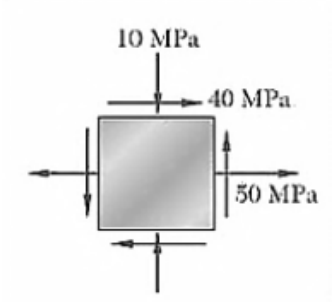
81

مثال ۱۴

در حالت تنش صفحه ای نشان داده شده در شکل روبه رو مطلوبست:

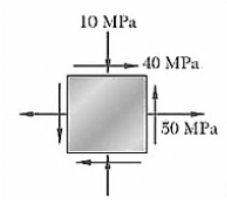
الف) صفحه های اصلی ب) تنش های اصلی

ج) تنش برشی ماکزیمم و تنش عمودی متناظر با آن



82

حل مثال ۱۴



$$\sigma_x = 50\ \text{MPa} \quad , \quad \sigma_y = -10\ \text{MPa} \quad , \quad \tau_{xy} = 40\ \text{MPa}$$

الف) صفحه های اصلی :

$$\tan 2\theta_P = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(40)}{50-(-10)} = \frac{80}{60}$$

$$2\theta_P = 53.1°$$

$$\theta_P = 26.6° \quad \text{و} \quad 116.6°$$

ب) تنش های اصلی :

$$\sigma_{max}\ ,\ \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{50-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50+10}{2}\right)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{max} = 20 + 50 = 70\ MPa$$

$$\sigma_{min} = 20 - 50 = -30\ MPa$$

ج) تنش برشی ماکزیمم :

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ MPa$$

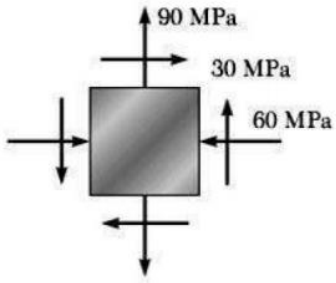
تمرین ۷

برای وضعیت تنش صفحه ای نشان داده شده مطلوبست محاسبه ی:

الف- صفحه های اصلی (زاویه امتدادهای اصلی با محور افقی)

ب- مقادیر تنش های اصلی

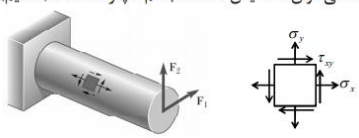
ب) تنش برشی ماکزیمم در صفحه و تنش قائم متناظر در این صفحه.



85

نظریه های تسلیم مواد:

برای یک جسم تحت بارگذاری (تصویر چپ از شکل زیر)، در یک نقطه‌ی خاص، تنش های وارد بر یک جزء مربعی به صورت تصویر راست از شکل زیر است. در قسمت قبل توضیح دادیم که با داشتن تنش های وارد بر جزء مربعی (تصویر راست از شکل زیر)، چگونه می توان تنش های قائم بیشینه (σ_{max}) و کمینه (σ_{min}) را یافت. حال می خواهیم بگوییم با داشتن تنش‌های بیشینه و کمینه در یک جسم، چگونه می توان تشخیص داد که جسم دچار شکست (تسلیم) می شود یا خیر.



مواد نرم (چکش خوار) و مواد تُرد (شکننده):

مواد نرم، موادی هستند که اگر نیروی وارد بر آن ها را افزایش دهیم دچار تغییر شکل زیادی می شوند و در نهایت هم دچار شکست می شوند. مواد تُرد موادی هستند که اگر نیروی وارد بر آن ها را افزایش دهیم دچار تغییر شکل اندکی می شوند و در نهایت هم دچار شکست می شوند. مثلاً آهن جزء مواد نرم بوده و چُدن جزء مواد تُرد است. تفاوت ساختاری مواد نرم و ترد باعث شده است که نظریه هایی که برای پیش بینی شکست استفاده می شود، در مواد نرم و ترد متفاوت باشد. در ادامه، دو نظریه برای پیش بینی شکست مواد نرم و یک نظریه برای پیش بینی شکست مواد ترد ارائه می نماییم.

86

نظریه های تسلیم مواد نرم (معیار تِرِسکا):

برای یک جسم تحت بارگذاری، ابتدا مقادیر تنش بیشینه (σ_{max}) و تنش کمینه (σ_{min}) را محاسبه می کنیم. تنش تسلیم ماده (σ_Y) هم معلوم است (چون جنس ماده مشخص است). اگر تنش بیشینه و کمینه، هم علامت باشند، مقادیر n_1 و n_2 را از روابط زیر محاسبه می کنیم:

$$n_1 = \frac{\sigma_Y}{|\sigma_{max}|} \qquad n_2 = \frac{\sigma_Y}{|\sigma_{min}|}$$

اگر هر دو کمیت n_1 و n_2 بزرگ تر از یک باشد، جسم دچار تسلیم نمی شود و در غیر این صورت جسم دچار تسلیم می شود.

اگر تنش بیشینه (σ_{max}) و تنش کمینه (σ_{min})، هم علامت نباشند، مقدار n از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$n = \frac{\sigma_Y}{|\sigma_{max} - \sigma_{min}|}$$

اگر n>1 باشد، جسم دچار تسلیم نمی شود و اگر n برابر با یک و یا کوچکتر از یک باشد ($n \le 1$)، جسم دچار تسلیم می‌شود.

مقدار n در رابطه بالا، همان ضریب اطمینان است که در قسمت های قبلی درس، تعریف و اهمیت آن بیان گردید. اگر تنش بیشینه و کمینه، هم علامت باشد، ضریب اطمینان مسئله، مقدارِ کوچکتر بین دو عدد n_1 و n_2 خواهد بود.

نظریه های تسلیم مواد نرم (معیار فون مایزز):

فون مایزز، پژوهشگری بود که معیار دیگری برای تسلیم مواد ارائه نمود. طبق معیار فون مایزز، مقدار ضریب اطمینان (n) از این رابطه به دست می آید:

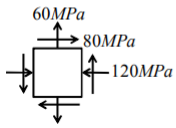
$$n = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_{max}^2 - \sigma_{max}\sigma_{min} + \sigma_{min}^2}}$$

اگر n>1 باشد، جسم دچار تسلیم نمی‌شود و اگر n برابر با یک و یا کوچکتر از یک باشد ($n \le 1$)، جسم دچار تسلیم می‌شود.

87

مثال (نظریه های تسلیم مواد نرم):

اگر تنش های وارد بر یک جسمِ چکش‌خوار (نرم) به صورت روبرو باشد، و تنش تسلیم جسم برابر با 240MPa باشد، ضریب اطمینان در این مسئله طبق معیار فون مایزز چقدر است؟ آیا طبق این معیار، جسم دچار شکست می شود؟



پاسخ: تنش 120MPa تمایل دارد طول جسم را کم کند پس فشاری است لذا داریم: $\sigma_x = -120MPa$

تنش 60MPa تمایل دارد طول جسم را زیاد کند پس کششی است لذا داریم: $\sigma_y = +60MPa$

تنش بیشینه می شود:

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{(-120)+60}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-120)-60}{2}\right)^2 + 80^2} = 90.4MPa$$

تنش کمینه می شود:

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{(-120)+60}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-120)-60}{2}\right)^2 + 80^2} = -150.4MPa$$

معیار فون مایزز به صورت زیر است:

$$n = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_{max}^2 - \sigma_{max}\sigma_{min} + \sigma_{min}^2}} = \frac{240}{\sqrt{90.4^2 - 90.4 \times (-150.4) + (-150.4)^2}} = 1.139$$

مقدار ضریب اطمینان برابر با 1.139 گردید. چون n>1 به دست آمد، پس جسم دچار شکست نمی‌شود.

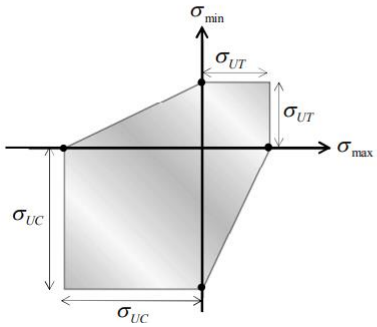
88

نظریه تسلیم مواد تُرد یا شکننده:

مواد تُرد به صورت ناگهانی دچار شکست می شوند و چیزی به اسم ناحیه تسلیم ندارند (یا اگر دارند، محسوس نیست). پس در مواد تُرد، مقدار تنش شکست (σ_U) را به ما می‌دهند. تنش شکست یعنی تنشی که جسم در آن دچار شکست می شود. در مواد تُرد، تنش شکست در کشش و فشار متفاوت است. یعنی یک نمونه را اگر تحت کشش قرار دهیم در σ_{UT} و اگر تحت فشار قرار دهیم در σ_{UC} دچار شکست می‌شود و این دو مقدار با هم تفاوت دارند.

نظریه تسلیم مواد تُرد یا شکننده (معیار مور):

طبق معیار مور، با داشتن مقادیرِ تنش شکست در کشش و فشار (یعنی σ_{UT} و σ_{UC}) می توان شش ضلعی زیر را رسم نمود. سپس با داشتن تنش های قائم بیشینه و کمینه در جسم، نقطه ای روی صفحه مشخص می شود. اگر آن نقطه داخل شش‌ضلعی قرار گرفت، یعنی شکست اتفاق نمی افتد. اگر آن نقطه خارج از شش ضلعی قرار گرفت، یعنی شکست اتفاق می‌افتد.

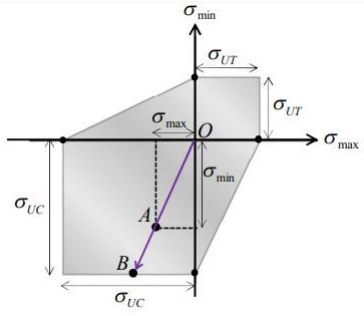


89

در شکل زیر، محور افقی مربوط به تنش قائم بیشینه ($\sigma_{\max}$) و محور عمودی مربوط به تنش قائم کمینه ($\sigma_{\min}$) است. با داشتن تنش های قائم بیشینه و کمینه، نقطه ای روی نمودار مشخص می شود، مانند نقطه A در شکل زیر. حال از مبدأ مختصات (یعن نقطه‌ی O) خط OA را رسم می کنیم و آن را امتداد می دهیم تا محیط شش ضلعی را در نقطه ای مانند B قطع کند. ضریب اطمینان (n) به صورت زیر تعریف می شود:

$$n = \frac{L_{OB}}{L_{OA}}$$

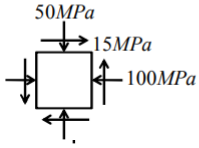
L_{OB} طول پاره خط OB است. L_{OA} طول پاره خط OA است.



90

مثال (نظریه تسلیم مواد تُرد):

اگر تنش های وارد بر یک جسم تُرد، به صورت شکل زیر باشد، و تنش شکست جسم در کشش برابر با 65MPa و تنش شکست جسم در فشار برابر با 155MPa باشد، ضریب اطمینان در این مسئله چقدر است؟ آیا طبق معیار مواد ترد، جسم دچار شکست می‌شود؟



پاسخ: تنش 100MPa تمایل دارد طول جسم را کم کند پس فشاری است لذا داریم: $\sigma_x = -100MPa$

تنش 50MPa تمایل دارد طول جسم را کم کند پس فشاری است لذا داریم: $\sigma_y = -50MPa$

تنش های شکست جسم نیز به این صورت هستند: $\sigma_{UC} = 155MPa$ $\sigma_{UT} = 65MPa$

تنش بیشینه می شود:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{(-100)+(-50)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-100)-(-50)}{2}\right)^2 + 15^2} = -45.8MPa$$

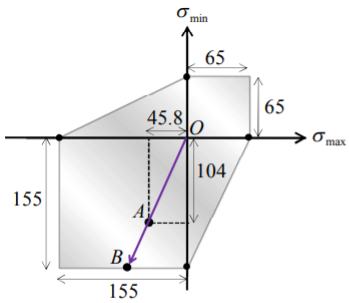
تنش کمینه می شود:

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{(-100)+(-50)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-100)-(-50)}{2}\right)^2 + 15^2} = -104MPa$$

حال شش ضلعی را مطابق دستوری که قبلاً در متن درس گفته شد رسم می کنیم. همچنین در روی شکل، نقطه A که تنش قائم بیشینه و کمینه ی آن به این صورت است را مشخص می‌کنیم: $\sigma_{\min} = -104MPa$ $\sigma_{\max} = -45.8MPa$

چون نقطه A در داخل شش ضلعی قرار دارد پس جسم دچار شکست نمی شود.

91



اکنون با یک خط کش، طول پاره خط های OA و OB را می یابیم که به این صورت می شود: $L_{OB} = 170$ $L_{OA} = 114$

لذا ضریب اطمینان در این مسئله، به این صورت می شود: $n = \frac{L_{OB}}{L_{OA}} = \frac{170}{114} = 1.49$

92

Subject :
Year : Month: Day :

مقاومت مصالح I

منابع آموزشی :

کتاب درسی : مقاومت مصالح ترجمه شاپور کانونی

کتب مرجع : مقاومت مصالح بیرجانستون

هزار مسأله مقاومت مصالح نوشته محمد الله عادل

ارزشیابی : میان ترم ۲۴ ، ۸ ، ۱۴ فصول سوم و چهارم ۵ نمره

پایان ترم ۷ نمره کوئیز ۴ نمره

حضور و غیاب ۲ نمره تکالیف ۲ نمره

سرفصل مطالب :

تنش در یاره‌های مخروطی — فصل سوم — کرنش و قانون هوک — فصل چهارم

پیچش — فصل پنجم — خمش خالص تیرها — فصل ششم

تنش برشی در تیرها — فصل هفتم

TOP

Subject :
Year : Month: Day :

فصل اول

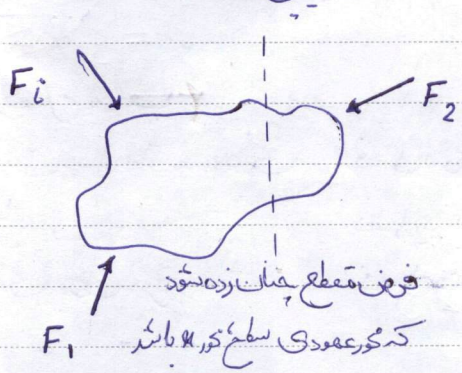
تنش Stress : σ

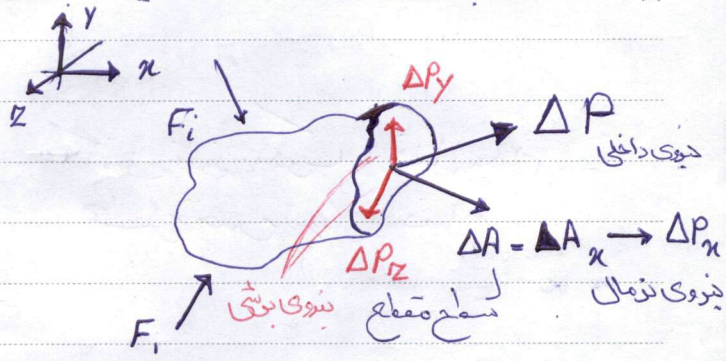
$$\text{تنش} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح اعمال نیرو}}$$

استحکام اجسام از خواص ذاتی جسم بوده از جنس تنش است و به جنس (آنالیز شیمیایی) و پروسه تولید بستگی دارد.

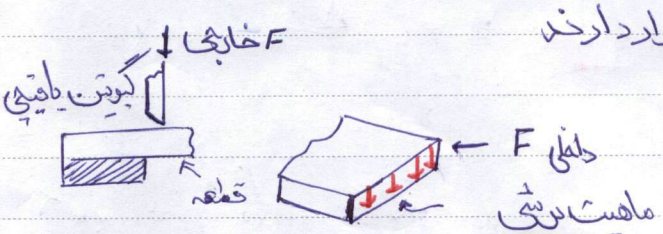
مثال: استحکام پاره شدن پوست دست از جنس تنش است

* در طبیعت دو نوع تنش موجود است یکی تنش نرمال که ماهیت کششی یا فشاری دارد و نوع دیگر تنش برشی است که ماهیت برشی دارد مانند قیچی و کاغذ.

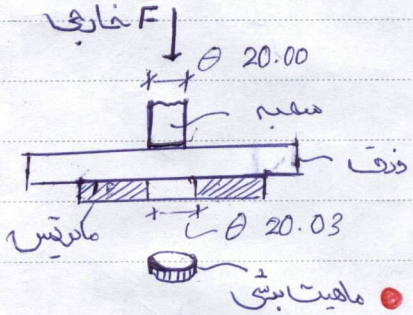




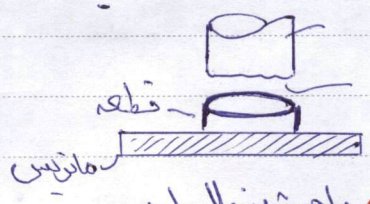
نیروی برشی: چون کاملاً روی سطح قرار دارند



بریدن ورق به وسیله گوشت



سوراخ کردن ورق به وسیله قالب و سمبه و ماتریس



جهت ضرب سکه و ایجاد نقش برجسته

ماهیت نرمال دارد

Subject :

Year : Month: Day :

$\tau_{xx} = \frac{\Delta P_x}{\Delta A_x}$ نرمال $\quad \tau_{xy} = \frac{\Delta P_y}{\Delta A_y}$ برشی $\quad \tau_{xz} = \frac{\Delta P_z}{\Delta A_z}$ برشی

جهت نیرو ← ↳ بردار عمود بر سطح

در هر نقطه از فضا ۹ مؤلفه تنش داریم $(\tau_{xx}\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}\ \tau_{yy}\ \tau_{yx}\ \tau_{yz}\ \tau_{zz}\ \tau_{zx}\ \tau_{zy})$

τ_{xx} نرمال، τ_{yy} نرمال، τ_{zz} نرمال

تنسور پارامتری ریاضی است که برای شناختن آن به ۹ مؤلفه نیاز میدهیم

$\tau_{xx} = \sigma_x \qquad \tau_{yy} = \sigma_y \qquad \tau_{zz} = \sigma_z$ ← سیگما

$\sigma_{ij} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$

تنش متوسط $= \frac{\Delta P}{\Delta A}$ ← بنرو

تنش در یک نقطه $= \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$

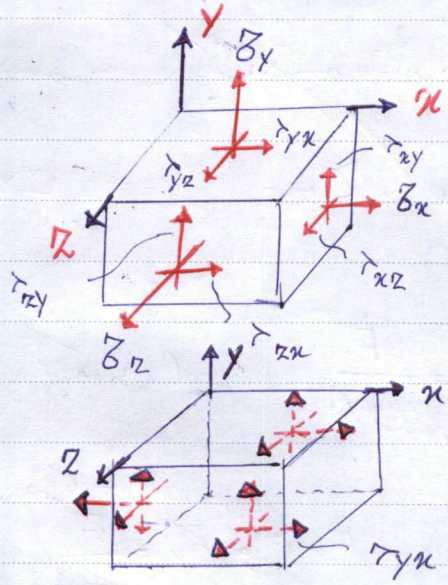
تنش های نرمال باعث کوچک یا بزرگ شدن قطعه بدون تغییر زوایای قطعه می‌شود.

تنش های برشی باعث تغییر زوایا در قطعه می‌شود.

واحدهای تنش: $\frac{N}{m^2} = Pa$ پاسکال $\qquad \frac{N}{mm^2} = MPa$ مگا پاسکال

$kPa = 10^3 \frac{N}{m^2}$ کیلو پاسکال $\qquad \frac{lb_f}{in^2} = PSI$ سیستم غیر متریک ← پوند ← نیرو

$12" = 1m$ اینچ



تحلیل ۹ مؤلفه تنش در یک نقطه از فضا

برای اینکه کل جسم تعادل است یک خود را حفظ کند باید تنشی در جهت عکس هر تنش به جسم وارد گردد

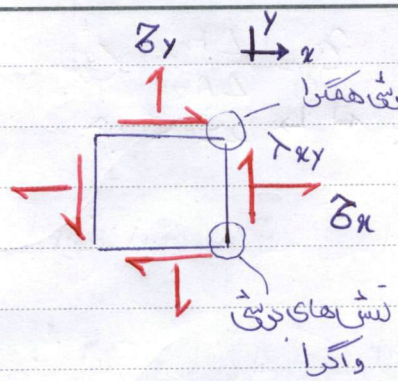
که در کل ۹ مؤلفه تنش موجود است

TOP

Subject :
Year : Month: Day :

بررسی تعادل استاتیک یک المان ۱

فرض می‌کنیم المان 2 بعدی است

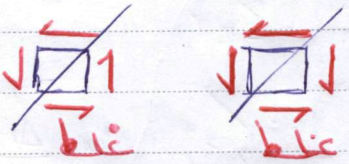


تعادل استاتیک ۲ برایند نیروی ها در امتداد دلخواه

* باید صفر باشد * ممان نیروها حول هر محور دلخواه

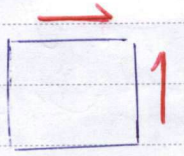
* باید صفر باشد *

تنش‌های برشی به صورت واگرا یا همگرا اعمال می‌شود

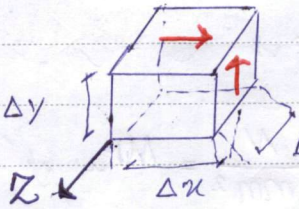


حول کدر z ممان نیروها را به دست آورده مساوی صفر قرار می‌دهیم

$\Sigma M_z = 0$



تنسور تنش یک تنسور متقارن است $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

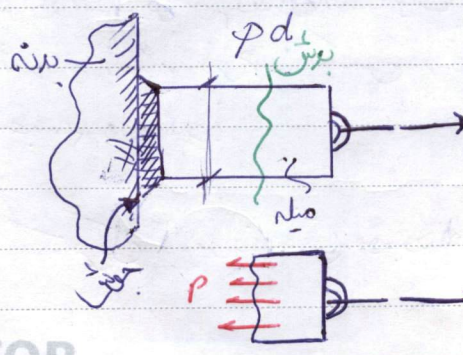


$$(\underbrace{\tau_{xy}}_{\text{تنش}} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\Delta y}_{\text{سطح}}) \underbrace{\Delta x}_{\text{فاصله، بازو}} - (\tau_{yx}\, dx\, dz)\, dy = 0$$

چون تنسور تنش یک تنسور متقارن شد در هر نقطه از فضا نیاز به ۶ مؤلفه تنش است

$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz}$

مجهولات $\Rightarrow \sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{yx} , \tau_{zx} , \tau_{zy}$



تنش در سیم جسل ۱

$$\sigma_x = \frac{F}{A_{\text{سطح مقطع سیم}}}$$

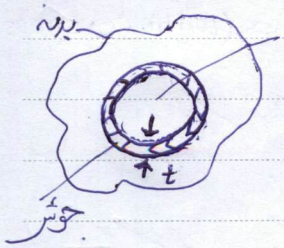
تنش در میله ۲

تنش نرمال کششی $\sigma_x = \frac{F}{\frac{\pi}{4} d_2^2}$ ، $F = P$ <= معادل استاتیک

Subject :

Year : Month: Day :

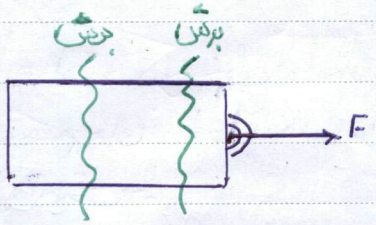
تنش در جوش)

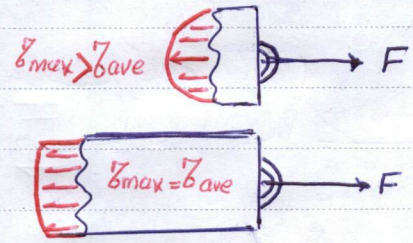


$\sigma_x = \frac{F}{\pi d t}$ ← تنش در جوش ← $\frac{\pi d t}{2}$ ← سطح مقطع جوش

تنش در بدنه فلزی)

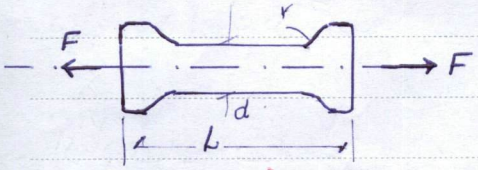
$\sigma_x = \frac{F}{\pi d t}$ تنش بدنه

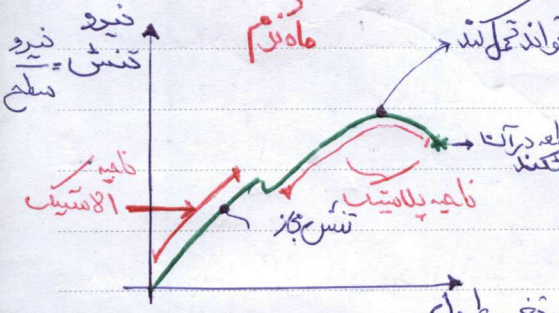




آزمایش کشش ساده) (دستگاه کشش)

تغییرشکل { الاستیک، ارتجاعی، برگشت پذیر
پلاستیک، غیرالاستیک، غیرارتجاعی





تنش نهایی ultimate stress یا strength حداکثر تنشی که قطعه می تواند تحمل کند

$\text{تنش} = \frac{F}{A}$ $A = \frac{\pi}{4} d^2$

تنشی که میله در آن می شکند

* تغییرشکل در ابتدای اعمال نیرو به صورت الاستیک است اما در نقطه ای تغییرشکل به صورت پلاستیک می گردد و نمودار آن با خط نوان 2 سطح مقطع منحنی می گردد.

استحکام تسلیم yield strength)

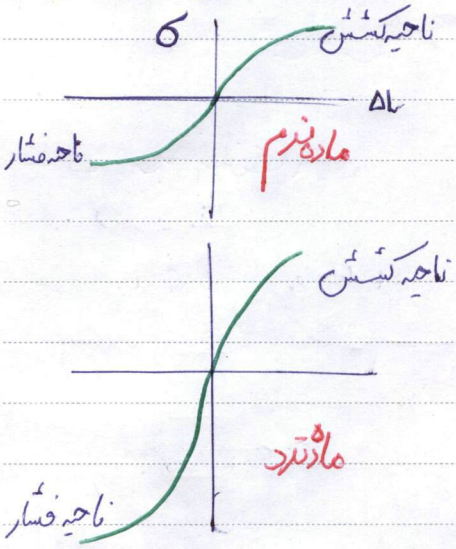
استحکام مربوط به مرز بین الاستیک و پلاستیک

σ_y ← تسلیم

Subject :

Year : Month: Day :

σ_u نهایت تنشی است که قطعه قبل از بریده شدن یا پاره شدن تحمل می‌کند (ultimate stress)



مواد نرم رفتار یکسانی در کشش و فشار دارند

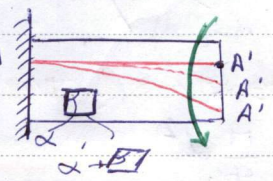
تغییر شکل پلاستیک مواد ترد بسیار ناچیز است

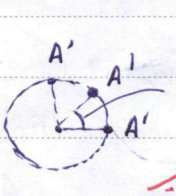
* رفتار مواد ترد در کشش و فشار متفاوت بوده و معمولاً استحکام های فشاری آنها به مراتب بالاتر از استحکام کششی است.

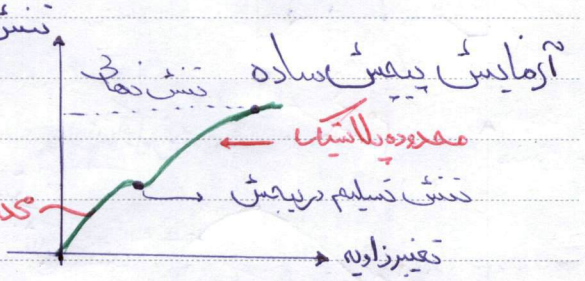
ضریب ایمنی (n)

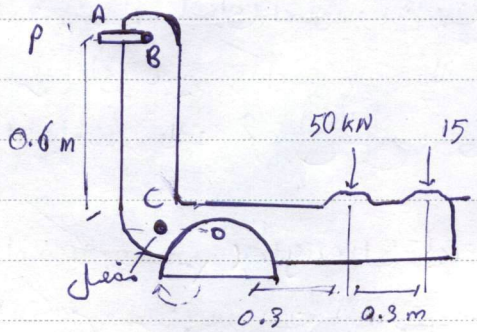
تنش مجاز برابر است با $\frac{\text{تنش تسلیم}}{\text{ضریب ایمنی}}$ $\quad n \geq 1$

افزایش ضریب ایمنی باعث می‌شود طراحی ما over size گردد در نتیجه قیمت تمام شده و هزینه تولید اضافه تر گردد









سوال: میله AB از فولاد با تنش تسلیم 600 MPa ساخته شده مطلوب است قطر میله AB با ضریب ایمنی ۲٫۳

پاسخ: $\sigma_y = 600 \quad n = 3.3$

$\Sigma M_C = 0 \quad P \times 1.6 = 50 \times 0.3 + 15 \times 1.6$

$P = 40$ تنش مجاز $= \frac{600}{3.3} = \frac{P}{A} = \frac{40 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} d^2}$

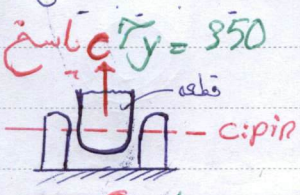
$AB = d = 16.1742$

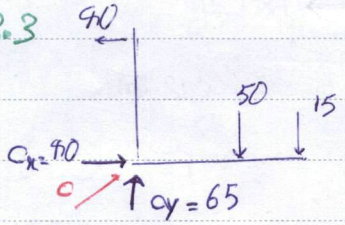
Subject :

Year : Month: Day :

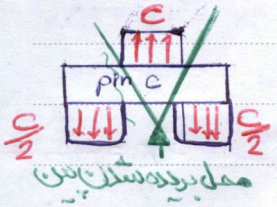
پین c از فولادی با تنش تسلیم برشی 350 MPa ساخته شده است مطلوب است قطر پین با ضریب ایمنی 3.3

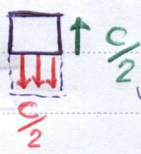
پاسخ $\tau_y = 350$ $n = 3.3$





$$c = \sqrt{65^2 + 40^2} = 76.3 \text{ kN}$$





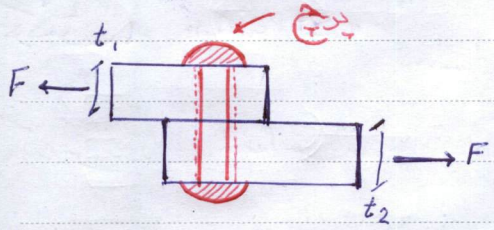
* این نوع بارگذاری که احتمال بریده شدن پین از دو ناحیه وجود دارد را بارگذاری دوبریشه ای نامند.

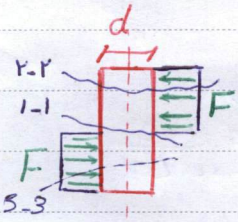
نیرو در سطحی که خواهد بریده شود ← ماهیت برشی

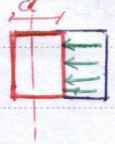
تنش برشی در پین c = تنش مجاز برشی

$$\frac{c/2}{\frac{\pi}{4} D^2} \leq \frac{350}{3.3} \longrightarrow D = 21.4 \text{ mm}$$

مثال) بررسی بارگذاری روی پرچ



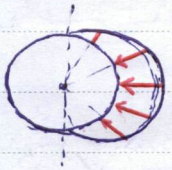




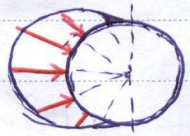
مقطع 1-1

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} d^2}$$ قطر پرچ

مقطع 2-2

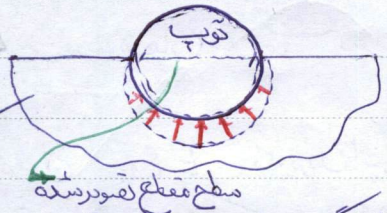


مقطع 3-3



توزیع تنش لهیدگی پرچ

$$\sigma_{ave} = \frac{F}{\text{سطح مقطع تصویر شده}} = \frac{F}{dt_1}$$ تنش لهیدگی در قسمت فوقانی پین



در محاسبه تنش لهیدگی از سطح مقطع تصویر شده استفاده می شود

$$\sigma = \frac{F}{dt_2}$$ تنش لهیدگی در قسمت تحتانی

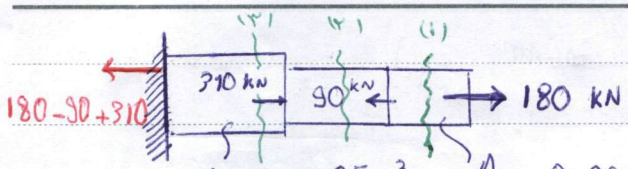
در صورتی که به جای یک پرچ N پرچ موجود داشته باشیم نیروی وارد به هر پرچ برابر است با $f = \frac{F}{N}$ که با جاگذاری آن در فرمول ها به جای F تعداد N به دست می آید و ما بیشترین مقدار به دست آمده برای N را در نظر می گیریم

TOP

Subject :

Year : Month: Day :

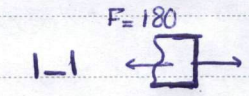
مثال:



هرجا که نیرو یا سطح مقطع تغییر کند سطح مقطع می زنیم

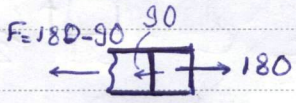
$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

کشش



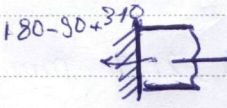
$$\sigma_I = \frac{180 * 10^3}{0.0012} = 150 \times 10^6$$

2-2



کشش

$$\sigma_{II} = \frac{(180-90)}{0.0012} = 75 \times 10^6$$



کشش

$$\sigma_{III} = \frac{(180-90+310)*10^3}{0.0025} = 160 * 10^6 \text{ pa}$$

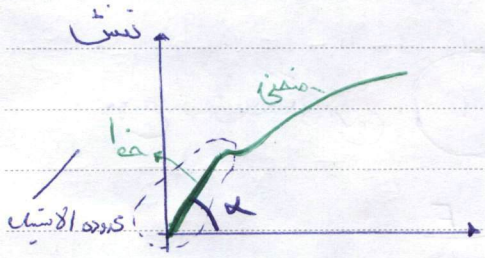
کرنش ("Strain")

$$\varepsilon_x = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}} = \frac{\Delta\delta}{\Delta x} \qquad \frac{mm}{mm} = 1$$

کرنش بدون واحد است

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x}$$ کرنش در یک نقطه

آزمایش کشش ساده



شیب منفی در محدوده الاستیک خطی مواد را مشخص می کند

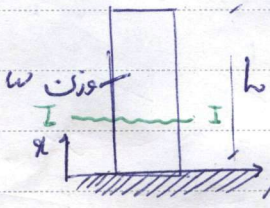
$\tan\alpha = E$ = مدول الاستیسیته = ضریب ارتجاعی = مدول یانگ

E در مورد فولادهای ساختمانی تقریباً برابر $207 * 10^3$ مگاپاسکال است

$$\tan\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

فرمول $\sigma_x = E\,\varepsilon_x$ از بابت بیان نیرو، بارگذاری و تغییر شکلی که در محدوده الاستیک به وجود می آید را قانون هوک برای بارگذاری تنش تک محوره نرمال

مثال: کاهش طول ستون فلزی تحت اثر وزن خودش چقدر است



پاسخ:

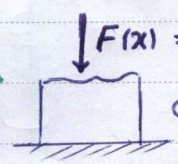
$$\frac{F}{A} = \sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\Delta L}{L} \qquad \Delta L = \frac{FL}{AE}$$

TOP

Subject :
Year : Month: Day :

فرمول تغییر طول محوری برای بارگذاری های تک محوره.

$$\Delta L = \int \frac{F(x)\,dx}{A(x)\,E(x)}$$



$$F(x) = \left(\frac{W}{L}\right) * (L-x) \Rightarrow \Delta L = \int \frac{\frac{W}{L}(L-x)\,dx}{AE}$$

$$\Delta L = \frac{W}{LAE}\int_0^L (L-x)\,dx = \frac{W}{LAE}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)_0^L$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{WL}{2AE}}$$

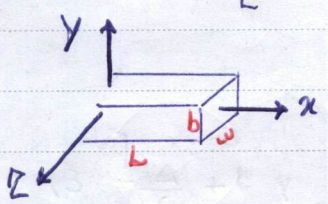
مثال ۱) نیروی گریز از مرکز $F = mr\omega^2$ سرعت زاویه‌ای ω

میله همگون W و طول L

پاسخ ۱) $F = \frac{W}{Lg}(L-r)r\omega^2$ ، ...

ضریب پواسن) ی خواص نشان داد برای اجسام همگن (خواص مکانیکی در تمام نقاط یکسان) و ایزوتروپیک (در یک نقطه به خصوص در تمام جهات خواص مکانیکی ثابت) و ارتجاعی نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری مقداری ثابت است

$$\text{کرنش جانبی} = \frac{\Delta d}{d} \qquad \text{کرنش محوری} = \frac{\Delta L}{L}$$



کرنش جانبی $-\frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_y$ $\quad \frac{\Delta W}{w} = \varepsilon_z$ $\quad \frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_x$

$\nu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right|$ ثابت

نوعی فنر $\nu = 0.1$ نوعی پلاستیک $\nu = 0.5$

$0.25 < \nu < 0.35$

مثال میله‌ای به طول 500 mm و قطر 16mm تحت کشش 12kN قرار گرفته است در این آزمایش طول میله 0.3 mm افزایش و قطر میله 0.0024 کاهش یافته است مطلوب است E و ν

پاسخ ۲) $\Delta L = +0.3 \quad \Delta D = -0.0024 \quad L = 500 \quad \phi = 16$

TOP

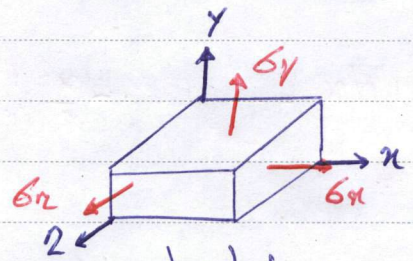
Subject :

Year : Month: Day :

$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \frac{P}{A} \quad \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{120\,kN}{\frac{\pi}{4}(16)^2} = E\frac{0.3}{500} \Rightarrow E = 99.5 * 10^3\ MPa$

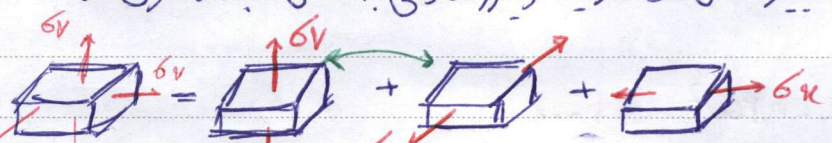
$\nu = \left|\frac{\frac{\Delta D}{D}}{\frac{\Delta L}{L}}\right| = \left|\frac{\frac{0.00024}{16}}{\frac{0.3}{500}}\right| = 0.25$

قانون هوک برای بارگذاری های نرمال سه محوره :



* اصل سوپر پوزیشن :

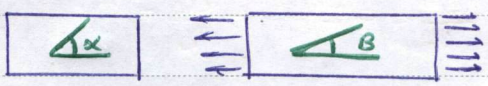
برای مصالح ارتجاعی و تغییر شکل های کوچک می توان نشان داد تنش و تغییر شکل یک سیستم تحت اثر یک مجموعه نیرو برابر است با جمع جبری تنش ها یا تغییر شکل های هر یک از نیروها وقتی به شکل جداگانه اثر می کند



$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = -\nu\frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_x}{E} \qquad \frac{\Delta x}{x} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) = -\nu\frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \qquad \frac{\Delta y}{y} = \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$

$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \frac{\Delta z}{z} = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$



$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \tan B = \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} = \frac{y}{x}\frac{1+\frac{\Delta y}{y}}{1+\frac{\Delta x}{x}}$

$\Rightarrow \tan B = \frac{1-\frac{\nu}{E}\sigma_x}{1+\frac{\sigma_x}{E}}$

α معلوم ، B = ؟ پس از بارگذاری

$\Rightarrow \varepsilon_y$ O1

$\Rightarrow \varepsilon_x$ O1

$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$

Subject :
Year : Month: Day :

تغییر حجم این وق چقدر است

حجم اولیه $V_0 = xyz$

پس از بارگذاری $V = (x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z)$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V}{V_0} - 1 = \frac{(x+\Delta x)}{x}\frac{(y+\Delta y)}{y}\frac{(z+\Delta z)}{z} - 1$$

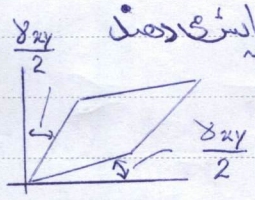
$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + (\simeq 0) - 1$$

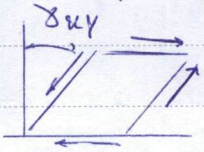
زیرا کرنش در حد میکرون است

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

قانون هوک برای بارگذاری های برشی (پیچشی)

تغییر در زاویه بر حسب رادیان به کرنش برشی موسوم است و آنرا با حرف γ نمایش می دهند





تجربه نشان داده است (قانون هوک برای بارگذاری های برشی) در محدوده الاستیک تنش برشی با کرنش برشی متناسب است

$$\tau_{xy} \propto \gamma_{xy} \Rightarrow \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

G مدول الاستیسیته در برش

γ_{xy} بر حسب رادیان است

G برای فولادهای ساختمانی 80 Gpa

قوانین هوک)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \quad , \quad \varepsilon_y = \dots \quad \varepsilon_z = \dots$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

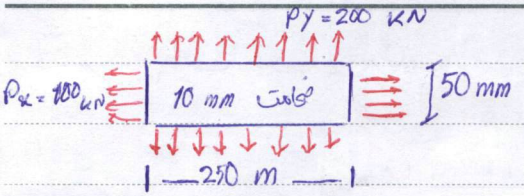
می توان نشان داد E و G و ν از یکدیگر مستقل نیستند

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

TOP

Subject :
Year : Month: Day :

مثال)



$E = 2 * 10^5$

$\nu = 0.25$

الف) کاهش در ضخامت ورق چقدر است؟

$P_z = 0$ کرنش $\frac{\Delta t}{t} = \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_x)$

$\sigma_z = \frac{P_z}{A_z} = \frac{0}{A_z} = 0$ $\sigma_y = \frac{P_y}{A_y} = \frac{200 \times 10^3}{250 \times 10}$ $\sigma_x = \frac{100 \times 10^3}{50 \times 10}$

$\frac{\Delta t}{t} = 0 - \frac{0.25}{2 * 10^5}\left(\frac{200 \times 10^3}{250 \times 10} + \frac{100 \times 10^3}{50 \times 10}\right) \simeq 3.5$ mic کاهش ضخامت

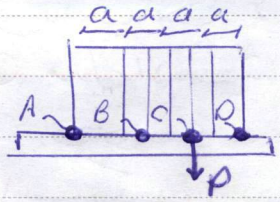
اگر خواهیم همین کاهش ضخامت را فقط با اعمال تنش در راستای x اعمال کنیم P_x چقدر باشد؟

$\Delta t = -3.5 \times 10^{-3}$ mic

$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_x) = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -3.5 \times 10^{-3} = \frac{0.25}{2 * 10^5}(\sigma_x)$ $\frac{P_x}{50 \times}$

$P_x = 140 \times 10^3$ kN

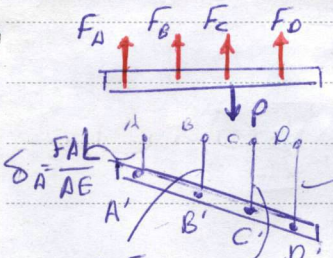
مثال) تیرورک P از طریق کابل افقی به چهار کابل D، C، B، A وارد می‌شود. کابل‌ها مشابه هستند. مطلوب است تنش در هر کابل.



$\Sigma F_y = 0$ $F_A + F_B + F_C + F_D = P$

$\Sigma M_{C_{z-جدا شده}} = 0$ $F_{(A)}(2a) + F_{(B)}(a) = F_D \times (a)$

$2F_A + F_B = F_D$



$\delta_A = \frac{F_A L}{AE}$ $\delta_D = \frac{F_D L}{AE}$

$\sigma_B = \frac{F_B L}{AE}$ $\sigma_C = \frac{F_C L}{AE}$

$\frac{\delta_C - \delta_A}{\delta_B - \delta_A} = \frac{2a}{a} = 2 \rightarrow \frac{F_C - F_A}{F_B - F_A} = 2$

$\frac{\delta_D - \delta_A}{\delta_B - \delta_A} = \frac{3a}{a} = 3 \rightarrow \frac{F_D - F_A}{F_B - F_A} = 3$



چهار معادله و چهار مجهول

Subject :

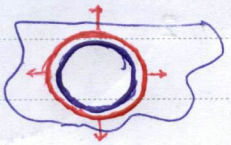
Year : Month: Day :

تنش‌های حرارتی

$L = L_0 (1 + \alpha \Delta T)$

$\varepsilon_T = \frac{L - L_0}{L_0} = \alpha \Delta T$ کرنش حرارتی $(\alpha) = (\frac{1}{K})$

در نتیجه گرم کردن و سرد کردن قطعات هیچگونه کرنش حرارتی برشی ایجاد نمی‌شود.



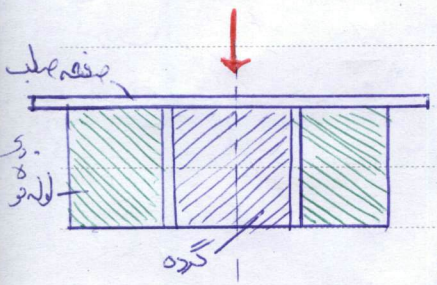
ε_T = کرنش حرارتی $\Rightarrow$ در همه جهات $= \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha \Delta T$

کلی‌ترین روابط مربوط به قانون هوک

$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ $\quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha \Delta T$

$\gamma_{yz} = \dots$ $\quad \varepsilon_y = \dots$

$\gamma_{zx} = \dots$ $\quad \varepsilon_z = \dots$



سوال) در درجه حرارت محیط چه سهمی از نیروی P توسط میله فولادی و چه سهمی که نیروی P توسط گرده تحمل می‌شود

$P_{st} + P_{cu} = P$ $\quad \Delta L_{cu} = \Delta L_{st}$

$\frac{P_{st} L_{st}}{A_{st} E_{st}} = \frac{P_{cu} L_{cu}}{A_{cu} E_{cu}}$ $\quad \alpha_{cu} > \alpha_{st}$

ΔT_{min} کیا

حداقل درجه حرارت محیط را چقدر افزایش باید تا تمام نیرو توسط مس تحمل شود

$\Delta T_{cu} = \Delta T_{st} = \Delta T$

$\Delta L_{cu} = \alpha_{cu} L \Delta T - \frac{P_{cu} L}{A_{cu} E_{cu}}$

$\Delta L_{st} = \alpha_{st} L \Delta T - \frac{P_{st} L}{A_{st} E_{st}}$

$P_{st} = 0$, $\Delta L_{st} = \Delta L_{cu}$ $\quad P = P_{cu}$

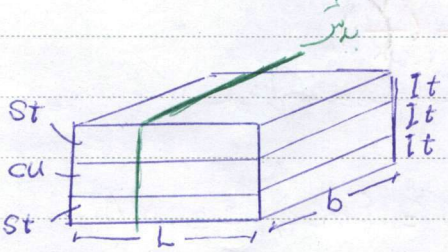
$\alpha_{cu} L \Delta T - \frac{P L}{A_{cu} E_{cu}} = \alpha_{st} L \Delta T$ $\Rightarrow \Delta T_{min} = \checkmark$

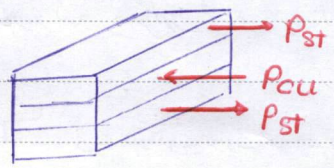
TOP

Subject :
Year : Month: Day :

مثال ۱

نیروی ایجاد شده در هر عضو به ازای با افزودن درجه حرارت ΔT چقدر است؟



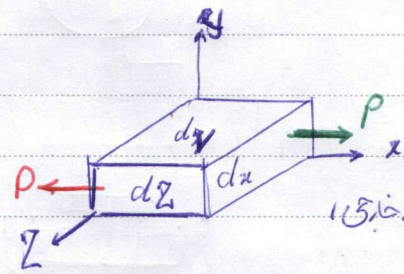


$P_{st} + 2 = P_{cu}$

$$\Delta L = \Delta L_{cu} = \frac{-P_{cu} L}{A E_{cu}} + \alpha_{cu} L \Delta T = \frac{+P_{st} L}{A E_{st}} + \alpha_{st} L \Delta T$$

انرژی کرنشی

الف) بارگذاری های نرمال



انرژی ذخیره شده = ?

کار انرژی جنبشی = انرژی خارجی

حاصلضرب در راستای نیرو × نیرو

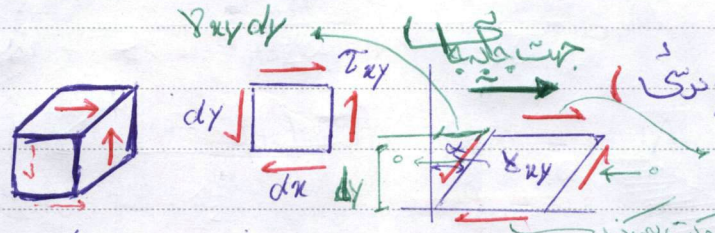
$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_x + dy + dz) \times \varepsilon_x dx$$

نیرو — نیرو به صورت تدریجی — تغییر طول

$\varepsilon_x = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_x \sigma_x$$ انرژی ذخیره شده در واحد حجم

ب) بارگذاری های برشی



نقطه این مؤلفه کار انجام می دهد

کار نیروی خارجی = انرژی ذخیره شده

= (حاصلضرب × (سطح × تنش)

$$dU = \frac{1}{2} (\tau_{xy} + dz\, dx)\, \gamma_{xy}\, dy$$



$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

Subject :

Year : Month: Day :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\tau_{xy} + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\tau_{yz} + \frac{1}{2}\gamma_{zx}\tau_{zx}$$

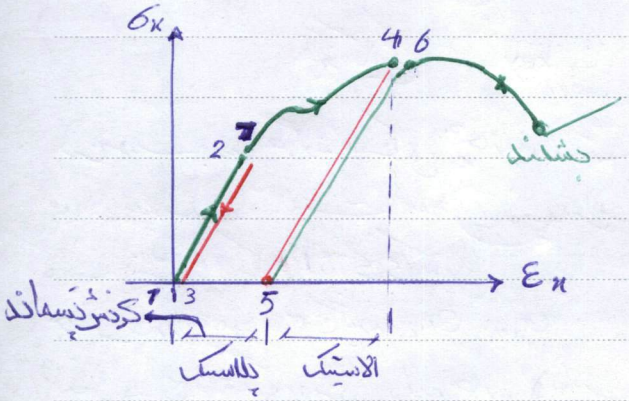
$\varepsilon_x \to \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$

$\gamma_{zx}\tau_{zx} \to \frac{\tau_{zx}}{G}$

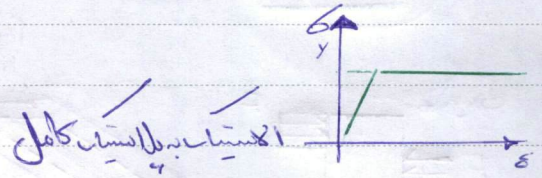
با جایگذاری فرمول حول:

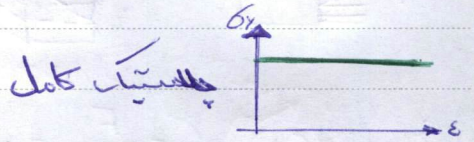
$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)$$

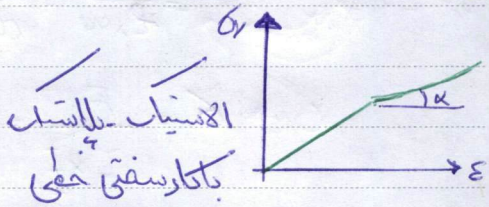
بارگذاری (باربرداری)



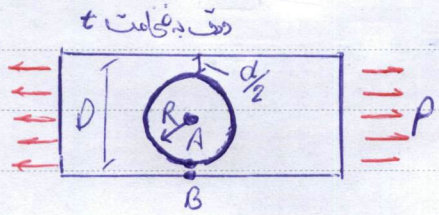
منحنی‌های تنش به کرنش نرم

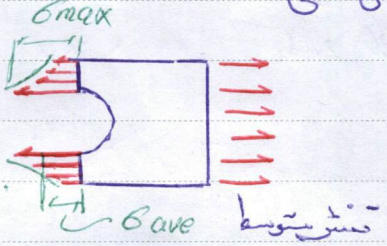






تمرکز تنش





$\sigma_{max} = k \times \sigma_{ave}$

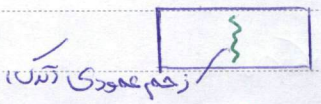
ضریب تمرکز تنش $k \geq 1$

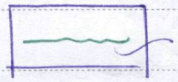
$\sigma = \frac{\rho}{dt}$ ← تنش طراحی یا متوسط ~~تنش واقعی~~

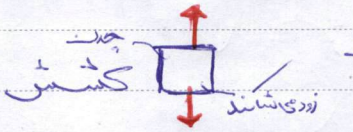
Subject :

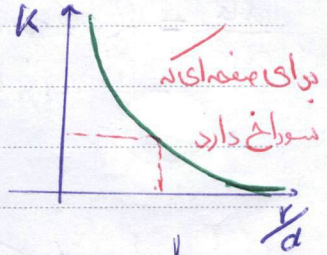
Year : Month: Day :

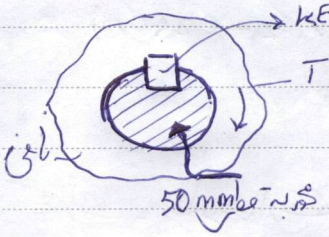
+ ضریب تمرکز تنش به نوع انفصال (زخم) و نوع بارگذاری بستگی دارد، اما به جنس بستگی ندارد.

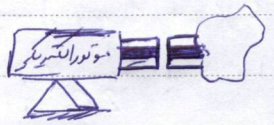


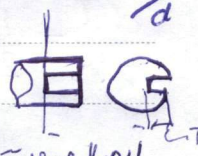


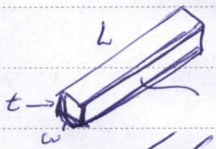


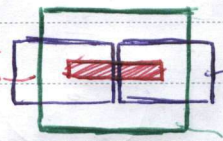








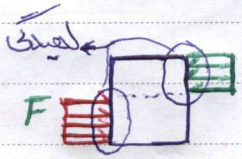


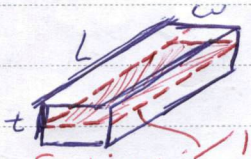


در صورت بروز هرگونه اشکال خار به سبب اینکه کل گشتاور را می‌برد و به موتور و شفت صدمه می‌زند در این جا خار حکم یک فیوز مکانیکی را بازی می‌کند.

جنس خار را معمولا نرم می‌گیرند St_{37} یا St_{12}

وارد تنش‌های له‌شدگی و برشی را در خار بالا بیابید.

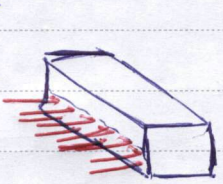


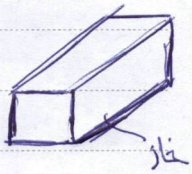


سطحی که خار خواهد از آن بریده شود

تنش برشی در خار $\tau = \frac{F}{\ell \times w} = \frac{2T}{d\ell w}$ $\frac{2 \times 450 \times 10^3}{50 \times 50 \times 12} = 300\ MPa$

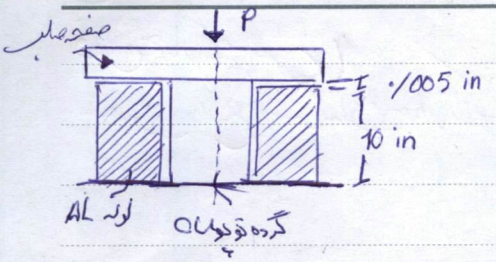
تنش له‌شدگی $\sigma = \frac{F}{\ell \times \frac{t}{2}} = \frac{4T}{d\ell t}$ $\frac{4 \times 450 \times 10^3}{50 \times 50 \times 8} = 90\ MPa$





Subject :

Year : Month: Day :



$$cu = \begin{cases} A = 2\,in \\ E = 17 \times 10^6\ psi \\ \sigma_{max} = 20{,}000\ psi \end{cases}$$

$$AL \begin{cases} A = 3\,in^2 \\ E = 10 \times 10^6\ psi \\ \sigma_{max} = 10{,}000\ psi \end{cases}$$

$P_{max} = ?$

P را تدریجی افزایش می‌دهیم

$$0.005 = \frac{PL}{AE} = \frac{\delta L}{E} = \frac{\sigma_{cu} L}{E_{cu}} \rightsquigarrow \sigma_{cu} < 20000\ psi$$

$$\Delta L_{cu} - \Delta L_{AL} = 0.005 \quad \frac{P_{cu} L}{A_{cu} E_{cu}} - \frac{P_{AL} L}{A_{AL} E_{AL}} = 0.005 \quad * \quad P = P_{cu} + P_{AL}$$

زمانی $\sigma_{cu} = \sigma_{cu}^{max} \longrightarrow P_{cu} = \checkmark \xrightarrow[*\text{ رابطه}]{} P_{AL} \checkmark \longrightarrow \sigma_{AL} = \frac{P_{AL}}{A_{AL}}$

یا بیشتر که تنش از تنش مجاز آلومینیوم باشد

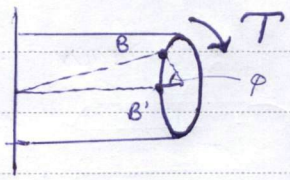
$P = P_{cu} + P_{AL}$

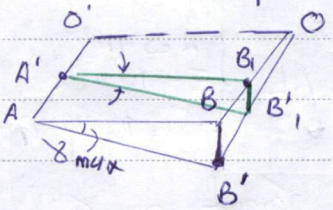
اگر نبود فرض را عوض می‌کنیم

Subject :
Year : Month: Day :

فصل چهارم (پیچش)

پیچش مقاطع استوانه‌ای جدار نازک و ضخیم :

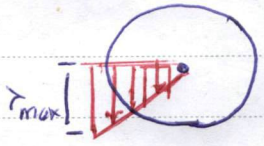




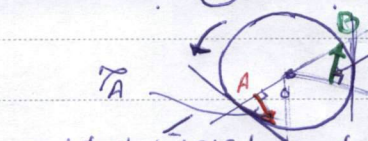
فرضیات

1. مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور استوانه پس از اعمال پیچش به صورت صفحه باقی می‌ماند (طول و قطر استوانه ثابت می‌ماند)
2. کرنش برشی γ به صورت خطی از محور مرکزی استوانه تغییر می‌کند به عبارت دیگر کرنش برشی محور مرکزی استوانه صفر و کرنش برشی سطح خارجی Max است
3. در محدوده الاستیک قانون هوک صادق است به عبارت دیگر تنش برشی با کرنش برشی متناسب است

بنابراین می‌توان گفت تنش برشی روی سطح خارجی Max است



توزیع تنش برشی



تنش برشی

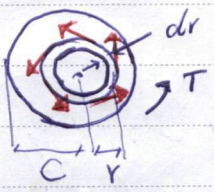
تنش برشی ناشی از ترک پیچشی در راستای ترک پیچشی است

توزیع تنش برشی به صورت خطی است

$$\tau(r) = \frac{\tau_{max}}{c}(r)$$

r: شعاع داخل — c: شعاع خارجی استوانه

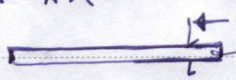
$$\tau(r) = \frac{\tau_{max}}{c} \times r$$



$$\text{گشتاور} = \text{بازو} \times \text{سطح} \times \text{تنش} \quad (\text{بازو} = \text{شعاع})$$

$$dT = \tau(r) \times dA \times r$$

$$A = r^2\pi \qquad dA = 2r\,dr\,\pi$$



$$dA = 2\pi r\,dr$$

$$dT = \tau(r) \times dA \times r \quad \Rightarrow \quad T = \int_0^c \frac{\tau_{max}}{c} r^2\,dA$$

$\frac{\tau_{max}}{c} r$ — J: ممان اینرسی قطبی

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int r^2\,dA$$

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \times J \times \frac{r}{r} \rightarrow \tau(r) = \frac{Tr}{J}$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

Subject :
Year : Month: Day :

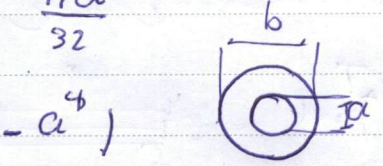
ممان اینرسی قطبی ($\dot{J}$) استوانه توپر

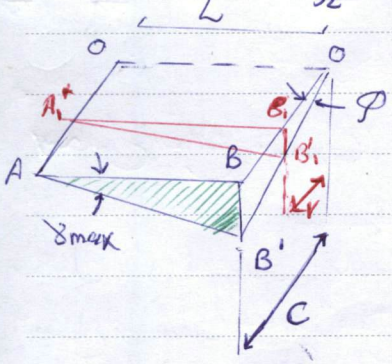
$$\dot{J} = \int_0^c r^2 dA = \int_0^c 2\pi r^3 dr \qquad (dA = 2\pi r\, dr)$$

$$\dot{J} = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi (\frac{d}{2})^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

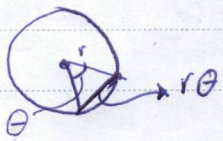
استوانه توخالی

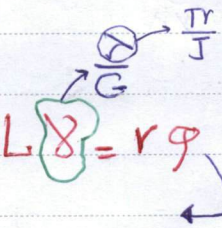
$$\dot{J} = \frac{\pi}{32}(b^4 - a^4)$$





$$BB' = L\gamma_{max} = C\varphi$$





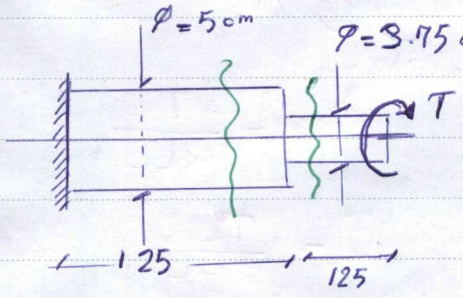
$$\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

زاویه پیچش انتهای آزاد استوانه

فرمول کلی

$$\varphi\ (rad) = \int \frac{T(x)\, d(x)}{G(x)\, \dot{J}(x)}$$

ممان اینرسی قطبی ← مدول الاستیسیته در برش ←



مثال:

$G = 840000\ \frac{kg}{cm^2}$

حداکثر زاویه پیچش انتهای آزاد 0.01 رادیان است

$T = ?$

هر جا تک پیچشی، جنس و ابعاد مقطع تکه کرد مقطع ی رسم

پاسخ

$$\varphi = \int \frac{T(x)\, d(x)}{G(x)\, \dot{J}(x)} = \int_{x=0}^{x=B} \frac{T\,dx}{G\dot{J}} + \int_{x_B}^{x_C} \frac{T\,dx}{G\dot{J}}$$

φ_{AB} φ_{BC}

$$\varphi = \frac{T * 125}{840 \times 10^3 \times \frac{\pi}{32} \times (3.75)^4} + \frac{T * 125}{840 * 10^3 * \frac{\pi}{32} (5)^4} = 0.01$$

$$\Rightarrow T = ?$$

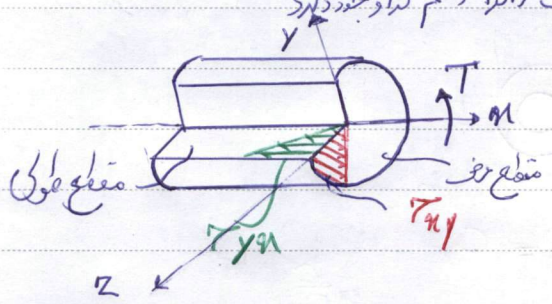
TOP

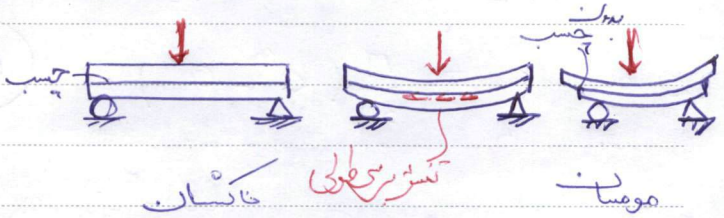
Subject :

Year : Month: Day :

عوامل تنش برشی ← ترک پیچشی
نیروی برشی

تنش‌های برشی همواره به‌صورتی در سطح عمود بر هم و به صورت دایرا دهم گذاو جود دارد

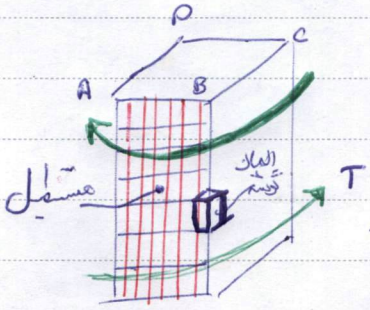




پیچش مقاطع منشوری (مقطع غیردایره‌ای)

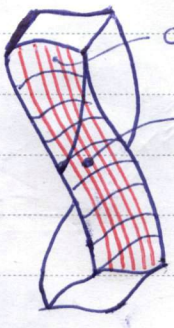
تحلیل ریاضی بسیار پیچیده دارد)

1 مقاطع صفحه‌ای عمود بر مقطع منشوری پس از اعمال پیچش به‌صورت صفحه باقی نمی‌ماند و برآمدگی‌ها (انحنا) اعوجاج پیدا می‌کند (تاب برمی‌دارد)

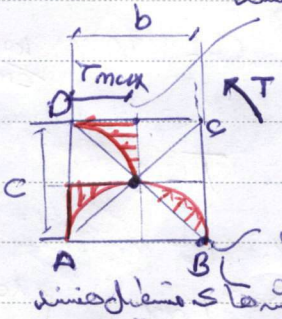


2 تنش برشی در دورترین نقطه نسبت به مرکزهندسی مقطع صفر است
(در مقاطع استوانه‌ای در دورترین فاصله نسبت به مرکزهندسی تنش برشی صفر است.

3 تنش برشی τ_{max} در وسط ضلع بزرگ مقطع مستطیل رخ می‌دهد



وسط که لوزی هستند



$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$$

$$\varphi = \frac{TL}{\beta b c^3 G}$$ ← مدول الاستیسیته

پس برشی در دورترین نقطه نسبت به مرکزهندسی صفر است

b/c	1.00	-----	$\infty \Rightarrow b \gg c$
α	0.208	-----	$1/3$
β	0.141	-----	$1/3$

b ضلع بزرگتر
c ضلع کوچکتر

Subject :
Year : Month: Day :

• در سطوح آزاد I و II هیچ تنش یا نیروی اعمال نمی‌شود. سطح II
به علت همگرایی نیروها به این نقطه می‌رسیم که در
هیچ یک از المان های گوشه تنش و نیرویی نداریم
• تنش برشی همیشه به صورت همگرا یا واگرا وارد می‌شود.

سطح I

در هیچ صفحه‌ای نیرو و تنش نداریم

مثال: تنش برشی Max را در دو مقطع مقایسه نمایید

مانند اینکه یک ورق را کت
تک قرار داده‌ایم

مقطع مستطیلی

$b \gg c$

$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2} = \frac{T}{\frac{1}{3}(2\pi r)t^2}$

$I t = c \Rightarrow b = 2\pi r$

$b \gg c \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{3}$

τ_{max} بدون جوش

مقطع استوانه‌ای

$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tr}{J}$

$J = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_x^4)$

$J = \frac{\pi}{32}(d_o^2 + d_x^2)(d_o^2 - d_x^2)$

$J = \frac{\pi}{32}(d_o^2 + d_x^2)(d_o - d_x)(d_o + d_x)$

$2(2r^2) \quad 2(2t) \quad 2r$

r شعاع متوسط

$J = 2\pi r^3 t$ عمان اینری یک مقطع استوانه‌ای جدار نازک به شعاع متوسط r و ضخامت t

τ_{max} جوش $\ll \tau_{max}$ بدون جوش

$\tau_{max} = \frac{Tr}{2\pi r^3 t} = \frac{T}{2\pi r^2 t}$ ← همانی که با در جوش پرشده

$\frac{\tau_{max}\text{ با جوش}}{\tau_{max}\text{ بدون جوش}} = \frac{\frac{T}{2\pi r^2 t}}{\frac{3T}{2\pi r^2 T}} = \frac{t}{8r} \ll 1$

تحلیل توضیح تنش برشی براساس غشاء بادکرده

معادله دیفرانسیل حاکم بر پیچش ارتجاعی از نظر ریاضی مشابه معادله دیفرانسیل حاکم بر غشاء نازکی مانند حباب صابون
تحت تأثیر فشار ثابت داخلی می‌باشد که بر روی مقطع جسم کشیده شده باشد

منبع

منحنی تراز

سوراخ رله بدی

منحنی تراز

1) تنش برشی در هر نقطه متناسب با شیب غشاء بادکرده در همان نقطه می‌باشد

c

b

τ_{max}

τ_{max} از صفر شروع نمی‌شود

از صفر شروع می‌شود

مقطع مستطیلی

بیضی

قطر کوچک

τ_{max}

τ_{max} ← همان جریان منحنی تراز

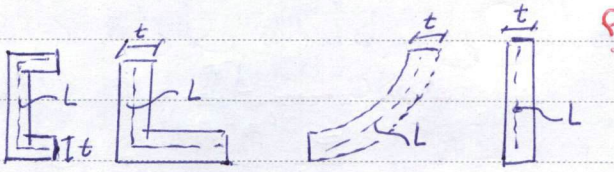
امتداد تنش برشی

Subject :
Year : Month: Day :

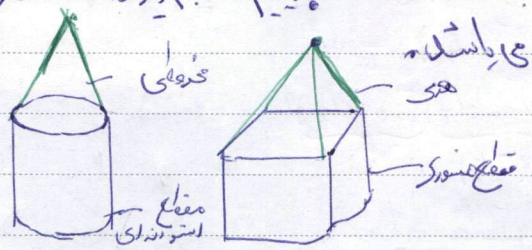
2) امتداد تنش برشی در هر نقطه مماس بر منحنی های تراز غشاء باد کرده می باشد

3) دو برابر حجم محدود شده به وسیله غشاء باد کرده متناسب با انگذر پیچشی قابل تحمل توسط مقطع است
(معده ارتجاعی)

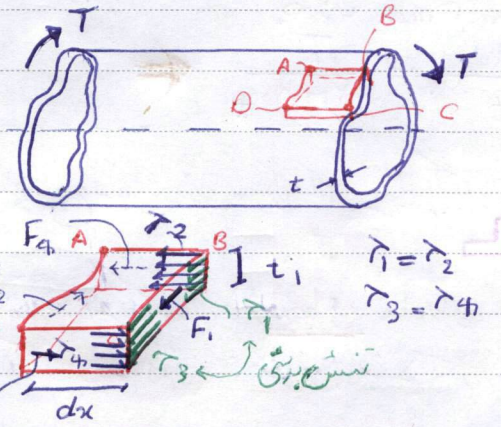
Test) قدرت انتقال تورک کدام بیشتر است؟
حجم غشاء باد کرده یکسان است (در هر چهار نوع)
چون سطح همه آنها تقریبا یکسان است



برای تحلیل در حالت خمیری کامل از مدل توده ماسه استفاده می شود.
اگر بر روی یک سطح تخت که شکل آن شبیه به مقطع مورد نظری باشد ماسه خشک بریزیم حجم فرو رفته ماسه در نسبت وزن توده ماسه متناسب با انگر پیچشی خمیری حاصل می باشد.

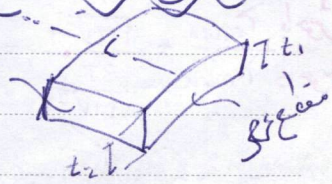


• پیچش لوله های جدار نازک (مقاطع جدار نازک)
ضخامت جداره (t) در یک مقطع مکعبی است
تنش برشی در یک مقطع متغیر است.



$\tau_1 = \tau_2$
$\tau_3 = \tau_4$

تنش برشی



$F_1 = F_2$
$F_3 = F_4$
$\tau_4 * t_2 (dx)$ $\quad$ $\tau_2 t_1 (dx)$
$\tau_4 t_2 = \tau_2 t_1$
$\tau_3 t_2 = \tau_1 t_1$

تنش برشی × ضخامت = ثابت در هر نقطه

به عبارت دیگر τt مقداری ثابت است که آنرا با حرف q نشان می دهیم
q ثابت است هرچه t کمتری شود τ بیشتر می شود
برای همین به q جریان برشی می گویند

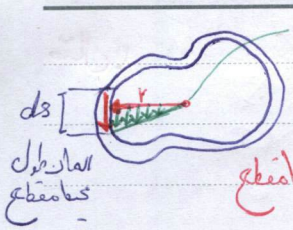
$q = \tau t$
شبیه به دبی آب
شبیه به ضخامت کانال
شبیه سرعت آب

$[q] = \frac{N}{mm^2} \cdot mm = \frac{N}{mm}$ = نیرو در واحد طول مقطع برشی (کیفی) — دیمانسیون

اثبات $t \times ds = dA$
$q \times ds =$ نیرو
$q = \frac{\text{نیرو}}{ds}$

Subject :

Year : Month: Day :



$\int ds * q * r =$ گشتاور

بردار واحد طول محیط مقطع

دیفرانسیل طول محیط مقطع

تقریباً دو برابر سطح مقطع لوله جدارنازک

دو برابر سطح مقطع متوسط A_m

$$T = \oint rqds = q\oint rds$$

سطح مقطع متوسط (دقت شود دایره سطح مقطع شامل فضای خالی داخل لوله نیز می‌باشد)



$$T = 2qA_m$$

$$\begin{cases} T = 2qA_m \\ q = \tau t \end{cases} \Rightarrow T = 2\tau t A_m \Rightarrow \tau = \frac{T}{2A_m t}$$

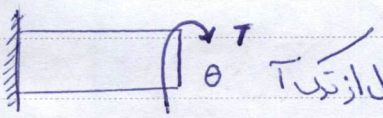
$$\tau_{max} = \frac{T}{2A_m t_{min}}$$ ضخامت کمتر — ترک بیشتر

$$\tau_{min} = \frac{T}{2A_m t_{max}}$$ ضخامت بیشتر — ترک کمتر

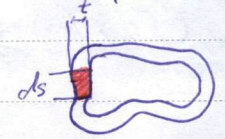
محاسبه زاویه پیچش مقطع جدارنازک (اثبات از طریق انرژی)

انرژی کرنشی ذخیره شده در نتیجه پیچش

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2G}\tau^2$$



کار حاصل از تنش T $= \frac{1}{2}T\theta$



در طول لوله هرگاه مقطع بزنیم تنش τ ثابت است

$$\frac{1}{2}T\theta = \int \frac{1}{2G}\underbrace{\tau^2}_{\frac{T}{2A_m t}}\underbrace{dv}_{L(t\,ds)} \qquad (dA)$$

ds المان سطح مقطع لوله نیست

ds المان محیط مقطع عرضی لوله است

$$\frac{1}{2}T\theta = \oint \frac{1}{2G}\cdot\frac{T^2}{(2A_m t)^2}\cdot Lt\,ds$$

$$\theta = \frac{TL}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t}$$

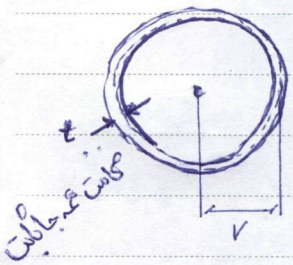
طول لوله — سطح مقطع متوسط — المان محیط مقطع — ضخامت — حتماً mm

$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$

$$\theta = \frac{TL}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t}$$

Subject :
Year : Month: Day :

مثال) لوله گرد جدار نازک همه جا t ثابت است.

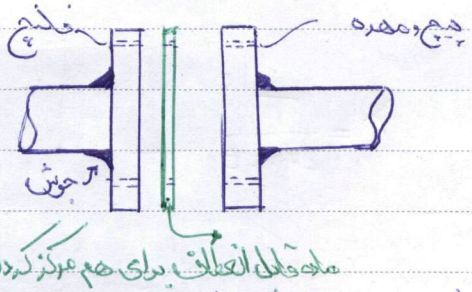


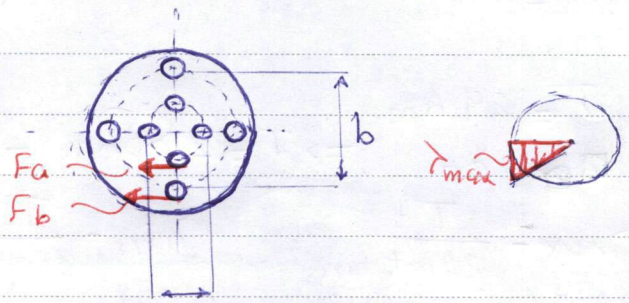
فرمول‌های مقاطع توخالی جدار نازک $\tau = \frac{Tr}{J}$ $\theta = \frac{TL}{GJ}$

مقاطع جدار نازک $\theta = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$ $\Rightarrow$

$ds \to 2\pi r$ ثابت t

$$\theta = \frac{TL}{4(r^2\pi)^2 G} \left(\oint \frac{ds}{t}\right) \Rightarrow \frac{TL}{J\,(2\pi r^3 tG)} = \frac{TL}{JG}$$





پیچ‌ها تحت برش قرار دارند طراحی پیچ از نقطه خطر برش مورد بررسی قرار می‌گیرند)

$$\frac{Fb}{Fa} = \frac{b}{a} \qquad (\tau_a \times A) * \frac{a}{2} * N_a + (\tau_b \times A) * \frac{b}{2} * N_b = T$$

(تعداد پیچ a، تعداد پیچ b، شعاع)

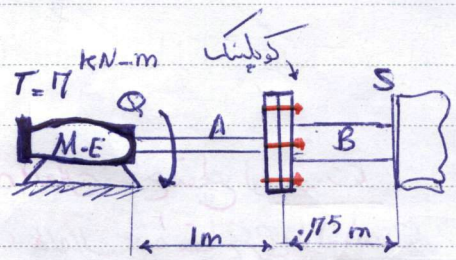
تنش برشی در پیچ

نمونه سوال امتحانی)

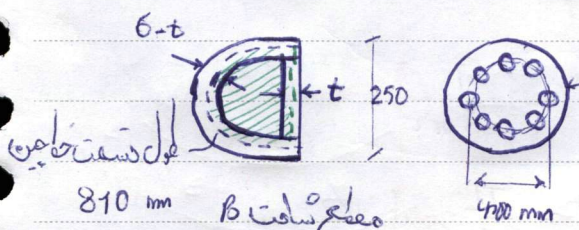
در شکل قدرت از طریق شافت A و یک کوپلینگ به شافت B انتقال می‌یابد. مقطع شافت A دایره و مقطع شافت B جدار نازک است.

مساحت محصور A_m برابر $60\,000\ mm^2$ مطلوب است.

الف) مقدار آستانه در صورتی که تنش برشی مجاز در شافت B به گونه‌ای که زاویه پیچش حداقل باشد



$G = 0/84 * 10^5\ MPa$



Subject :
Year : Month: Day :

$$\varphi = \frac{TL}{4Am^2G}\oint\frac{ds}{t} \qquad \varphi=\varphi_{min} \qquad \frac{d\varphi}{dt}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{TL}{4Am^2G}\int\frac{ds}{t}\right)=0 \qquad \frac{d}{dt}\oint\frac{ds}{t}=0$$

(المان میله)

$$\int\frac{ds}{t}=\int\frac{ds}{t}+\frac{ds}{t}=\frac{810}{6-t}+\frac{250}{t}\Rightarrow$$

روی قسمت منحنی — روی قسمت عمودی

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{810}{6-t}+\frac{250}{t}\right]=\frac{810}{(6-t)^2}-\frac{250}{t^2}=0 \qquad \frac{9}{6-t}=\pm\frac{5}{t}$$

$t=3,86$ mm ✓ قبول

$t=13,5$mm غیر قابل قبول

اگر $t=13,5mm$ باشد $6-t$ مقداری منفی می‌شود و این امکان‌پذیر نیست

ب) اگر پیچ‌ها در روی صفحه کوپلینگ همانند شکل بوده و قطر هر پیچ 24 mm باشد تنش در هر پیچ را محاسبه کنید.

$$\tau_A * r * N = T$$

$$\tau\times\frac{\pi}{4}(24)^2*\frac{400}{2}*8=7*10^6 \qquad \tau=9,67\ MPa$$

ج) اگر تنش تسلیم در برش برابر 100 MPa باشد قطر شافت A را با ضریب امنیتی 2.5 برای گشتاور T محاسبه کنید.

$\tau_{max}=\frac{TC}{J}$

$$\frac{Tv}{J}=\text{تنش مجاز}=\frac{100}{2.5}=\frac{7\times10^6*\frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32}(d)^4} \qquad d=96,2\ mm$$

د) با فرض $t=4$ میلی‌متر زاویه پیچش انتهای شافت B را نسبت به نقطه انتهای شافت A محاسبه کنید.

شافت B — شافت A

$$\varphi_{B/A}=\frac{TL}{4Am^2G}\oint\frac{ds}{t}+\frac{TL}{GJ}$$

$$=\frac{7*10^6*750}{4(60,000)^2\times184\times10^5}\left[\frac{810}{6-4}+\frac{250}{4}\right]+$$

$$\frac{7\times10^6\times750}{0,84\times10^5\times\frac{\pi}{32}(96,2)^4}\Rightarrow 11,940\times10^{-3}\ rad$$

TOP

Subject :
Year : Month: Day :

۵) تنش برشی حداقل و حداکثر در ساقه B را برای $t = 4\ mm$ را به دست آورید.

$$\tau = \frac{T}{2Amt} \qquad \tau_{max} = \frac{T}{2Am\,t_{min}} = \frac{7*10^6}{2(60.000)(6-4)} = 29,16\ MPa$$

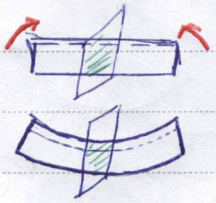
$$\tau_{min} = \frac{7*10^{-6}}{2(60,000)(4)}\ MPa$$

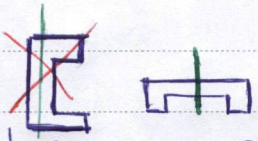
فصل پنجم)

خمش خالص تیر

فرضیات)

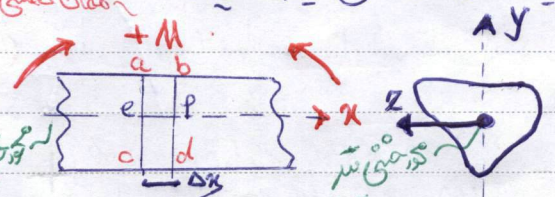
- بارگذاری به صورت تدریجی صورت گیرد
- تیر تحت اثر بارهای وارده پایدار است
- مقطع تیر دارای یک محور تقارن قائم است
- مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور تیر پس از خمش به صورت صفحه باقی می‌مانند
- تغییر شکل‌ها در محدوده الاستیک بوده و قانون هوک صادق است





تحت خمش خالص لایه‌های بالای تحت فشار، لایه‌های زیر تحت کشش است می‌توان لایه یا محوری را در تیر پیدا نمود که تحت کشش نباشد و تحت فشار به این محور محور خنثی تیر می‌گویند.

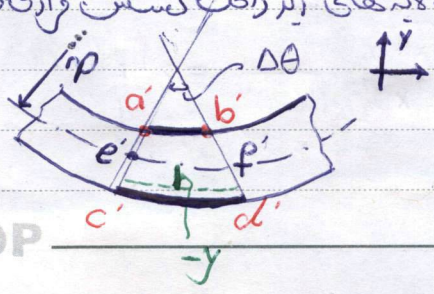
ممان خمشی مثبت



محور می‌تواند منفی هم باشد، الزامی به تقارن نیست

ممان خمشی مثبت همیشه لایه‌های بالا تحت فشار و لایه‌های زیر تحت کشش قرار می‌دهد

مقطع تیر حتماً یک محور تقارن قائم دارد



ρ: شعاع انحناء

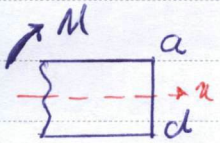
$$\widehat{e'f'} = \widehat{ef} = \Delta x = \rho\,\Delta\theta$$

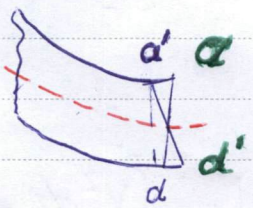
Subject :
Year : Month: Day :

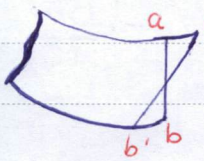
کرنش = تغییر طول / طول اولیه $\Rightarrow$ $\varepsilon_x = \frac{g'h' - \Delta x}{\Delta x}$

$g'h' = (\rho + y)\Delta\theta$ $\quad \varepsilon_x = \frac{(\rho+y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}}$

به عبارت دیگر تغییرات کرنش محوری به صورت خطی از محور خنثی تغییر می‌کند



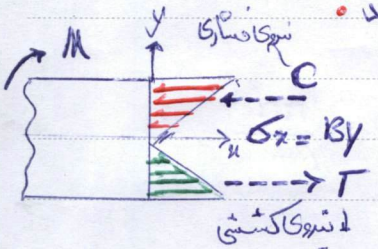




غلط است

$\sigma_x = E(\varepsilon_x)$ ($\varepsilon_x = y/\rho$) $\quad \sigma_x = \frac{E}{\rho}y = By$ معادله‌ی بابت

به عبارت دیگر تنش نرمال خمشی به صورت خطی از محور خنثی تغییر می‌کند.

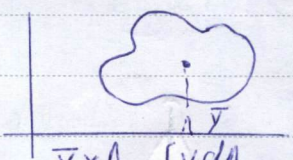


توزیع تنش نرمال خمشی

تعادل استاتیک: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_z = 0$

$\int_A \sigma_x A = 0$ (صفر) $\Rightarrow \int By\,dA = 0$ (ثابت) $\rightsquigarrow \int_A y\,dA = 0$

$\Rightarrow \bar{y} = 0$



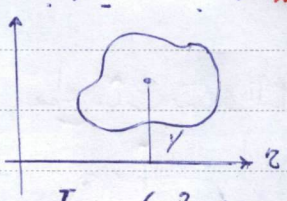
$\bar{y} \times A = \int y\,dA$

به عبارت دیگر با محور خنثی برهم منطبق هستند، چون $\int y\,dA$ برابر صفر است

$\Sigma M_z = 0 \rightsquigarrow M = \int_A (\sigma\,dA)\,y = B\int y^2\,dA$

$\sigma = By$ (بابت) $\quad dA$ (بازو) $\quad y$ (نیرو)

$M = BI_z \quad B = \frac{M}{I_z}$ طرفین در y ضرب $\Rightarrow By = \frac{My}{I_z} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{My}{I_z}}$ (I_z)



$I_z = \int y^2\,dA$

ممان اینرسی قطبی $J = \int r^2\,dA = \int (y^2 + z^2)\,dA = I_z + I_y$ $\quad I_y = \int z^2\,dA$

TOP

Subject :
Year : Month: Day :

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}$$

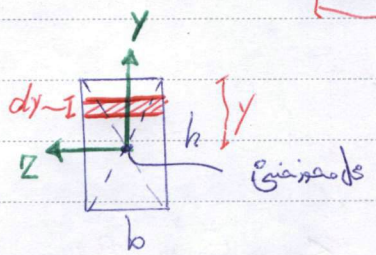
σ_x

تنش نرمال نسبتی منفی، تنش نرمال کششی مثبت است

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho} \qquad \frac{\rho}{\blacksquare} = \frac{y}{\varepsilon_x} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x/E}{y} = \frac{M}{EI}$$

$\frac{\sigma_x}{E}$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_x}{y} = \frac{M}{EI}}$$

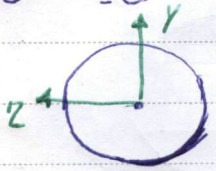


محور خنثی

عامیه معمار ایرانی هندی

$$I_z = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b\,dy = \frac{bh^3}{12}$$

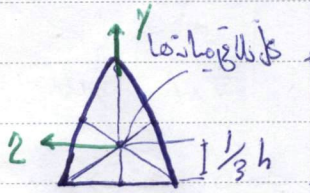
مقطع تیر دایره‌ای



$$I_y = I_z = \int y^2 dA$$

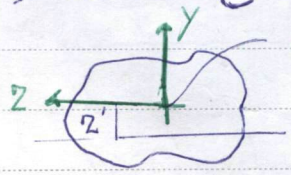
$$J = I_z + I_y = \frac{\pi d^4}{32} \qquad I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

مقطع تیر دایره‌ای



$$I_z = \frac{bh^3}{36}$$

مقطع مثلث متساوی الساقین



محور خنثی

معلوم I_z

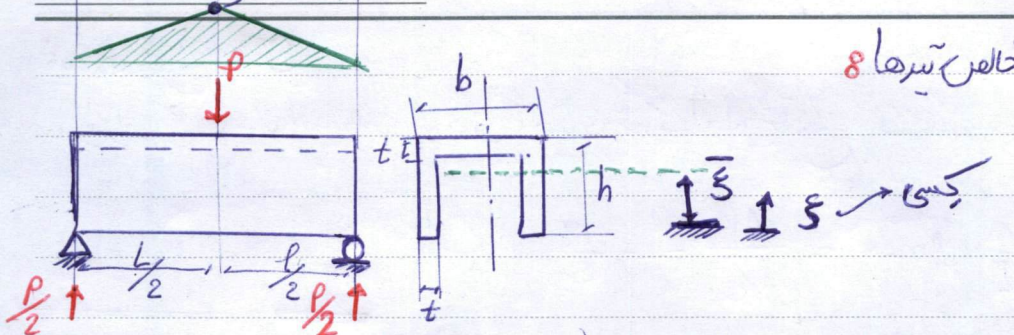
قضیه انتقال محورهای موازی

$$I_{z'} = I_z + Ad^2$$

Subject :
Year: Month: Day :

ادامه بحث خمش خالص تیرها 8

مثال



$b = 600\ mm$ $P_{max} = ?$

$t = 50\ mm$

$h = 250\ mm$

$L = 3000 mm$

تنش مجاز کششی $\sigma_{t-all} = 140\ MPa$

فشاری " " $\sigma_{c-all} = 84\ MPa$

$$\sigma_x = \frac{-M_z}{I_z} y$$

$$\sigma_{x-max} = -\frac{M_{max}}{I} y_{max}$$

$$\bar{\xi} A = \Sigma \bar{\xi}_i A_i$$

$$\bar{\xi} = \frac{b \times h * h/2 - (b-2t)(h-t) * \left(\frac{h-t}{2}\right)}{b \times h - (b-2t)(h-t)} = \boxed{175\ mm}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\bar{\xi} - \frac{h}{2}\right)^2 - \left[\frac{(b-2t)(h-t)^3}{12} + (b-2t)(h-t)\left(\bar{\xi} - \frac{h-t}{2}\right)^2\right]$$

$$\boxed{I_z = 27.79 * 10^7\ mm^4}$$

$$\sigma_{max-c} = \sigma_A = \frac{-M}{I} y_A \qquad \sigma_{max-t} = \sigma_B = \frac{-M}{I} y_B$$

$$\frac{\frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2}}{27.79 * 10^7} * (175) = -84 \rightarrow P_1 \checkmark \qquad \frac{\frac{L}{2} \cdot \frac{P}{2} * (-175)}{27.79 * 10^7} = 140 \rightarrow P_2 \checkmark$$

($L = 3000$)

P مورد نظر P_{min} به دست آمده P_1, P_2 است

Subject :

Year : Month: Day :

اساس مقطع S :

برای یک سازه ابعادهندی به نحوی اختیاری شود که اساس مقطع S ماکزیمم گردد.

$$\sigma_{max} = -\frac{M}{I} y_{max} \overset{c}{=} \frac{M}{I/c} = -\frac{m}{S} = \text{ثابت}$$

بال

جان

$$\frac{I}{c} = \frac{100 * (10)^3/12}{10/2}$$

$$\frac{I}{c} = \frac{10\,(100)^3/12}{100/2}$$

مثال ۱

از یک تنه درخت به قطر d میخواهیم تیری با مقطع مربع مستطیل بسازیم ابعاد مقطع را چنان تعریف کنید که تیری با بیشترین مقاومت خمشی داشته باشیم

$$S = \frac{I}{c} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(d^2-b^2)}{6}$$

$$b^2 + h^2 = d^2$$

$$\frac{dS}{db} = 0 \qquad (d^2 - b^2) - 2b^2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{d}{\sqrt{3}}} \qquad \boxed{h = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d}$$

$M_{max} = Pl$

مثال ۲

دو تیر با طول برای آنکه بار بیشتری را بتوان بر مقطع اعمال نمود کدام مقطع را استفاده می‌کنیم

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_Y}{n} = \frac{M_{max\,I}}{S_I} = \frac{M_{max\,II}}{S_{II}}$$

$$\frac{M_{max\,I}}{M_{max\,II}} = \frac{S_I}{S_{II}}$$

Subject :

Year : Month: Day :

$$S_I = \frac{\frac{a a^3}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6}$$

$$S_{II} = \frac{I}{a\sqrt{2}/2}$$

* $I_z = \frac{bh^3}{36}$

$$S_{II} = \frac{2 \times \frac{1}{12} \times b \times h^3}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

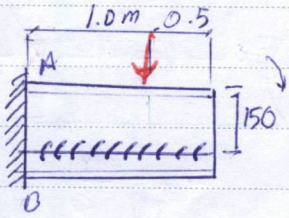
$$I_{z'} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} bh^3$$

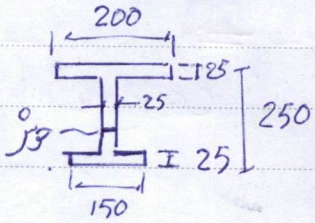
$$S_{II} = \frac{\frac{1}{6}(a\sqrt{2})\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}\frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

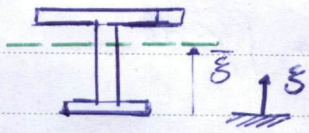
$$\frac{M_{max\,I}}{M_{max\,II}} = \frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}} = \sqrt{2}$$

پاسخ ، تیرو

مثال ، examing



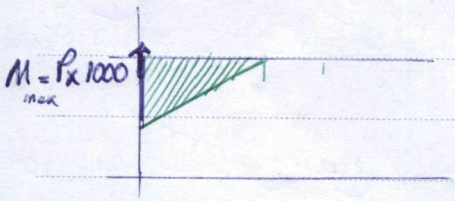




تنش مجاز کشش و فشار = 100 MPa تنش مجاز برش = 100 MPa

باصرف نظر از وزن تیر ⇒ P = ? بیزوی یکنواخت مصالح چوب = q = 2 MN/m

$$\rightarrow \sigma = \frac{-My}{I} \qquad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} y_{max}$$



$$\bar{\xi} A = \Sigma A_i \xi_i$$

$$\bar{\xi} = \frac{150 \times 25 * \frac{25}{2} + 200 * 25 * 125 + 25 * 200 * 237.5}{150 * 25 + 200 * 25 + 25 * 200}$$

$$\bar{\xi} = 135.22 \text{ mm} > \frac{250}{2}$$

$$I = \frac{150(25)^3}{12} + 150 * 25 * (\bar{\xi} - \frac{25}{2})^2 + \frac{25(200)^3}{12} + 25 * 200 * (\bar{\xi} - 125)^2$$

$$+ \frac{200(25)^3}{12} + 200 * 25 (237.5 - \bar{\xi})^2 = 126.42 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

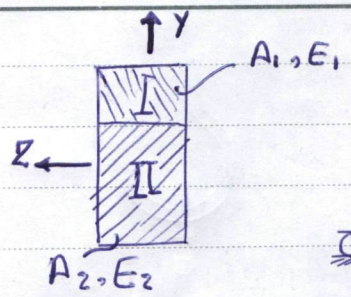
$\sigma_B > \sigma_A$

$\sigma_{max\text{-}t} = \sigma_A$ $\sigma_{max\,C} = \sigma_B$

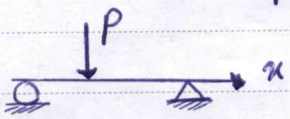
$$\sigma_{max} = \sigma_B = -\frac{M_{max} y_B}{I} = \frac{-P \times 1000 * (y_B = -\bar{\xi})}{126.42 \times 10^6} = -100 \quad P = 140.4 \times 10^3$$

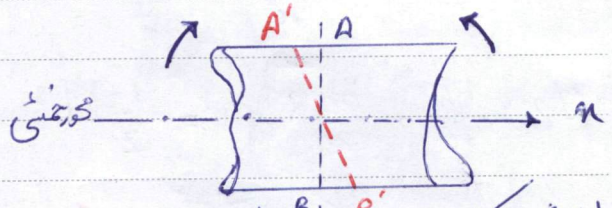
Subject :
Year : Month: Day :

تیرهای چند جنسی (مرکب)



$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$ در اثبات این فرمول از جنس صحبت نشده بود



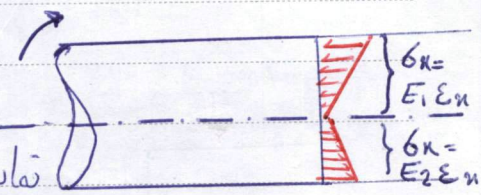


نمایش موضع کرنش به صورت خطی

$\int \sigma \, dA = 0$ $\quad \Sigma F_x = 0$ تعادل استاتیک $\Rightarrow$

$\int_{A_1} \sigma \, dA + \int_{A_2} \sigma \, dA = 0$

$\sigma = E_1 \frac{y}{\rho}$ $\quad \sigma = E_2 \frac{y}{\rho}$



نمایش توضیع تنش

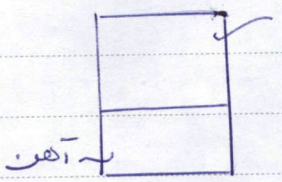
$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$

$\int_{A_1} \frac{y}{\rho} \, dA + \int_{A_2} \frac{y}{\rho} \left(\frac{E_2}{E_1} \, dA \right) = 0$

if $\frac{E_2}{E_1} = n$

سطح مقطع جسم 2 را n برابر کنیم

همانند آن است که همه مقطع از جنس 1 در نظر گرفته شده است

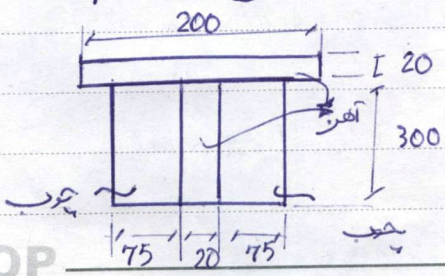


$n = \frac{E_s}{E_w}$ (فولاد / چوب)

سطح مقطع عرضی را n برابر کرده و همه را از جنس چوب استفاده می‌کنیم

چون تغییرات کرنش (ارتفاع y) بستگی دارد و از طرفی تغییرات کرنش به جنس بستگی ندارد برای n برابر کردن سطح مقطع یکی از اعضا فقط ملزم به n برابر کردن عرض مقطع هستیم

مثال ۱



E_w چوب $= 12.5$ GPa

E_s فولاد $= 200$ GPa

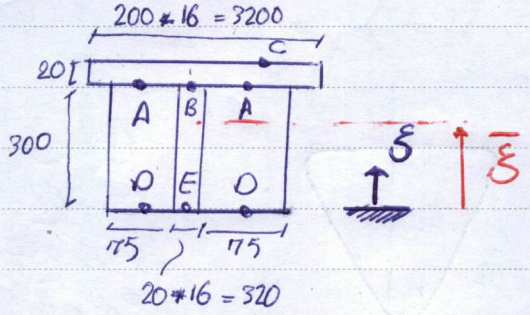
$M = 50$ KN-m

Subject :
Year : Month: Day :

مطلوب است تنش حداکثر در چوب و در آهن را.

$n = \frac{200}{12.5} = 16$

برای حل این مسئله معادل چوبی آن را در نظر گرفته و کل مقطع را از جنس چوب در نظر می‌گیریم.



$$\bar{\delta} = \frac{\Sigma A_i \bar{\delta}_i}{\Sigma A_i}$$

$$\bar{\delta} = \frac{4470 * 300 * 150 + 3200 * 20 * 310}{4470 * 300 + 3200 * 20} = 200\ mm$$

$$I = \frac{4470\,(300)^3}{12} + 4470 * 300\,(\bar{\delta} - 150)^2 + \frac{3200\,(20)^3}{12} + 20 * 3200\,(310 - \bar{\delta})^2$$

$$I = 2.18 * 10^9\ m^4$$

$(\sigma_{max-t})_\omega = \sigma_D$ $\quad$ $(\sigma_{max-p})_\omega = \sigma_A$

$(\sigma_{max-t})_s = \sigma_E$ $\quad$ $(\sigma_{max-p})_s = \sigma_C$

$$\sigma_D = \frac{MY_D}{I} = \frac{50 * 10^6}{2.18 * 10^9} * 200$$

$$\sigma_A = \frac{MY_A}{I} = \frac{50 * 10^6}{2.18 * 10^9} * (300 - 200)$$

$$(\sigma_{max-t})_{st} = (16)\frac{50 * 10^6}{2.18 * 10^9}(200)$$

چون در این مرحله فرض را کلی گذاریم و به جای چوب در نظر گرفته شده آهن می‌گذاریم این سبب می‌شود که سطح مقطع کم شود و تنش افزایش یابد پس تنش فرض را در 16 ضرب می‌کنیم تا تنش خود به دست آید

$$(\sigma_{max\,cp})_{st}\ (16)\frac{50 * 10^6}{2.18 * 10^9}(320 - 200)$$

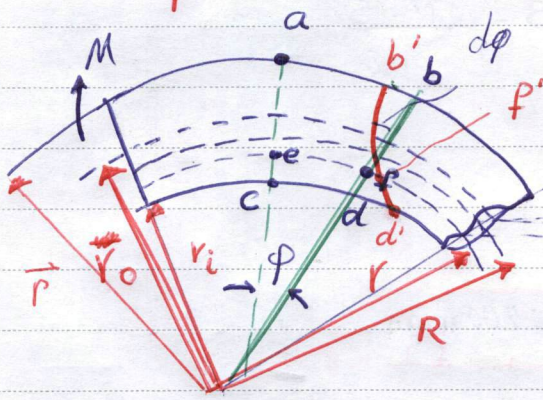
TOP

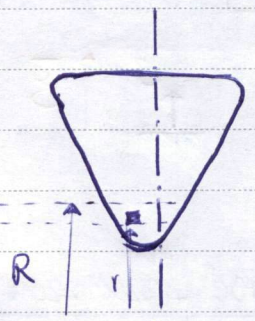
Subject :
Year : Month: Day :

تیرهای خمیده



$\sigma = \frac{My}{I}$ ⟵ تیرهای مستقیم





مقطع تیر خمیده

r_i شعاع داخلی
r_o شعاع خارجی
$\bar{r}$ شعاع مرکزهندسی
R شعاع محور خنثی
r شعاع دلخواه (متغیر)

فرضیات:
1- فقط خمش ارتجاعی موردبحث است
2- مقطع تیر دارای یک محور تقارن قائم است
3- منحنی تنش کرنش برکشش و فشار یکسان رهبری شود
4- مقاطع صفحه‌ای عمود بر محور تیر پس از خمش به صورت صفحه‌ای باقی می‌ماند
5- مرکزهندسی مقطع بر محور خنثی منطبق نیست

$\overset{\frown}{ab} \rightsquigarrow \overset{\frown}{ab'}$
$\overset{\frown}{cd} \rightsquigarrow \overset{\frown}{cd'}$
$\overline{bd} \rightsquigarrow \overline{b'd'}$ خط

پیدا کردن موقعیت محور خنثی ← $R = ?$
$\sigma(r) = ?$

کرنش $= \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}} = \frac{\overset{\frown}{ff'}}{ef} = \frac{(R-r)d\varphi}{r\varphi}$

قانون هوک $\sigma = E\varepsilon = \frac{E(R-r)}{r}\frac{d\varphi}{\varphi}$

تعادل استاتیکی: $\Sigma F_x = 0$ ، $\Sigma M_z = 0$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \int \sigma\, dA = \frac{E(R-r)}{r}\frac{d\varphi}{\varphi} dA = 0 \Leftarrow \frac{Ed\varphi}{\varphi}\int \frac{R-r}{r} dA = 0$

$\neq 0$

$\Rightarrow \int \frac{R-r}{r} dA = 0 \Rightarrow \int (\frac{R}{r} - 1) dA = 0 \quad R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}$

فرمول برای پیدا کردن موقعیت محور خنثی

Subject :
Year : Month: Day :

$$\Sigma M_{z=0} \quad \int \sigma A \,(R-r) = M$$

$$M = \int \frac{E(R-r)^2}{r}\,\frac{d\varphi}{\varphi}\,dA = E\frac{d\varphi}{\varphi}\int \frac{R^2+r^2-2rR}{r}\,dA$$

$$R^2\underbrace{\int \frac{dA}{r}}_{\frac{A}{\bar{R}}} + \underbrace{\int r\,dA}_{\bar{r}A} - 2RA = A(\bar{r}-R)$$

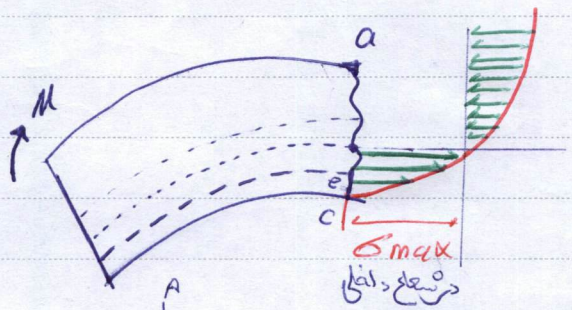
$$M = \frac{Er}{R-r}A(\bar{r}-R) \qquad \sigma = \frac{M(R-r)}{rA(\bar{r}-R)}$$

$$\boxed{R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}} \qquad \boxed{\sigma = \frac{M(R-r)}{rA(\bar{r}-R)}}$$

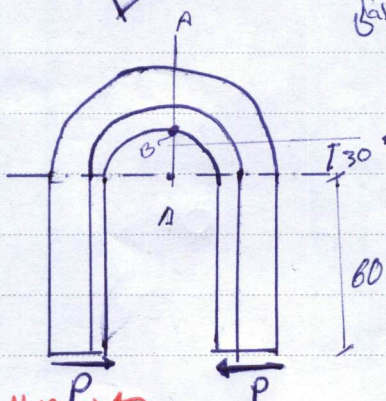
متغیر $r_i < r < r_o$

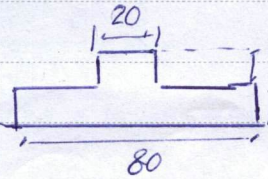
که تابع هذلولی گون

تنش حداکثر در شعاع داخلی اتفاق می‌افتد



مثال ۱



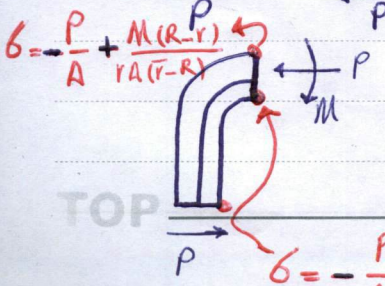


$A-A$ مقطع

$\sigma_{all} = 50$ MPa $\quad P_{max} = ?$

① مقطع بحرانی ✓ وسط

② در مقطع بحرانی نقطه تنش حداکثر را پیدا کنیم



تنش مرکب

P نیروی $\sigma = \frac{P}{A}$

M خمش $\sigma = \frac{M(R-r)}{rA(\bar{r}-R)}$

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{M(R-r)}{rA(\bar{r}-R)}$$

Subject :
Year : Month: Day :

$\bar{r}A = \Sigma \bar{r}_i A_i$ ← برای محاسبه مرکز هندسی

تنش در نقطه B حداکثر است

$$\bar{r} = \frac{20*80*40 + 20*40*70}{20*80 + 20*40} = 50 \text{ mm}$$

$M = P*(60+\bar{r})$ ← اسمال پیوند به مرکز هندسی مقطع

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{A}{\int_{30}^{50} 80\frac{dr}{r} + \int_{50}^{90} 20\frac{dr}{r}} = \frac{A}{80\ln\frac{50}{30} + 20\ln\frac{90}{50}} = 45,61$$

$20*80+20*40$

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{M(R-r)}{rA(\bar{r}-R)} = -\frac{P}{80\times20+40\times20} - \frac{P*(60+50)(45,61-30)}{30(80\times20+40\times20)(50-45,61)} =$$

$\Rightarrow P_{max} = \checkmark\ 8550\,N$

Subject :

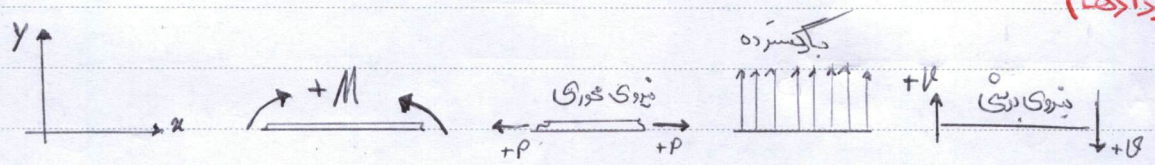
Year : Month: Day :

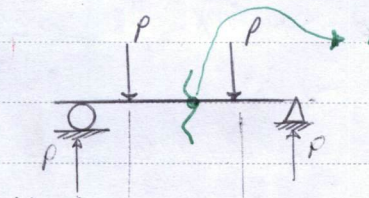
فصل ششم

تنش برشی ناشی از نیروی برشی در تیرها

تنش برشی
- ترک پیچشی
- نیروی برش

توزیع بار

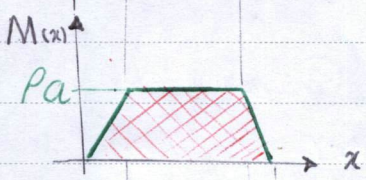




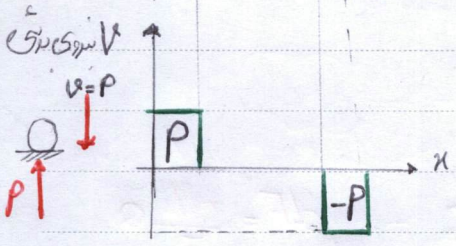
$M(x) = Px - P(x-a) = Pa$

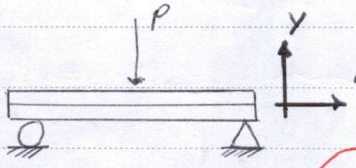
$M(x) = Px$

$\frac{dM}{dx} = V$ نیروی برشی

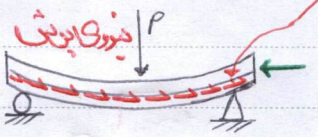


- معادله خمشی و نیروی برش مستقل از یکدیگر نیستند.

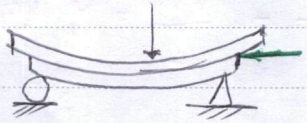




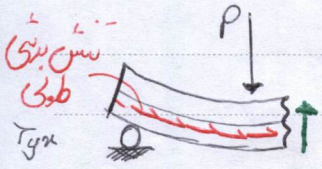
τ_{yx} تنش برشی در مقطع طولی



چسب یا میخ کوبی



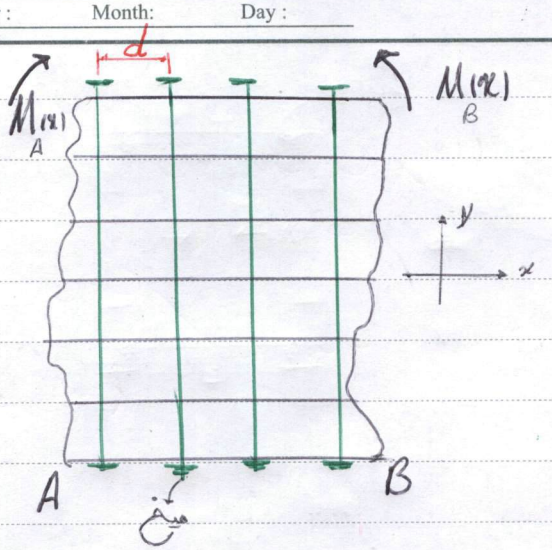
بدون چسب یا میخ کوبی

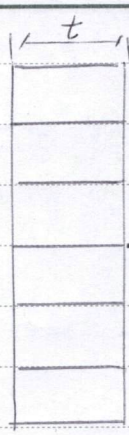


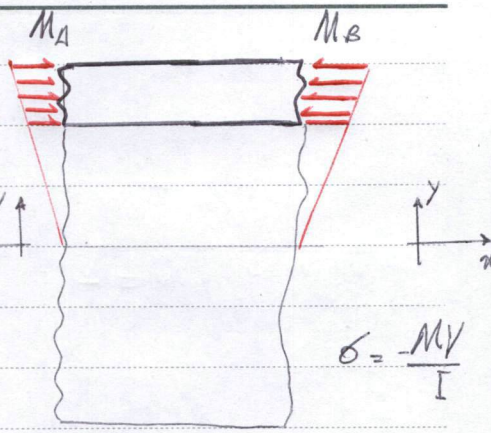
τ_{xy} تنش برشی عرضی

Subject :

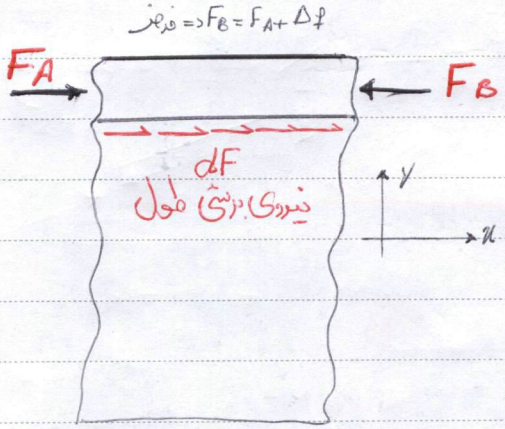
Year : Month: Day :







توزیع تنش عمودی ناشی از ممان خمشی مقطع جسم



توزیع نیروی عمودی

if $F_A = F_B \rightsquigarrow M_A = M_B \rightsquigarrow \frac{dM}{dx} = V =$

if $F_A \neq F_B \rightarrow M_A \neq M_B \rightsquigarrow \frac{dM}{dx} = V \neq$

$$dF = F_B - F_A = \int_B \sigma\, dA - \int_A \sigma\, dA$$

$$\sigma = \frac{M_B y}{I} \qquad \sigma = \frac{M_A y}{I}$$

$$= \frac{M_B}{I}\int y\,dA - \frac{M_A}{I}\int y\,dA$$

$Q = \int y\,dA$ لنگر اول سطح

$$= \frac{M_B - M_A}{I} Q \Rightarrow dF = \frac{dM}{I} Q$$

نیروی واحد طول تیر N/mm ، V

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx}\frac{Q}{I} = \frac{VQ}{I} = q$$ جریان برشی

اگر $\frac{dF}{dx}$ را در dx ضرب کنیم نیروی برشی حاصل می‌شود که می‌خواهد میخ را ببرد که با q نشان داده و به آن جریان برشی گوییم

$$\tau_{yx} = \frac{q}{t} = \frac{dF}{t\,dx} = \frac{VQ}{It}$$

TOP

Subject :

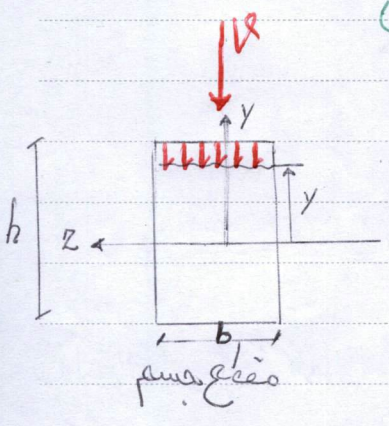
Year : Month: Day :

$$\frac{dF}{dx} = q = \frac{VQ}{I}$$

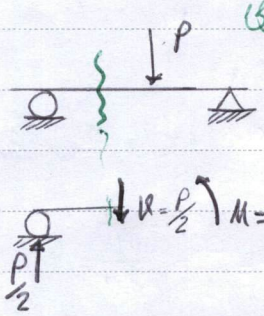
نیروی برشی — گشتاور اول سطح — ممان اینرسی هندسی

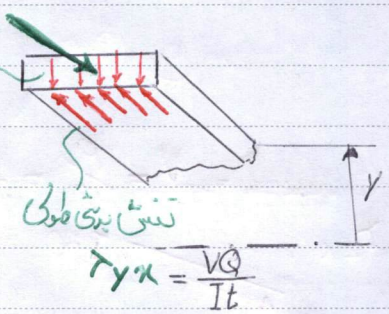
تنش برشی طولی — $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{VQ}{It}$

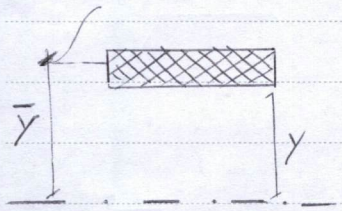
تنش برشی عرضی



مقطع جسم







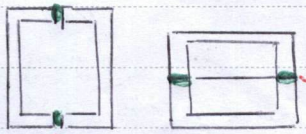
مساحت هاشور خورده

$$Q = \int y\,dA = \bar{A}\bar{y}$$

$$A = (\frac{h}{2} - y)\,b \qquad \bar{y} = y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} = (\frac{h}{2} + y)\,\frac{1}{2}$$

$$Q = A\bar{y} = (\frac{b^2}{4} - y^2)\,\frac{b}{2}$$

تنش برشی تابع از نیروی برش در راستای نیروی برش است



تنش برشی Max ، تنش نرمال صفر

$\frac{My}{I} = 0 \Leftrightarrow y = 0$

تنش برشی صفر ، ممان خمشی Max

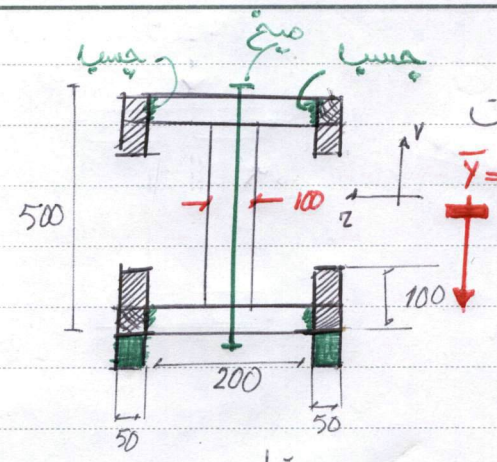
TOP

Subject :

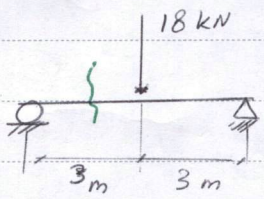
Year : Month: Day :

1) مطلوب است تنش برشی در اتصال جسبی

2) با فرض اینکه نیروی برشی وارد هر میخ 2kN باشد مطلوب است فاصله میخ ها از یکدیگر



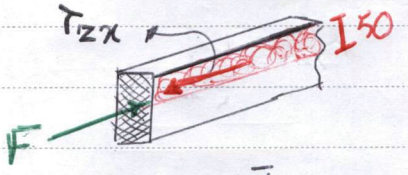
مقطع تیر



$I = 2.36 * 10^9 \ mm^4$

نیروی برشی $V = \frac{P}{2} = \frac{18}{2} = 9kN$

جریان برشی $q = \frac{VQ}{I} = \frac{dF}{dx}$



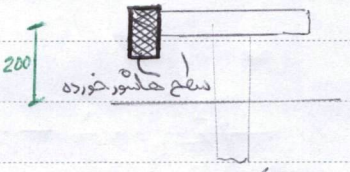
ضخامت جسم برش = t

$\tau_{zx} = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$

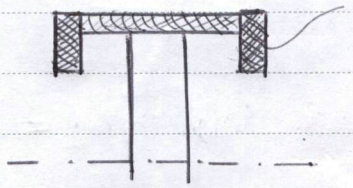
Q لنگر اول سطحی باشد که از روی سطوح دیگر جدا شود باعث برش جسم می شود

$Q = A\bar{y} = 50 \times 100 * 200$

$\tau_{zx} = \frac{9 \times 10^3 * 50 * 100 * 200}{2.36 * 10^9 * 50}$



سطح هاشور خورده ای که باعث برش میخ می شود



$\frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I} = \frac{9 * 10^3}{2.36 * 10^9} * Q = 16.2 \ \frac{N}{m}$

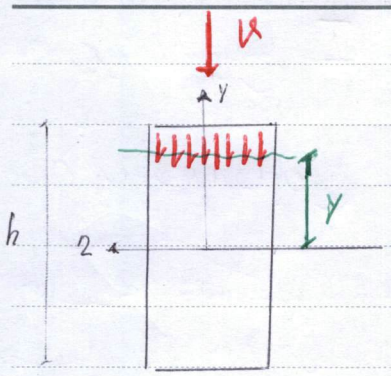
$Q = (50 \times 100 * 200 \times 2 + (200+50) * 225 = 4.25 * 10^6 \ mm^3$

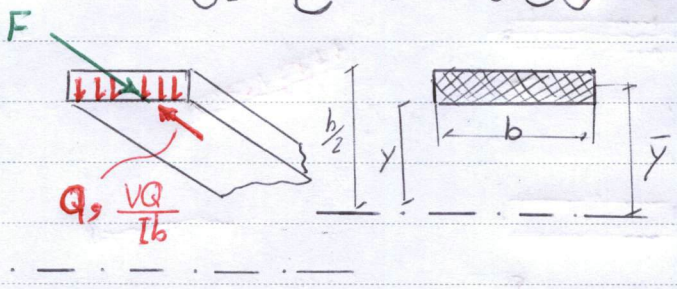
فاصله هر میخ از میخ دیگر $= \frac{2 * 10^3}{q} = \frac{2 * 10^3}{16.2} = 123 \ mm$

Subject :

Year : Month: Day :

تنش برشی در مقطع عرضی یک تیر با مقطع مستطیلی :





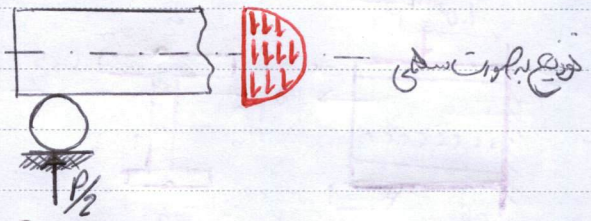
$$A\bar{y} = Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau_{xy_{max}} \overset{y=0}{=} \frac{Vh^2}{8I} = \frac{Vh^2}{8\left(\frac{bh^3}{12}\right)} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3}{2}\tau_{ave}$$

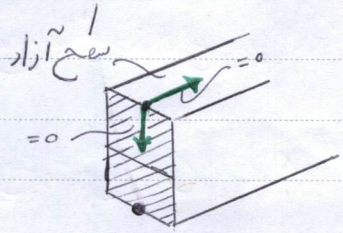
تنش برشی Max در مقطع برشی 1.5 برابر تنش برش متوسط است

$$\tau_{xy_{min}} = 0 \quad (y = \pm h/2)$$



توزیع تنش مقطع مستطیلی یک تیر $= \tau_{xy_{max}} = \frac{3}{2}VA$

تنها جای دایره $\frac{4}{3}VA = \tau_{xy}$ است.

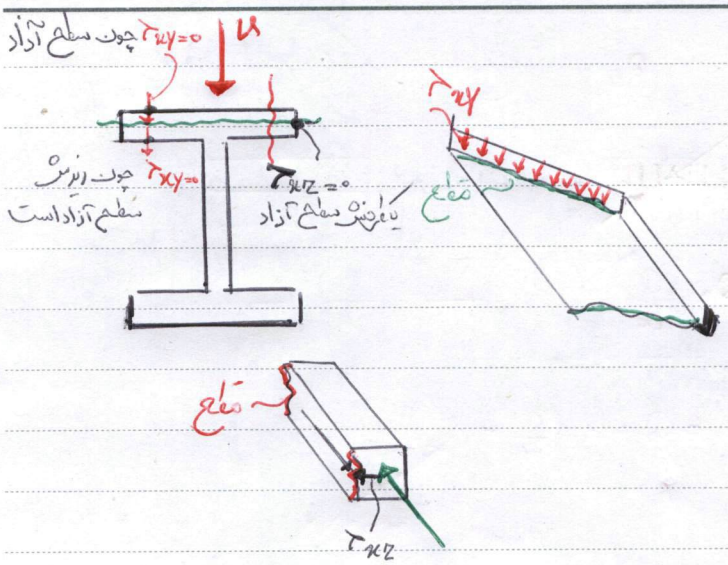


TOP

Subject :

Year : Month: Day :

تنش برشی در مقاطع I شکل

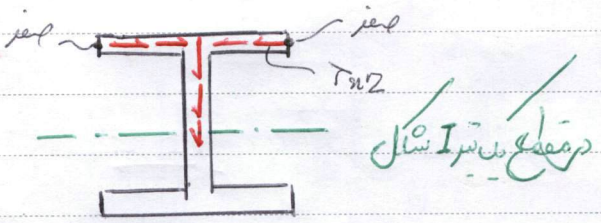


τ_{xy} از صفر باید روی بال شروع و به بیشترین در زیر بال برسد

چون ضخامت بال کم است

تنش برشی τ_{xy} در بال ناچیز است

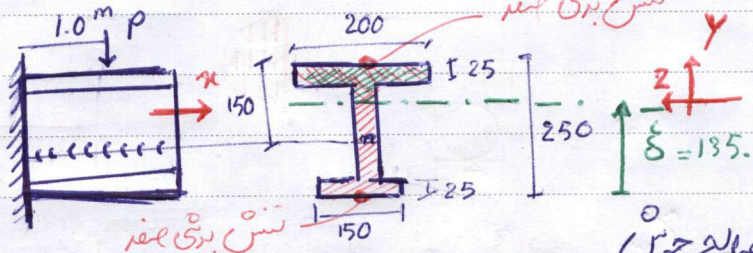
توزیع تنش برشی یا جریان برشی



در مقطع یک تیر I شکل

مثال:

تنش برشی صفر



تنش بازخشی 150 MPa

تنش بازبری = 100 MPa

بیشترین بار برشی مصالح جوش = $q = 2 \frac{N}{m}$

$P_{max} = ?$

مقطع بیشترین خطر فاصله تیر P و تکیه گاه است

$I = 126.47 \times 10^6 \ mm^4$

$\tau = \frac{VQ}{It}$ تنش برشی سطح هاشور خورده

در محور خنثی تنش برشی Max است.

$(\tau_{xy})_{max} = \tau_{xy}$ روی محور خنثی

Q در سطح هاشور خورده کل صفر است

تنش برشی سطح بالای محور خنثی $\bar{\xi}$

$$200 \times 25 * (237.5 - \bar{\xi}) + (225 - \bar{\xi}) * 25 * \frac{(225 - \bar{\xi})}{2} = 612.05 * 10^3 \ mm^3$$

$$\tau_{max} = \frac{P * 612.05 * 10^3}{126.4 * 10^6 * 25} = 100 \qquad P = 516.38 \times 10^3 \ N$$

Subject :

Year : Month: Day :

$q = \frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$ نیروی برشی واحد طول

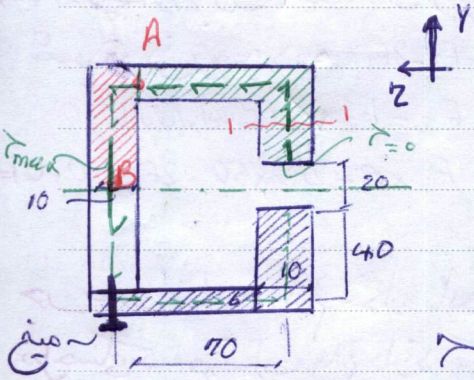
سطح هاشور خورده برای Q ناحیه زیر خاموش یا بالای خاموش است که برای راحتی زیر خاموش را می گیریم

$Q = 150*25*(\bar{\xi} - 12.5) + 75*25*(\bar{\xi} - (37.5+25))$

$= 1.208 \times 10^6 \quad mm^3$

$\frac{N}{m} \quad q = \frac{dF}{dx} = \frac{1,208\times10^6 * P}{126.47\times10^6} = 2\times10^6 \times \frac{1^m}{1000\,mm}$

$P = Min \begin{cases} P_1 \leftarrow \text{فلنج خمش} \\ P_2 \leftarrow \text{فلنج برش} \\ P_3 \leftarrow \text{فلنج برش جوش} \end{cases}$ $P = 209.3\times10^3\ N$



مثال)

مطلوب است تنش برشی Max و محل آن

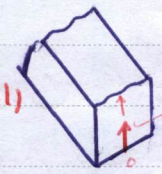
$I = 3780520 \quad mm^4$

$V = 15\,kN$

$\tau = \frac{VQ}{It}$

اگر عجلت نمی‌ساخت بود تنش برشی ماکزیمم در B بود اما محل که عجلت هاوش در اوردن τ_{max} می‌تواند در A یا B باشد

در A به این دلیل که t_{min} است و در B برای اینکه Q max است



$Q_A = 43*10*(10+\frac{43}{2}) + 60*6*(50) = 31545$

برای نقطه A

$\tau_A = \frac{15*10^3*31545}{3780520*6} = 20,86\ MPa$

برای نقطه B $Q_B = Q_A + 53*10*\frac{53}{2} = 36046$

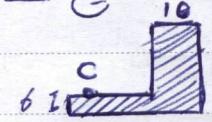
$\tau_B = \frac{15\times10^3\times36046}{3780520\times10} = 14,3\ MPa$

Subject :
Year : Month: Day :

ب) اگر نیروی برشی مجاز هر میخ 30 kN باشد فاصله میخ ها را محاسبه کنید

$F = 30\ kN$

سطح هاشور خورده برای میخ



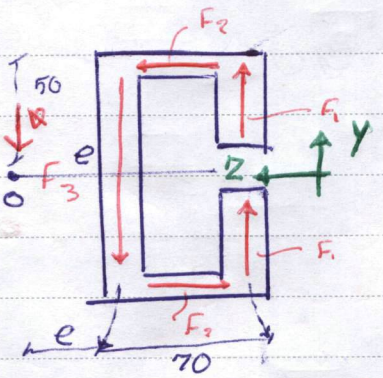
$Q_C = Q_A + 6 * 10 * 50 = 34545$

$\frac{N}{mm} \rightarrow q = \frac{VQ}{I} = \frac{15 \times 10^3 \times 34545}{3780520} \Rightarrow \frac{d}{} = \frac{30 * 10^3}{q} = \underline{282.7\ mm}$

فاصله میخ‌ها با هم

ج) موقعیت مرکز برش E را پیدا کنید.

e) تعریف مرکز برش) نقطه ای از مقطع تیر است (روی محور خنثی) که اگر نیروی برش آنجا به آن نقطه اعمال شود تغییر فنی پیچد.



تعادل استاتیک

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V = F_3 - 2F_1$

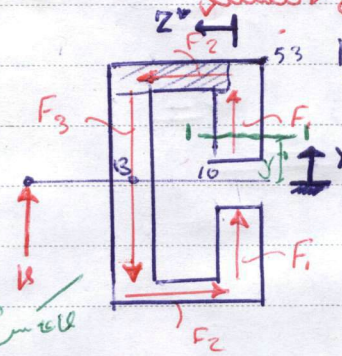
$\Sigma F_z = 0 \quad F_2 = F_2$ ✓ برقرار است

$\Sigma M_x = 0 \quad F_3 \times e - 2F_2 \times 50 - 2F_1 (70 + e)$

چون خط عمل نیروی برشی باعث به وجود آمدن F های شود یعنی F ها عکس العمل لا تشستی

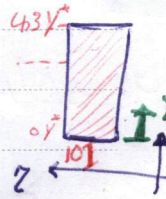
توضیح: تفت شود نیروی برش لا باعث به وجود آمدن جان برش می شود...!

برای پیدا کردن مرکز برش نیروی V را عکس کرده در مرکز برش اثری دهیم باید حول هر محور دلخواه موازی محور x ممان نیروها صفر باشد



$F_1 = \int \tau dA = \int \frac{VQ}{It} dA = \frac{V}{It} \int Q dA$

$= \frac{V}{10 \cdot I} \int_{0}^{43} 10 \times Y^* (\frac{Y^*}{2} + 10) \times 10\, dy^*$



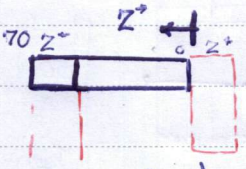
$F_1 = 606.5\ N$

Subject :

Year : Month: Day :

$$F_2 = \frac{V}{It}\int Q\,dA = \frac{V}{It}\int\left[\left(43\times10\times\left(10+\frac{43}{2}\right)\right)+6\times z^*\times50\right]6\,dz^*$$

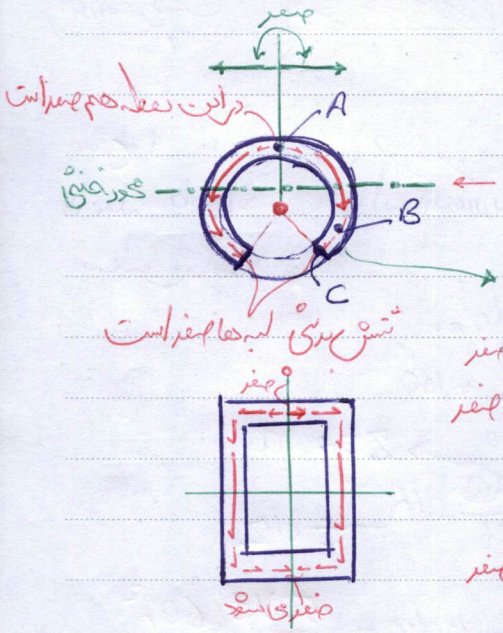
$$F_2 = 4755.4\ N$$



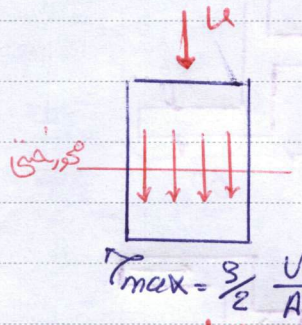
ممان گیری حول B تا F_3 حذف شود، e به دست آید

$$\sum M_B = 0$$

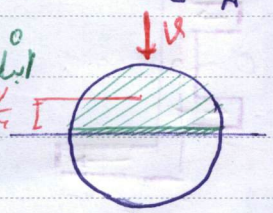
$$F_1\times70 + 2 + F_2\times100 = (V = 15\times10^3)\,e \qquad e = 37\ mm$$



توسیم جریان برش مقطع یک جسم)



$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$



مرکز سطح نیم دایره

$\frac{4r}{3\pi}$ از مبدا

$$\tau = \frac{VQ}{It} \qquad Q = A\bar{y} = \frac{\pi r^2}{2}\times\frac{4r}{3\pi}$$

$$\tau = \frac{V\times\frac{r^2\pi}{2}\times\frac{4r}{3\pi}}{\frac{\pi d^4}{64}\times\frac{1}{r^2}\times2r} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$$

$$\frac{\pi r^4}{4}$$

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$$

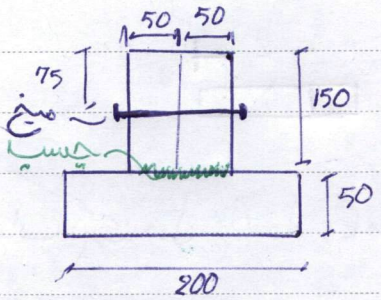
TOP

Subject :

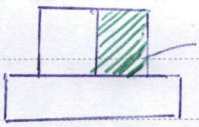
Year : Month: Day :

مثال ۱

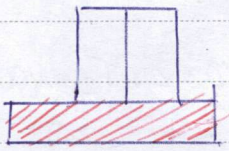
نیروی برشی اعمالی به مقطع، تنش برشی در چسب $V = 5\,kN$



$$\frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I}$$



سطح هاشور خورده در بدنه مقطع



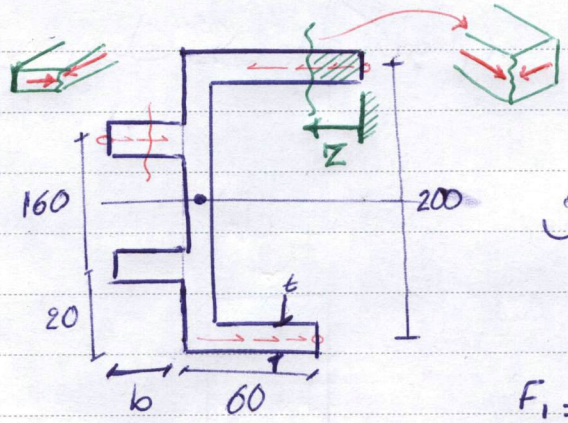
سطح هاشور خورده در چسب

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

طول چسب زده شده 100

مثال ۱

فاصله b را چنان پیدا کنید که مرکز برش بر نقطه O منطبق باشد



مرکز برش O $\Rightarrow \sum M_O = 0$

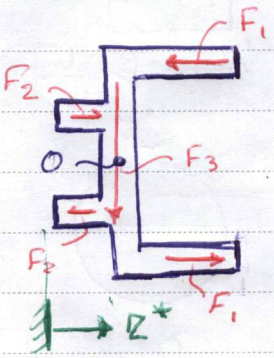
$$F_1 * 200 = F_2 * 160$$

$$F_1 = \int \tau\, dA = \int \frac{VQ}{It}\, dA$$

$Q = zt * 100$

$dA = t\, dz$

$$\frac{V}{It}\int_0^{60} 100\, zt\, t\, dz = \frac{50Vt(60)^2}{It}$$



$$F_2 = \int \tau\, dA = \int \frac{V}{It} Q\, dA$$

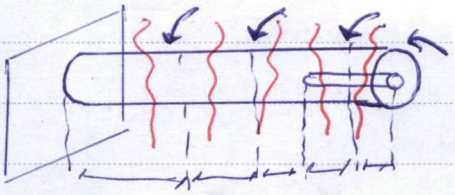
$$= \frac{V}{It}\int_0^{b} (tz^* * 80)\, t\, dz^* = \frac{V(40)t(b^2)}{I}$$

$$\frac{50\,Vt}{I}(60)^2 * 200 = \frac{V}{I}\, t\, (40)\, b^2 * 160$$

$$b = 175\ mm$$

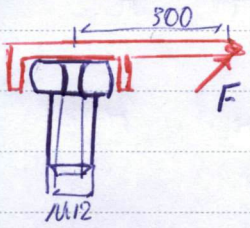
Subject :

Year : Month: Day :



J_2 = لوبر

J_1 = سوراخ



F_{max} - ?

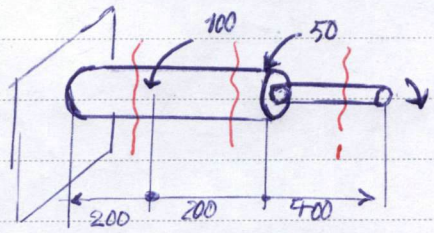
τ_{all} = 200 MP

2 = ضریب اطمینان S.f

$\tau_{all} \cdot S.f = \frac{T.C}{J} = \frac{300 f \cdot 6}{\frac{\pi (12)^4}{32}} \Rightarrow f = F_{max}$ ✓

Subject :

Year : Month: Day :



$D = 20$ $d = 10$ $G = 10^5$

$\begin{cases} \tau_{max} = ? = \frac{Tc}{J} \\ \varphi_{AB} = ? = \frac{TL}{GJ} \end{cases}$

$J_1 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 10^4}{32}$

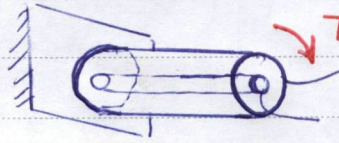
$J_2 = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi\, 20^4}{32}$

$\tau_1 = \frac{Tc}{J} = \frac{100 \times 10^3 \times 5}{J_1}$

$\tau_2 = \frac{(100-50) \times 10^3 \times 10}{J_2}$ $\tau_3 = \frac{-50 \times 10^3 \times 10}{J_3}$

$\varphi_{AB} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ $\varphi_1 = \frac{100 \times 10^3 \times 400}{10^5 \times J_1}$ $\varphi_2 = \frac{(100-50)10^3 \times 200}{10^5 J_2}$

$\varphi_3 = \frac{(100-50-100)\, 10^3 \times 200}{J_{2,3} \times 10^5}$



$\varphi_{ST} = \varphi_{BR}$

$T_{St} = ?$

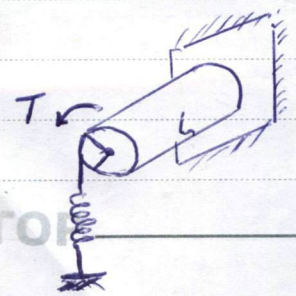
$T_{BR} = ?$

$\frac{T_{St} \times L}{16GJ} = \frac{T_{BR} \times L}{GJ} \Rightarrow T_{St} = 16 T_{BR}$

$T_T = T_{St} + T_{BR} \Rightarrow T_{St} = \frac{16}{17} T$ $T_{BR} = \frac{1}{17} T$

$\frac{\tau_{max\,St}}{\tau_{max\,BR}} = \frac{\frac{16T}{17} \times \frac{d_{St}}{2} / 8J}{\frac{T}{17} \times \frac{d_{BR}}{2} / J} =$

$J_{St} = \frac{\pi d_{St}^4}{32} = 8J$ $J_{BR} = \left(\frac{\pi D_{BR}^4 - d_{St}^4}{32} = J\right) \Rightarrow$ $d_{St} = \checkmark$ $d_{BR} = \checkmark$



$T_1 = f \times a$ $\varphi = \frac{T \cdot L}{JG} = \frac{(f \cdot a)\ell}{JG}$

$f = k_s \Delta x = k_s \cdot \varphi \cdot a$ φ, rad

جـــزوه آمـــوزشـــی درس

مقاومت مصالح (۲)

(رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات)

گردآوری و تنظیم :

فـــــرشـــــاد ســـــرایـــــی

با تقدیم والاترین درودها و احترامات به استاد ارجمندم جناب آقای مهندس گرمچی
که مطالب مندرج در این جزوه بر گرفته از آموزش های ایشان میباشد.

جزوه آموزشی درس مـقـاومـت مـصـالـح (۲)	شرکت مهندسی پتروپالامحور	**R&D Department**

مقدمه :

جزوه حاضر که فرا روی شما خواننده گرامی قرار دارد ، مشتمل بر مباحث و سرفصل های مربوط به درس دانشگاهی « مقاومت مصالح (۲) » در رشته مهندسی مکانیک با گرایش حرارت و سیالات می باشد.

مطالب مندرج در این جزوه آموزشی ، ادامه مباحث مطرح شده در جزوه آموزشی درس دانشگاهی « مقاومت مصالح (۱) » بوده و به تبیین اصول طراحی سازه های صلب و بررسی تغییر شکل اجزاء این سازه ها تحت تاثیر نیروها و گشتاورهای وارده می پردازد.

کتاب مرجع دانشگاهی که میبایست به عنوان مکمل در کنار این جزوه مطالعه شده و مورد استناد و ارجاع قرار گیرد عبارت است از :

- مقاومت مصالح (جلد اول و دوم) ، نوشته : بیر و جانستون ، ترجمه : هدایت موتابی

مطالب مندرج در این جزوه برگرفته از کلاس های آموزشی ارائه شده توسط جناب آقای مهندس گرمچی در دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران در سال ۱۳۷۲ خورشیدی می باشد که به همان صورت دست نویس (برداشت شده توسط اینجانب) تقدیم حضور خوانندگان گرامی می شود ، به این امید که مفید فایده و مقبول نظر واقع گردد.

از خوانندگان محترم درخواست می نمایم هرگونه نظرات اصلاحی ، انتقادات و پیشنهادات خود را از طریق آدرس ایمیل : f.saraei@petropalamehvar.com با اینجانب در میان گذارند.

فـرشـاد سـرایـی
آبان ماه ۱۳۹۰



« سر درب ورودی دانشکده فنی دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران »

درس : مقاومت مصالح (۲)

استاد : آقای گرمچی

مطالب درس :

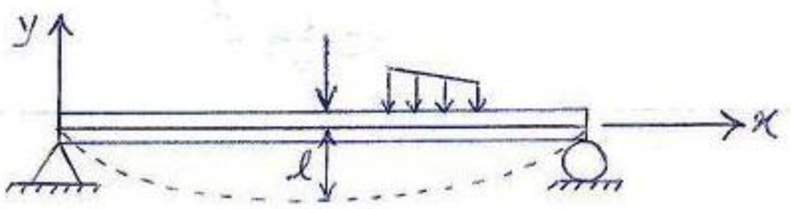
۱- خیز تیرها
۲- مسائل نامعین ← تیرهای نامعین ← تیرهای چند تکیه گاهی
۳- تیرهای خمیده
۴- تجزیه و تحلیل تنش
۵- مخازن جدار نازک
۶- پایداری ستونها
۷- روشهای انرژی
۸- تیر بر روی تکیه گاه الاستیک

Reference : « مقاومت مصالح بیر - جانستون »

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

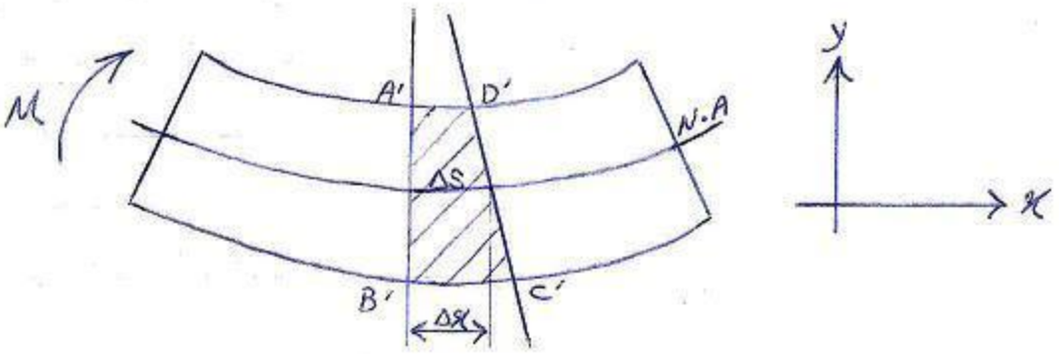
خیز (تغییر مکان) در تیرها

Deflection Of Beams

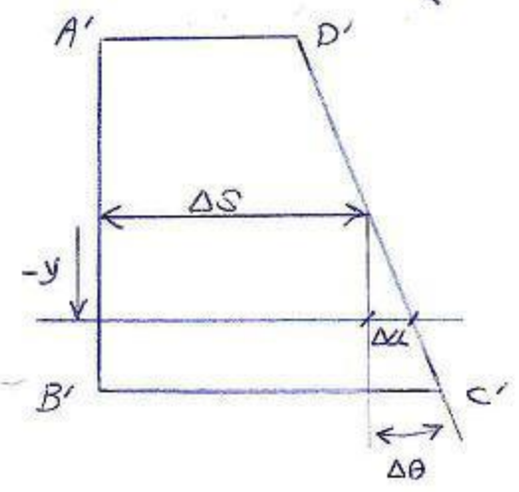


* رابطه شعاع انحناء ، تغییر مکان و ممان خمشی - تغییر مکان در تیرها :

* قسمتی از تیر تحت ممان خالص را در نظر می گیریم :



* دو مقطع $A'B'$ و $C'D'$ را در نظر می گیریم :



$$\Delta S \approx \Delta x$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \rightarrow$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s}$$

$$\underbrace{\frac{du}{ds}}_{\text{کرنش}} = -y \frac{d\theta}{ds} \qquad (\Delta s = \rho \Delta \theta)$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \kappa$$

ρ - شعاع انحناء
κ - انحناء منحنی

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = -\frac{\varepsilon}{y} \rightarrow \boxed{\frac{M}{EI} = \frac{1}{\rho}}$$

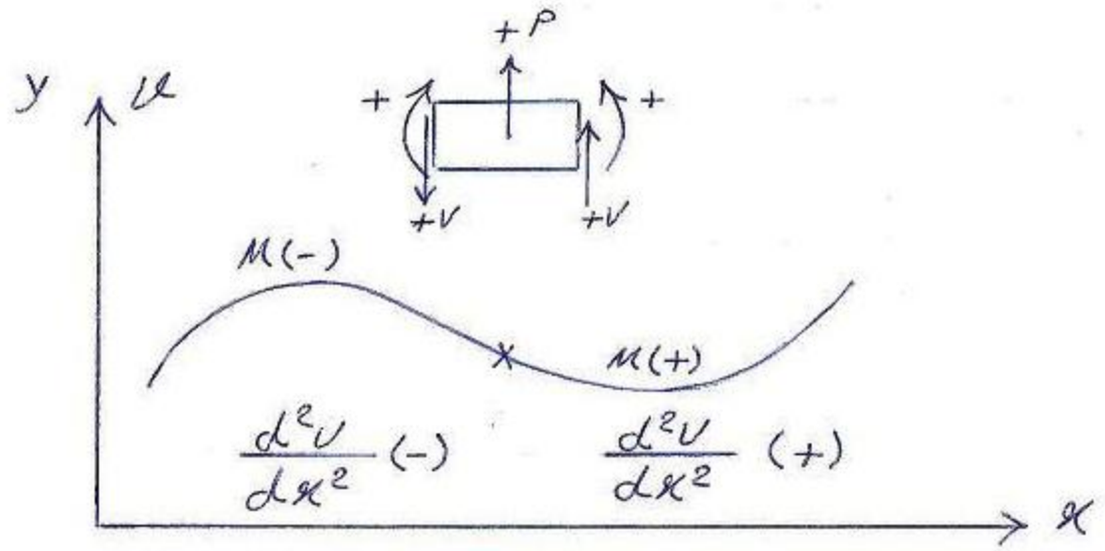
$\longleftrightarrow$

* از ریاضیات مشهود است که :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{dv}{dx} \ll \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \approx 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$\boxed{\frac{M}{EI} = \frac{d^2 u}{dx^2}}$$



* روابط ذیل را خواهیم داشت :

w = تغییر مکان تیر

$\theta = \frac{dw}{dx} = w'$ شیب تیر

$M = EI \frac{d^2w}{dx^2} = EI\, w''$ (1) ممان خمشی

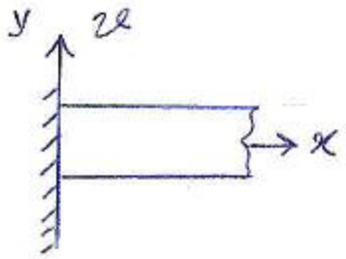
$V = -\frac{dM}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d^2w}{dx^2}\right)$ نیروی برشی

$P = -\frac{dV}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2w}{dx^2}\right)$ (2) بارگذاری

* با حل معادلات دیفرانسیل (1) و (2) می توان w را بدست آورد (با ۲ بار یا ۴ بار انتگرال گیری از روابط) .

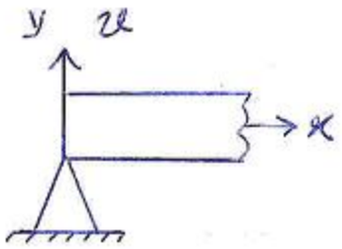
شرایط سرحدی تیر

۱- تیر درگیر (Fix)



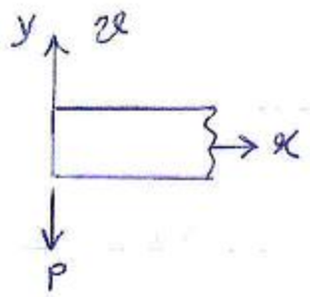
$$w(0) = 0$$
$$w'(0) = 0$$

۲- لولا



$$w(0) = 0$$
$$M(0) = 0$$

۳-



$$M(0) = 0$$
$$V(0) = +P$$

روشهای محاسبه تغییر مکان

I - روشهای مستقیم انتگرال گیری :

$$P(x) = EI \frac{d^4x}{dx^4} \quad \text{و} \quad E, I = Cte$$

$$EI\,v = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx\; P(x) + C_1 \frac{x^3}{6}$$

$$+ C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

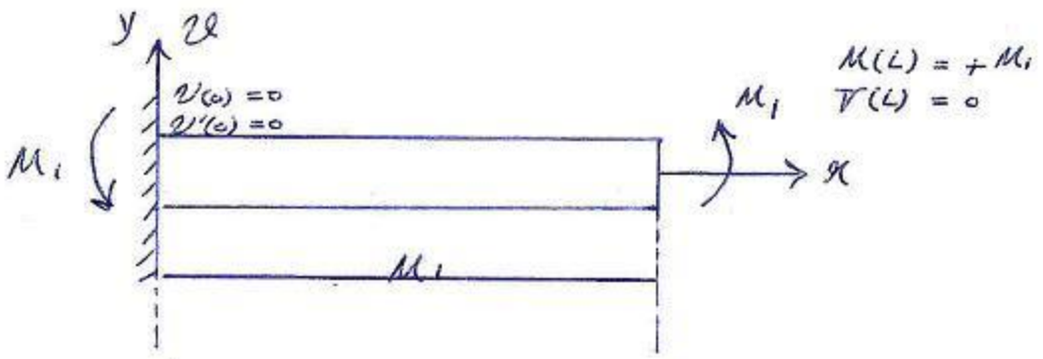
$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$EI\,v = \int_0^x dx \int_0^x M(x)\, dx + C_3 x + C_4$$

* تا بتهای C_1 و .... و C_4 از شرایط مرزی تیر بدست می آیند.



مثال - مطلوبست معادله منحنی الاستیک خیز تیر.



$$EI = \frac{d^2 v}{dx^2} = M_1$$ (E و I معلوم است)

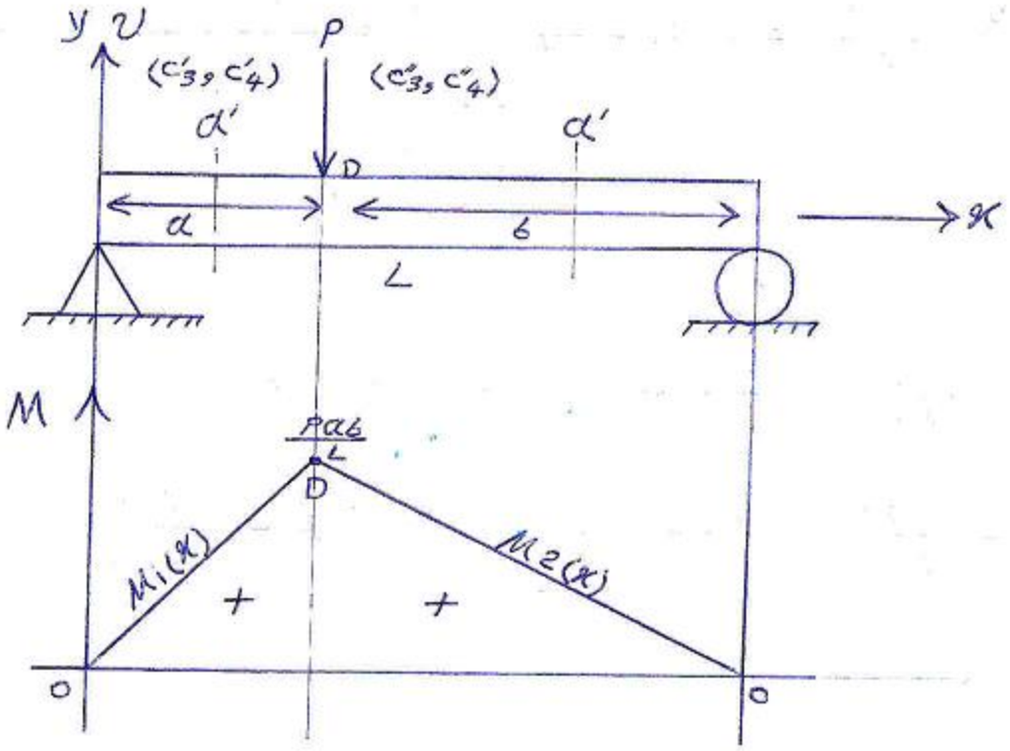
$$EI\,v = \frac{1}{2} M_1 x^2 + C_3 x + C_4$$

$C_3 = 0$ $\quad$ $C_4 = 0$ $\quad$ مرزی :

$$EI\,v(x) = \frac{1}{2} M_1 x^2$$



مثال - در تیر دو سر ساده ذیل مطلوبست منحنی تغییر مکان - الاستیک.

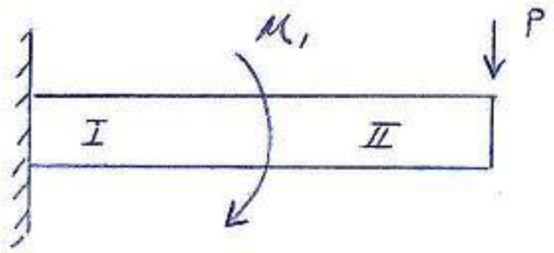


* خیز و شیب در D برای هر دو یکسان است:

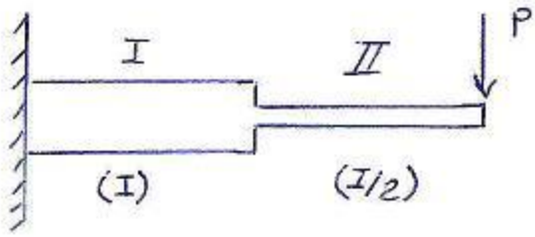
$$\begin{cases} v_D)_I = v_D)_{II} & ① \\ \theta_D)_I = \theta_D)_{II} & ② \end{cases}$$

ناحیه (I)	ناحیه (II)
$M_1(x) = \frac{Pb}{L} x$	$M_2(x) = \frac{Pa}{L}(L-x)$
$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Pb}{LEI} x$	$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Pa}{EIL}(L-x)$
$v = \frac{Pb}{EIL} \frac{x^3}{6} + C'_3 x + C'_4$	$v = \frac{Pa}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{Pa}{EIL} \frac{x^3}{6} +$ $C''_3 x + C''_4$

$$\begin{cases} C'_3 = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2) \text{ ، } C'_4 = 0 \\ C''_3 = -\frac{Pa}{6EIL}(2L^2 + a^2) \text{ ، } C''_4 = \frac{Pa^3}{6EI} \end{cases}$$



نکته -

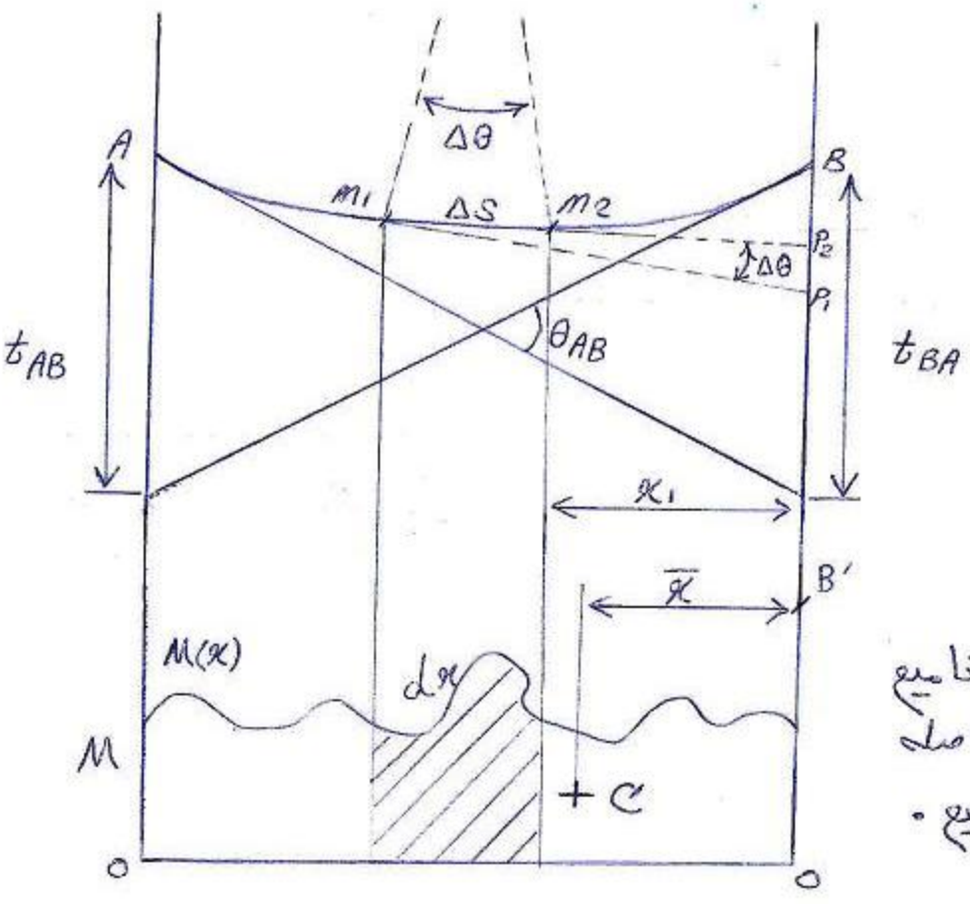


II - روش ممان سطح :

در این روش مقدار خیز و تغییر مکان در هر نقطه از تیر قابل محاسبه می باشد . در این روش باید دو تئوری ممان اول و دوم سطح شناسائی گردد که به این - منظور قطعه ای از تیر بین نقاط A و B در نظر گرفته می شود و نقاط m_1 و m_2 انتخاب می گردد از A و B دو مماس بر منحنی الاستیک رسم می گردد که زاویه آنها θ_{AB} است . از m_1 و m_2 دو مماس رسم می کنیم تا P_1 و P_2 حاصل شود .

فرشاد سرابی - مهندس پایه یک تاسیسات و مکانیک
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس گرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران - دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)



* فاصله m_2B از $\bar{x}_1$ می نامیم C مرکز هندسی است و فاصله آن تا B از $\bar{x}$ می نامیم .

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} \longrightarrow$$

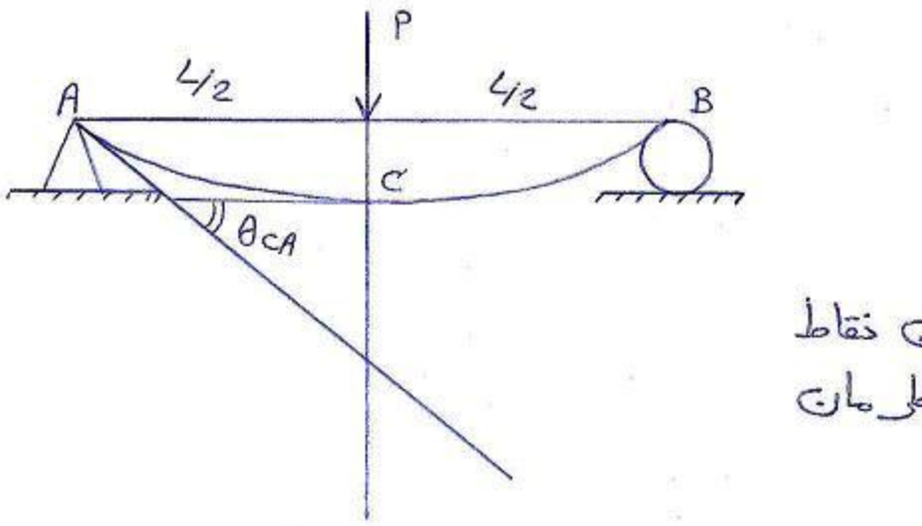
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\overbrace{\left(\frac{dv}{dx}\right)}^{\theta} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M(x)\,dx}{EI}$$

* مساحت زیر منحنی ممان خمشی . (تئوری اوّل - ممان سطحی) .

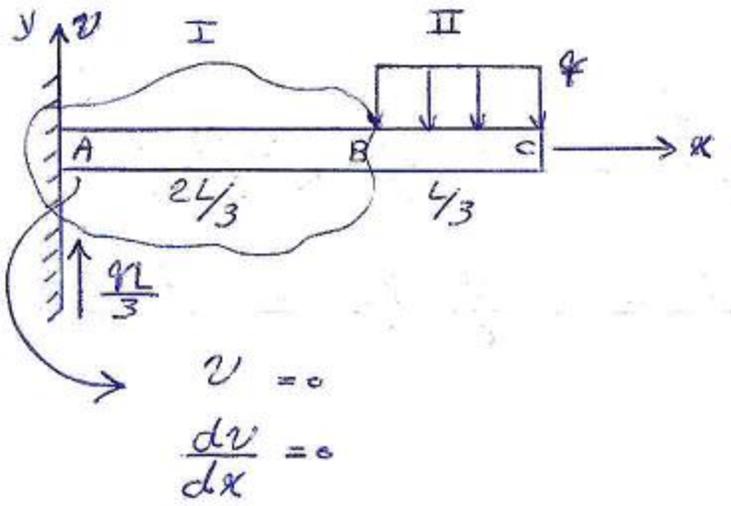
* θ_{AB} هم در واقع همان شیب نقطه B است .



* زاویه را همواره بین خطاط سرحدی مورد نظر مان می کشیم .

(مثال) ⟷

* در تیر ذیل تغییر مکان انتهای آن را از روش مستقیم انتگرال‌گیری بیابید.



$\delta_C = v_C = ?$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)_I &= \left(\frac{dv}{dx}\right)_{II} \\ v)_I &= v)_{II} \end{aligned}\right\}$$

در نقطه B

$x = \frac{2L}{3}$

ناحیه I -

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{qL}{3}\cdot x - \frac{5qL^2}{18}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{qL}{6}x^2 - \frac{5qL^2}{18}x + C_1$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= 0 \\ v' &= 0 \end{aligned}\right. \longrightarrow \quad C_1 = 0$$

$$EI\,v_{\underline{I}} = \frac{qL}{18}x^3 - \frac{5qL^2}{36}x^2 + C_2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \qquad C_2 = 0$$

(ناحیه II)

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{qLx}{3} - \frac{5qL^2}{18} - q\left(x-\frac{2L}{3}\right)\left(\frac{x-\frac{2L}{3}}{2}\right)$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{qL}{6}x^2 - \frac{5qL^2}{18} - \frac{q}{6}\left(x-\frac{2L}{3}\right)^2 + C_3$$

* از شرط (1) $\longrightarrow$ $C_3 = 0$

$$EI\,v_{II} = \frac{qL}{18}x^3 - \frac{5qL}{36}x^2 - \frac{q}{24}\left(x-\frac{2L}{3}\right)^4 + C_4$$

* از شرط (2) $\longrightarrow$ $C_4 = 0$

$x = l \longrightarrow$ $\delta_c = -\dfrac{163\,qL^4}{1944\,EI}$

روش ممان سطح

* تئوری اوّل ممان سطح :

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M dx}{EI}$$

- زاویه بین مماسهای وارد بر منحنی الاستیک در A و B برابر سطح منحنی خمشی بین آن دو نقطه است تقسیم بر EI .



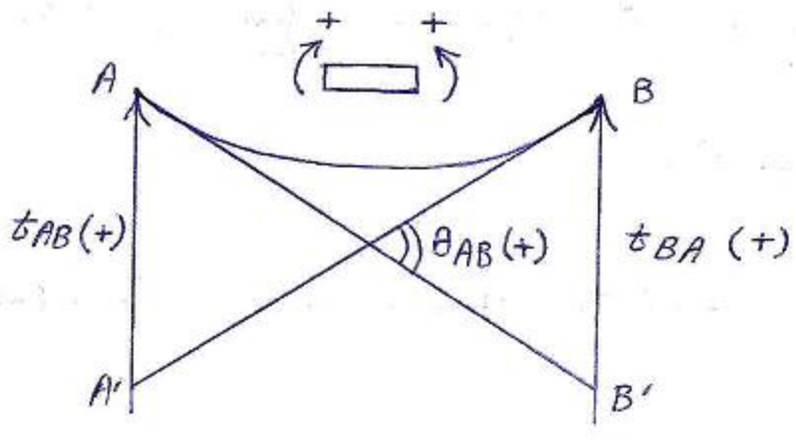
* تئوری دوّم ممان سطح :

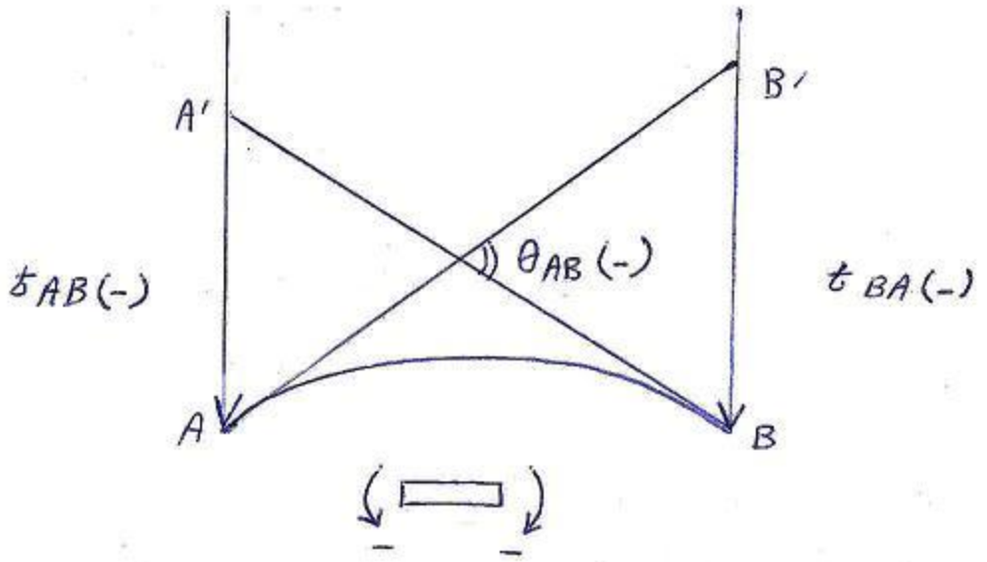
تغییر مکان t نقطه B نسبت به مماس در نقطه A برابر ممان اول سطح نمودار ممان خمشی بین A و B نسبت به نقطه B تقسیم بر EI است.

$$t_{AB} = \int_A^B \frac{M x\, dx}{EI}$$

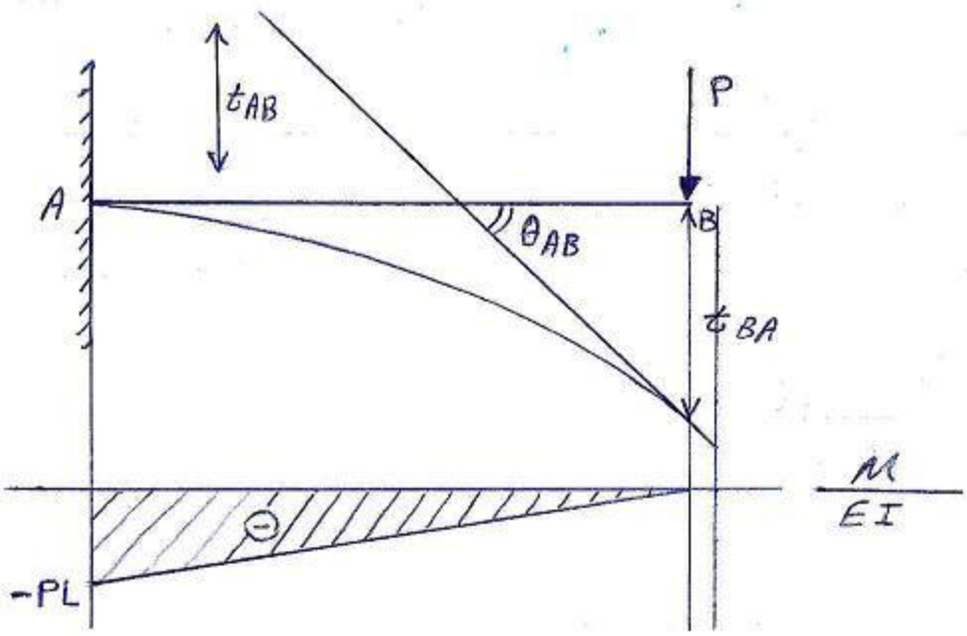


قرارداد :





مثال - از روش ممان سطح مطلوبست : (θ_B و δ_B)



در روش ممان سطح ما به $\frac{M}{EI}$ نیاز داریم.

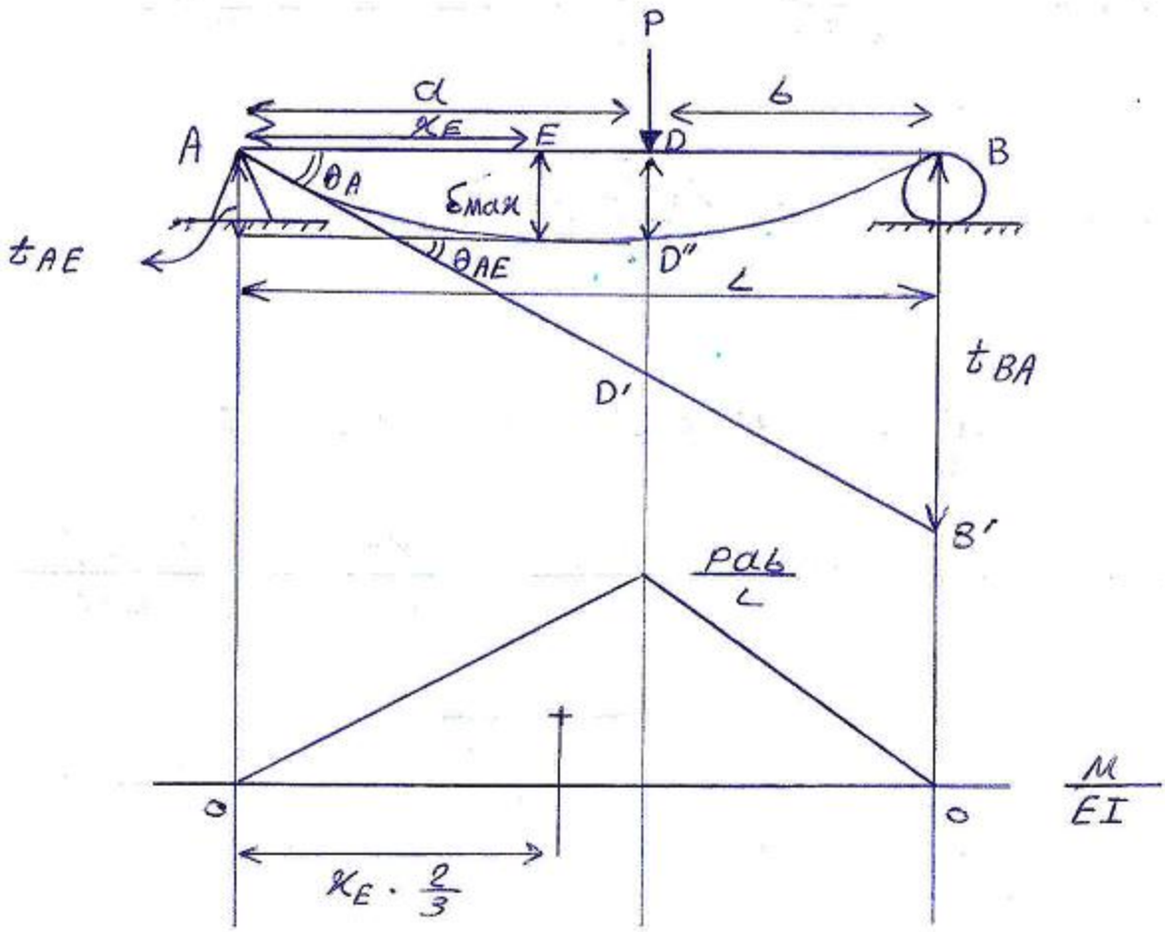
$$\theta_{AB} = \overset{\circ}{\theta}_A - \theta_B = \theta_B$$

* چون EI ثابت است شکل منحنی M و $\frac{M}{EI}$ یکی است.

$$t_{BA} = \delta_B$$

$$t_{BA} = -\frac{PL^2}{2EI}\left(\frac{2L}{3}\right) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

مثال- در تیر دو سر ساده زیر به کمک روش ممان سطح حداکثر خیز تیر را بیابید. $(a>b)$



$$\begin{cases} \theta_A = ? \\ \delta_{max} = ? \\ \delta_D = ? \end{cases}$$

$$t_{BA} = \frac{Pab}{2EI}\left(\frac{L+b}{3}\right) = \frac{Pab}{6EI}(L+b)$$

$$\theta_A = \frac{Pab}{6EI}(L+b)$$

* چون زاویه کوچک است θ_A با $\tan$ برابر است.

$$DD' = \theta_A \cdot a = \frac{Pa^2b}{6EI}(L+b)$$

$$D'D'' = t_{DA} = \frac{Pab}{EIL} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa^3b}{6EIL}$$

$$\delta_D = DD' - D'D'' = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

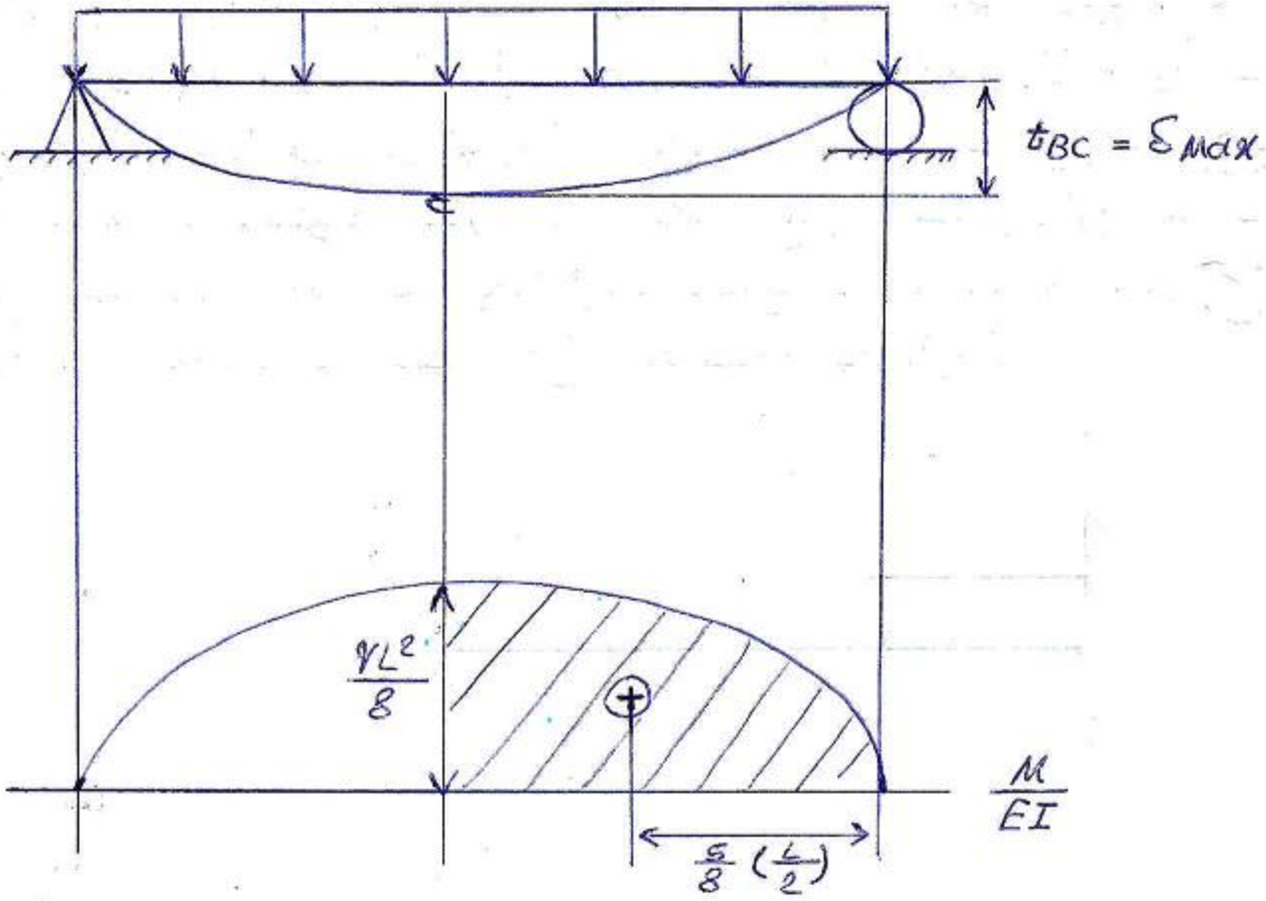
* خاصیت نقطه max این است که شیب آن صفر است:

(تئوری اول) : $$\theta_A = \frac{Pbx_E}{EIL} \cdot \frac{x_E}{2} = \frac{Pbx_E^2}{2EIL}$$

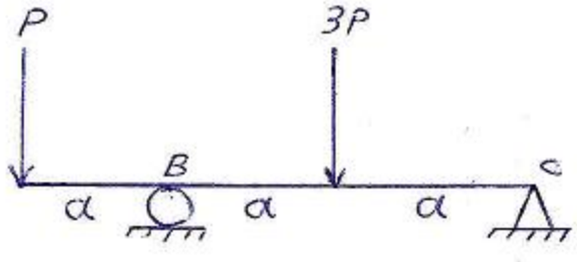
محل خیز max $$x_E = \sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$$

(تئوری دوم) : $$\delta_{max} = t_{AE} = \frac{Pb}{9\sqrt{3}\,EIL}(L^2-b^2)^{3/2}$$

مثال - در تیر زیر به روش مساحت سطح حداکثر تغییر مکان را بیابید.



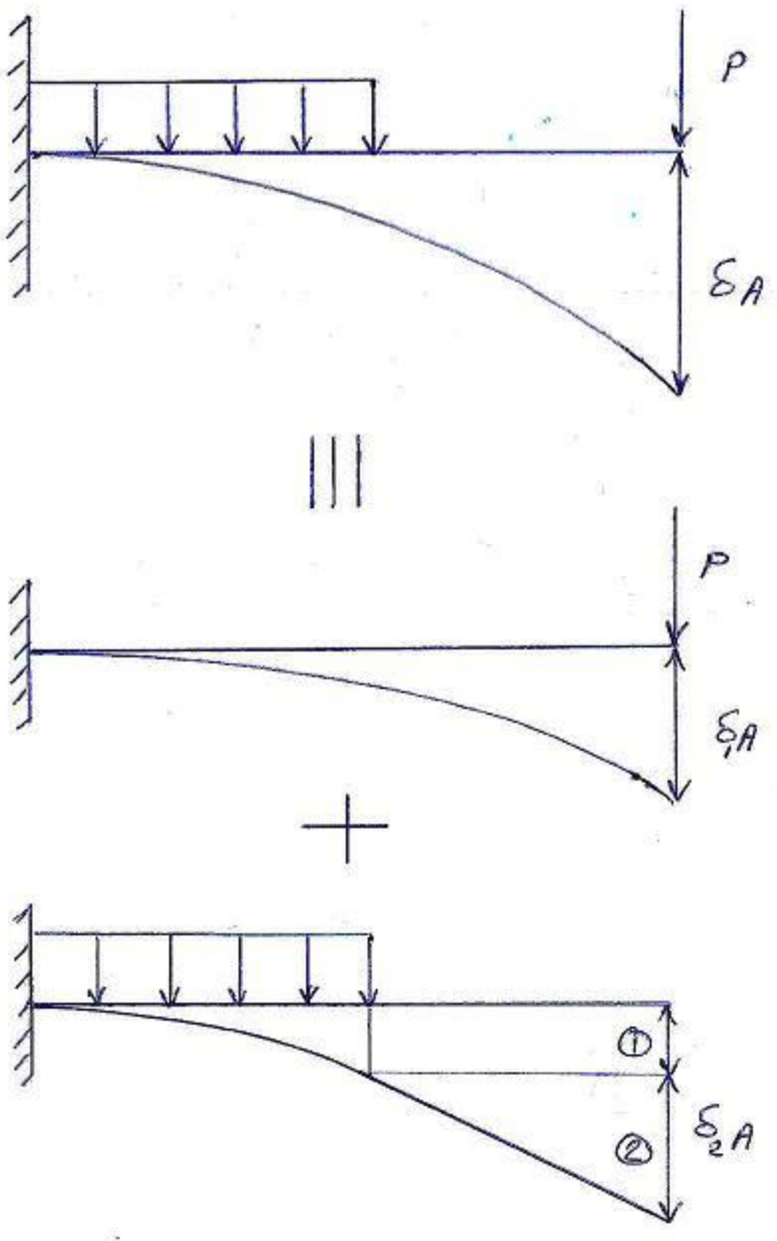
$$t_{BC} = \delta_{Max} = \frac{qL^3}{24EI} \cdot \frac{5L}{16} = \frac{5qL^4}{384EI}$$



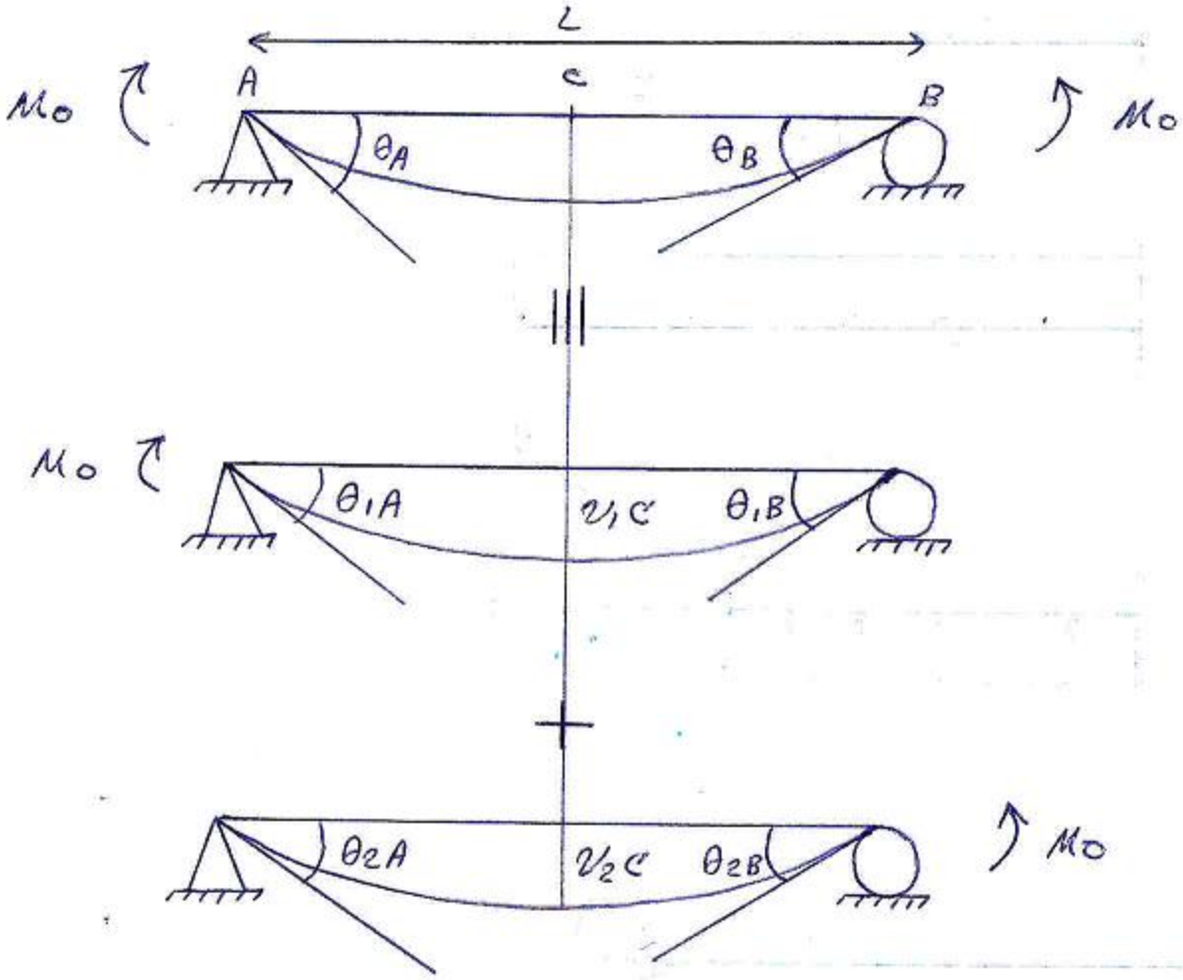
* از روش مساحت سطح (δA) و روش انتگرال گیری.

III - روش جایگزینی یا سوپرپوزیشن

در این روش می توان تیرها را با بارهای پیچیده حل نمود. در این صورت تحت هر بار مشخصات هر نقطه (تغییر مکان یا - شیب) بدست آمده و در نهایت برای هر نقطه مقادیر را جمع جبری می نمایم. بعنوان مثال در شکل زیر تغییر مکان سر- آزاد از جمع دو مقدار بدست می آید. مقادیر مورد استفاده در جمع جبری از جداول مقاومت مصالح بدست می آید.



* از روش (Super Position) شیب در نقاط A و B و تغییر مکان در نقطه C را بدست آورید.

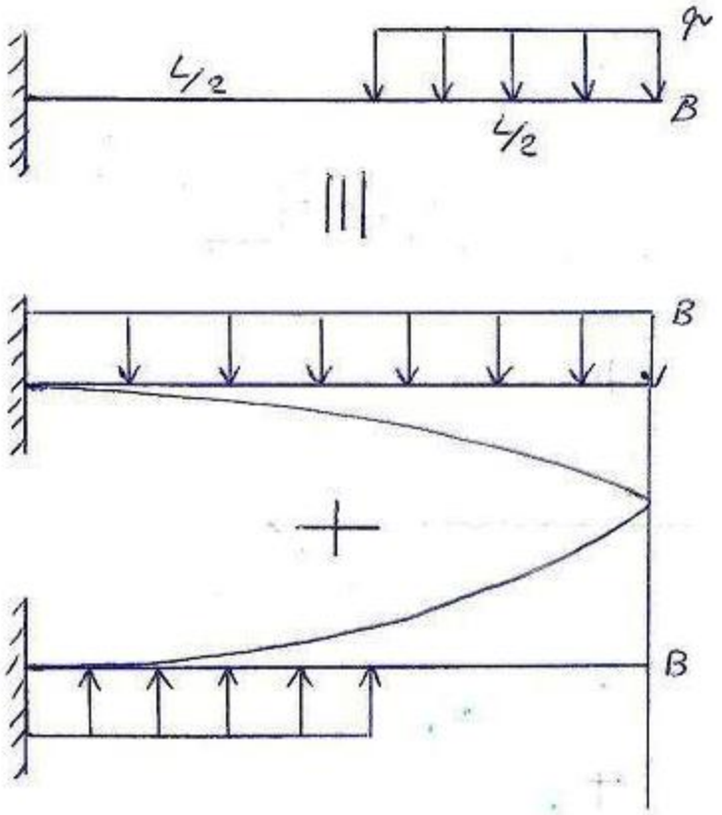


$$\begin{cases} v_C = v_{1C} + v_{2C} \\ \theta_A = \theta_{1A} + \theta_{2A} \\ \theta_B = \theta_{1B} + \theta_{2B} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{M_o L}{2EI}$$

$$v_C = \frac{M_o L^2}{8EI}$$

مثال - تغییر مکان را از روش جایگزینی بدست آورید.



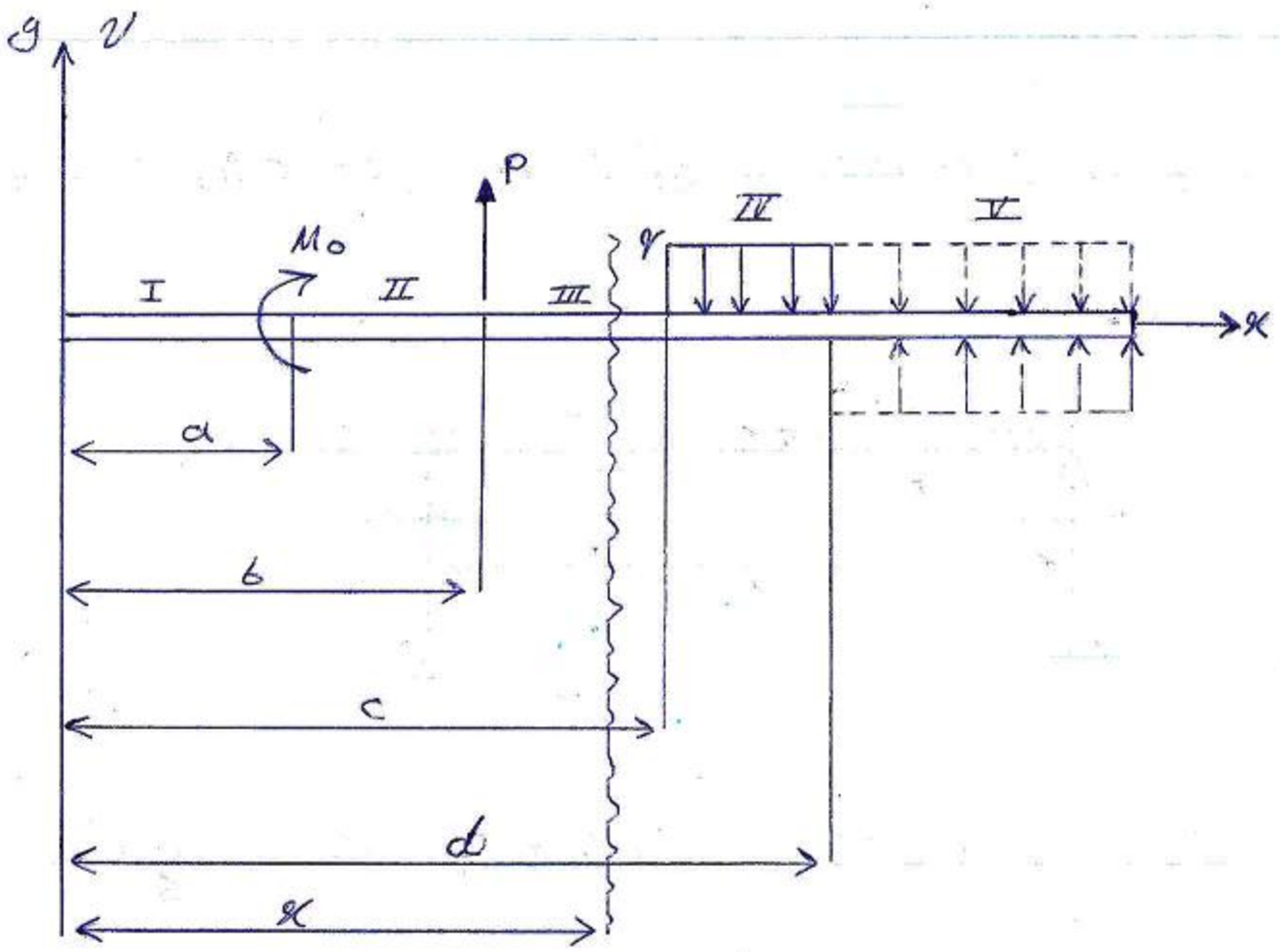
جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمعلی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران - دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

فرشاد سرابی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

$$v_B = \frac{419\, L^4}{384\, EI}$$

** اگر نیروهای وارد به صورت پیچیده و مشکل باشد از این روش استفاده می گردد و اگر تیر دارای n قسمت - باشد باید n معادله را حل نمود تا معادلات تغییر مکان تیر بدست آید. به این منظور روش جامع در تیرهائی

که به صورت زیر بارگذاری گردد بدست می‌آید . جهتها همگی (+) بوده و شرایط دو سر تیر معلوم نگردیده است :

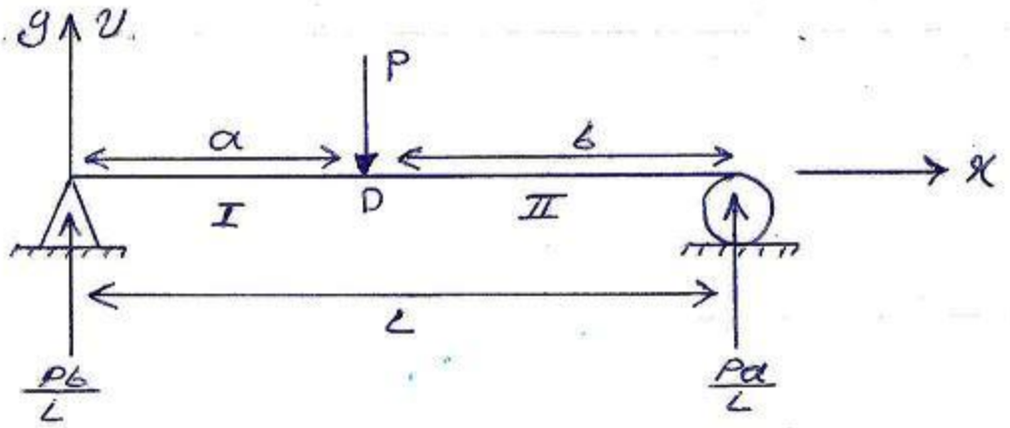


فرمول کلی :

$$* \quad EI\,v = EI\,v_0 + EI\,\theta_0 x \Big|_{I} + M_0 \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{II} + P \frac{(x-b)^3}{6} \Big|_{III} + \frac{q(x-c)^4}{24} \Big|_{IV} - \frac{q(x-d)^4}{24} \Big|_{V}$$

* این فرمول بسته به شرایط خاص مسئله صورت خاص خود را خواهد یافت (از نظر + و - و تعداد جملات) . اگر جاها عوض شود تنها مقادیر a و b و c و d تغییر می کنند.

مثال) به کمک روش جامع تغییر مکان در نقطه D را بیابید.



$$EI\,v = EI\,v_0 + EI\,\theta_0 x + \frac{Pb}{L}\frac{(x-0)^3}{6}\Big|_I - P\frac{(x-a)^3}{6}\Big|_{II} + \cancel{\frac{Pa}{L}\frac{(x-L)^3}{6}}\Big|$$

* نوشتن ترم آخر لازم نیست یعنی ما در مورد آخر تیر بحثی نمی کنیم، اگر $x=L$ و $(x-L)^3=0$ و اگر $x<L$ یا $x>L$ باشد هم همان جملات قبلی می شود.

$$\begin{cases} x = 0, L \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad v_0 = 0$$

$$EI\,\theta_0 = -\frac{Pb}{6}L + \frac{Pb^3}{6L}$$

$$EI\,v = \frac{-Pbl}{6}x + \frac{Pb^3}{6l}x + \frac{Pb}{6l}x^3 \Big|_{I} - \frac{P(x-a)^3}{6} \Big|_{II}$$

ناحیه (I) : $$EI\,v = \frac{Pb}{6l}x^3 - \frac{Pbl}{6}x + \frac{Pb}{6l}x^3$$

* حال می توان بجای x هر مقداری که می خواهیم قرار دهیم .

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

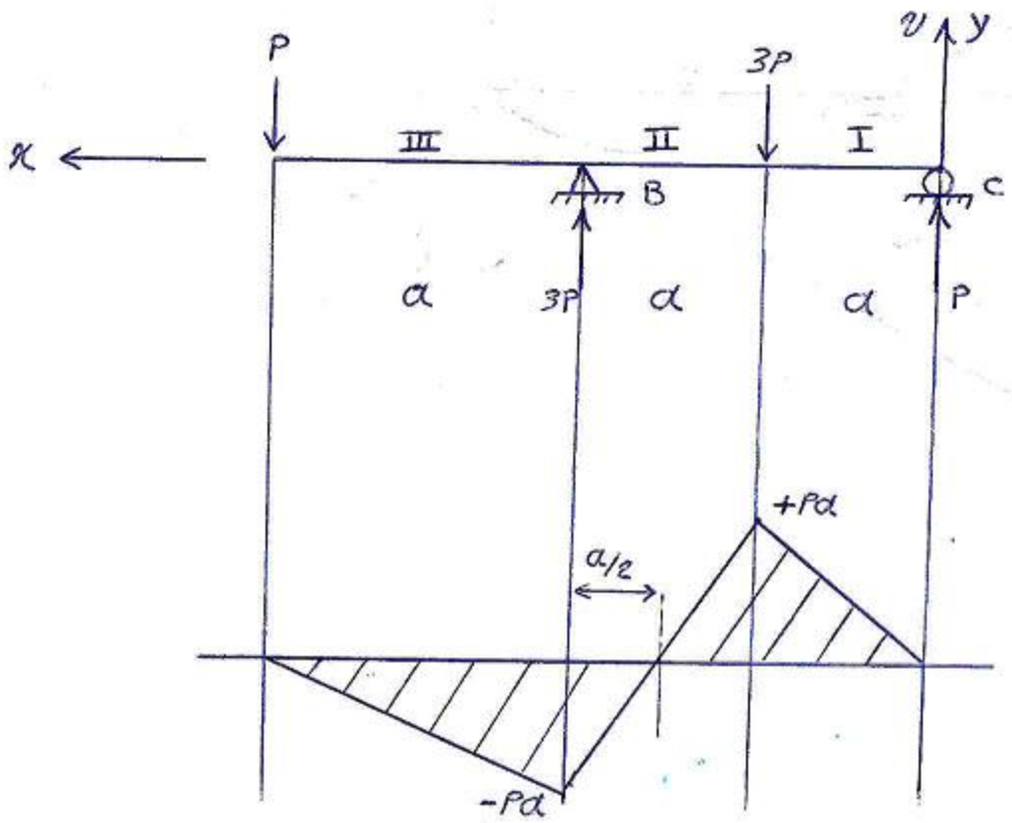


پتروپالامحور پیشتاز در ارائه خدمات مهندسی و متعهد به کیفیت

PPM , Dedicated For The Best Quality



حل مسئله قبلی -



ما) خمشی

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

I) $x = 0$, $v = 0$

II) $x = 2a$, $v = 0$

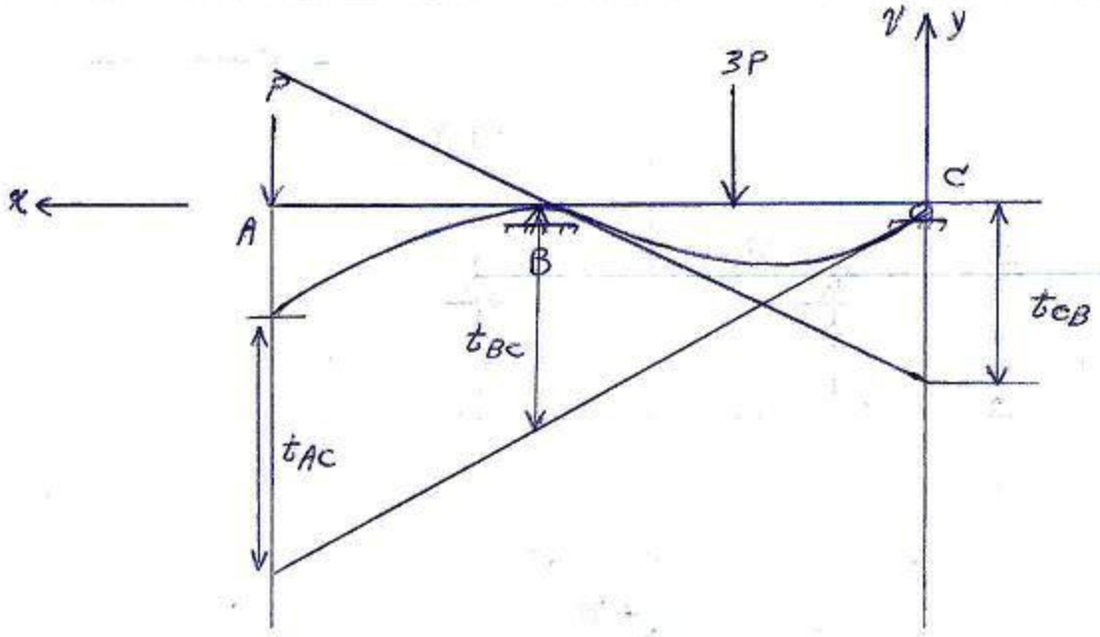
$v = v$, $\theta = \theta$ $\longrightarrow$ v_I

III) $x = 2a$, $v = 0$

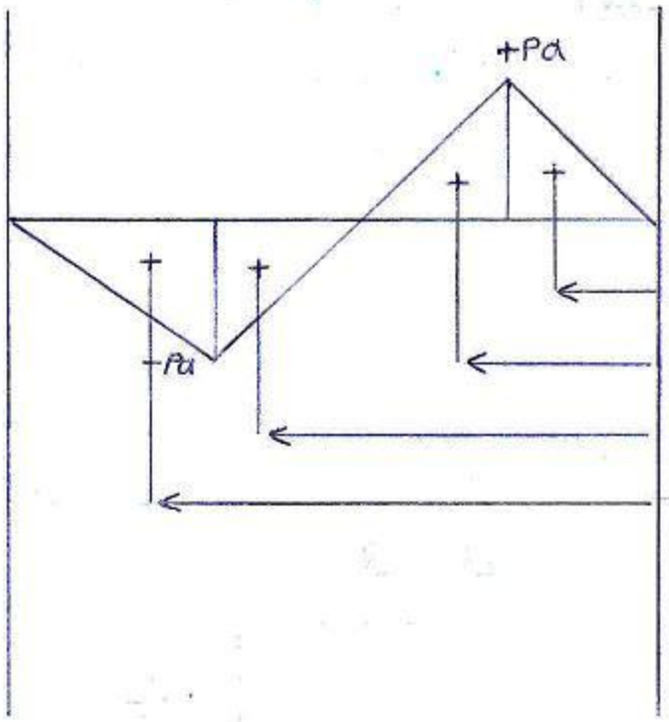
v_{II}, $\theta = \theta$

$V = P$, $M = 0$ $\longrightarrow$ v_{III}

روش ۲-



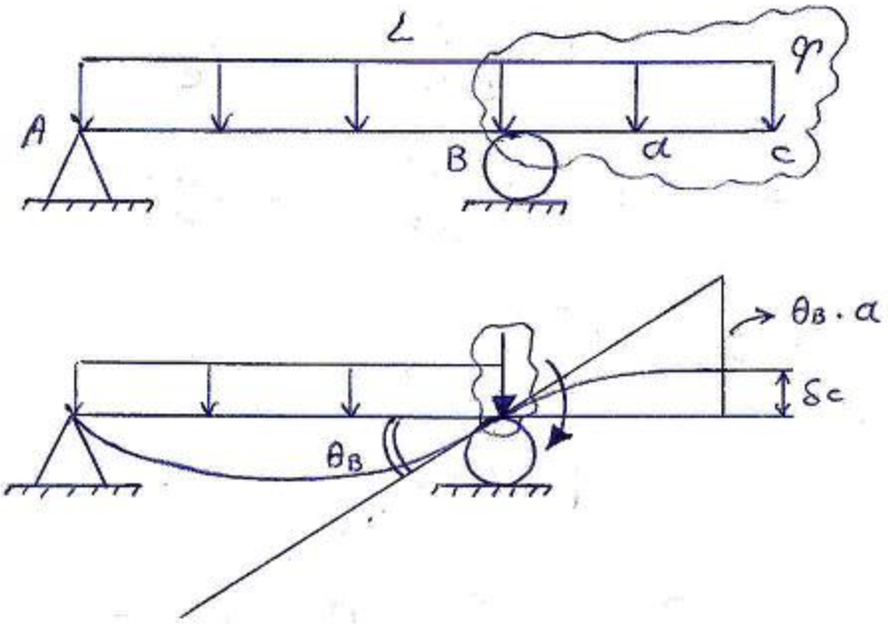
$$v_A = \frac{P a^3}{4EI}$$



روش ممان سطح

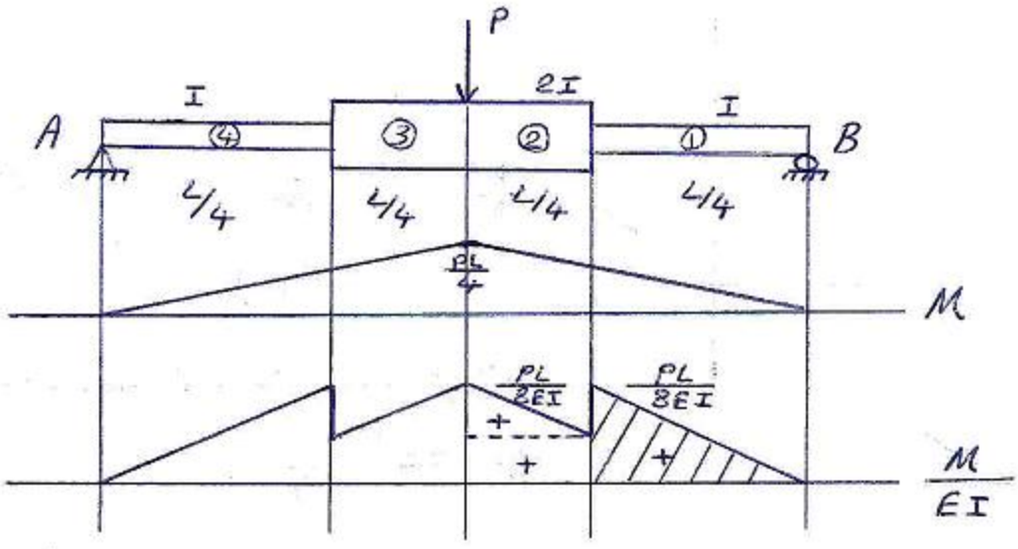
---

* تغییر مکان C را از روش جایگزینی بیابید.



$$\delta_c = \frac{qa}{24EI}\left(3a^3 + 4a^2L - L^3\right)$$

** تا به حال تیرهای منشوری بررسی شد که در آنها مقدار اینرسی I در طول تیر ثابت است. در تیرهای غیر منشوری ممکن است در برخی مقاطع تیر، مقطع پله‌ای و یا تغییرات تدریجی مقطع واقع گردد (مثل تیرهای مخروطی). در حالت زیر یک تیر غیر منشوری از روش انتگرالگیری گسترده حل می گردد.



$$0 \leq x \leq \frac{L}{4} \rightarrow EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

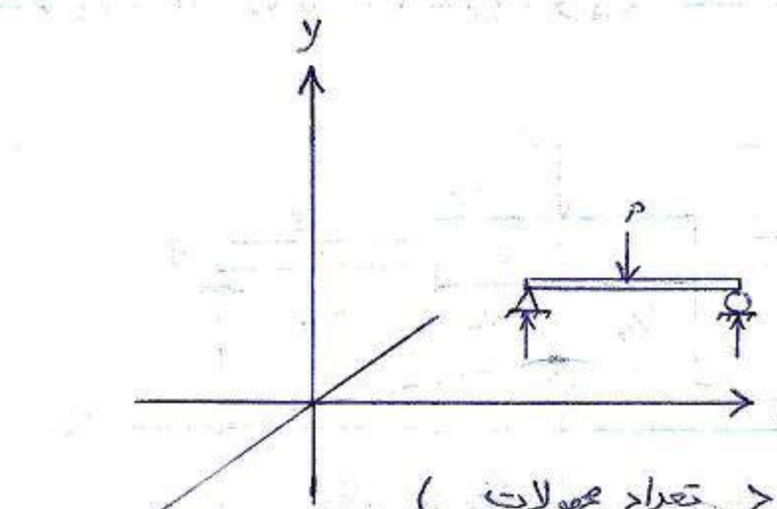
$$\frac{L}{4} \leq x \leq \frac{L}{2} \rightarrow E(2I)\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{L}{2} \\ v' = 0 = \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{L}{4} \\ v = v \\ \theta = \theta \end{cases}$$

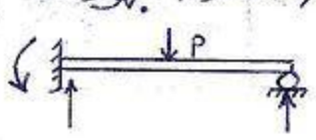
* به علّت تقارن ناحیه ① و ② با ③ و ④ برابر است. ما همواره با نمودار $\frac{M}{EI}$ کار می کنیم.

سیستمهای نامعین

تیر معین



(تعداد معلومات < تعداد مجهولات)

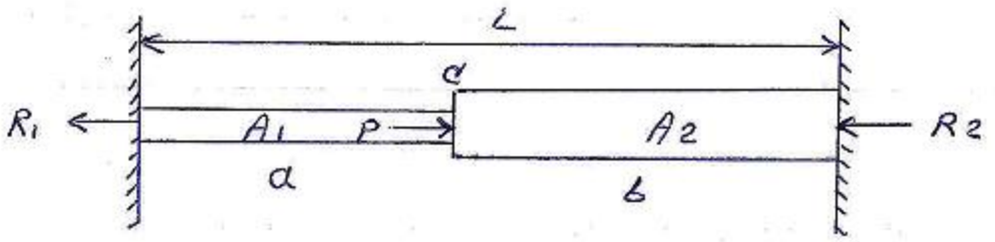


$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0\\ \Sigma F_y &= 0\\ \Sigma M_z &= 0\end{aligned}\right\}$$ « در یک صفحه »

** در مسائل نامعین مجموعه روابط تعادل استاتیکی کافی نبوده و باید یک رابطه اضافی (یا روابط اضافی) با توجه به شرایط هندسی جسم و نحوه تغییر فرم آن بدست آورد. از روشهای زیر می توان استفاده کرد :

1 - حل سیستم نامعین بکمک تغییر مکان :

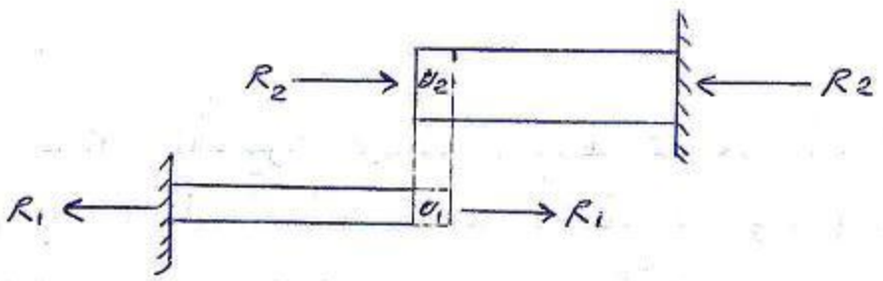
* دراین حالت معادله اضافی از تغییر مکان جسم بدست می آید. مثلاً در سیستم نامعین ذیل نیروهای موجود در تکیه گاه را - بدست می آوریم :



$$R_1 + R_2 = P$$

* تعداد معادلات = 1
* تعداد مجهولات = 2

* اگر دو محور را از نقطه c جدا کنیم می توانیم از روابط تغییر طول برای نقطه جدا شده استفاده کنیم.



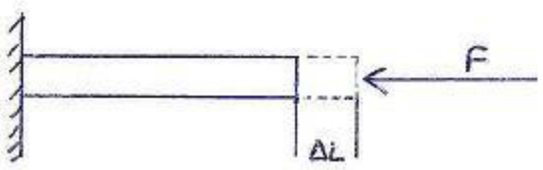
* $\Delta = \frac{PL}{AE}$

* $\frac{R_1 a}{A_1 E} = \frac{R_2 b}{A_2 E}$

$R_1 = \frac{Pb}{L}$ $\quad$ $R_2 = \frac{Pa}{L}$

** در مسائل نامعین ناشی از تغییر درجه حرارت رابطه اضافی می تواند از ($\Delta = \alpha . \delta T . L$) بدست آید که α ضریب انبساط حرارتی قطعه و L طول آن و δT تغییر درجه حرارت $(T_1 - T_0)$ است.

** در صورت حذف یکی از تکیه گاهها تغییر طول ΔL ناشی از تغییر دما بوجود می آید که برابر ($\alpha \delta T L$) می باشد.

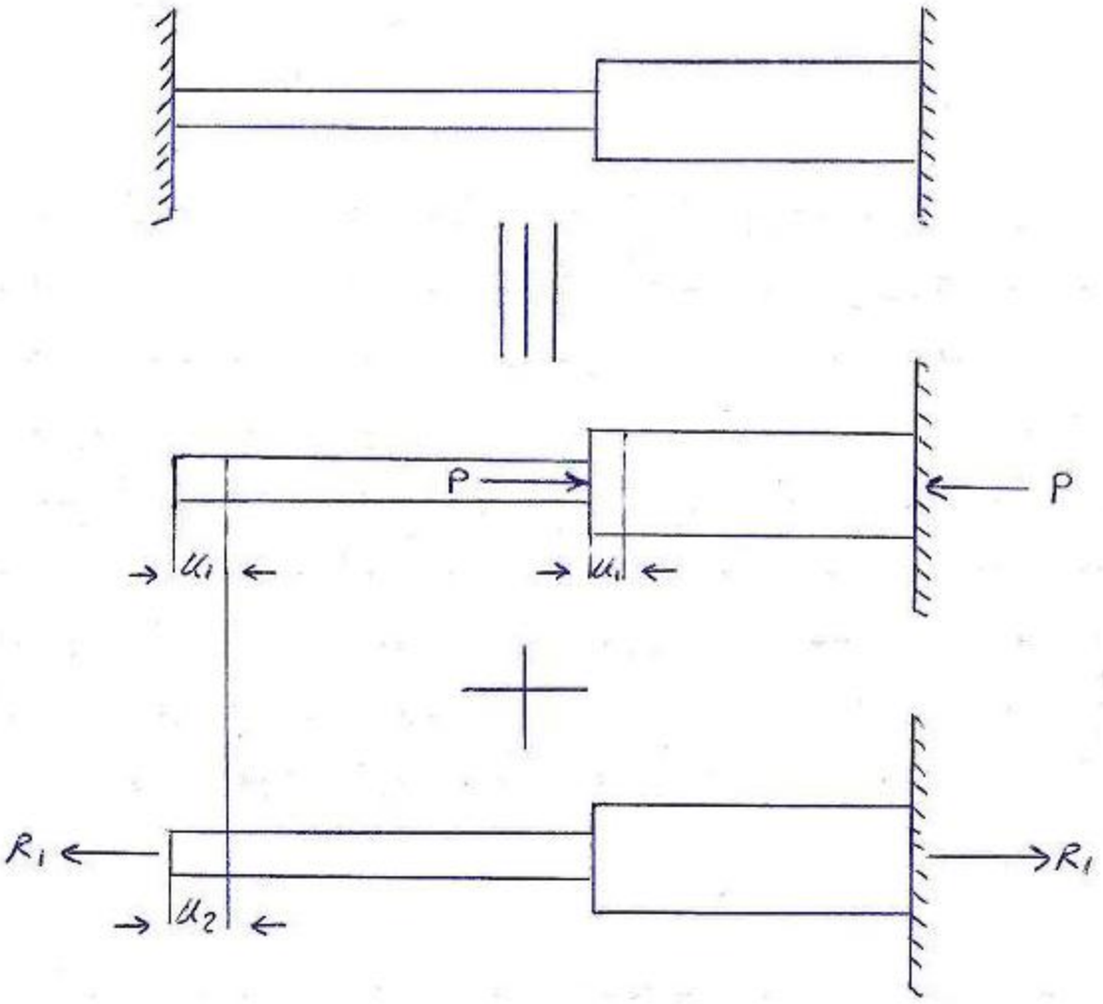


$\Delta = \frac{FL}{AE} = \alpha \delta T L$

$F = \alpha \delta T E A$

(2- حل مسائل نامعین به روش جایگزینی)

دراین حالت به علّت خطی بودن سیستم باید آن را از حالت نامعین به حالت معین در ۲ ورد یعنی با حذف یکی از تکیه گاهها عملاً- یک مجهول حذف شده و از روابط سیستم معین استفاده می کنیم.



فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

* $u_1 = u_2$

$$\frac{Pb}{A_2E} = \frac{R_1 a}{A_1 E} + \frac{R_1 b}{A_2 E} \quad ②$$

$$R_1 + R_2 = P \quad ①$$

} → R_1 و R_2

تیرهای نامعین

در تیرهای نامعین تعداد مجهولات موجود بر روی تیر بیش از تعداد معادلات استاتیکی است و میزان نامعینی یک تیر از اختلاف تعداد مجهولات منهای تعداد معادلات استاتیکی بدست می‌آید. اگر در یک تیر دو سر ساده حالت نیروی متمرکز داشته باشیم در آن سیستم به تعداد مجهولات، معادلات استاتیکی داریم. اگر یکی از تکیه گاهها درگیر گردد یک مجهول اضافه شده و تیر نامعین از درجه اول می شود. تیر دو سر درگیر (2-4) است یعنی نامعین از درجه دوم است. تیری که (n) تا تکیه گاه غلطکی دارد نامعین از درجه (n-2) است.

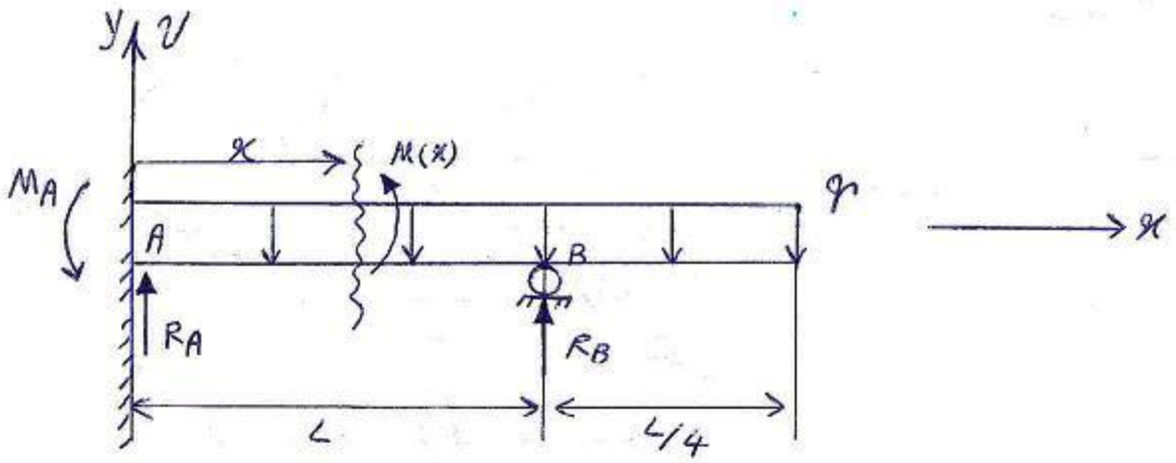
* روشهای ذیل جهت حل تیرهای نامعین وجود دارد:

1- روش مستقیم انتگرال گیری
2- روش superposition
3- روش ممان سطح

1- روش مستقیم انتگرال گیری

* در این روش از رابطه دیفرانسیل تغییر مکان استفاده کرده و با توجه به شرایط مرزی تیر (از جمله شرایط مرزی سینما تیک) توابع انتگرال گیری را می یابیم.

مثال -



$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

$A \rightarrow \quad v = 0 \quad \theta = 0 \qquad B \rightarrow \quad v = 0$

* معادله M در فاصله AB شکل یکسانی دارد پس A و B را مرز می گیریم :

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = R_A x - M_A - \frac{qx^2}{2}$$

$$EIv = R_A\frac{x^3}{6} - M_A\frac{x^2}{2} - q\frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

$(x=0 \ , \ v'=0) \quad C_1=0$

$(x=0 \ , \ v=0) \quad C_2=0$

$x=l \quad v=0 \quad \rightarrow \quad 4R_A L - 12M_A = qL^2 \quad ①$

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_y = 0\\ \sum M_z = 0\\ ①\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$R_A = \frac{37}{64}qL \uparrow$$

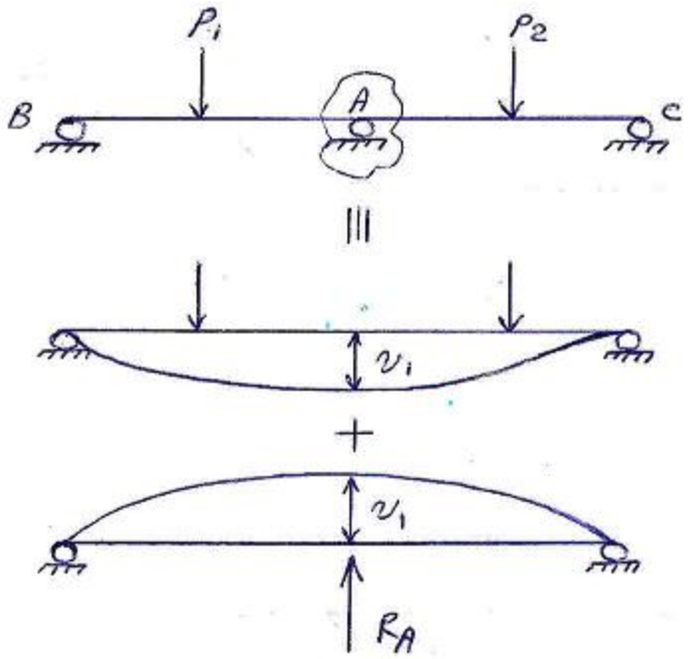
$$M_A = \frac{7}{64}qL^2$$

$$R_B = \frac{43}{64}q.L \uparrow$$

2- روش superposition

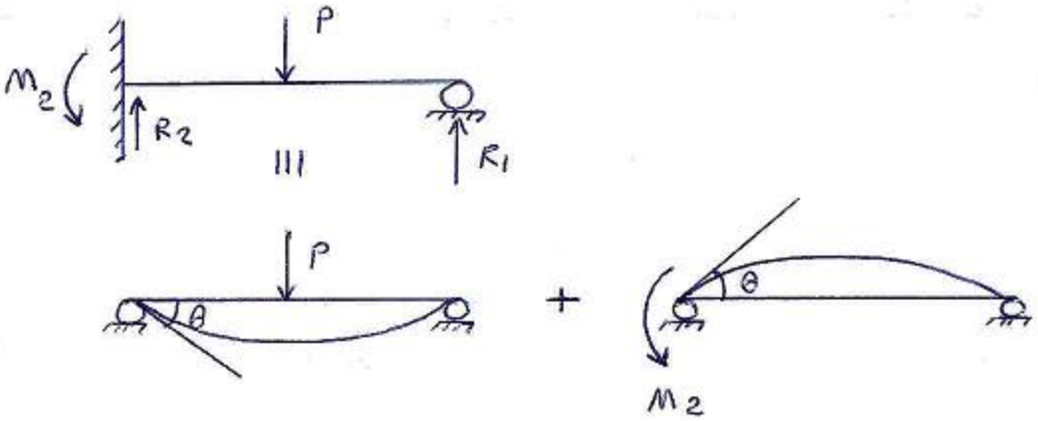
در این روش با حذف یک تکیه گاه یا به عبارتی با حذف مجهولات اضافی سیستم را معین کرده و از روابط قبلی بهره می گیریم.

مثال -



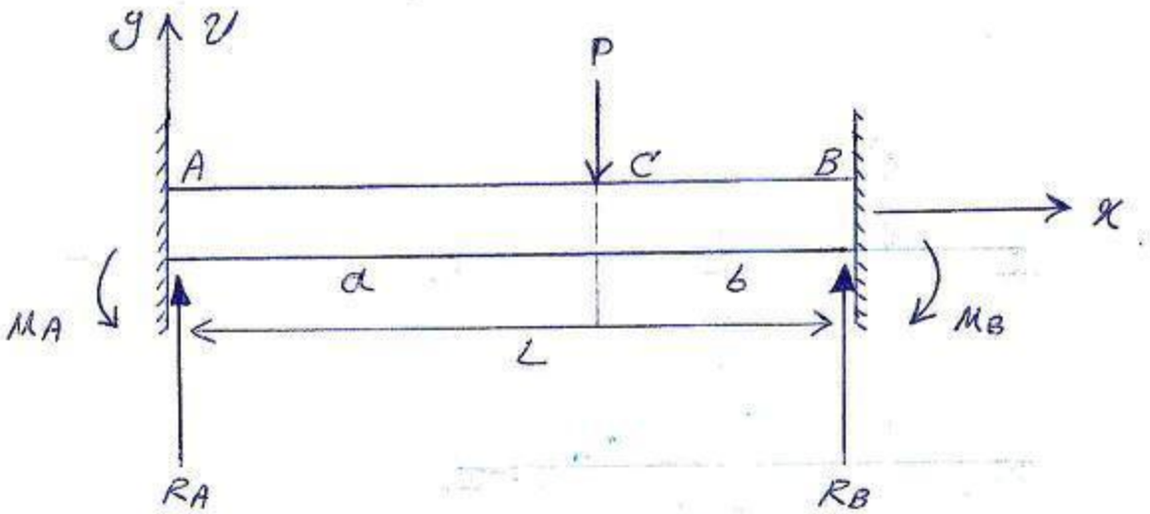
* باید v_1 صفر باشد.

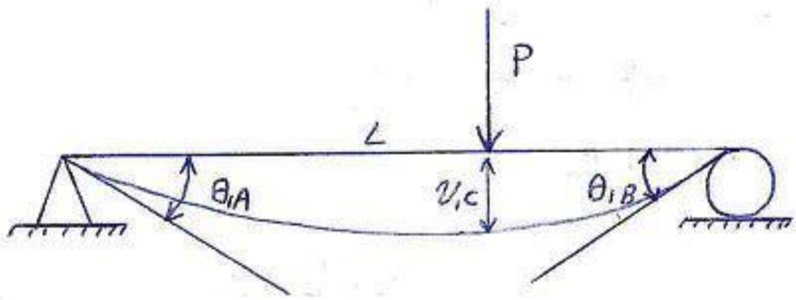
مثال -



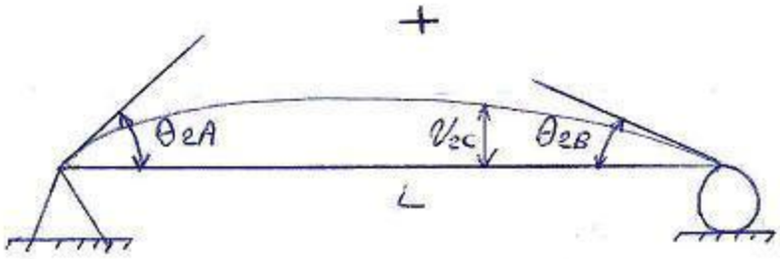
حل تیر نامعین به روش جایگزینی (ادامه)

مثال - در تیر دوسر گیردار ذیل به روش جایگزینی مطلوب است عکس العمل و مماسهای تکیه گاه.

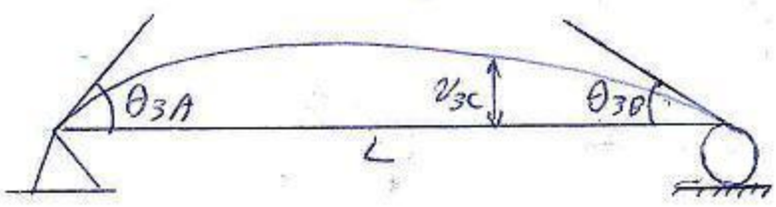




+



+



باید مجموع شیبها در نهایت صفر شود.

$$\theta_A = \theta_{1A} + \theta_{2A} + \theta_{3A} = 0 \rightarrow M_A = \frac{Pab^2}{L^2}$$

$$\theta_B = \sum_{i=1}^{3} \theta_{iB} = 0 \rightarrow M_B = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

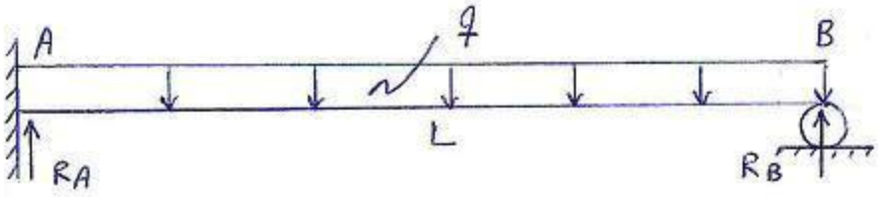
$$\sum F_y = 0 \quad , \quad \sum M_Z = 0$$

$$R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(L + 2a)$$

$$R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(L + 2b)$$

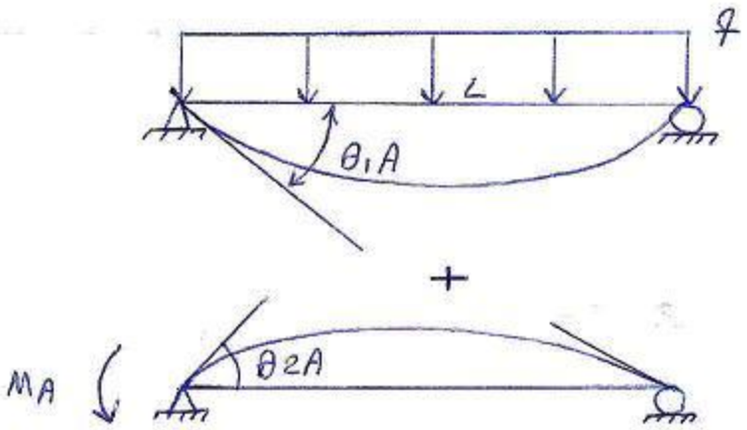
$$v_c = \sum_{i=1}^{3} v_{ic} = -\frac{Pa^3b^3}{3EIL^3}$$

مثال - در تیر نامعین ذیل به روش جایگزینی نمودار نیروی برشی و ممان خمشی را بیابید.



$3 - 2 = 1$

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲



$$\theta_A = \sum_{i=1}^{2} \theta_{iA} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{2} F_y = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{2} M_z = 0 \qquad (3)$$

$$R_A = \frac{5}{8} qL$$

$$R_B = \frac{3}{8} qL$$

$$M_A = \frac{1}{8} qL^2$$

روش ممان سطح در حل تیرهای نامعین

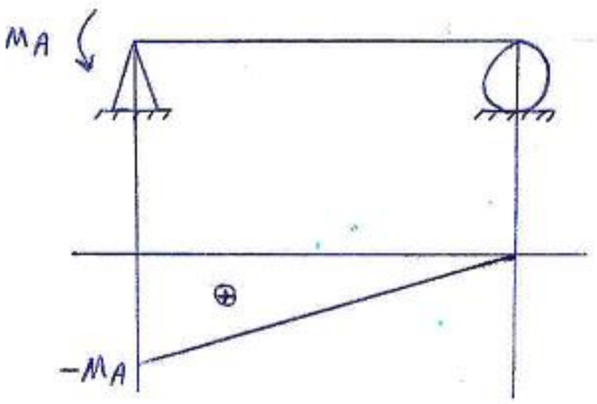
* به کمک روش جایگزینی یعنی استفاده از دو تئوری اول و دوم ممان سطح مسئله حل می گردد. نخست تیر نامعین به دو-

صورت ذیل تقسیم می گردد :

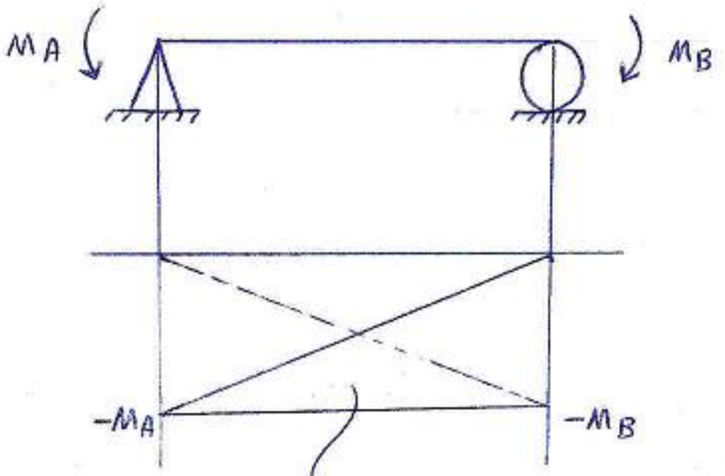
1- تیر تحت تأثیر بارهای شناخته شده
2- تیر تحت تأثیر بار اضافی

* در نهایت اثر ۲ تا با هم جمع جبری می شود. در این حالت رسم نمودار ممان خمشی به علت نداشتن عکس العمل واقعی تکیه گاهها نامفهوم است ولی شکل کلی آن معین است.

* مثلاً :

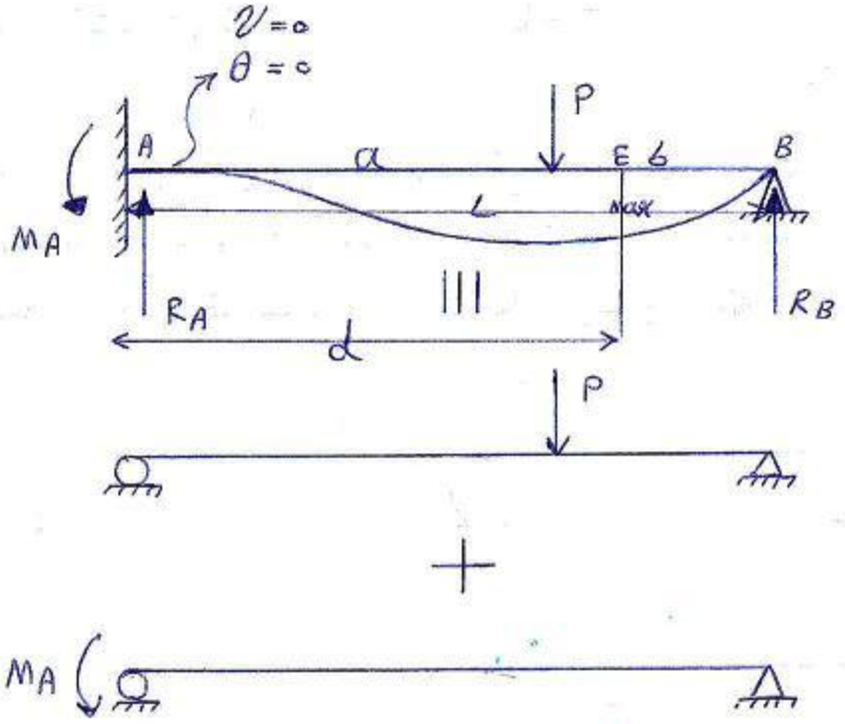


* و در حالت تاثیر دو ممان متمرکز در دو انتها :

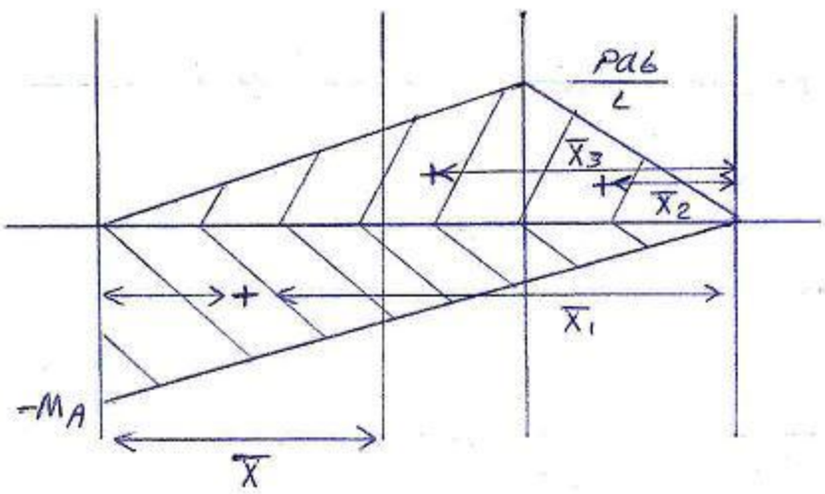


« دومثلث یا یک ذوزنقه »

مثال - مطلوب است تعیین عکس العملهای تکیه گاه به روش ممان سطح.



3 - 2 = 1



نمودار $\frac{M}{EI}$

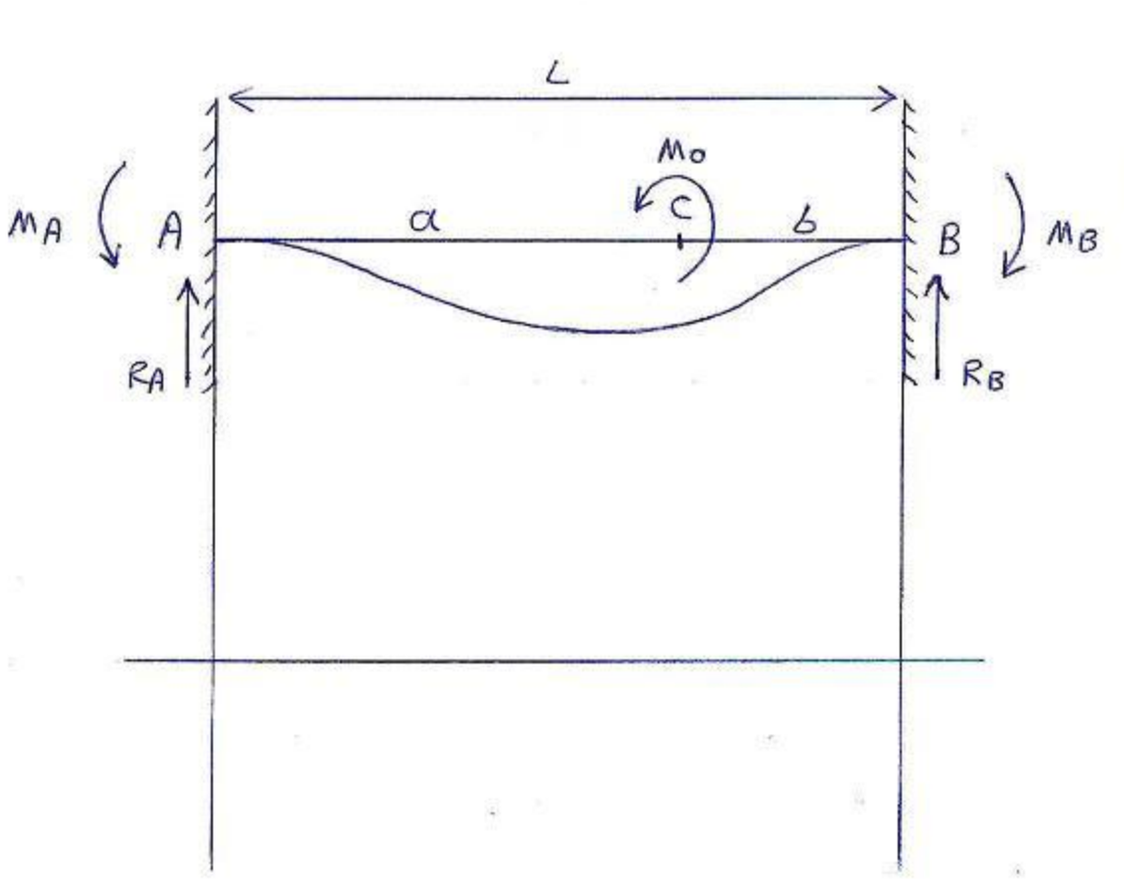
* در فاصله $\bar{X}$ نمودارها یکدیگر را خنثی می کنند و صفر می شوند لیکن $\bar{X}$ برای ما معلوم نیست.

$$\left[t_{BA} = 0 \quad \text{معادله اضافی} \right] \longrightarrow \begin{cases} M_A = \dfrac{Pab(L+b)}{2L^2} \\ RA = \dfrac{Pb}{L}\left[1 + \dfrac{a(L+b)}{2L^2}\right] \\ R_B = \dfrac{Pa}{L}\left[1 - \dfrac{b(L+b)}{2L^2}\right] \end{cases}$$

$$\left(\theta_{EA} = \theta_E^{\circlearrowright} - \theta_A^{\circlearrowright} = 0\right) \longrightarrow d$$

* محل خیز Max در مسئله قبل .

مثال - در تیر نامعین ذیل تغییر مکان نقطه C را بیابید .

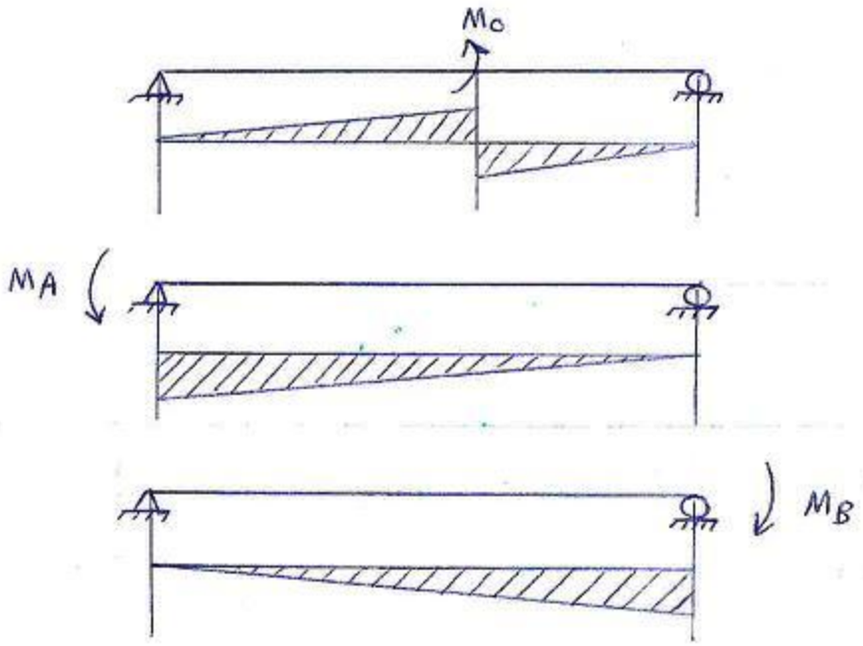


$$\begin{cases} a \neq b \\ 4 - 2 = 2 \\ \ell_c = ? \end{cases}$$

** در سه حالت ذیل تیر فوق می تواند معین گردد :

1 - R_A و M_A بعنوان ممان و عکس العمل اضافی فرض شود.
2 - R_B و M_B بعنوان ممان و عکس العمل اضافی فرض شود.
3 - M_A و M_B حذف گردد.

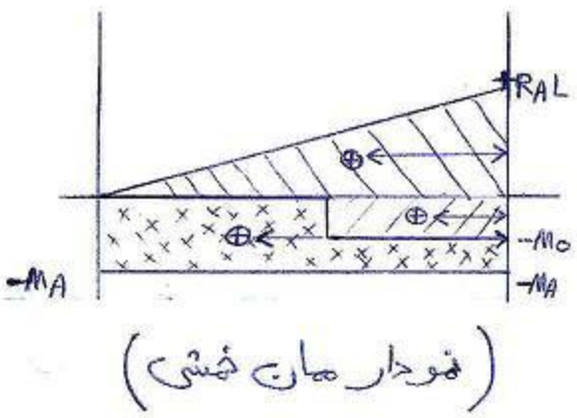
مثلاً حالت 3 -



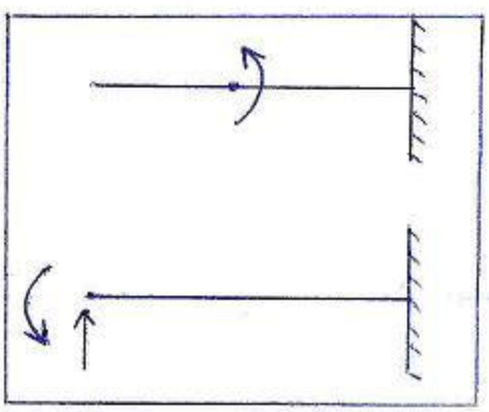
$t_{BA} = 0$

$\theta_{BA} = 0$

مثلاً حالت 1 -



(نمودار ممان خمشی)

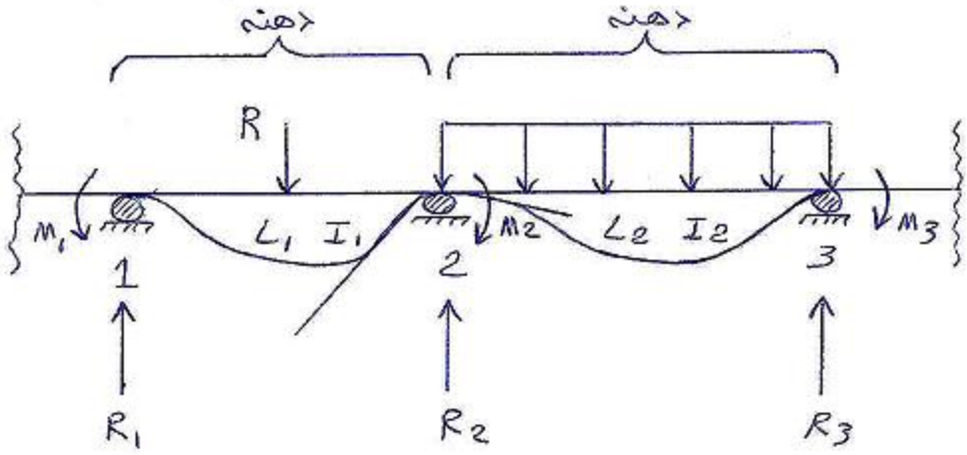


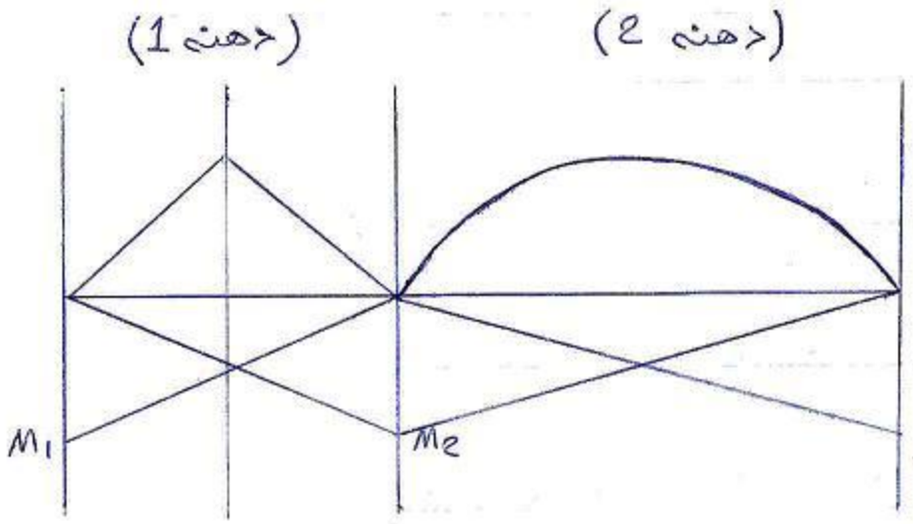
جواب -

$$\begin{cases} R_A = \dfrac{6M_o\,\alpha\beta}{L^3} \\ M_A = \dfrac{M_o\,\beta}{L^2}\,(2\alpha-\beta) \\ M_B = \dfrac{M_o\,\alpha}{L^2}\,(2\alpha-\beta) \\ y_C = \dfrac{M_o\,\alpha^2\beta^2}{2L^3EI}\,(\beta-\alpha) \end{cases}$$

تیرهای پیوسته یا چند تکیه گاهی

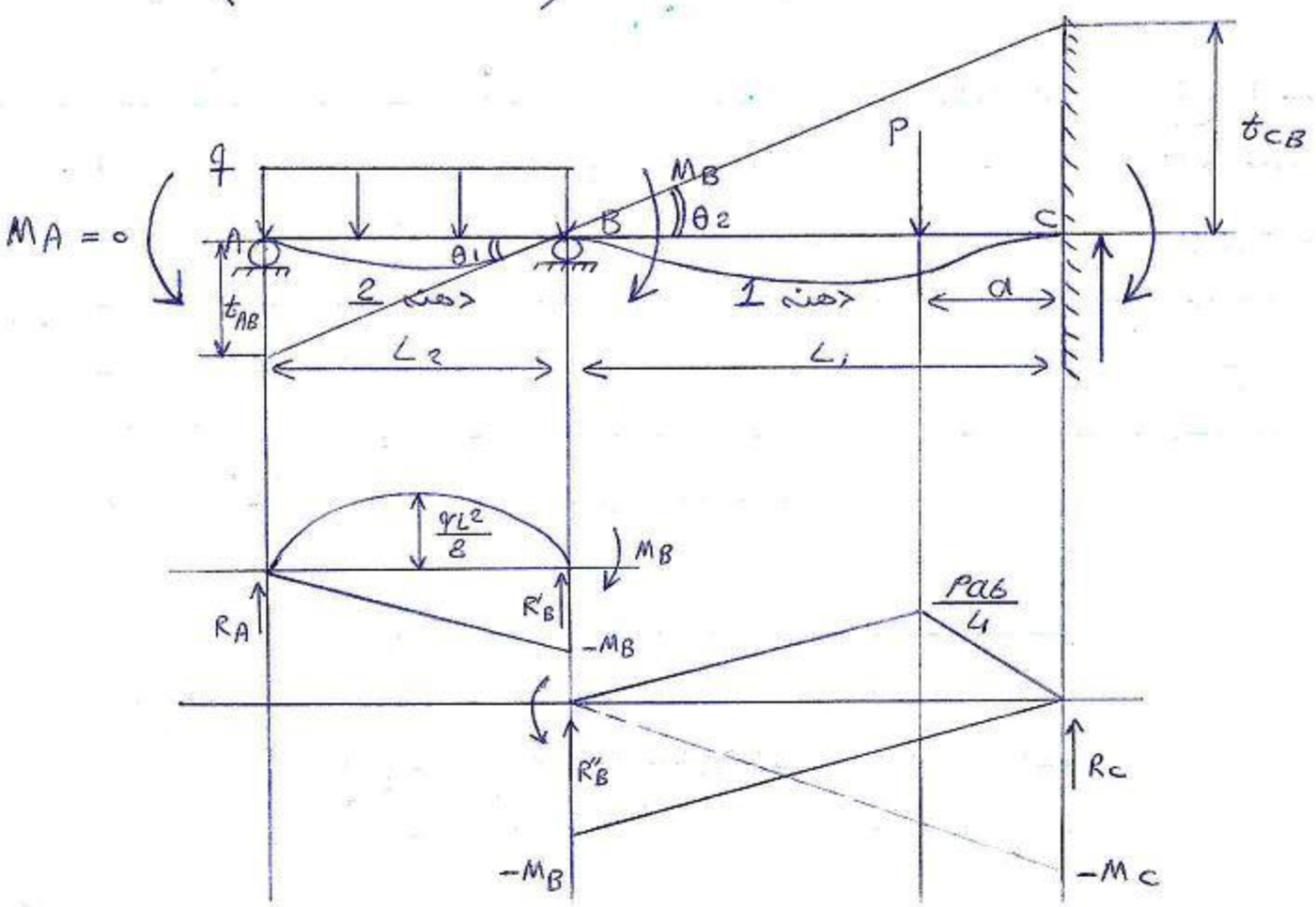
* در تیرهای پیوسته خود تیر روی چند تکیه گاه واقع است. مثل لوله کشی در ساختمان، پلها و غیره. در این حالت لازم است تیر پیوسته کاملا معین و حل گردد. یعنی نیروهای - داخلی موجود در تکیه گاهها مشخص گردند تا رسم نمودار مان خمشی و نیروی برشی میسر باشد. از روش مان سطح می توان برای حل تیرهای پیوسته استفاده کرد و برای هر دهنه از تیر تئوری های مربوطه اعمال می گردد.





مثال - در تیر نامعین زیر نمودار ممان خمشی و نیروی برشی را بیابید.

$(EI_1 = EI_2)$



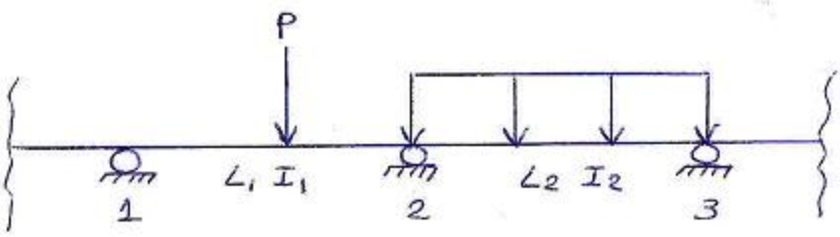
در نقطه B بعلت پیوستگی : $|\theta_1| = |\theta_2|$

$$\frac{t_{AB}}{L_2} = \frac{-t_{CB}}{L_1}$$

$a = 6'$
$L_1 = 18'$
$P = 10\,K$
$q = 2.4\ K/ft$
$L_2 = 10'$

$$\begin{cases} \frac{28}{3} M_B + 3 M_C = -260 & (1) \\ t_{BC} = 0 \rightarrow \quad 3 M_B + 6 M_C = -200 & (2) \end{cases}$$

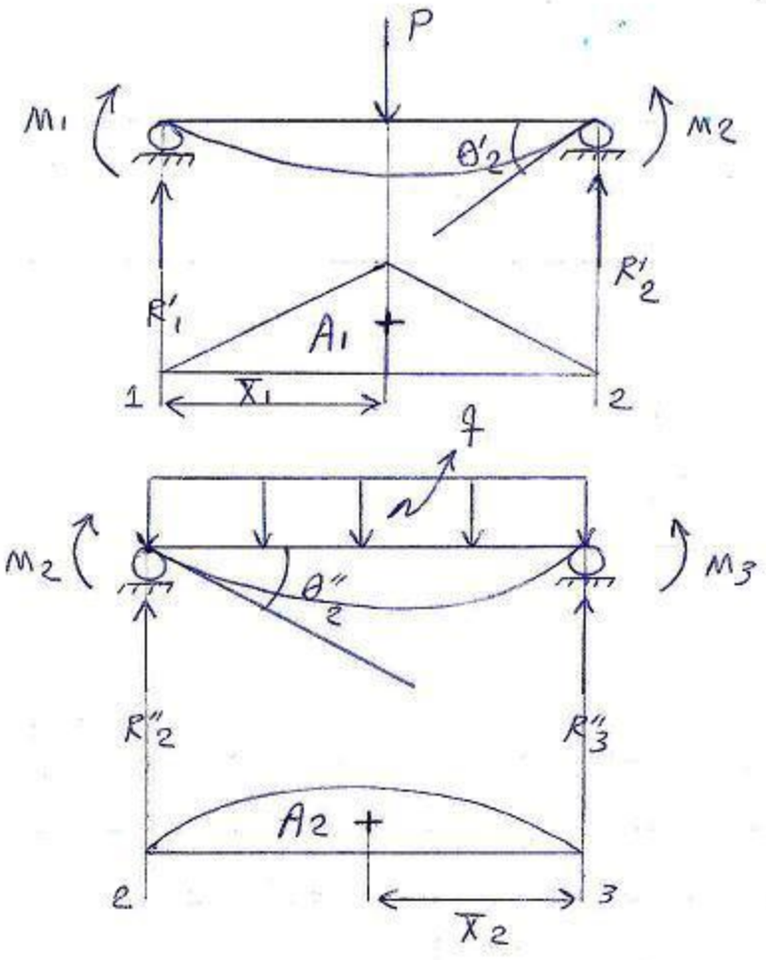
تئوری سوم ممان سطح



* برای فرموله کردن روش حل در تیرهای پیوسته از روش سه ممان استفاده می کنیم. در تیر پیوسته n دهنه و n+1 تکیه گاه وجود دارد و با استفاده از این روش می توان n معادله جهت حل تیر بدست آورد و مجهولات مسئله را که

شامل نیروهای تکیه گاه می باشند بدست آورد. بعلت در نظر گرفتن سه معادله مجهول در سه تکیه گاه مربوط به دو دهنه نام سه معادله تعیین شده است. مقادیر I_1 و I_2 و I_1 و I_2 به ترتیب طول و ممان اینرسی دهنه اول و ۲ است. M_1 و M_2 و M_3 مما نهای موجود در تکیه گاههای 1 و 2 و 3 است. با توجه به پیوسته بودن تیر در نقطه 2 و از رابطه زیر- رابطه اصلی سه معادله حاصل می گردد. باید هر دو دهنه تجزیه و تحلیل گردد.

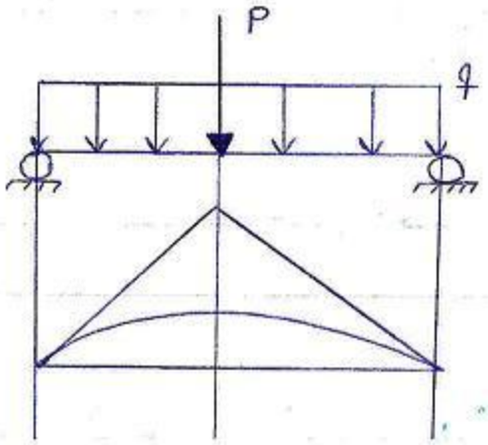
$$(\theta'_2 = -\theta''_2)$$



فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰۰-۳۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰۰-۳۰۰-۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمعلی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران - دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

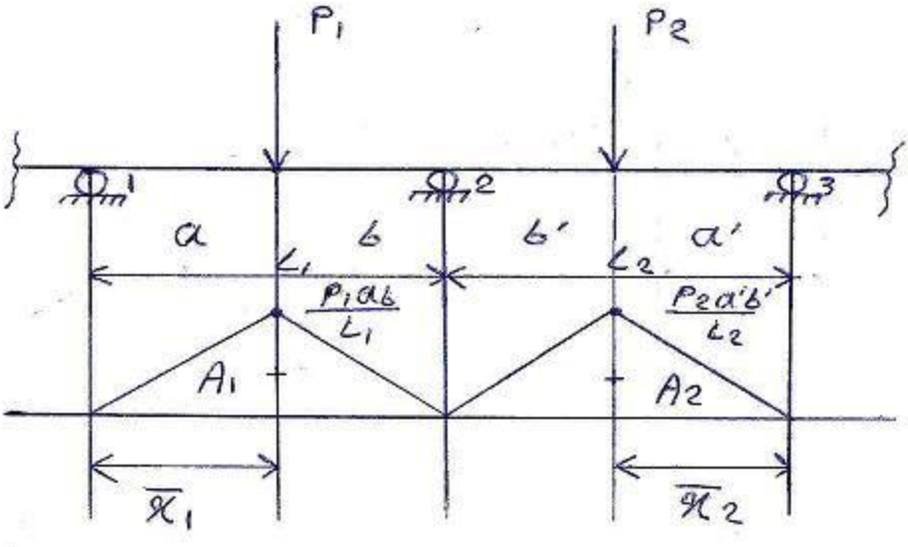
$$M_1\left(\frac{L_1}{I_1}\right) + 2M_2\left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2}\right) + M_3\left(\frac{L_2}{I_2}\right) = -\frac{6A_1\bar{X}_1}{I_1 L_1} - \frac{6A_2\bar{X}_2}{I_2 L_2}$$



* نکته - اگر در بارگسترده نیروی متمرکز هم داشته باشیم - مساحتها با هم - جمع می شوند.

ادامه بحث سه ممان

* حالت خاص 1- (در دو دهنه بارگذاری متمرکز وجود دارد).



$$\overline{X_1} = \frac{L_1 + a}{3}$$

$$A_1 = \frac{P_1 a b}{L_1} \cdot \frac{L_1}{2}$$

برای دهنه (1)

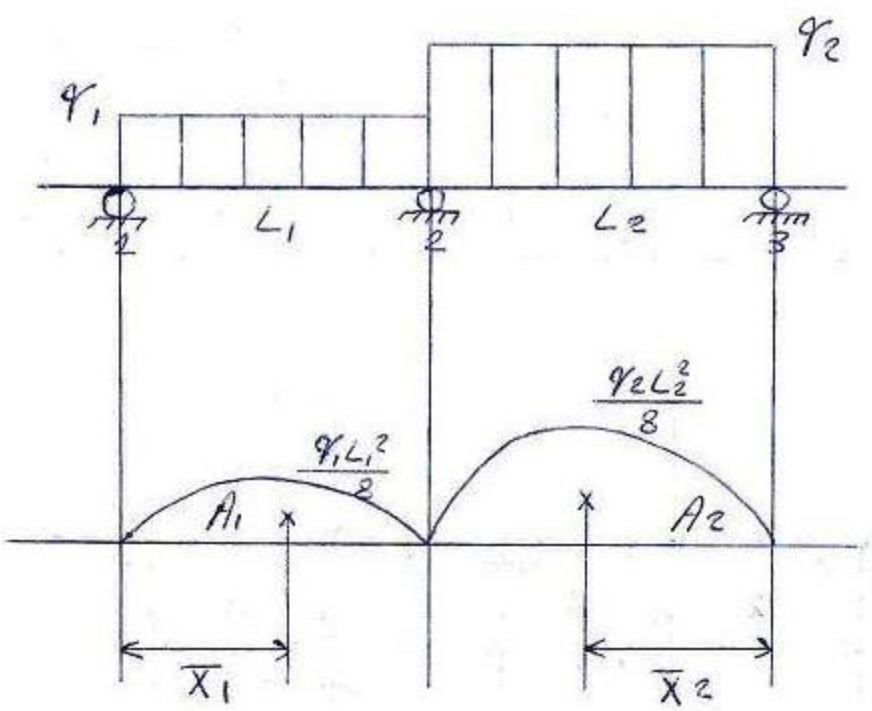
$$-6 A_1 \frac{\overline{X_1}}{L_1} = -P_1 a b \left(1 + \frac{a}{L_1}\right)$$

برای دهنه (2) مشابهاً :

$$-6 A_2 \frac{\overline{X_2}}{L_2} = -P_2 a' b' \left(1 + \frac{a'}{L_2}\right)$$

* در فرمول سه ممان روابط فوق را جا بگذاری می کنیم .

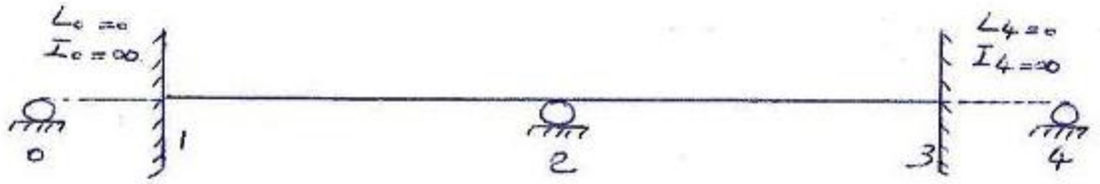
حالت خاص 2 - (دو دهنه تحت تأثیر بارهای گسترده متفاوت.)



$$-6A_1\frac{\bar{X}_1}{L_1} = -6\left(\frac{2L_1}{3}\right)\left(\frac{qL_1^2}{8}\cdot\frac{L_1}{2L_1}\right) = -\frac{qL_1^3}{4}$$

$$-6A_2\frac{\bar{X}_2}{L_2} = -\frac{q_2L_2^3}{4}$$

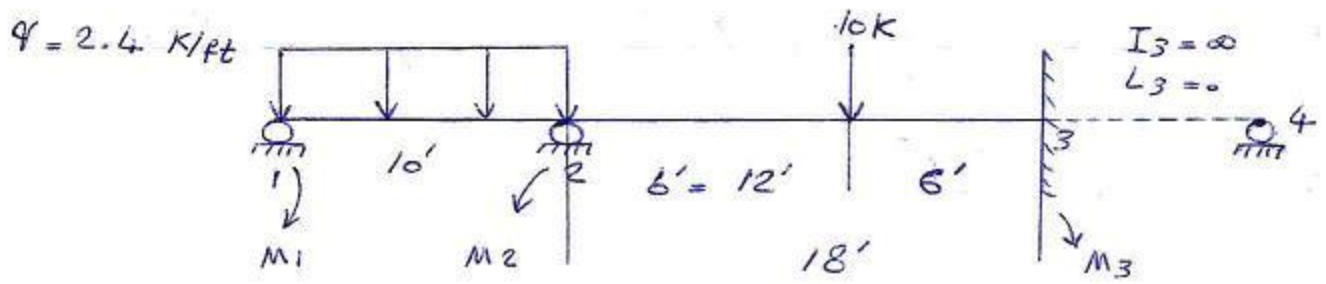
** اگر یکی از تکیه گاههای اول یا آخر درگیر باشد برای استفاده از روش سه ممان بصورت ذیل عمل می کنیم :



* برای دهنه اضافی مقدار اینرسی ∞ و طول صفر است ومعادله سه ممان برای دهانه اضافی و دهانه واقعی موجود نوشته می شود.

مثال - در تیر نامعین ذیل نمودار T و M (نیروی برشی و گشتاور خمشی) را از روش سه ممان بیابید.

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲



$$\begin{cases} 10\cancel{M_1}^{0} + 2(10+18)M_2 + 18M_3 = \dfrac{-2.4\times10^3}{4} - 10\times6\times12\left(1+\dfrac{6}{18}\right) \\ 56M_2 + 18M_3 = -1560 \quad (1) \end{cases}$$

تکیه‌گاه 1,2,3 –

$$\begin{cases} 18M_2 + 2(18+0)M_3 + 0(\cancel{M_4}) = -10\times12\times6\left(1+\dfrac{12}{18}\right) + 0 \\ 18M_2 + 36M_3 = -1200 \quad (2) \end{cases}$$

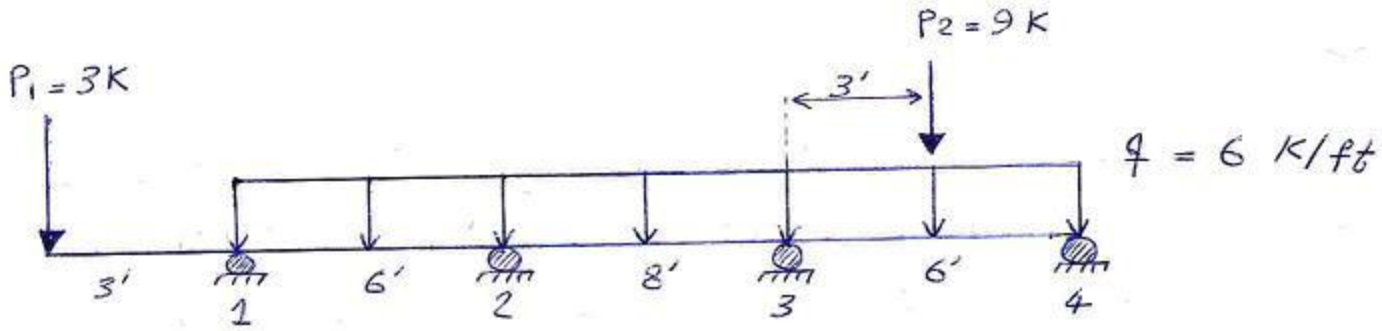
تکیه‌گاه 2,3,4 –

$M_2 = -20.4$ K.ft

$M_3 = -23.3$ K.ft

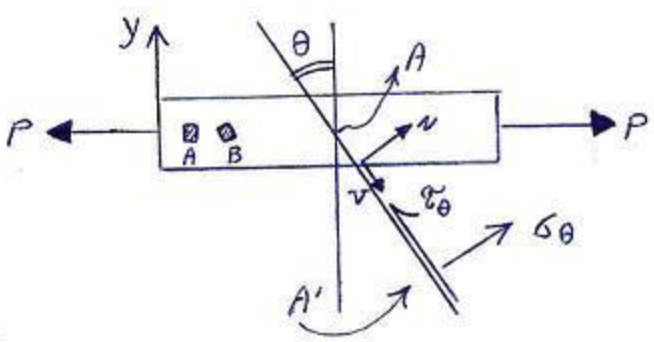
مثال - از روش سه ممان مطلوب است نمودار ممان خمشی .

(حل منزل)



تجزیه و تحلیل تنش و تغییر بعد نسبی

* مقادیر تنش و تغییر بعد نسبی در سطوح مختلف یک جسم مورد بررسی قرار می گیرد. ابتدا تنش تک محوری بررسی می شود که قطعه تنها تحت نیروی محوری است و را بطه تنش :



$$\sigma = \frac{P}{A}$$

(A سطح مقطع عمودی است)

* در سطح مقطع مایع نیروی عمودی را N و نیروی برشی را V در نظر می گیریم لذا :

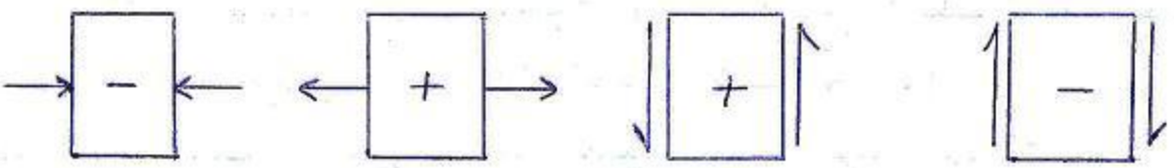
$$\left.\begin{aligned} N &= P\cos\theta \\ V &= P\sin\theta \\ A' &= A/\cos\theta \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta$$
$$\tau_\theta = -\sigma_x \cos\theta \sin\theta$$

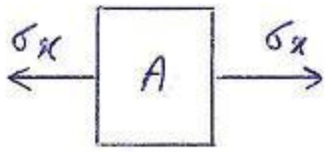
* منفی به این دلیل است که جهت τ و V را مخالف گرفتیم .

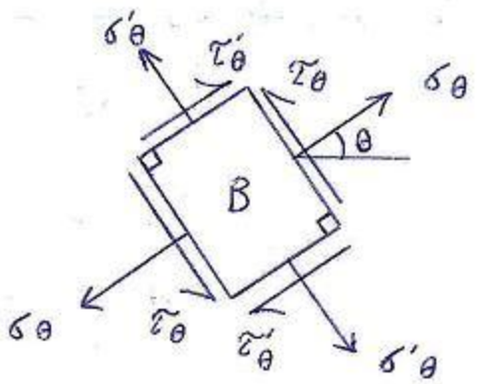
* در $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، τ_θ به حداکثر مقدار خود $\sigma_x / 2$ می رسد. یعنی حداکثر تنش برشی نصف تنش نرمال است. در آزمایش کشش برای فولاد با کربن کم خطوط لغزش در صفحه ای با زاویه 45° واقع می گردند.

* قرارداد می کنیم که :



* برای المانهای A و B :





* مقادیر تنش در صفحه $(\theta + \frac{\pi}{2})$:

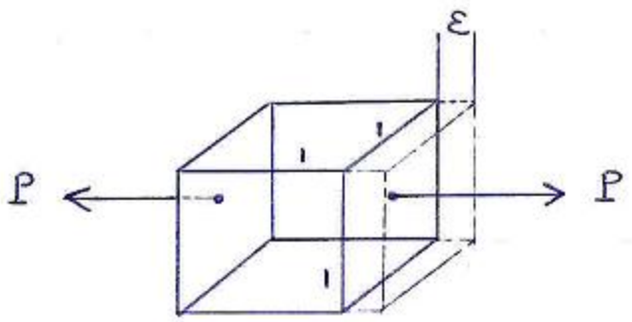
$$\begin{cases} \sigma'_\theta = \sigma_x \cos^2(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sigma_x \sin^2\theta \\ \tau'_\theta = \sigma_x \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sigma_x \sin\theta \cos\theta \end{cases}$$

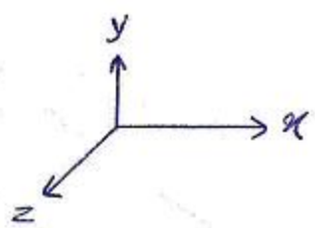
$$\begin{cases} \sigma_\theta \neq \sigma'_\theta & ① \\ \sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x = cte & ② \\ \tau_{\theta'} = -\tau_\theta & ③ \end{cases}$$

---

* درحالت تک محوری اگر یک مکعب به ابعاد واحد در نظر گرفته و در یک جهت به آن نیرو وارد کنیم و با استفاده از ضریب پواسون داریم :

* (V اولیه $= 1$)





* $(1+\varepsilon)$ طول جدید در جهت x

* $(1-2\upsilon\varepsilon)$ طول جدید در جهت y و z

* V ثانویه $= (1+\varepsilon)(1-2\upsilon\varepsilon)^2$

$$\Delta V = 1 + \varepsilon - 2\upsilon\varepsilon - 1 \quad \Rightarrow$$

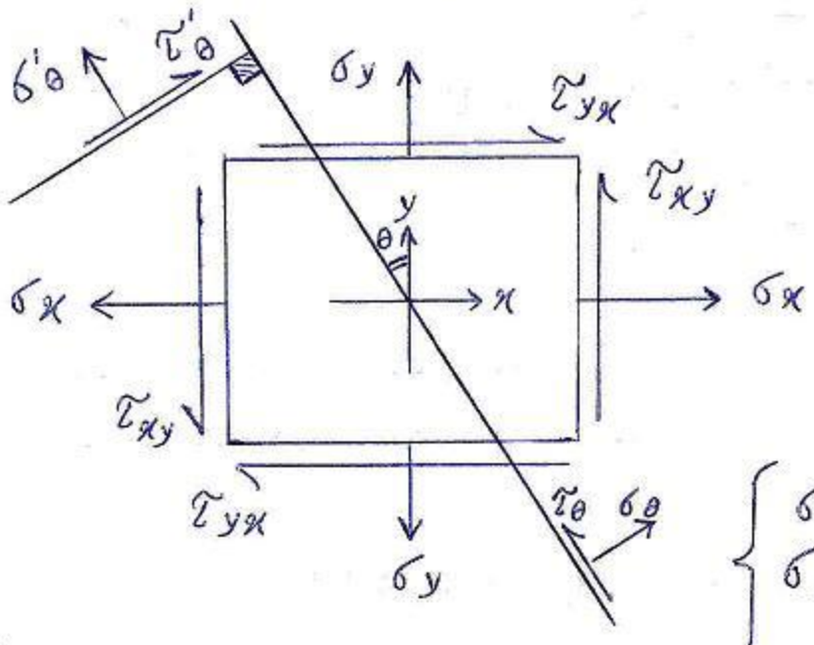
$$\Delta V = \varepsilon(1 - 2\upsilon)$$

* ماده‌ای که دارای υ صفر است چوب پنبه است . برای لاستیک و پارافین $\upsilon = \frac{1}{2}$ و برای بتن $\upsilon = 0.1$ است.

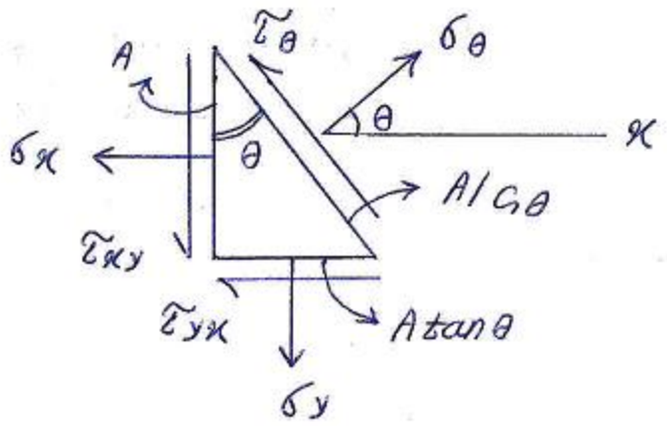
* در رابطه فوق نسبت $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$: $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\upsilon)$

تنش صفحه‌ای

در اینجا منظور از صفحه ، صفحه $x-y$ است و تنش های موجود در یک صفحه بصورت ذیل است :



$$\begin{cases} \sigma_x \ , \ \sigma_y \ , \ \tau_{xy} \neq 0 \\ \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$



** روابط تعادل
استاتیکی را در جهت
σ_θ و τ_θ می نویسیم :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x C^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta C\theta \\ \tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta C\theta + \tau_{xy}(C^2\theta - \sin^2\theta) \end{cases}$$

---

* برای عملیات بعدی در دایره (Mohr) مقادیر θ را به (2θ) تبدیل می کنیم :

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} C2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} C_{os}\, 2\theta \end{cases}$$

در $\theta = 0$:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_x \\ \tau_\theta = \tau_{xy} \end{cases}$$

در $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \sigma_y \\ \tau_\theta = -\tau_{xy} \end{cases}$$

* می توان تنشهای σ'_θ و τ'_θ را در زوایای $(\theta + \frac{\pi}{2})$ محاسبه کرد :

$$\begin{cases} \sigma_\theta + \sigma'_\theta = \sigma_x + \sigma_y \\ \tau_\theta = -\tau'_\theta \end{cases}$$

---

* بعلت تغییرات تنشهای نرمال و برشی $(\sigma_\theta$ و $\tau_\theta)$ با زاویه θ می توان Max و Min آنها را یافت :

1 - تنشهای اصلی (نرمال Max و Min) :

** $\sigma_\theta = f(\theta) \rightarrow \frac{d}{d\theta}(\sigma_\theta) = 0 \rightarrow$

$(\sigma_1$ و $\sigma_2)$

σ_1 ↓ تنش اصلی حداکثر

σ_2 ↓ تنش اصلی حداقل

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = -(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\sin 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

↓ $\theta_{1p}(\sigma_1)$ ↓ $\theta_{2p}(\sigma_2)$

(صفحات اصلی)
یعنی صفحاتی که σ_1 و σ_2 (Max و Min) در آنها واقع می شوند.

* با جایگذاری $\tan 2\theta_p$ در τ_θ :

$$\begin{cases} \tau_{1\theta} = 0 \\ \tau_{2\theta} = 0 \end{cases}$$

(یعنی در صفحات اصلی تنش برشی نداریم .)

* با جایگذاری مقدار $\tan 2\theta_p$ در رابطه σ_θ مقادیر تنشهای اصلی بدست می آید :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

2- صفحات تنش برشی Max :

$$\frac{d}{d\theta}(\tau_\theta) = 0 \longrightarrow$$

$$\text{Cotg } 2\theta_s = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

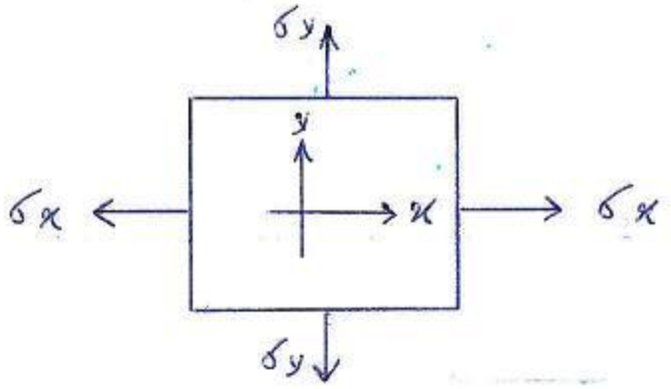
* با جایگذاری $\text{Cotg } 2\theta_s$ در τ_θ ، τ_{max} بدست می آید :

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

* با مقایسه رابطه $2\theta_p$ و $2\theta_s$ معین می گردد که اختلاف زاویه آنها 90° است یا به عبارتی زاویه بین صفحات اصلی و صفحات تنش برشی Max 45° است .

تنش دو محوره

تنش دو محوره حالت خاصی از تنش صفحه‌ای است که در آن مقدار σ_z و τ_{xz} و τ_{yz} صفر می باشد و تنها تنشهای نرمال در جهات x و y وجود دارد .



* در روابط مربوط به σ_θ و τ_θ کافیست مقادیر τ_{xy} و τ_{yx} مساوی صفر قرار داده شوند و در این حالت اگر المان به قدر θ دوران کند خواهیم داشت :

$$\sigma\theta + \sigma\theta' = \sigma x + \sigma y$$

* و در یک مکعب به ابعاد واحد تغییر حجم یک جسم الاستیک :

ε_x = کرنش در جهت x
ε_y = y " "
ε_z = z " "

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i$$

* با جایگذاری رابطه میان تنش و کرنش :

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x\right) \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[-\nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \end{cases}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\left(1-2\nu\right)/E$$

حالت خاص (برش ساده)

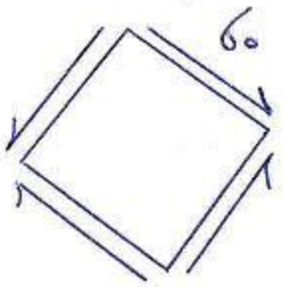
* در تنش دو محوره المانی در نظر می گیریم که در آن مقادیر σ_x و σ_y با هم برابر و مخالف العلامة با شند . اگر این المان به قدر $\theta = 45^\circ$ دوران کند حالتی می شود که تنش های نرمال صفر خواهد بود .

$$\sigma_x = -\sigma_y = \sigma_0$$

$$\sigma_\theta + \sigma_{\theta'} = 0$$

$$\theta = 45 \longrightarrow \sigma_\theta = \sigma_{\theta'} = 0$$

$$|\tau_\theta| = \tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_0$$



دایره (موهر) Mohr

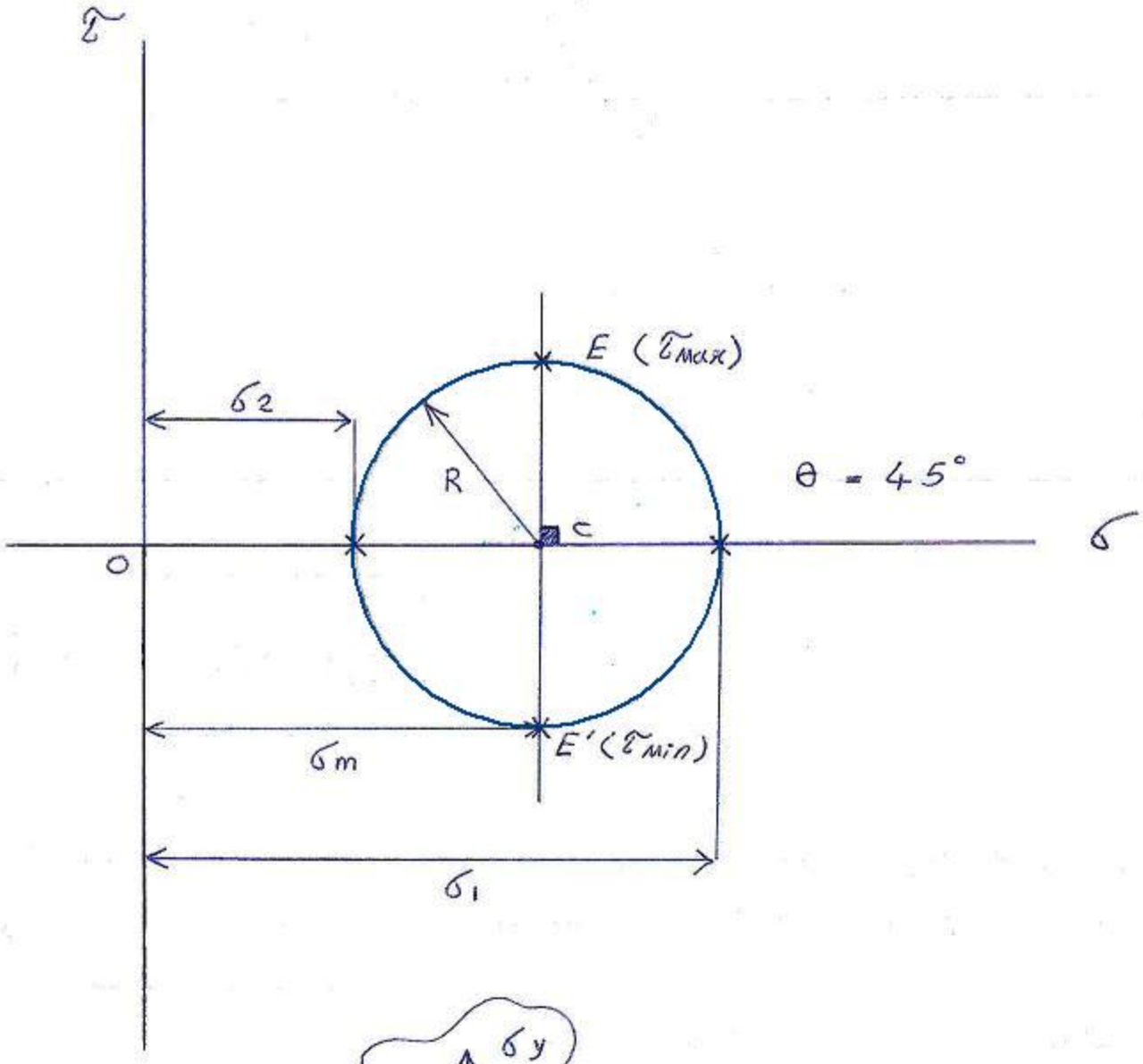
* به کمک روابط τ_θ و σ_θ معادله دایره بدست می‌آید. بصورت ذیل :

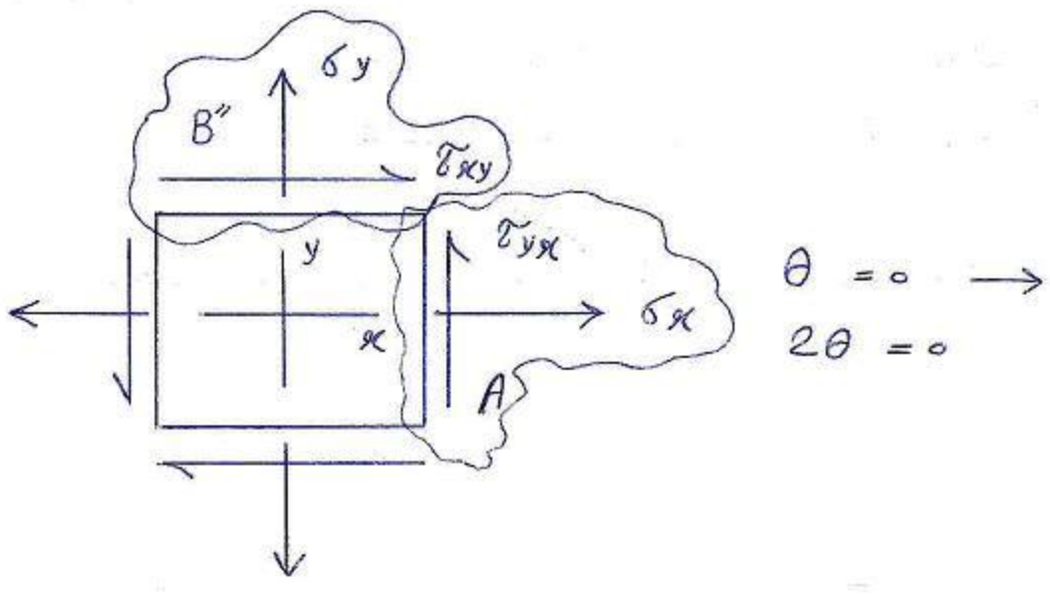
$$\left.\begin{aligned} (\sigma_\theta - \sigma_m)^2 + \tau_\theta^2 &= \tau_{max}^2 \\ (x-a)^2 + y^2 &= R^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

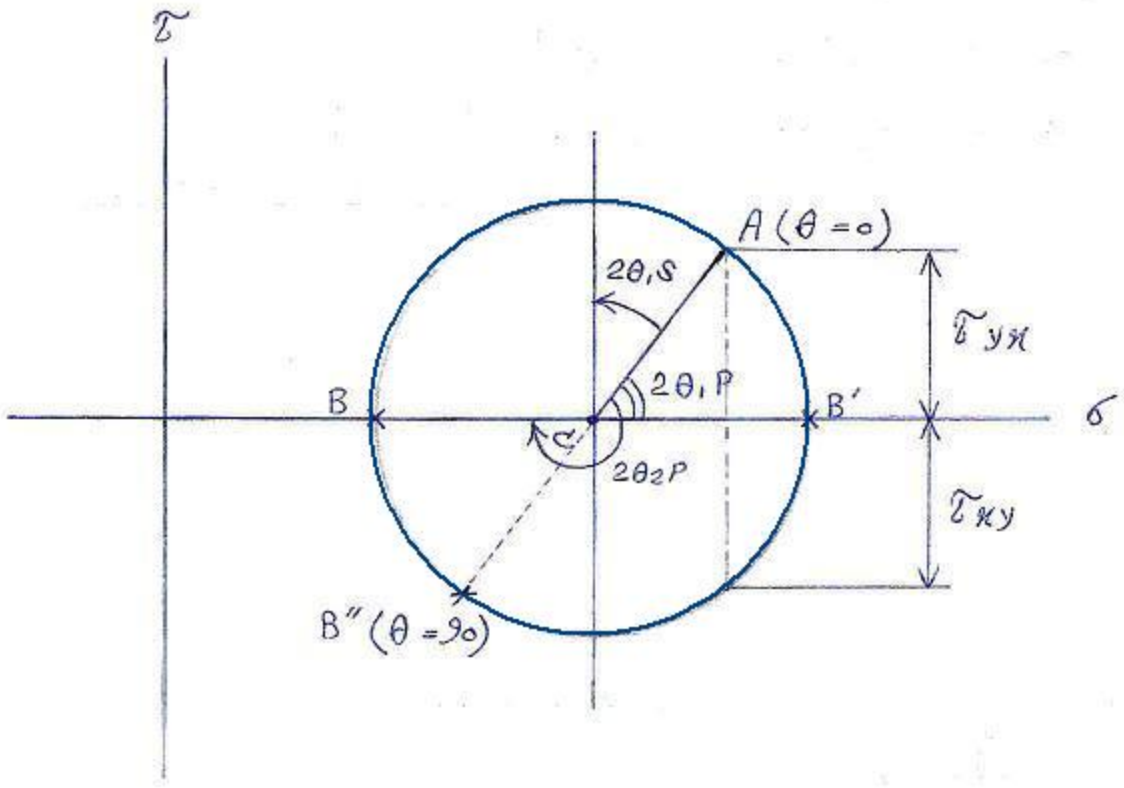
$$R = \tau_{max}$$

$$a = \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{(تنش متوسط)}$$

* جهت (+) θ بر روی المان در جهت مثلثاتی می باشد امّا بر روی دایره مور از نقطه مربوطه باید به اندازه (2θ) در خلاف جهت مثلثاتی حرکت نمود.





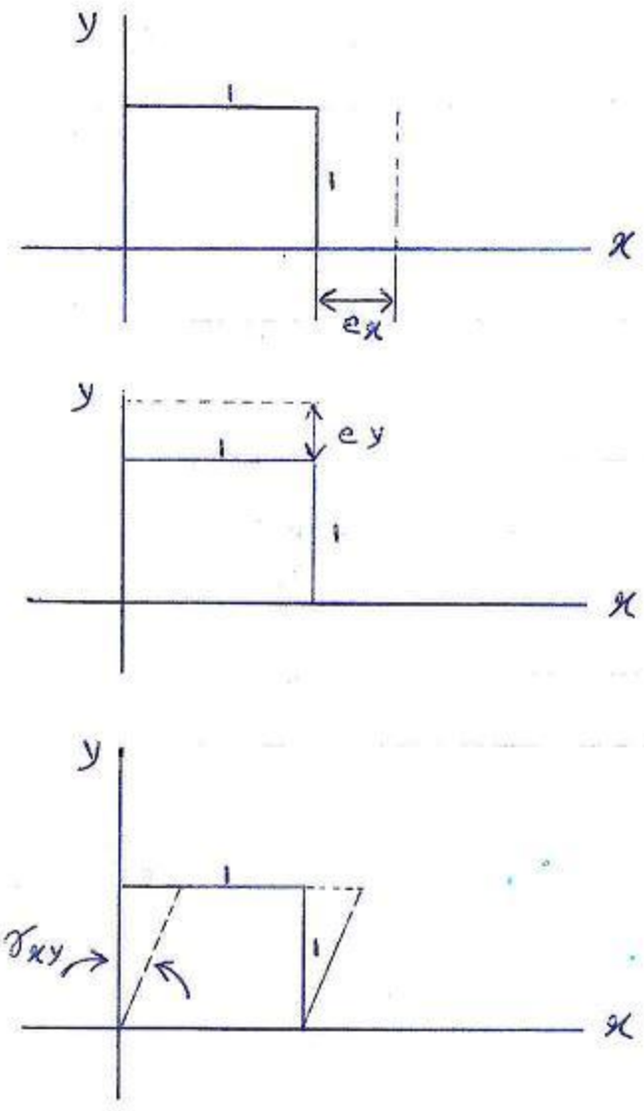


کرنش صفحه‌ای

* در این حالت تنها e_x و e_y و γ_{xy} وجود دارد که در آن e_x و e_y و γ_{xy} به ترتیب کرنش در جهت x و y و تغییر زاویه نسبی برشی است.

$$\begin{cases} e_x \ , \ e_y \ و \ \gamma_{xy} \neq 0 \\ e_z \ , \ \gamma_{xz} \ و \ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

* برای یک مربع به ابعاد واحد کرنشها بقرم ذیل است :



فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

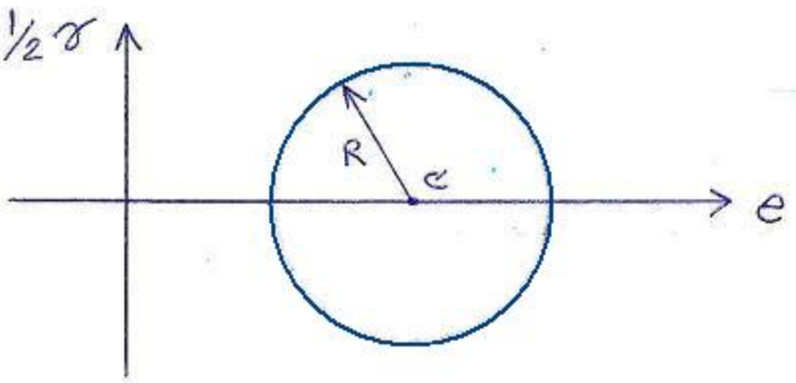
جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس گرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران - دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

* در وضعیت کرنش صفحه‌ای مقدار e_z برابر صفر است. یعنی در جهت z ها تنش وجود دارد (σ_z).

* اگر محور x و y به قدر θ دوران کند، می خواهیم روابط کرنش در سیستم جدید را بدست آوریم که با e_θ و γ_θ نشان داده می شود؛ برای تعیین الگوهای لازم از جدول ذیل استفاده می شود و لازم به توضیح است که روابط e_θ و γ_θ از هندسه مسئله بدست می آیند ولی برای سادگی از جدول بهره می گیریم.

* برای استفاده از جدول باید روابط σ_θ و τ_θ را در حالت تنش صفحه‌ای در نظر بگیریم :

کرنش		تنش
e_x	←	σ_x
e_y	←	σ_y
$\frac{1}{2}\gamma_{yx}$	←	τ_{yx}
e_θ	←	σ_θ
$\frac{1}{2}\gamma_\theta$	←	τ_θ



: (MOHR)

$$\begin{cases} e_\theta = \frac{1}{2}(e_x + e_y) + \frac{1}{2}(e_x - e_y)\cos 2\theta \\ \quad + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\gamma_\theta = -\frac{e_x - e_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \end{cases}$$

روابط تنش در سه بعد

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

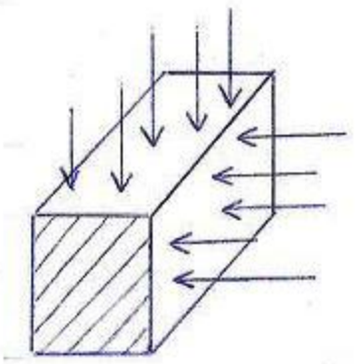
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right]$$

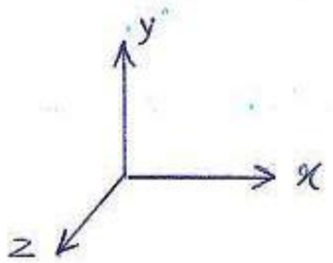
$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]$$

تنش صفحه‌ای

$(\sigma_z = 0)$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \\ \varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{cases}$$





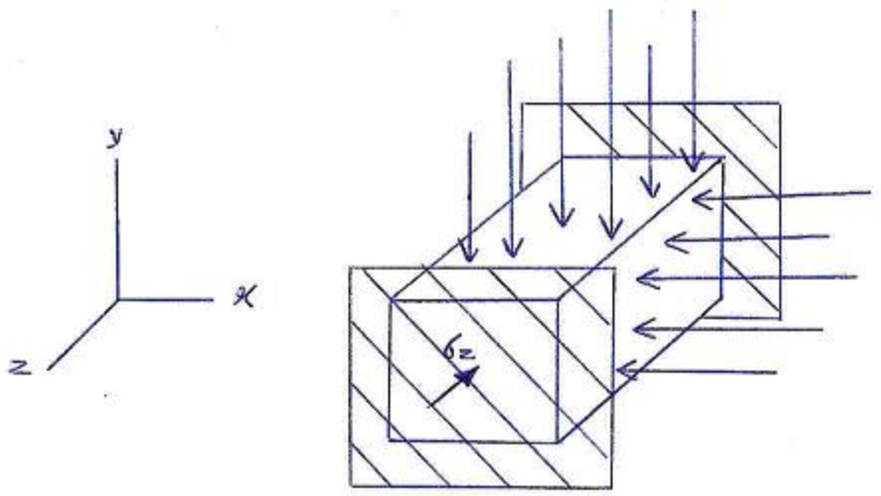
$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \end{cases}$$

فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

فرمولهای کرنش صفحه ای

$\varepsilon_z = 0$

$\sigma_z \neq 0$



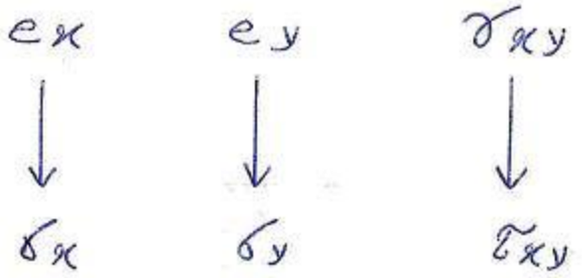
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y))\right]$$

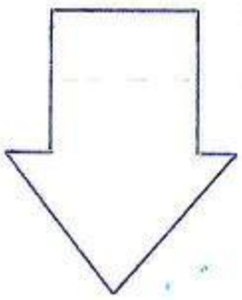
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \nu(\sigma_y + \sigma_x))\right]$$

$$\varepsilon_z = 0 \longrightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

اندازه گیری کرنش و نمونه آزمایشی

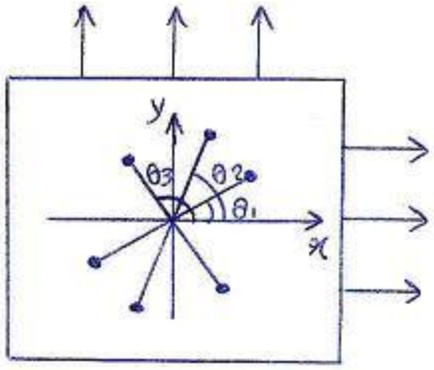
* اگر بتوانیم در نمونه تحت بارگذاری مقادیر e_x و e_y و γ_{xy} را بیابیم می توان مقادیر تنش های اصلی را بدست آورد.





σ_1 و σ_2

(وزنت)



* در جهت دلخواه x و y بر روی نمونه انتخاب کرده و (gage) ها را با زوایای دلخواه θ_1 و θ_2 و θ_3 بر روی نمونه نصب می کنیم.
با داشتن فاصله هر جفت (gage) و تغییر آن برای نمونه

تحت بارگذاری تغییر طول هر خط (gage) بدست می‌آید و از تقسیم ۲ تا به طول اولیه کرنشهای e_{θ_1} و e_{θ_2} و e_{θ_3} بدست می‌آید. با توجه به روابط ذیل می توان مقادیر e_x و e_y و γ_{xy} را بدست آورد:

$$e_{\theta_1} = e_x \cos^2\theta_1 + e_y \sin^2\theta_1 + \gamma_{xy} \sin\theta_1 \cos\theta_1$$

(روابط روزت)

حالت خاص (1) : روزت (45°)

$\theta_1 = 0$
$\theta_2 = 45$
$\theta_3 = 90^\circ$

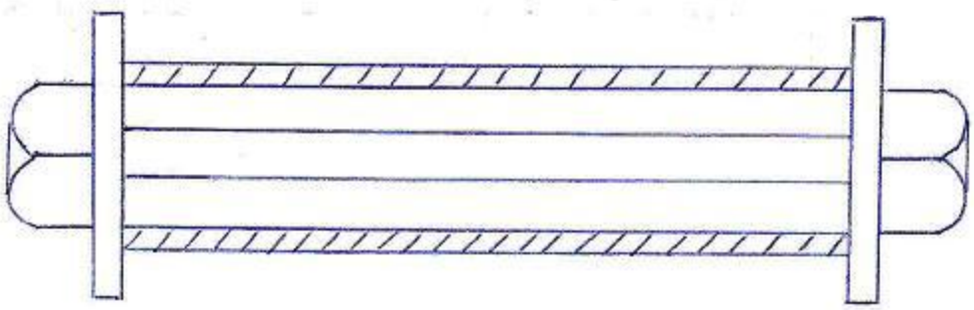
$$\begin{cases} e_x = e_{0^\circ} \\ e_y = e_{90^\circ} \\ \gamma_{xy} = 2e_{45^\circ} - (e_{0^\circ} + e_{90^\circ}) \end{cases}$$

حالت خاص (2) : روزت (Δ) یا (60°)

$\theta_1 = 0$
$\theta_2 = 60^\circ$
$\theta_3 = 120^\circ$

$$\begin{cases} e_x = e_0 \\ e_y = (2e_{60} + 2e_{120} - e_0)/3 \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(e_{60} - e_{120}) \end{cases}$$

مسئله - در داخل یک لوله فلزی بطول (l) یک پیچ قرار دارد و توسط یک مهره سفت می گردد. جنس‌های لوله و پیچ متفاوت است. اگر درجه حرارت سیستم بطور ناگهانی به قدر ΔT بالا رود مطلوب است نیروهای وارده بر پیچ و لوله.



$$\begin{cases} \alpha_s & \text{ضریب انبساط حرارتی لوله} \\ \alpha_b & \text{" " " پیچ} \\ E_s & \text{مدول یانگ لوله} \\ E_b & \text{" " پیچ} \\ A_s & \text{سطح مقطع لوله} \\ A_b & \text{" " پیچ} \end{cases}$$

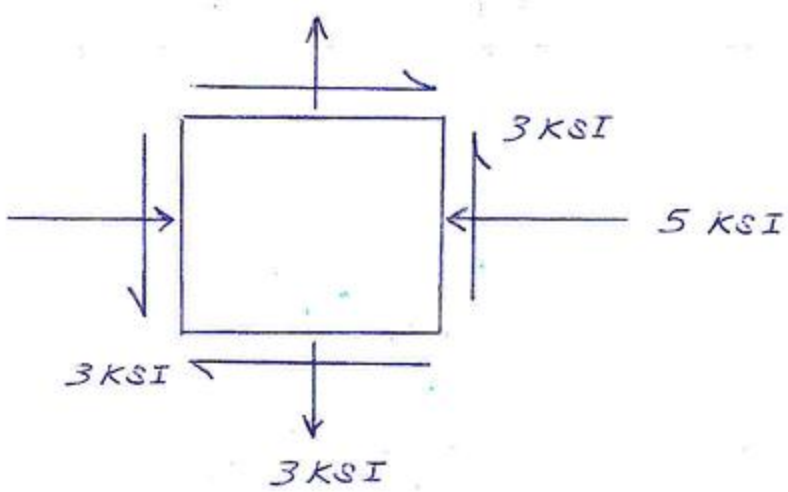
مسئله – حالت تنش در یک المان بصورت ذیل است :

1- اگر $\theta = 45$ مطلوبست σ_θ و τ_θ

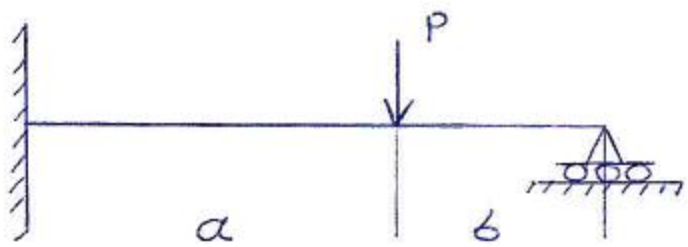
2- تنش های اصلی و صفحات مربوط و نشان دادن المان در آن حالت .

3- تنش برشی Max و صفحه مربوط و نشان دادن المان در آن حالت .

4 تعیین تمام موارد فوق از دایره (MOHR)



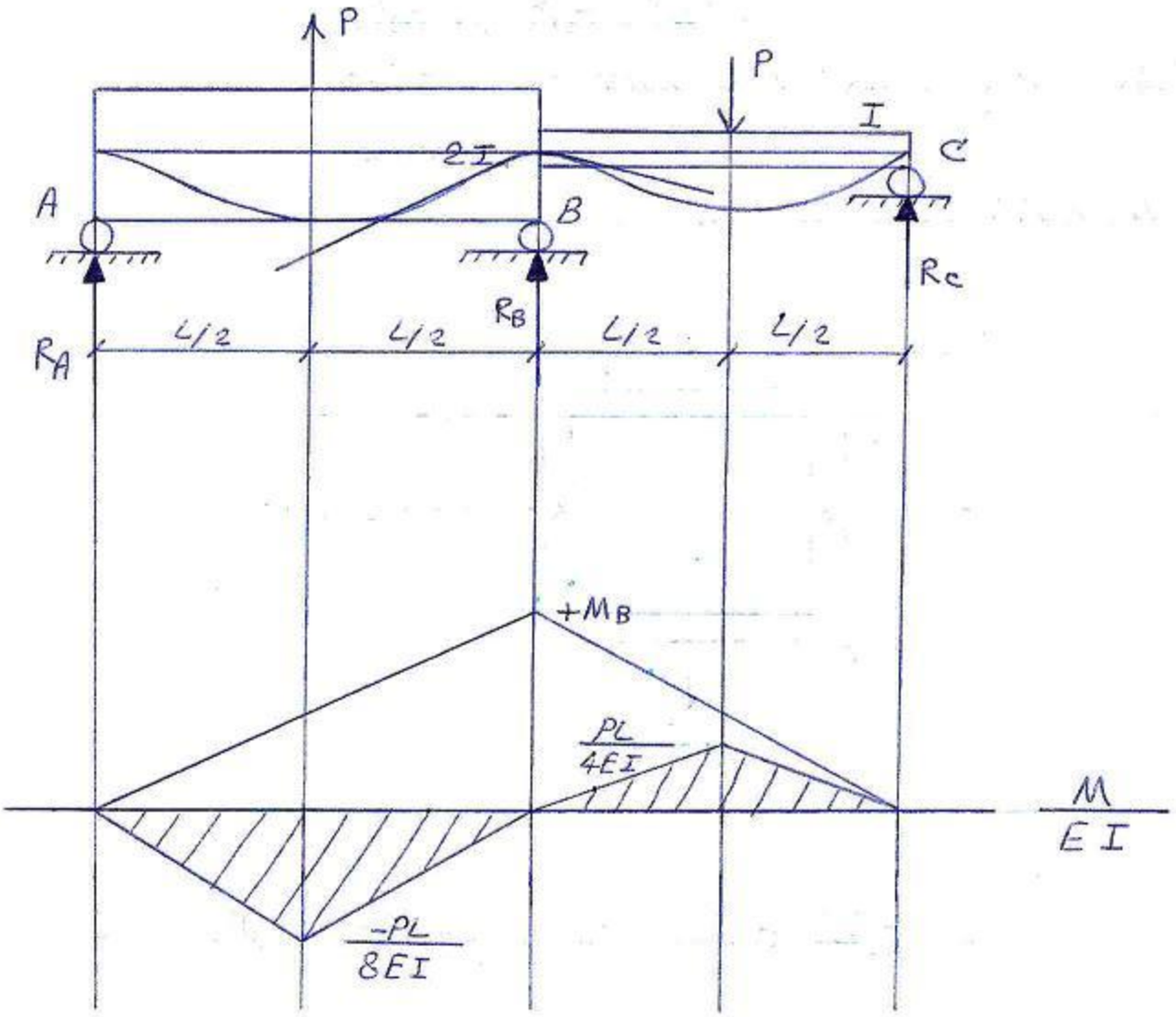
مسئله – مطلوبست رسم نمودار ممان خمشی .



$(a + b = \ell)$

(روش ممان سطح)

مثال - در تیر نامعین ذیل با روش ممان سطح مطلوبست نیروهای موجود در تکیه گاه .



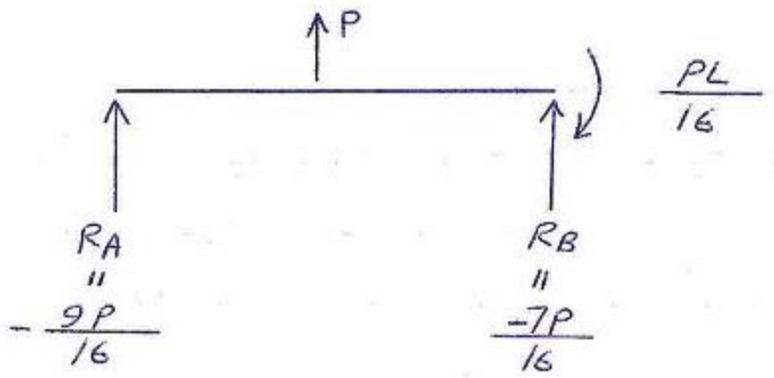
$$\theta_B)_{AB} = -\theta_B)_{BC}$$

$$\frac{t_{AB}}{L} = -\frac{t_{CB}}{L}$$

$$\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{L}\left[2M_B \cdot \frac{L^2}{3} - \frac{PL^3}{8}\right]$$

$$= - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{L} \left[2 M_B \frac{L}{3} + \frac{PL^3}{8} \right] \longrightarrow$$

$$M_B = - \frac{PL}{16} \curvearrowright$$



مخازن جدار نازک

* تنش های غشائی در مخازن جدار نازک

Membrane Stresses

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲

* مخزن (shell) ورقیست که به صورت منحنی فرم داده شده و درصورتی که یک بعد آن (ضخامت) نسبت به دو بعد دیگر خیلی کوچک باشد جدار نازک نامیده می شود. اگر ورق به صورت مربع باشد به آن (plate) گویند. مخازن و ورقها تحمل ممان خمشی و نیروی برشی عمود بر سطح خود را دارند و می توانند نیروی خوابیده در سطح را هم تحمل کنند.

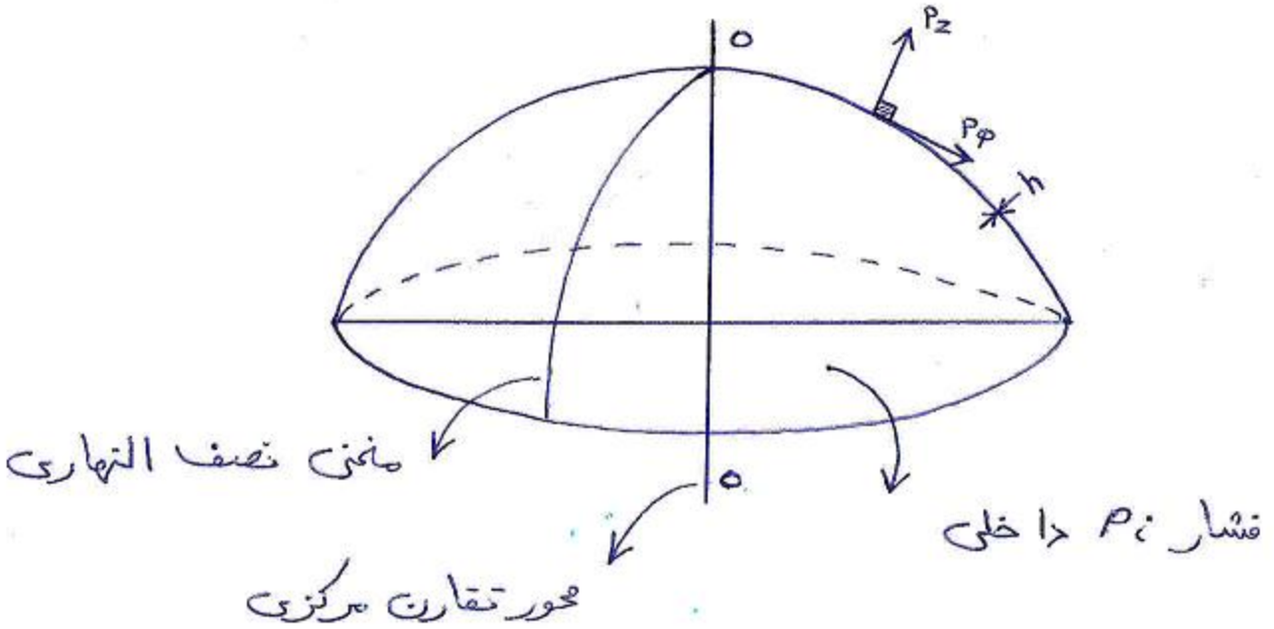
* یک غشاء چه بصورت منحنی و یا مسطح همان حکم ورق یا مخزن را دارد اما تنها قادر به تحمل ممان و نیروی عرضی و یا نیروی برشی نمی باشد. درعوض یک غشاء فقط می تواند نیروی خوابیده در سطح خود را تحمل کند. اگر این نیرو فشاری گردد غشاء آناً درهم می شود. یک غشاء بصورت منحنی می تواند بار بصورت عمود بر سطح را تحمل کند. مانند تیوبهای لاستیک. در این بخش مخازن جدار نازک مثل مخازن آب، هوای فشرده و... بررسی می شود.

* تنشهای ایجاد شده در مخازن بنام تنشهای غشائی خوانده می‌شود که در دو جهت مماسی و نصف النهاری وارد می شود و هدف تعیین این تنشها است.

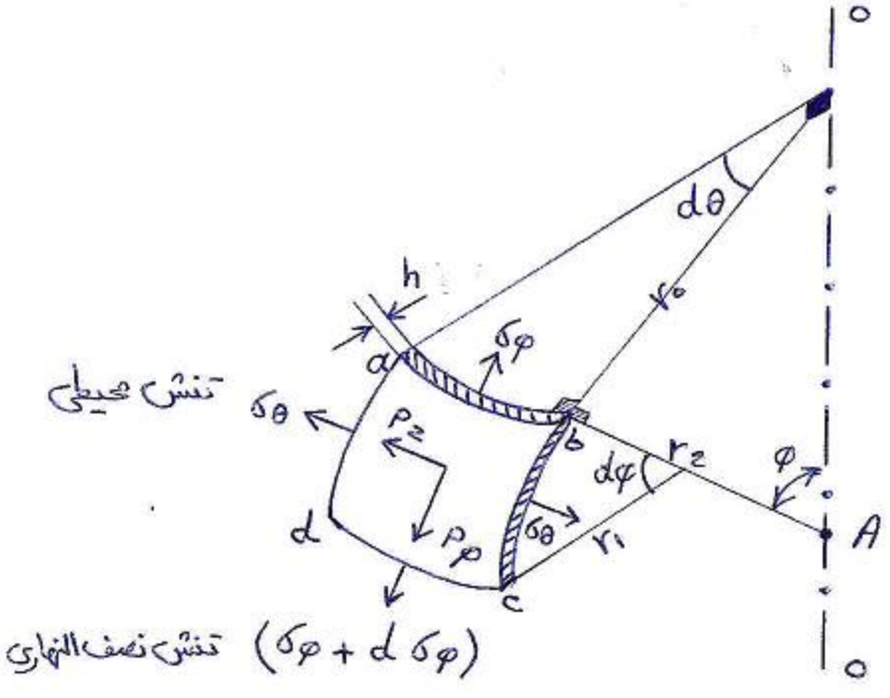
* فرض می شود که غشاء به محض قرار گرفتن تحت فشار داخلی فرم یکنواخت و قرینه ای نسبت به محور تقارن می یابد یا به عبارتی این مخازن از دوران یک سطح منحنی حول محور تقارن که روی آن سطح قرار دارد ایجاد می شود که مخازن دورانی نامیده می شود.

* برای یافتن روابط مقادیر تنشهای غشائی باید معادلات تعادل در مخازن دورانی جدار نازک نوشته شود.

* فرض می گردد یک مخزن با مخنی معینی داریم :



* المانی از سطح این مخزن را بررسی می کنیم :

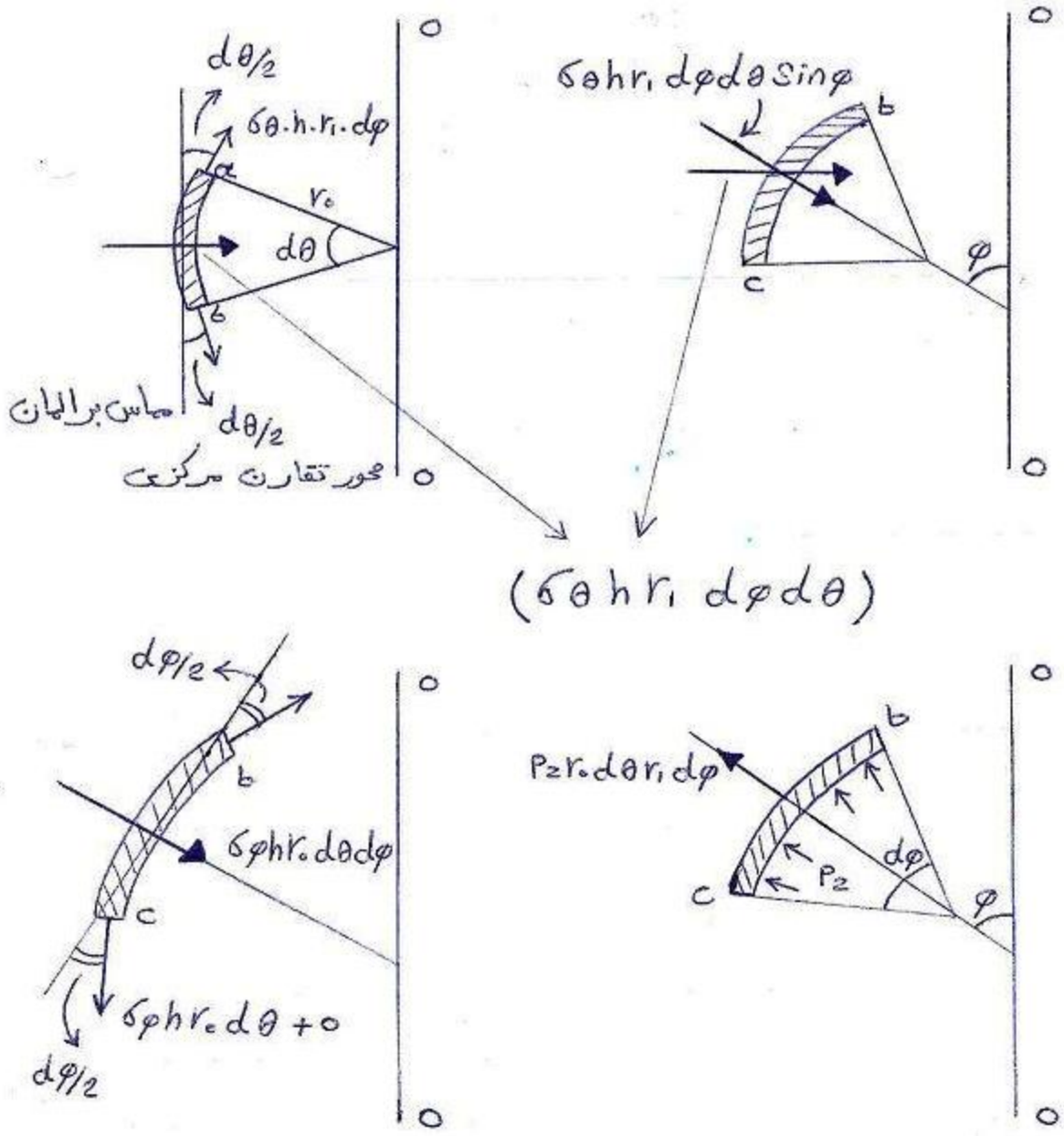


P_z عمود بر سطح مخنی
r_1 شعاع مخنی نصف النهاری
r_2 شعاع سطح خارجی مخزن

$$r_0 = r_2 \cdot \sin\varphi$$

* روابط تعادل را در دو جهت محیطی و نصف النهاری می نویسیم :

$$ab = r_0 \cdot d\theta$$
$$bc = r_1 \cdot d\varphi$$



فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

* با برآیند نیروها در جهت عمود بر سطح خواهیم داشت :

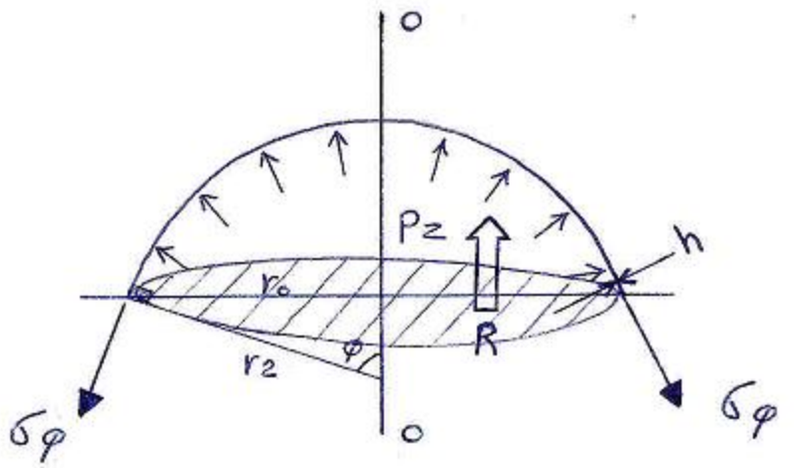
** $\sum F_n = 0$ تعادل استاتیکی

$$\sigma_\theta h r_1 d\varphi d\theta + \sigma_\varphi h r_0 d\varphi d\theta - P_z r_0 d\theta r_1 d\varphi = 0$$

$$r_0 = r_2 \sin\varphi \longrightarrow$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{r_1} + \frac{\sigma_\theta}{r_2} = \frac{P_z}{h} \qquad (1)$$

* در مخروط و استوانه $r_1 = \infty$ شده و ترم اوّل از میان می‌رود و معادله (به فرض معلوم بودن h) یک مجهوله می شود. امّا در حالت کلی معادله دو مجهولی است و نیاز به معادله (2) داریم.



R برآیند نیروهای ناشی از فشار داخلی.

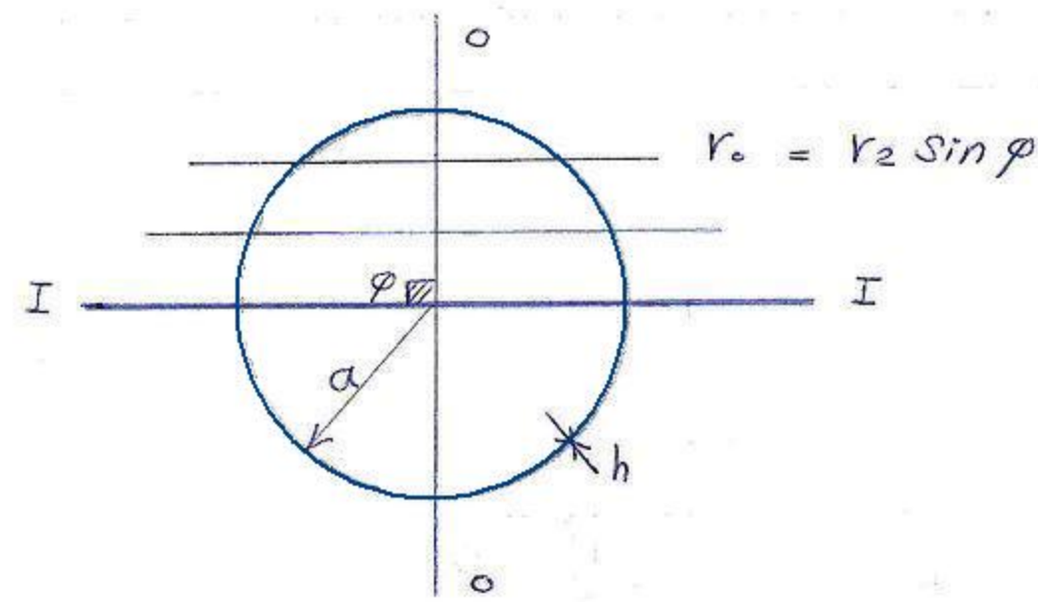
$$* \quad \overline{\Sigma} F_y = 0$$

$$\sigma_\varphi (2\pi r_0 . h) . \sin\varphi - R = 0$$

② $$\sigma_\varphi = \frac{R}{2\pi r_0 h \sin\varphi}$$

برای سطح مقطع دایروی

مثال - در یک مخزن کروی به شعاع a و فشار داخلی p - می خواهیم تنشهای فشاری را بیابیم . مقطع کروی از مرکز خود بریده می شود.



$r_2 = a$

$r_0 = a$

$r_1 = a$

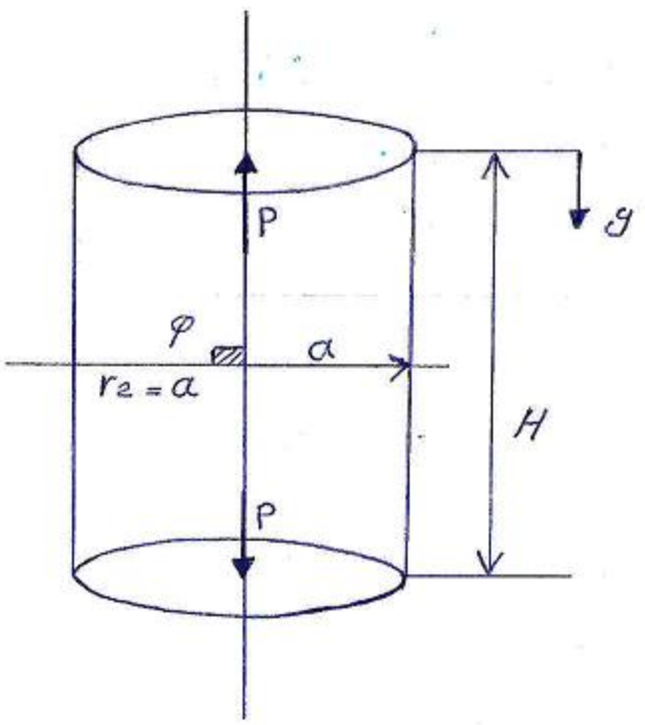
$$\left(\frac{\sigma_\varphi}{r_1} + \frac{\sigma_\theta}{r_2} = \frac{p_z}{h}\right) \qquad \left(\sigma_\varphi = \frac{p . \pi a^2}{2\pi r_0 h \sin\varphi}\right)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{pa}{2h}$$

$$\frac{pa^2}{a(2h)} + \frac{\sigma_\theta}{1} = \frac{pa}{h} \longrightarrow \sigma_\theta = \frac{pa}{2h}$$

*** در کره تنش نصف النهاری و تنش محیطی برابر است.

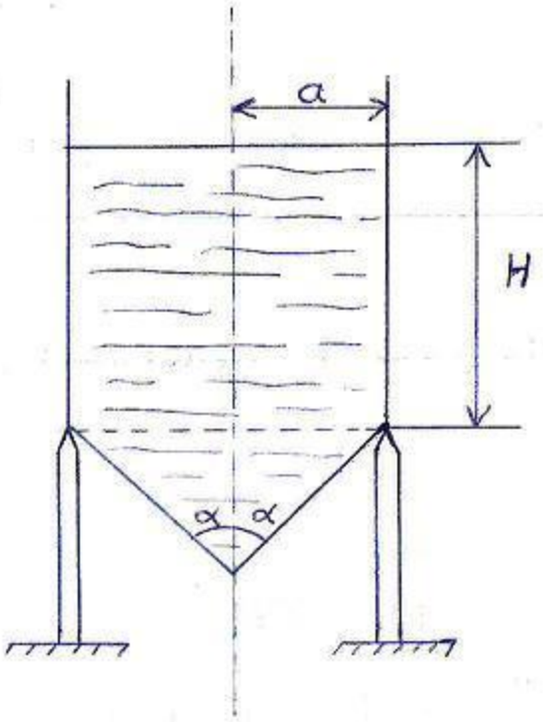
مثال - مخزن استوانه‌ای به شعاع داخلی r و فشار p.



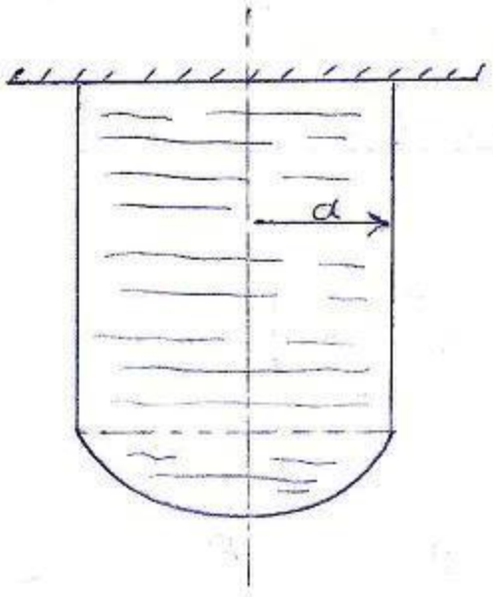
$$(r_1 = \infty) \longrightarrow \frac{\sigma_\theta}{a} = \frac{p}{h} \longrightarrow \sigma_\theta = \frac{pa}{h}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p \cdot \pi a^2}{2\pi a h} \longrightarrow \sigma_\varphi = \frac{pa}{2h}$$

تمرین - در مخازن ذیل مطلوبست p_x و θ_x در هر قسمت -
مخزن شامل استوانه ، مخروط و نیم کره . سیال -
داخل ۲ب با دانسیته γ است .

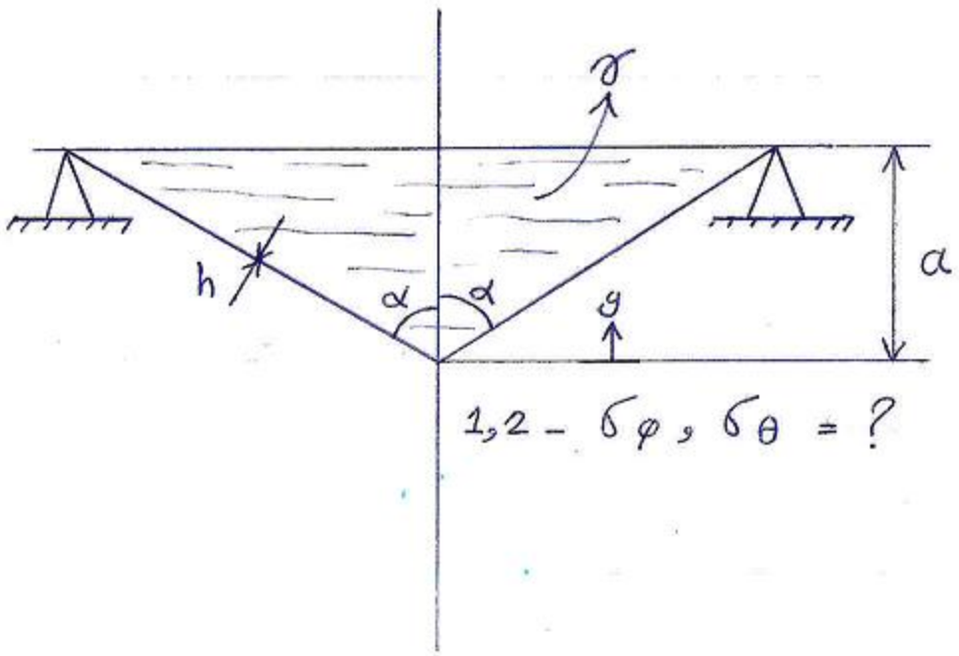


(استوانه و مخروط)



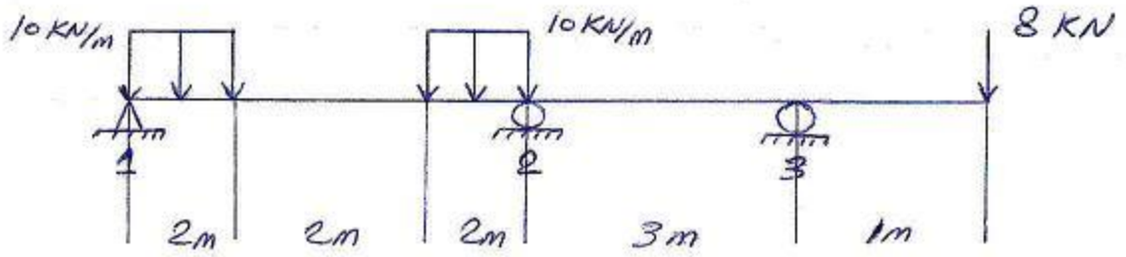
(استوانه و نیم کره)

3 - ثابت کنید تنش σ_φ که حداکثر در سه پهلو a واقع است.
4 - ثابت کنید تنش σ_θ که حداکثر در میانه راس محروط تا سطح مایع واقع می شود.

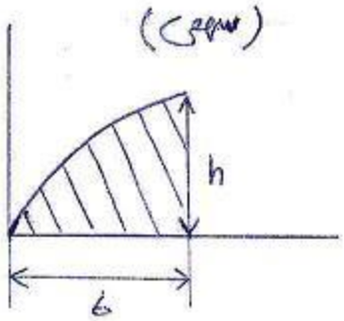


مثال - به روش سه ممان مطلوب است نمودار ممان - خمشی و نیروی برشی.

$$M_1 L_1 + 2M_2 (L_1 + L_2) + M_3 L_2 = -\frac{6A_1 \bar{X}_1}{L_1} - \frac{6A_2 \bar{X}_2}{L_2}$$



نکته -



$$S = \frac{2}{3} b \cdot h$$

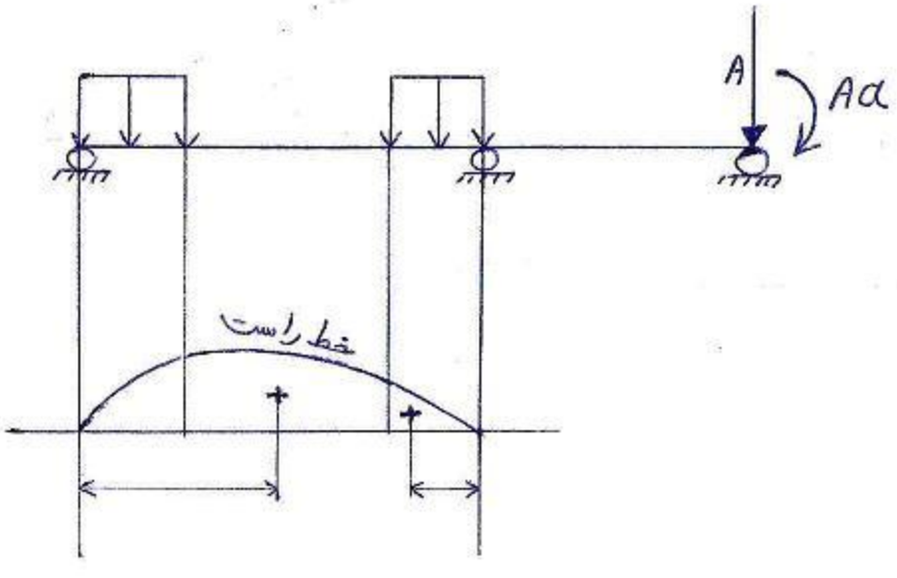
حل مثال قبل -

$M_1 = 0$

$M_2 \neq 0$

$M_3 = -A \cdot a$

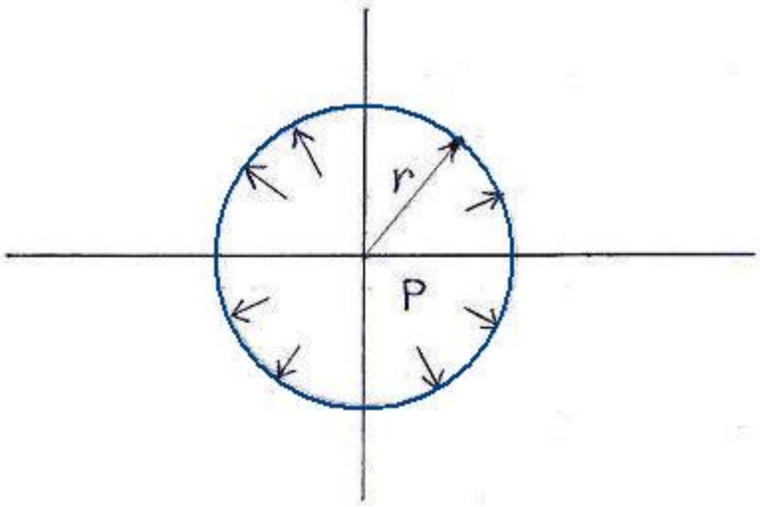
$\equiv$



** ردهنه دوم بارگذاری نداریم : $\frac{A_2 a_2}{L_2} = 0$

مسئله - کره‌ای به شعاع r تحت فشار داخلی P قرار دارد و ضخامت دیواره h است. ثابت کنید افزایش قطر این مخزن کروی مطابق رابطه ذیل است :

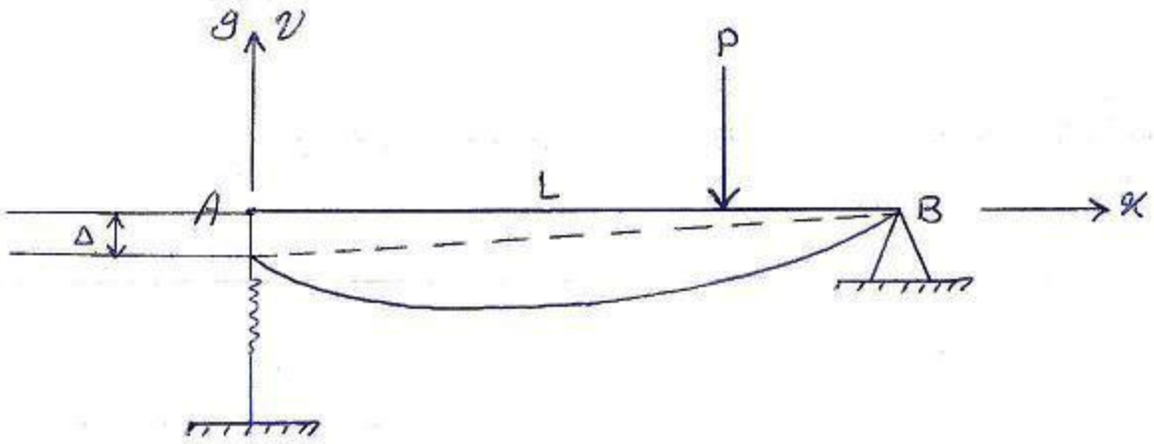
$$\Delta r = \frac{P r^2}{2 E h} \quad (1-2)$$



* کرنش تنها در جهت محیطی و نصف النهاری است.

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

مثال- به کمک توابع استثنائی خیز تیر را بیابید.



* هر جا فنر بود دیگر خیز صفر نیست بلکه :

$$* \quad F = K.x \quad \rightarrow \quad \underset{\Delta}{(x)} = \frac{F}{K}$$

$$* \quad EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

$$* \quad M(x) = \frac{Px}{3} - P\langle x - \frac{2L}{3}\rangle^1$$

$$\begin{cases} if \quad x < \frac{2L}{3} & = 0 \\ if \quad x > \frac{2L}{3} & \langle x - \frac{2L}{3}\rangle^1 \end{cases}$$

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x-a)^n & x > a \end{cases}$$

$$EIv = \frac{Px^3}{18} - \frac{P}{6}\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^3 + C_1 x + C_2$$

$$v(0) = -\frac{P}{3}K \longrightarrow C_2 = \frac{PEI}{3K}$$

$$v(L) = 0 \longrightarrow C_1 = \frac{PEI}{3KL} - \frac{4PL^2}{81}$$

$\Longrightarrow$ (بدست می‌آید v)

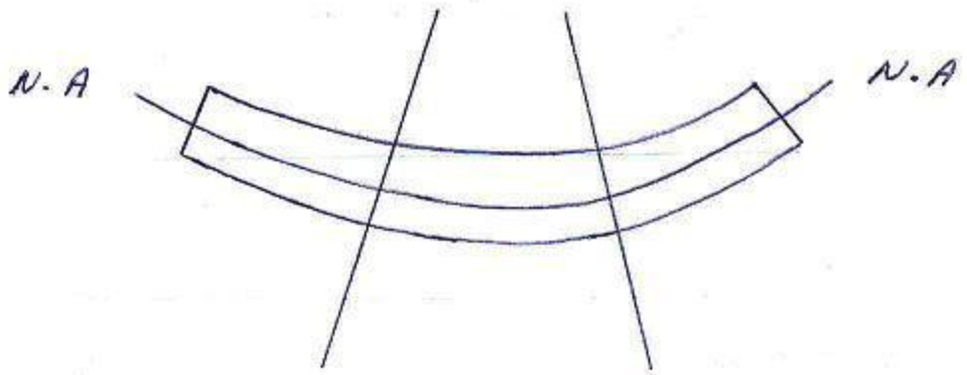
Curved Beams — تیرهای خمیده

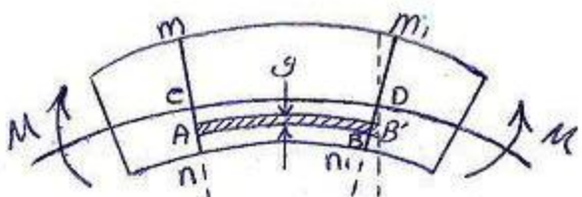
* اگر سطح مقطع یک تیر خمیده را در نظر بگیریم ارتفاع سطح مقطع را با h نشان می‌دهیم و یک شعاع خمش ρ_0 برای تیر خمیده - منظور می‌شود. اگر $\left(\frac{h}{\rho_0}\right)$ خیلی کمتر از 1 باشد به تیر خمیده (تیر خمیده با انحنای کم گفته) می‌شود و اگر این نسبت به 1 - نزدیک باشد برعکس. ما در مورد تیرهای خمیده با انحنای زیاد بحث می‌کنیم و هدف یافتن تنش در مقطع این تیرها و همینطور - کرنش است. بخاطر پیچیدگی در محاسبه تغییر مکان روش آن در فصل انرژی بحث می‌شود.

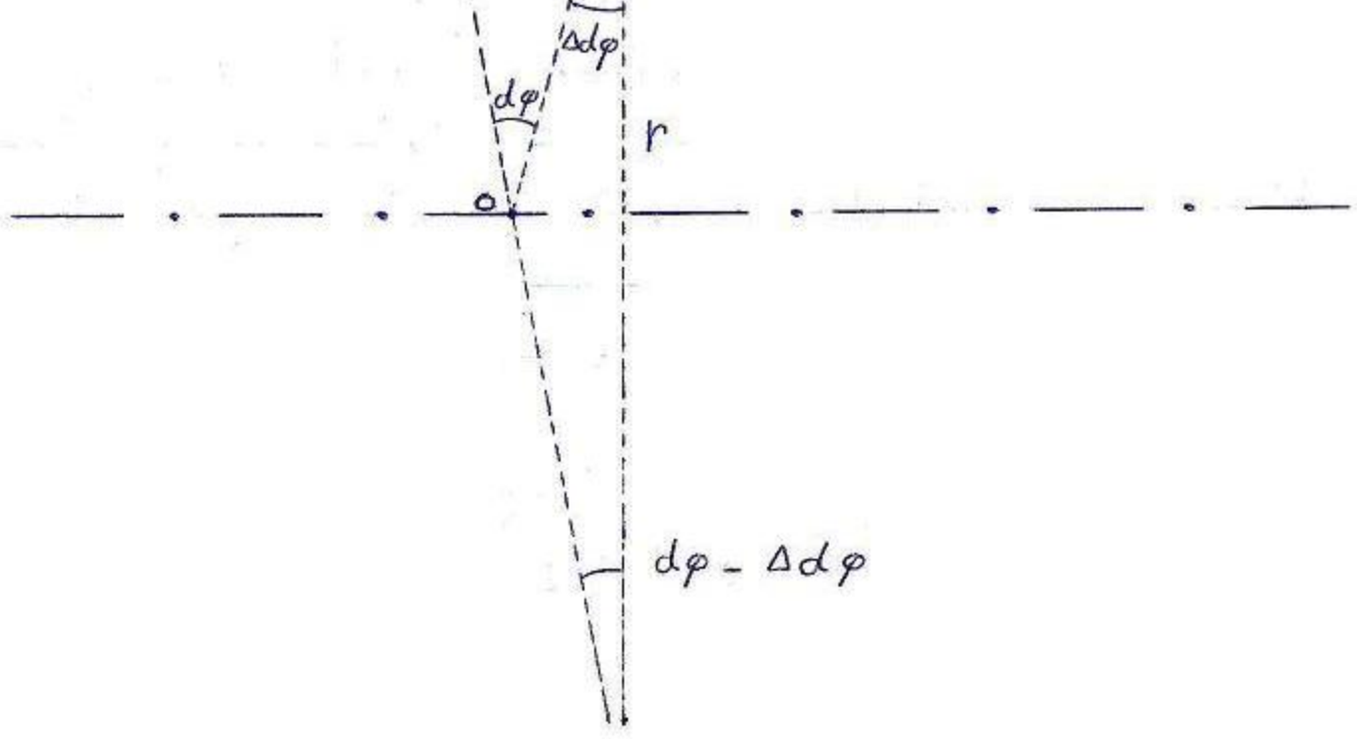
* در تیرهای قبلی (مستقیم) از رابطه $\left(\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}\right)$ استفاده - می‌شد که ρ شعاع خمش پس از بارگذاری است. امّا برای -

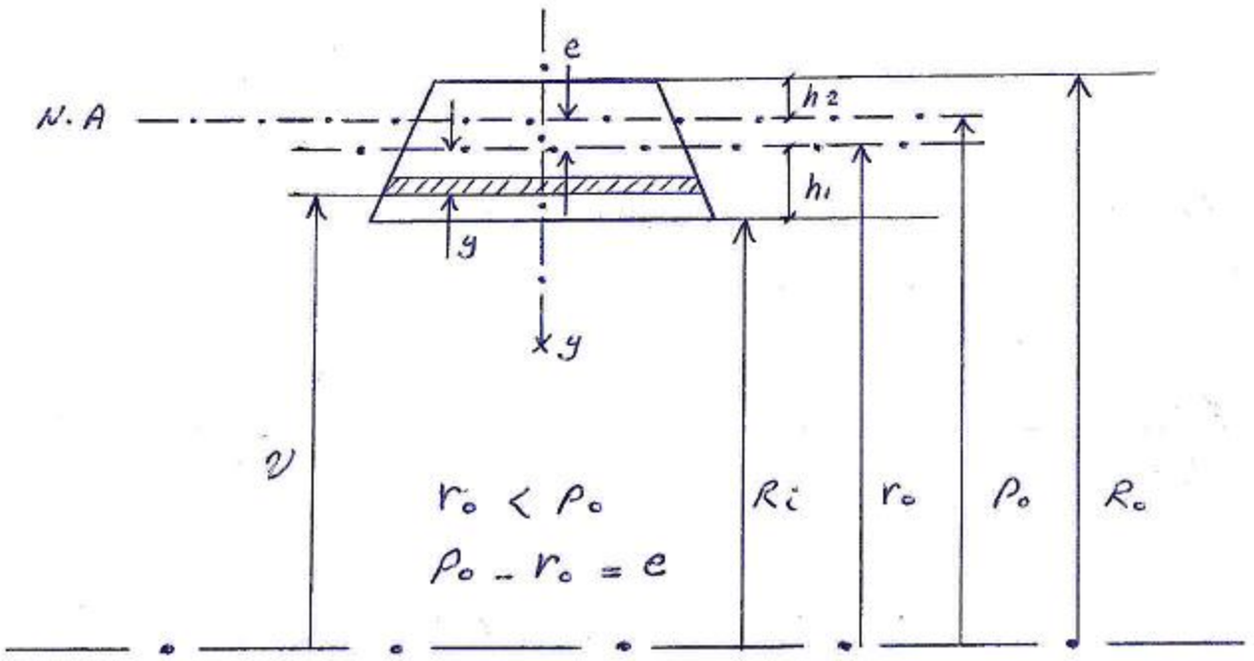
تیرهای خمیده حاریع : $\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI} \right)$

* برای یافتن رابطه میان تنش و کرنش با فواصل مشخص از تار خنثی مقطعی از تیر خمیده در نظر گرفته می شود :









r_0 = شعاع انحنای محور خنثی تیر خمیده

ρ_0 = شعاع انحنای اولیه تیر

R_i = شعاع نزدیکترین لایه

R_0 = شعاع دورترین لایه

* این قطعه مورد نظر درحد الاستیک بررسی می شود : $\sigma = E\,\varepsilon$ سطح $m,n,$ پس از بارگذاری بصورت مستقیم باقی می ماند. اگر ممان M باعث کاهش خمیدگی تیر شود جهت آن (+) است و جهت (+) لا همواره بطرف مرکز خمیدگی است. در لایه AB و با در نظر گرفتن تغییر طول BB' :

$$\varepsilon = \frac{BB'}{AB} = \frac{y \cdot \Delta d\varphi}{(r_0 - y)\, d\varphi}$$

* برای طول CD می توان روابط ذیل را نوشت :

$$\begin{cases} CD = (d\varphi - \Delta d\varphi) \cdot r \\ CD = r_0 \cdot d\varphi \end{cases}$$

* در نتیجه داریم : $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$

* با جایگذاری نسبت $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ در رابطه ε داریم :

$$\varepsilon = \frac{y}{r_0 - y} \left[r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right]$$

* طبق قانون هوک :

$$\sigma = E\,\varepsilon = \frac{E y}{r_0 - y} \left[r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \right]$$

* با ملاحظه دو رابطه فوق چون y در خرج این دو رابطه قرار دارد لذا تغییرات کرنش و تنش در سطح مقطع تیر برحسب y خطی می باشد و اگر مقدار y نسبت به r_0 خیلی کوچک باشد ($r_0 \gg y$) داریم :

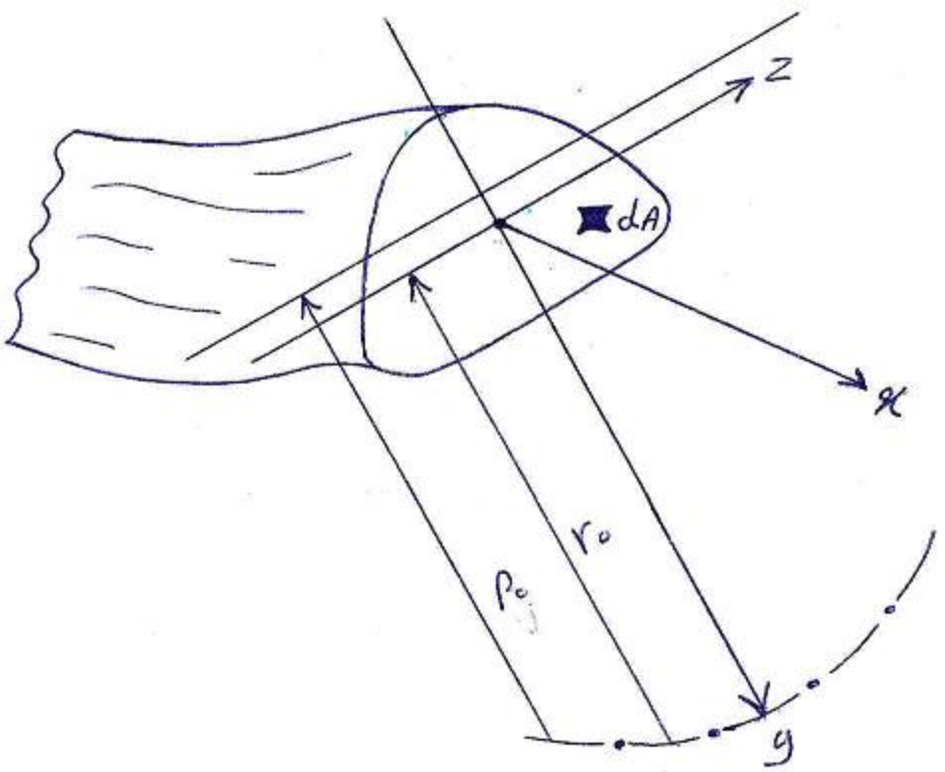
$$\sigma = E \cdot y \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

* اگر r_0 مقدار زیادی باشد : $\left(\frac{1}{r_0} \approx 0\right)$

$$\sigma = -E\frac{\vartheta}{r}$$

* که این همان رابطه تیرهای مستقیم است .

* برای ساده کردن محاسبات تنش فرض می کنیم سطح مقطع نسبت به محورها متقارن باشد :



* در المان dA تنش نرمال σ اثر می کند . نیروی وارده به سطح المان :

$$dN = \sigma \cdot dA$$

* با انتگرال گیری روی سطح مقطع : $N = \int_A \sigma \cdot dA$

* ممان حاصل از N حول محور z : $M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$

* بدلیل بارگذاری ممان خالص مقدار N در نهایت صفر خواهد شد.

* با جایگذاری رابطه σ در روابط N و M :

$$N = E r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \int_A \frac{y\, dA}{r_0 - y}$$

$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \int_A \frac{y^2 dA}{r_0 - y}$$

* چون مقدار N برابر صفر است لذا : $\int_A \frac{y\, dA}{r_0 - y} = 0$

* که با تغییر متغیر $v = r_0 - y$:

$$\int_A \frac{r_0 - v}{v} dA = 0$$

* که با توجه به شکل هندسی سطح مقطع r_0 محاسبه می شود.

$$r_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{v}}$$

* در رابطه ممان :

$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\left[\int_A -y\,dA + r_0 \int_A \frac{y\,dA}{r_0 - y}\right]$$

($\int_A -y\,dA = 0$)

$$M = E r_0 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \cdot A \cdot e$$

$$\sigma = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r_0 - y}$$

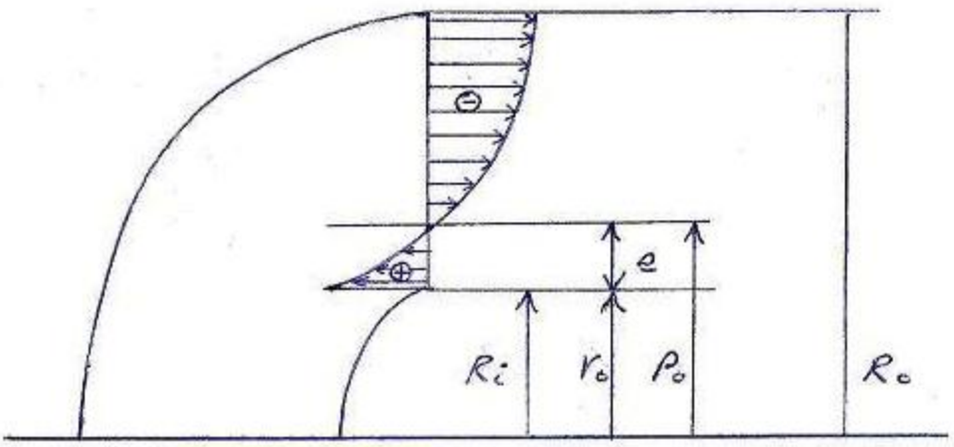
* با توجه به فواصل نزدیکترین و دورترین لایه از محور مرکزی :

* $\sigma_i = \dfrac{M \cdot h_1}{A \cdot e \cdot R_i}$

* $\sigma_0 = \dfrac{-M \cdot h_2}{A \cdot e \cdot R_0}$ (-) (چون طبق جهت ما تنش فشاری است.)

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

توزیع تنش :

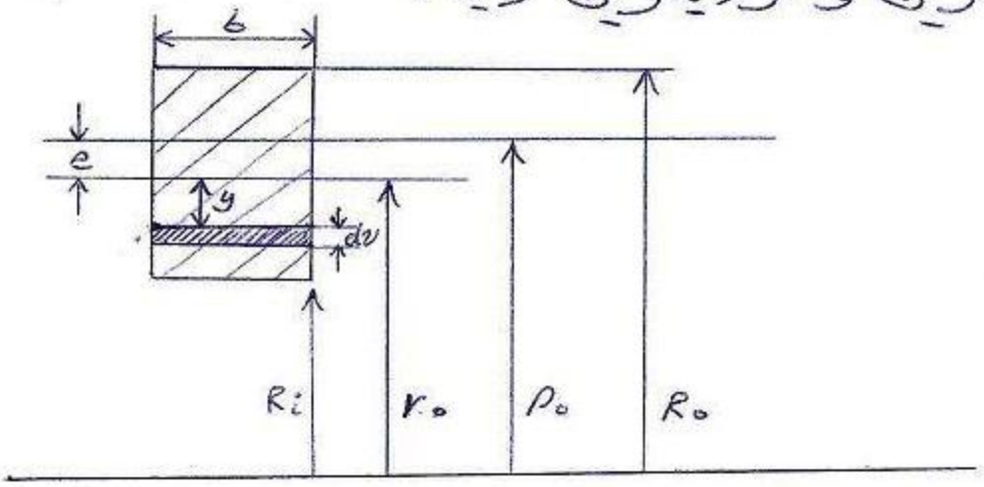


* بطور تقریبی می توان e را از رابطه ذیل محاسبه کرد :

** $e \simeq \frac{I}{P_0 \cdot A}$ (تا سه رقم اعشار محاسبه شود)

(I ممان اینرسی سطح مقطع نسبت به محور z ها است)

مثال- در یک تیر خمیده با مقطع مستطیل مطلوبست نسبت تنش - دورترین و نزدیکترین لایه.



$$\int \frac{dA}{v} = \int_{Ri}^{R_o} \frac{b\,dv}{v} = b \int_{Ri}^{R_o} \frac{dv}{v} = b \ln \frac{R_o}{Ri}$$

$$r_o = \frac{b \cdot h}{b \ln \frac{R_o}{Ri}} = \frac{h}{\ln \frac{R_o}{Ri}}$$

$$\sigma_i = \frac{M h_1}{A \cdot e \cdot Ri} \longrightarrow$$

$$\sigma_o = \frac{M h_2}{A \cdot e \cdot R_o}$$

$$\left| \frac{\sigma_i}{\sigma_o} \right| = \frac{h_1 R_o}{h_2 Ri}$$

$Ri = 3''$ $\quad$ $\rho_o = 5''$

$R_o = 7''$ $\quad$ $h = 4''$

$$e = 5 - \frac{4}{\ln \frac{7}{3}} = 0.280''$$

$$h_1 = 2 - 0.28$$

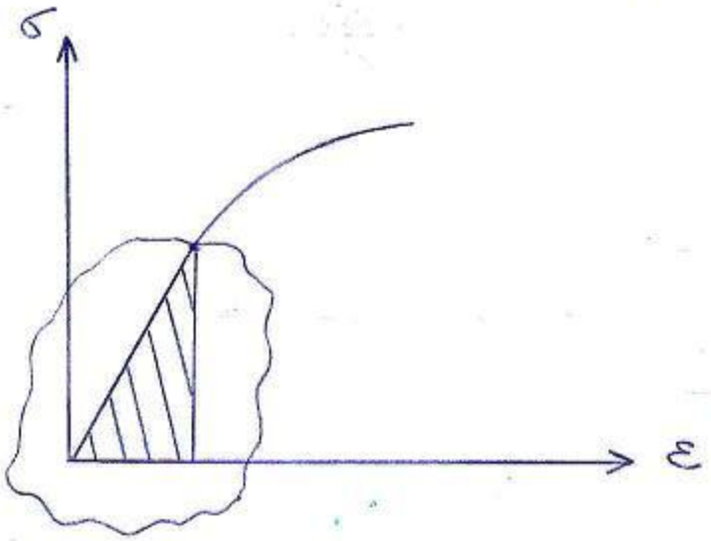
$$h_2 = 2 + 0.28$$

مسئله - برای یک دایره به شعاع R (سطح مقطع یک تیر خمیده دایروی) ثابت کنید:

$$e = \frac{1}{2} \left(\rho_o - \sqrt{\rho_o^2 - R^2} \right)$$

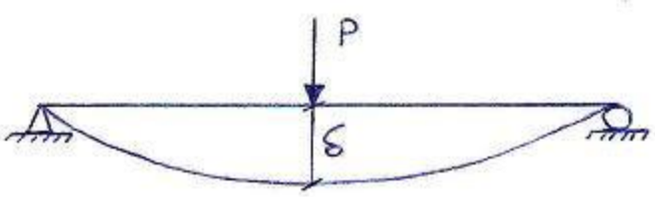
روش انرژی

* انرژی تغییر مکان الاستیک :



$(\sigma = E.\varepsilon)$

(انرژی درحد الاستیک) $= \frac{1}{2}\ \sigma.\varepsilon$



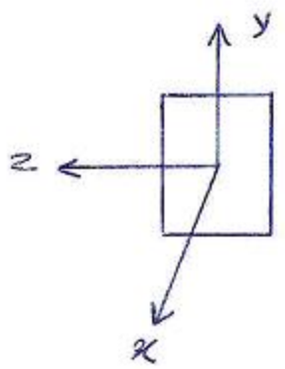
** برای تغییر مکان δ چه مقدار انرژی لازم داریم ؟!!

* انرژی تغییر مکان الاستیک که به آن انرژی پتانسیل هم می‌گویند به منظور محاسبه تغییر مکان تیرها استفاده می شود و مقدار انرژی در حد الاستیک برای سیستم مورد بررسی ($\frac{1}{2}$ ۶.٤) با توجه به قانون هوک خواهد بود. لازم است تمامی نیروهای داخلی موجود در سیستم شناسائی و محاسبه شود تا بتوان انرژی مورد بحث را محاسبه نمود. یافتن این نیروها از طریق برش یا مقطع میسر است درحالت کلی مقدار انرژی تغییر مکان در حد الاستیک بصورت زیر خواهد بود :

$$* \quad U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \, dx \, dy \, dz$$

* دراین حالت می توان معادله فوق را ساده نمود :

$$* \quad U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \gamma_{xy} \tau_{xy}) \, dx \, dy \, dz$$



* با جایگذاری روابط الاستیک ذیل :

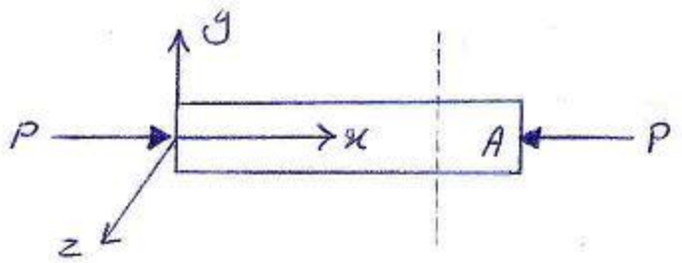
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

* خواهیم داشت :

$$U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dx\,dy\,dz + \iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\, dx\,dy\,dz$$

1- انرژی پتانسیل در بار محوری :

قطعه مورد نظر تحت بار محوری P قرار داشته و سطح مقطع A می باشد.



$$\iint_A dy\,dz = A \qquad \begin{cases} \sigma_x = P/A \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

$$U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dx\,dy\,dz = \int_x \frac{P^2}{2EA^2} \underbrace{\iint_A dy\,dz}_{A}$$

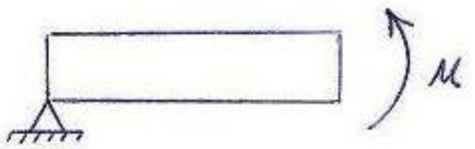
$$U = \int_x \frac{P^2}{2AE}\,dx$$

* اگر $P, A = Cte$:

$$\left(U = \frac{P^2 . L}{2AE} \right)$$

2- **خمش** :

در این حالت $\sigma_x = -\frac{My}{I}$ که با جایگذاری این رابطه در رابطه U خواهیم داشت :



$$U = \iiint_V + \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dx\, dy\, dz$$

$$U = \iiint_V \frac{1}{2E}\left(-\frac{My}{I}\right)^2 dx\, dy\, dz$$

$$U = \int_x \frac{M^2}{2EI_x}\underbrace{\left[\iint_A y^2\, dy\, dz\right]}_{I}\, dx$$

$$U = \int_x \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

* اگر M و I تابع x نباشند :

$$\left(U = \frac{M^2 L}{2EI}\right)$$

فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

3 - پیچش :

* در این حالت داریم : $\tau = \frac{T \cdot \rho}{J}$

$$U = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G} \, dx\,dy\,dz$$

$$U = \int_x \frac{T^2}{2GJ^2} \left[\iint_A \rho^2 \, dy\,dz \right] dx$$

$$U = \int_x \frac{T^2}{2GJ} \, dx$$

* اگر J و T تابع x نباشند : $\left(U = \frac{T^2 \cdot L}{2GJ} \right)$

---

4 - برش ساده

در این حالت : $\tau = \frac{V Q}{I t}$

$$U = \iiint_V \frac{V^2 Q^2}{2G I^2 t^2} \, dx\, dy\, dz$$

$$U = \int_x \frac{V^2}{2G I^2} \left[\iint_A \frac{Q^2}{t^2} \, dy\, dz \right] dx$$

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{t^2} \underbrace{dy\, dz}_{dA}$$

$$U = \int_x \frac{f_s V^2}{2GA} \, dx$$

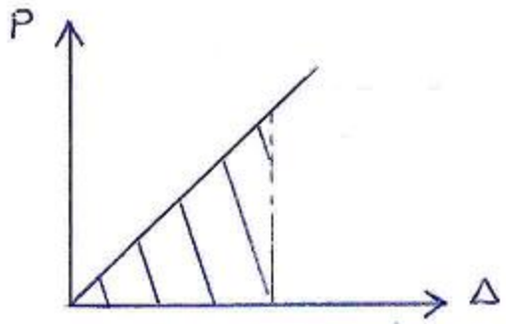
* مقادیر (f_s) :

شکل مقطع	ضریب f_s
مستطیل	6/5
دایره	10/9
دایره توخالی	2
مستطیل توخالی و I	A/A_{web}

↓

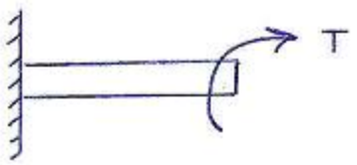
(مساحت جان تیر)

* به کمک انرژی پتانسیل می توان تغییر مکان سیستم را یافت. می دانیم کار انجام شده در یک سیستم طبق اصل بقای انرژی برابر تغییرات انرژی درهان سیستم است. کار انجام شده در یک سیستم برابر با کار انجام شده توسط نیروهای خارجی است درحالتی که بار به آرامی وارد گردد. لذا میزان انرژی مصرف شده از رابطه $(\frac{1}{2} P.\Delta)$ بدست می آید.



** $(We = \frac{1}{2} P.\Delta)$ (external work)

یا مثلاً:



$(We = \frac{1}{2} T.\varphi)$

$W_{int} = U$

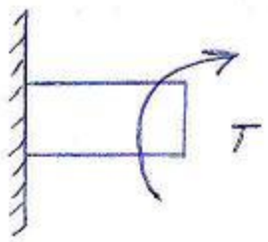
$We = Win$ ⟶ تغییر مکان بدست می آید

مثال 1) درحالت نیروی محوری داریم :

$$\begin{cases} We = \frac{1}{2} P \cdot \Delta \\ Wint = U = \frac{P^2 L}{2AE} \end{cases} \xrightarrow{We = Wint}$$

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

مثال 2) درحالت پیچش :

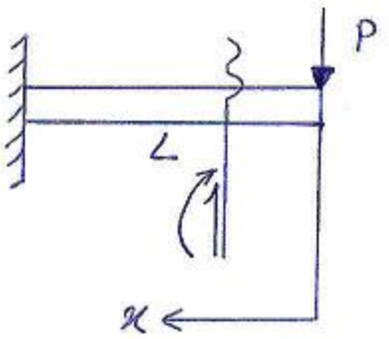


$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \longrightarrow$$

$$We = \frac{T\varphi}{2}$$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ}$$

مثال 3) تغییر مکان انتهای تیر را بیابید.



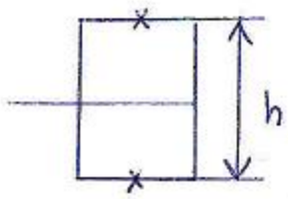
1) (انرژی خمشی) $M = -P.x$

$$U_{\text{خمش}} = \int_0^L \frac{(-Px)^2}{2EI}\, dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

2) (انرژی برشی)

$$U_{\text{برش}} = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\, dx\, dy\, dz$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad , \quad \tau = \frac{V}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$



$$U_{\text{برش}} = \frac{3P^2L}{5AG}$$

$$\begin{cases} U_{\text{کل}} = \dfrac{P^2L^3}{6EI} + \dfrac{3P^2L}{5AG} = W_{int} \\ W_e = \dfrac{1}{2} P.\delta \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6\ PL}{5\ AG}$$

* می توان از انرژی برش مستقیم (ترم دوم) صرفنظر کرد و به همان جواب قبلی رسید.

تئوری کاستیلیانو

* تئوری اول :

* در تئوری اول کاستیلیانو رابطه ذیل را داریم :

$$\left(P_n = \frac{\partial U}{\partial \delta_n}\right)$$

* یعنی : اگر جسمی در حالت الاستیک تحت بارهای مختلف در حال تعادل باشد و به جسم تغییر مکانی داده شود کار انجام شده توسط همه نیروهای خارجی بصورت انرژی U در جسم ذخیره می گردد. اگر تغییر مکان کوچک $d\delta_n$ در جهت بار واقع گردد در همان نقطه نیروی P_n واقع می شود و نیروهای دیگر کاری انجام نمی دهند.

---

* تئوری دوم :

$$\left(\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \right)$$

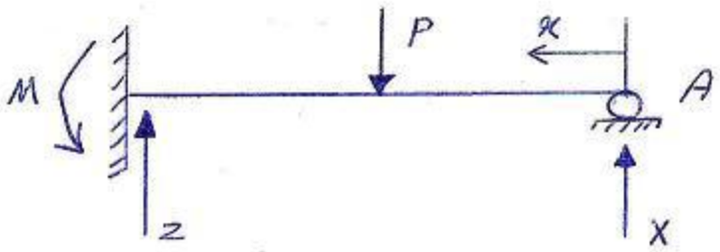
در این حالت اگر نیروی P به سیستم وارد شود انرژی U در آن ذخیره می شود و نسبت تغییرات انرژی به علت تغییر کوچک در یکی از بارها برابر با تغییر مکان سیستم در محل آن بار می باشد.

مثال - با توجه به مثال قبلی می توان تغییر مکان انتهای تیر را از روش کاستیلیانو بدست آورد.

$$U = \frac{P^2 L^3}{6EI} \longrightarrow \delta = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

* از این تئوری در حل مسائل نامعین استفاده می شود.
مثلاً در تیر ذیل تغییر مکان در تکیه گاه A صفر است:

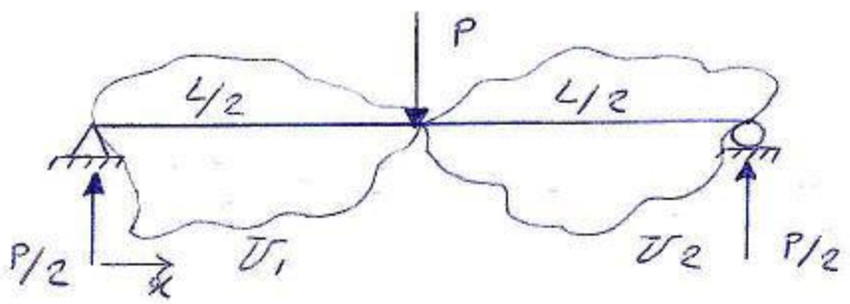


** $U = f(P, X)$

$$\left[\delta_A = \frac{\partial U}{\partial X} = 0\right]$$ «معادله اضافی»

** $M = M(x)$

مثال - با استفاده از روش انرژی تغییر مکان وسط تیر را بیابید.



* هرجا در مسئله حرفی نزدند تنها انرژی خمش را در نظر می گیریم.

* $M = P/2 \cdot x$

* $\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial R}\right)_{x/2}$

* $U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial M} = \int \frac{M dx}{EI}$

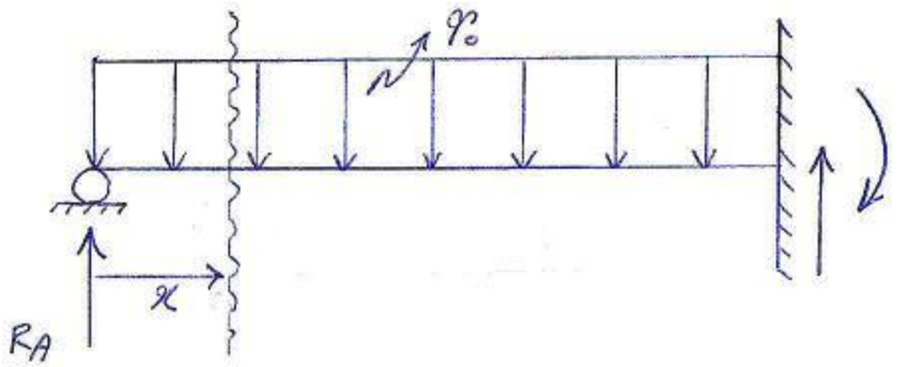
* $\delta = \int_0^L \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{x/2} dx$

* $\delta = 2\int_0^{L/2} \frac{(Px/2)}{EI} \cdot \frac{x}{2} \cdot dx$

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

* می توان از اوّل x را نسبت به P مشتق گرفت.
(راه دوّم)

مثال) در تیر نامعین ذیل مطلوبست نیروی تکیه‌گاه A.



$$M(x) = R_A \cdot x - q_0 x^2/2$$

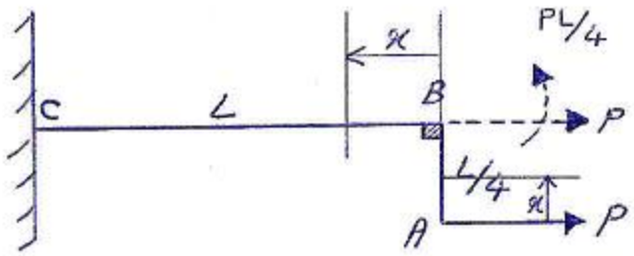
$$\delta_A = 0 = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial R_A} \, dx$$

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = + x$$

$$\delta_A = 0 = \frac{1}{EI} \int_0^L (R_A \cdot x - q_0 x^2/2) \, x \, dx$$

$$R_A = \frac{3 q_0 L}{8}$$

مثال) مطلوبست تغییر مکان نقطه A .



* از تغییر طول ناشی از ممان صرفنظر می شود . (برای BC)

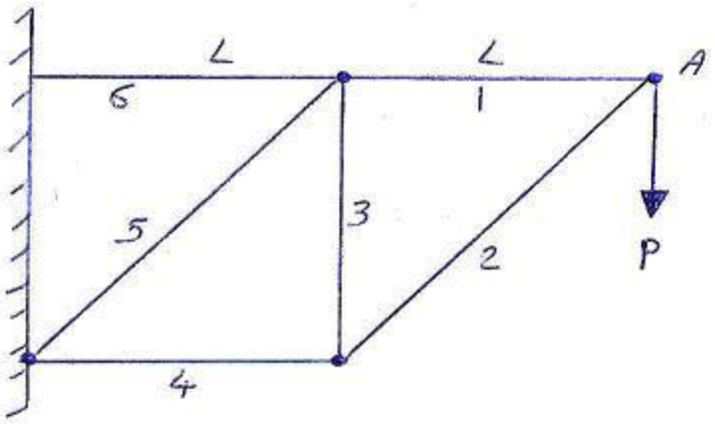
* $(U_{کل} = U_{AB} + U_{BC})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_{AB}}{\partial P} = \dfrac{1}{EI} \displaystyle\int_0^{L/4} (Px)\, x\, dx \\ \dfrac{\partial U_{BC}}{\partial P} = \dfrac{1}{EI} \displaystyle\int_0^{L} \dfrac{PL}{4} \cdot \dfrac{L}{4}\, dx \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$$\left(\frac{\partial U_{کل}}{\partial P} \right) \longrightarrow \delta_A = + \frac{13\, PL^3}{192\, EI}$$

مثال) مطلوبست تغییر مکان عمودی نقطه A .



* در خرپا تنها نیروی محوری داریم و لذا تنها انرژی محوری داریم :

$$U_{کل} = U_1 + U_2 + \cdots + U_6$$

$U_1 \downarrow P_1$ $\quad U_2 \downarrow P_2$ $\quad U_6 \downarrow P_6$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_A \Big)_{Vertical}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \delta_A \Big)_{Horizental}$$



	N_i	U_i
1	P	$\frac{P^2L}{2AE}$
2	$-P\sqrt{2}$	$\frac{2P^2L\sqrt{2}}{2AE}$
3	P	$\frac{P^2L}{2AE}$
4	$-P$	$\frac{P^2L}{2AE}$
5	$-P\sqrt{2}$	$\frac{2P^2L\sqrt{2}}{2AE}$
6	$2P$	$\frac{4P^2L}{2AE}$

$$U_{کل} = \frac{P^2L}{2AE}\,(7 + 4\sqrt{2})$$

$$\delta_A = \frac{PL}{AE}\,(7 + 4\sqrt{2})$$

تئوری اثر متقابل

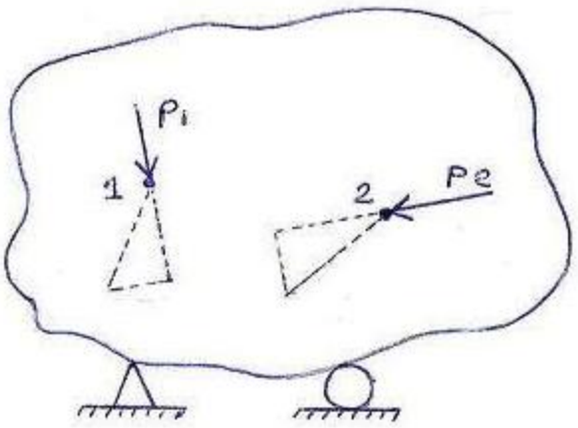
* برطبق این تئوری می توان رابطه زیر را نوشت که در آن α ضریب تناسب است : $(\alpha_{mn} = \alpha_{nm})$

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس گرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

$$\delta = \alpha \cdot P$$

δ ← تغییر مکان
P ← نیرو



* در جسم فوق ابتدا تنها نیروی P_1 را وارد می کنیم و طبق رابطه ② $P_1\alpha_{11}$ را می یابیم (تغییر مکان در نقطه 1) و همینطور $P_1\alpha_{21}$ را هم می یابیم. کار انجام شده توسط P_1 در محل نقطه (1) می شود $\frac{1}{2}P_1(P_1\alpha_{11})$ و کار انجام شده در محل (2) برابر صفر است (بعلت وجود نداشتن نیروی مورد نظر در این نقطه). سپس نیروی P_2 را اعمال کرده و $P_2\alpha_{22}$ و $P_2\alpha_{12}$ را می یابیم و مقدار کار انجام شده $\frac{1}{2}P_2(P_2\alpha_{22})$ در محل نقطه (2) است و در محل نقطه (1) $P_1(P_2\alpha_{12})$ است. کار کل انجام شده بصورت زیر است:

$$\left(U = \frac{1}{2}P_1^2\alpha_{11} + P_2P_1\alpha_{21} + \frac{1}{2}P_2^2\alpha_{22}\right)$$

* در مرحله بعد ابتدا نیروی P_2 و بعد P_1 وارد می گردد و U برابر می شود با :

* $$U = \frac{1}{2} P_1^2 \alpha_{11} + P_2 P_1 \alpha_{21} + \frac{1}{2} P_2^2 \alpha_{22}$$

* لذا $(\alpha_{12} = \alpha_{21})$ است .

اصل کار مجازی

* سیستمی را در حالت تعادل استاتیکی در اثر نیروهای خارجی و موجود در تکیه گاه در نظر می گیریم و فرض می کنیم در حالت تعادل خود تغییر مکان مجازی بدهد ولذا نیروهای حقیقی تغییر مکان مجازی خواهند داشت و یا می توان به نیروهای مجازی تغییر مکان حقیقی اعمال کرد. کل کار - مجازی مطابق رابطه ذیل محاسبه می شود :

$$dW_e = dW_r + dW_d$$

* که در آن dW_r ناشی از تغییر مکان [illegible] انتقالی یا - دورانی است و در این درس صفر است و dW_d کار انجام شده در اثر تغییر شکل است : $(dW_e = dW_d)$

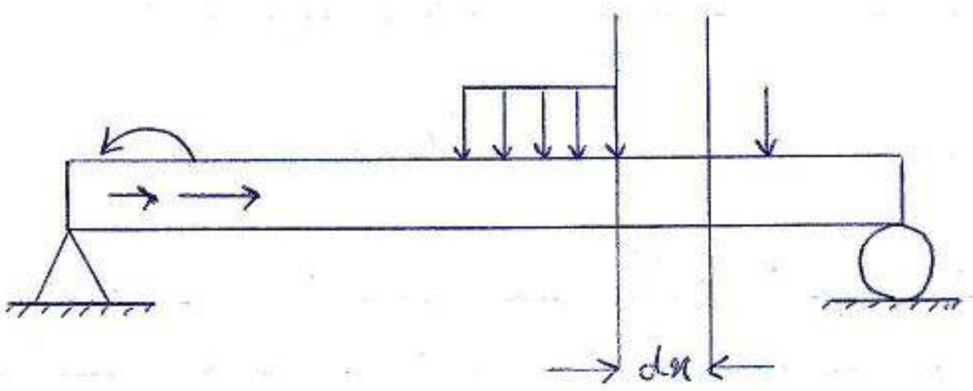
$$\int dW_e = \int dW_d$$

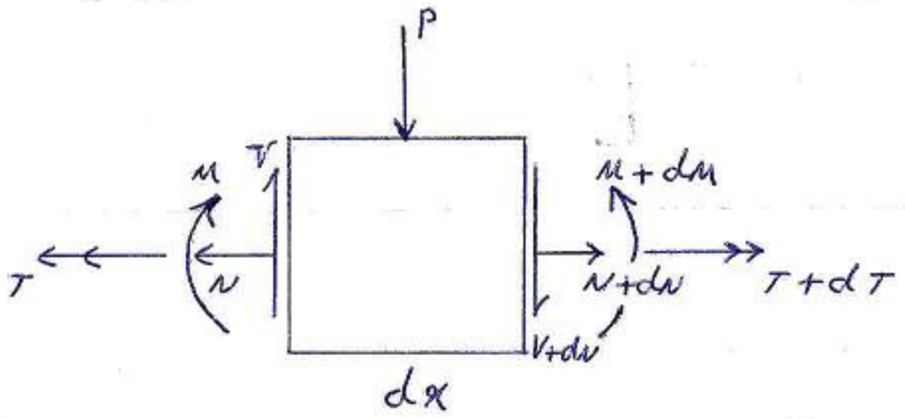
کار انجام شده در اثر نیروهای خارجی

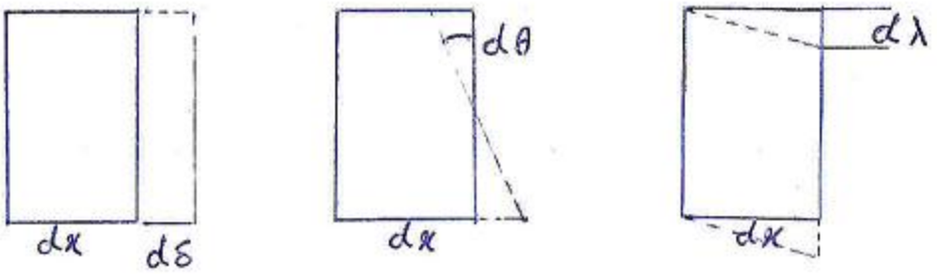
کار ناشی از تغییر شکل

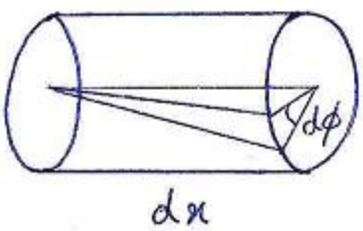
$$\left(W_{EXT.} = W_{INT.} \right)$$

* پس : اگر یک سازه یا جسم تابل تغییر شکل در حالت تعادل استاتیکی تغییر شکل مجازی یا بد کار مجازی انجام شده توسط نیرو های خارجی برابر کار مجازی انجام شده توسط نیروهای داخلی است. تغییر مکان مجازی در جهت بار (+) فرض می شود و در حالت ممان کار- مجازی حاصلضرب ممان در زاویه انحنای مجازی است و در حالت کلی :









$$* \quad W_{INT} = \int N \cdot d\varepsilon + \int M d\theta + \int V \cdot d\lambda + \int T d\phi$$

$(d\varepsilon \text{ و } d\theta \text{ و } d\lambda \text{ و } d\phi \text{ مجازی هستند .})$

UNİT LOAD روش بار واحد

* برای استفاده از این روش از اصل کار مجازی استفاده می شود و می توان تغییر مکان تیرها، خرپاها و تیرهای خمیده را بدست آورد و می تواند برای سیستمهای معین و نامعین بکار رود.

* در یک سازه دو سیستم بارگذاری را باید در نظر گرفت:

1- سیستم اول که در آن سازه تحت بارهای واقعی است. و می توان تغییر مکانها را بدست آورد.

2- در سیستم دوم سازه تحت تاثیر بار واحد مجازی قرار می گیرد و در جهت تغییر مکان مورد نیاز اثر می نماید.

* وقتی بار واحد به سازه وارد می گردد تنشهای حاصله بصورت زیر تعریف می گردد:

$$(T_u \, , \, V_u \, , \, M_u \, , \, N_u)$$

* اگر تغییر شکل حقیقی سازه در سیستم اول را به عنوان تغییر مکان در سیستم دوم متظور کنیم کار مجازی توسط بار مجازی انجام می شود (بار واحد) و مقدار آن حاصلضرب بار واحد در Δ است :

$$\left(W_{EXT} = 1 . \Delta \right)$$

* کار مجازی داخلی نتیجه بدست آمده از تنشها در سیستم دوم و عمل آن نهاست و تغییر شکل مجازی سیستم دوم همان تغییر شکل حقیقی سیستم اول در اثر بارهای واقعی است و داریم :

$$W_{INT} = \int N_u \, d\delta + \int M_u \, d\theta + \int V_u \, d\lambda + \int T_u \, d\varphi$$

$$= 1 . \Delta$$

$$\Delta = \int N_u . d\delta + \int M_u \, d\theta + \int V_u \, d\lambda + \int T_u \, d\phi$$

** با استفاده از روابط ذیل :

$$d\delta = \frac{N_L . dx}{AE}$$

$$d\lambda = \frac{\alpha_s V_L \, dx}{AG}$$

$$d\theta = \frac{M_L \, dx}{EI}$$

$$d\varphi = \frac{T_L \, dx}{GJ}$$

* داریم : با جایگذاری در رابطه Δ آن را محاسبه می کنیم .

* اندیس L برای بررسی سیستم تحت بارگذاری واقعی می باشد . معمولاً پیچش و برش و بارمحوری را حذف کرده و تنها از خمش (M_L و M_u) - استفاده می کنیم :

$$\Delta = \int \frac{M_u M_L}{EI} \, dx$$

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

* ضرایب برش α_s :

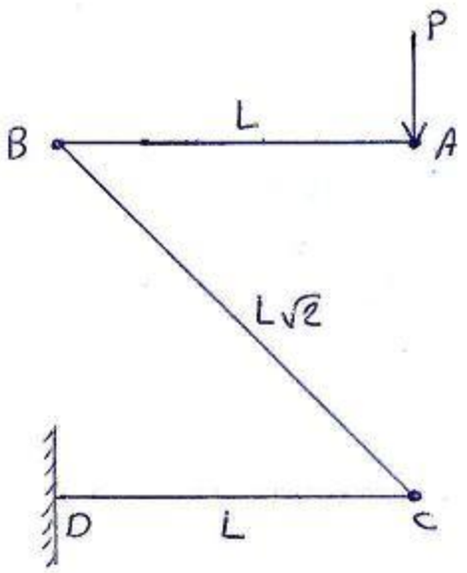
مستطیل ⟵ $3/2$

دایره ⟵ $4/3$

دایره توخالی ⟵ 2

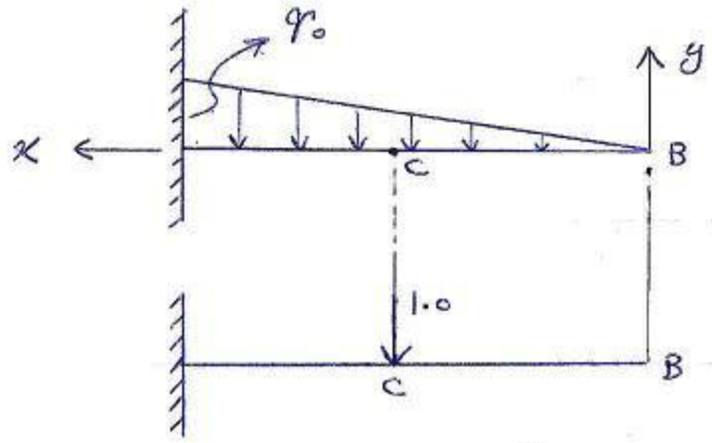
مستطیل توخالی و I ⟵ $\frac{A}{A_{web}}$

(تکلیف)



$(\delta A)_V$ و $(\delta B)_V$ و $(\delta C)_V$ را از روش بار واحد و روش انرژی بیابید. همینطور (θ_C و θ_B و θ_A) همینطور $(h_C)_h$ و $(\delta B)_h$ و $(\delta A)_h$.

مثال) به روش بار واحد تغییر مکان در وسط تیر را بیابید.



$$M_L = \frac{1}{2} q_0 x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

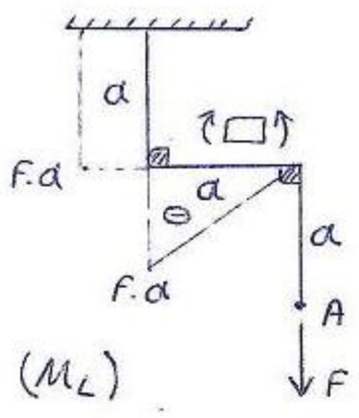
$$\begin{cases} M_u = 0 & 0 \le x \le L/2 \\ M_u = \frac{L}{2} - x & \frac{L}{2} \le x < L \end{cases}$$

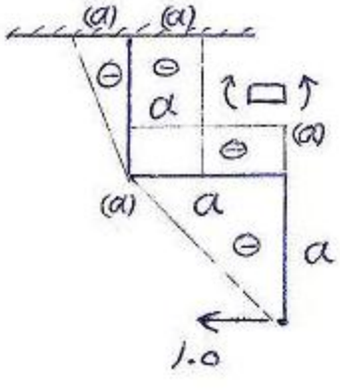
$$\delta_c = \int_{L/2}^{L} \frac{-\frac{1}{2} q_0 \frac{x^3}{3L} \left(\frac{L}{2} - x\right)}{EI} dx$$

$$\delta_c = \frac{49}{3480} \frac{q_0 L^4}{EI}$$

---

* تغییر مکان افقی در A را بیابید.



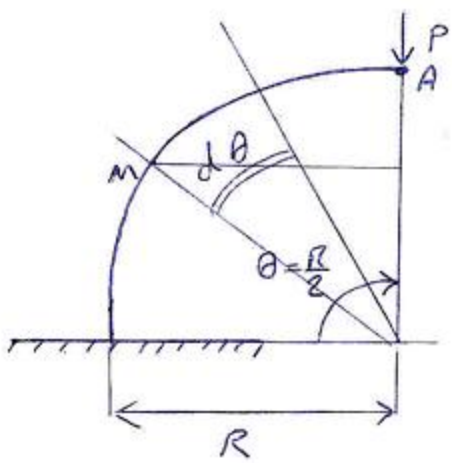


$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{L}{2} M_1 M_3 + L M_1 M_3 + \frac{L}{2} M_1 M_3\right]$$

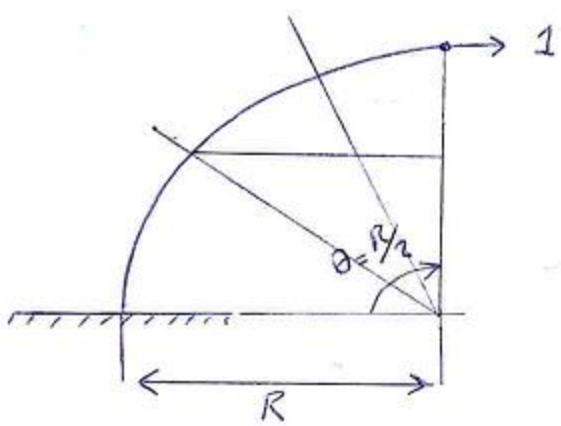
$$\delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{a}{2}(-Fa)(-a) + a(-Fa)(-a) + \frac{a}{2}(-Fa)(-a)\right]$$

$$\delta = \frac{2Fa^3}{EI}$$

مثال - در تیر خمیده ذیل مطلوبست تغییر مکان افقی انتهای تیر خمیده.



(M_L)



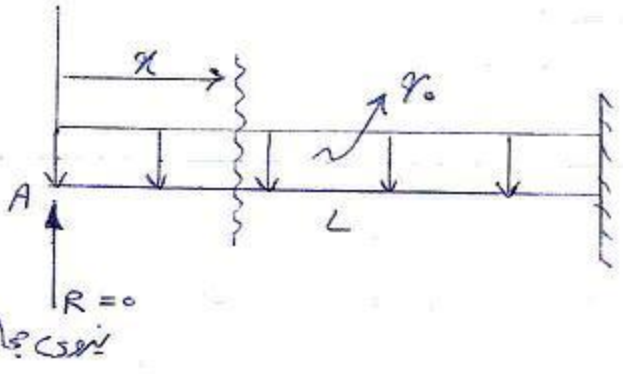
(M_u)

$$M_L = -PR\cos\theta$$

$$M_u = -(R - R\sin\theta)$$

$$\delta = \int \frac{M_u M_L}{EI} \, dx = \int_0^{R/2} \frac{-PR\cos\theta}{EI} \left(-R(1-\sin\theta)\right) R \, d\theta$$

مثال - در تیر ذیل تغییر مکان انتهائی را بیابید. (کاستیلیانو)



* چون در A نیرو نداریم برای حل از روش انرژی یک R مجازی قرار می دهیم. اگر شیب را خواستند یک M مجازی قرار می دهیم.

$$U = f(\gamma_0, R)$$

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R}$$

$$M(x) = Rx - \gamma_0 \frac{x^2}{2}$$

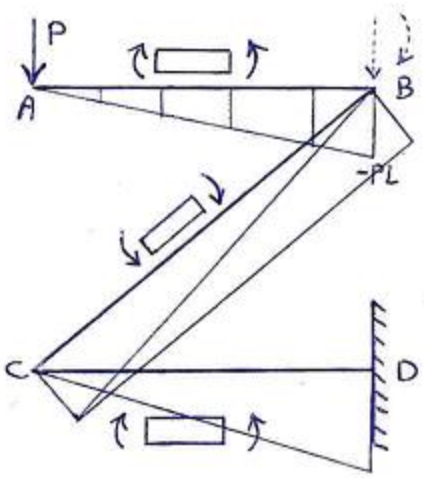
$$\frac{\partial M}{\partial R} = x \quad , \quad \delta_A = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial R}$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

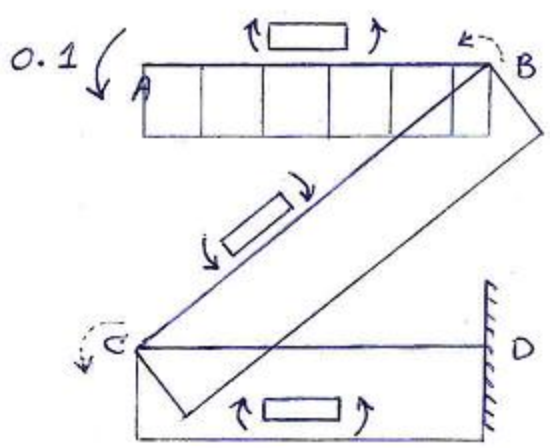
$$\delta = \int_0^L \frac{(\overset{\uparrow}{R}x - q_0\frac{x^2}{2})x\, dx}{EI} = -\frac{q_0 L^4}{8EI}$$

* علامت (-) یعنی جهت δ_A مخالف R مجازی است.

مثال -



$\longrightarrow M_L$



$\longrightarrow M_u$

- AB : △ × □
- BC : □ × □
- CD : △ × □

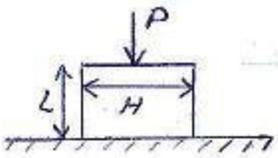
پایداری

در طراحی قطعات مختلف ماشین مشخصه‌ای بنام پایداری مطرح می گردد و پایداری در یک سیستم به معنای آن است که آن بتواند پس از تغییر از حالت تعادل به حالت اولیه خود برگردد وگرنه سیستم ناپایدار است. و زمانی که سیستم ازحالت تعادل خارج گردد حالات زیر پیش می آید :

1- سیستم به حالت تعادل ناپایدار جدید رفته و در اثر ادامه کار- تغییر فرم در آن افزایش یافته و پس از رسیدن به حد پلاستیک مثلا شی می گردد.

2- سیستم ازحالت پایدار اولیه عبور کرده و در وضعیت پایدار دیگری قرار گرفته و باقی بماند.

3- سیستم ممکن است پس از حالت تعادل اولیه حالت نوسانی داشته باشد. در اینجا پایداری یک ستون (عضوی که متحمل نیروی فشاری می گردد) بررسی می شود. درحالات قبل معمولاً نیروی فشاری به عضوهایی وارد می گشت که نسبت ابعاد آن عضو برابر واحد بود. مثلاً اگر یک ستون قطرش برابر D باشد و درحالتی که طول آن هم D باشد این عضو می تواند نیروی فشاری زیادی تحمل نماید.



* اگر طول ستون چند برابر قطر آن گردد مسئله عدم پایداری - بوجود خواهد آمد. برای تجزیه و تحلیل پایداری یک جسم - موارد ذیل را منظور می کنیم :

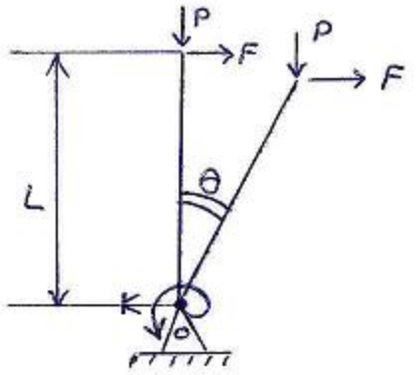
1- جسم ایده آل است و برای مثال یک نیروی فشاری در جهت خط مستقیم ستون وارد می گردد و محور ستون کاملا مستقیم است.

2- جسم همگن است.

3- در مورد بعضی از اشکال سطح مقطع ستون مثلاً مخازن استوانه‌ای جسم بصورت استوانه کامل فرض می گردد. سپس به جسم - ایده آل تغییر مکانی از حالت تعادل وارد می شود و اگر پس از حذف آن جسم بحالت اول در آید سیستم پایدار است.

* مقدار باری که سیستم را بحالت ناپایدار می رساند بار بحرانی - گویند. در طراحی قطعات باید مقدار بار مجاز را به نسبت معین ضریب اطمینان با توجه به بار بحرانی بدست آورد.

* مثلاً در سیستم ذیل می خواهیم بدانیم مقدار بار بحرانی چقدر است. ستون در پایین لولا شده و توسط فنر پیچشی (K) نگه داشته شده است :



$$\sum M_o = 0 \quad \circlearrowleft +$$

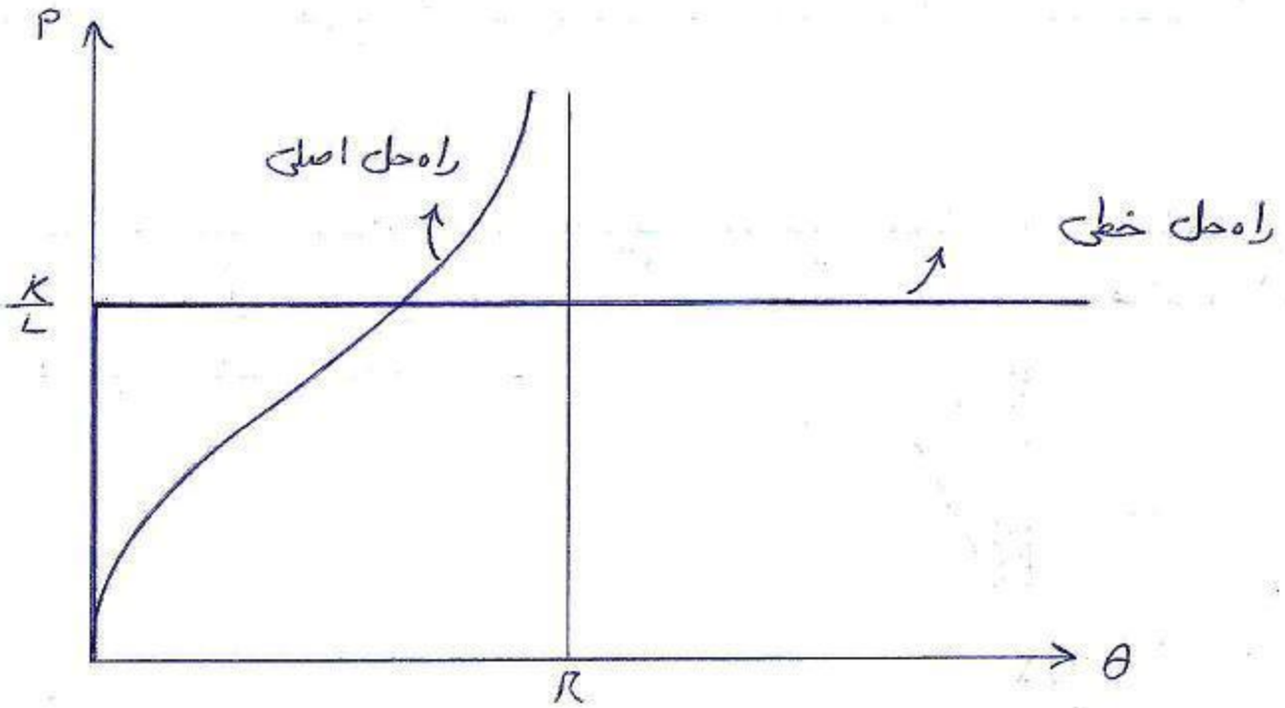
$$P = \frac{K\theta - FL\sin\theta}{L\sin\theta}$$

$\theta \ll$ $\longrightarrow$ $\sin\theta = \theta$

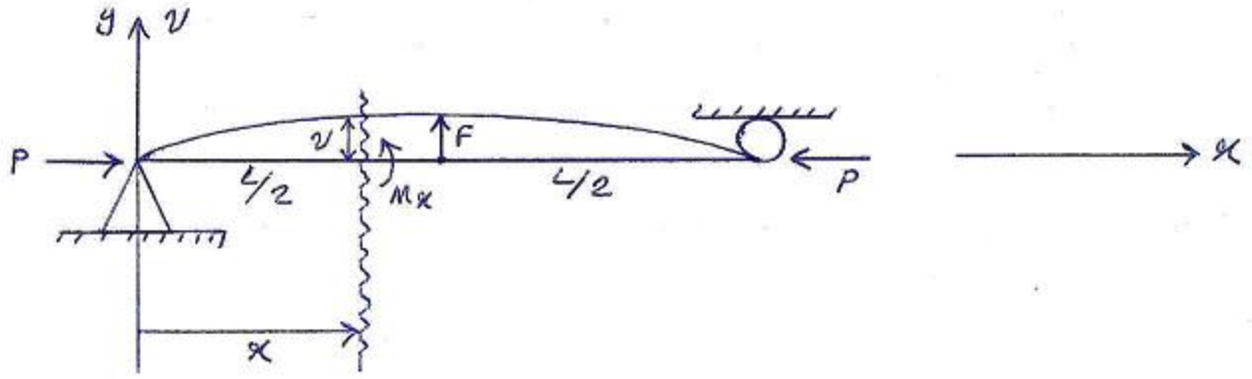
$\cos\theta \simeq 1.0$

$$P = \frac{K\theta - FL}{L\theta} \longrightarrow \theta = \frac{FL}{K - PL}$$

$$P_{cr} = \frac{K}{L}$$



مثال) در تیر ستون خیلی مطلوبست معادله منحنی الاستیک آن و بار بحرانی (EI در طول تیر ثابت است) .



$$M(x) = -\frac{F}{2}x - P.v$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv - \frac{F}{2}x \qquad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + Pv = -\frac{F}{2}x$$

$$\lambda^2 = P/EI$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = -\frac{\lambda^2 F}{2P}.x \qquad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$v = C_1 \sin\lambda x + C_2 \cos\lambda x - \frac{F}{2P}x$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow C_2 = 0 \qquad \begin{cases} x = L/2 \\ v' = 0 \end{cases} \longrightarrow C_1 = \frac{F}{2P\lambda\cos(\lambda\frac{L}{2})}$$

$$v = \frac{F}{2P\lambda} \frac{1}{\cos \lambda L/2} \sin \lambda x - \frac{F}{2P} x$$

$$\left.\delta_{max}\right)_{x = \frac{L}{2}} = \frac{F}{2P\lambda} \left(\tan \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \right)$$

$$\left.M_{max}\right)_{x = \frac{L}{2}} = \frac{-F}{2} \cdot \frac{L}{2} - P \cdot \delta_{max}$$

$$= \frac{F}{2\lambda} \tan \lambda L/2$$

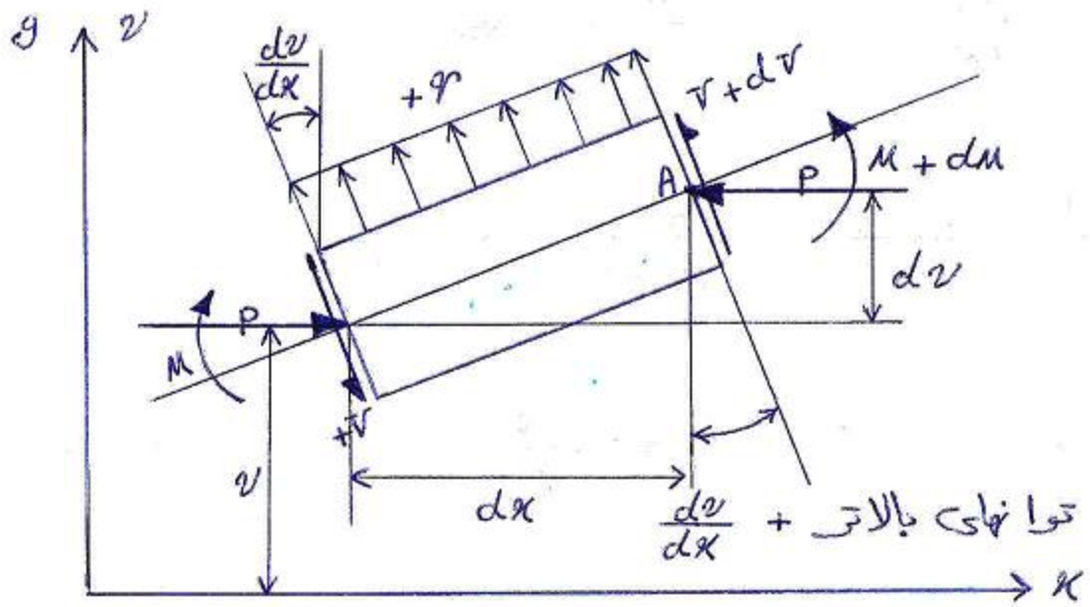
$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{n\pi}{2} = \lambda L/2 \\ \lambda &= \sqrt{\frac{P}{EI}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \qquad \begin{aligned} n &= 1 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

معادلات دیفرانسیل در تیر ستون‌ها

* برای یافتن معادلات دیفرانسیل در تیر ستون‌ها قسمتی از آن را بصورت ذیل با وجود بارگذاری در نظر می گیریم :



* با فرض تغییر مکان کوچک :

$$\frac{dv}{dx} = \tan\theta \approx \sin\theta \approx \theta$$

$$\cos\theta = 1$$

$$ds \approx dx$$

$$\bar{\Sigma} F_y = 0 \longrightarrow \quad q\,dx - V + (V + dV) = 0$$

$$\bar{\Sigma} M_A = 0 \longrightarrow \quad M - P\,dv - V\,dx + q\,dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = q \qquad (1)$$

$$V = -\frac{dM}{dx} - P\frac{dv}{dx} \qquad (2)$$

$$(2) \xrightarrow{(1)\ \text{در}} \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad (3)$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q}{EI}, \qquad \lambda^2 = \frac{P}{EI} \qquad (4)$$

(4) :

$$q = 0$$

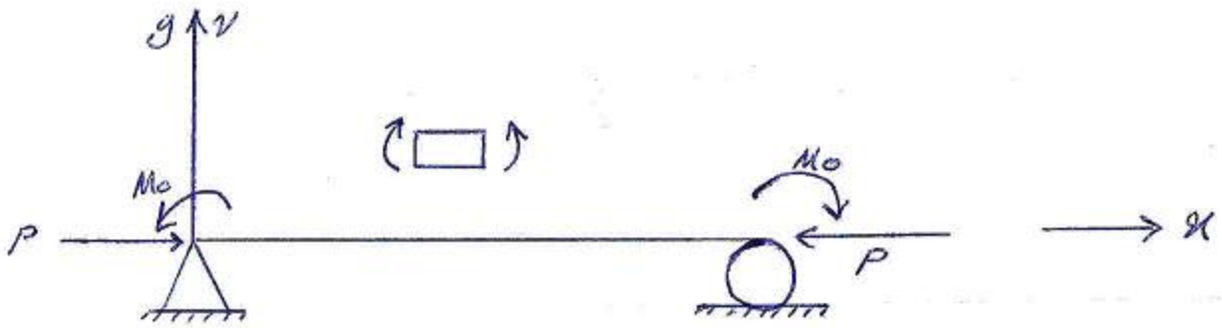
$$v = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4$$

$\longrightarrow$ (C_1, C_2, C_3, C_4) شرایط مرزی

v' , v''

$$\left(v'' = -C_1 \lambda^2 \sin \lambda x - C_2 \lambda^2 \cos \lambda x\right)$$

مثال - در تیر ستون زیر معادله تغییر مکان این ستون را بیابید.



$$\begin{cases} x = 0 \text{ , } l \longrightarrow C_2 + C_4 = 0 \\ v = 0 \longrightarrow v = C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L + C_3 L + C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ , } l \longrightarrow -C_2 E I \lambda^2 = M_0 \\ M = -M_0 \longrightarrow -C_1 E I \lambda^2 \sin \lambda L - C_2 E I \lambda^2 \cos \lambda L = -M_0 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{M_0}{P} \left(\frac{1 - \cos \lambda L}{\sin \lambda L} \right)$$

$$C_2 = -C_4 = \frac{M_0}{P}$$

$$C_3 = 0$$

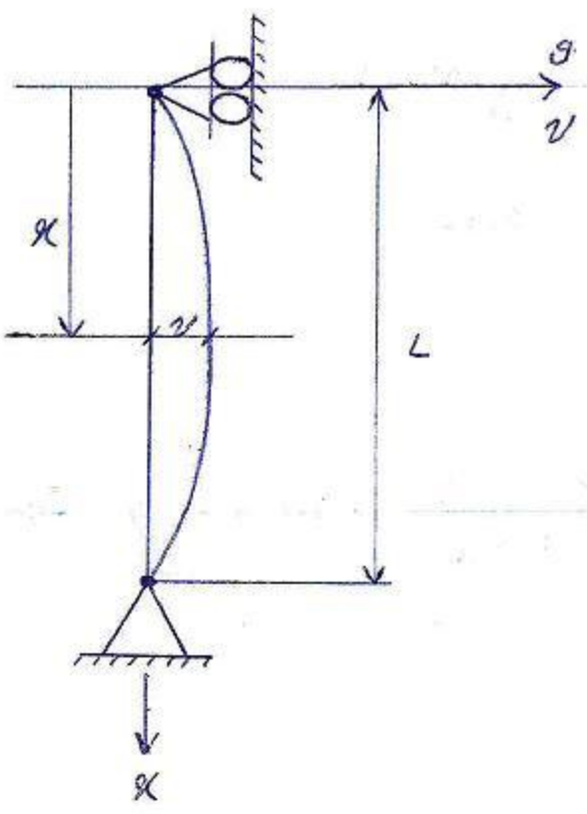
$$v = \frac{M_0}{P} \left[\frac{1 - \cos \lambda L}{\sin \lambda L} \sin \lambda x + \cos \lambda x - 1 \right]$$

$$\delta_{max}\Big)_{x=\frac{L}{2}} = \frac{M_o}{P}\left(\sec\frac{\lambda L}{2} - 1\right)$$

$$M_{max}\Big)_{x=\frac{L}{2}} = M_o \sec\frac{\lambda L}{2}$$

بار بحرانی اولر

حالت مبنا - (ستون دوسر لولا)



* در مقطع x ممان خمشی طبق رابطه ذیل است :

$$M = -P.v$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{P}{EI}v \quad , \quad \lambda^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = 0\right) \xrightarrow{\text{حل معادله دیفرانسیل}}$$

$$\left(v = C_1 \sin \lambda x + C_2 \sin \lambda x\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\begin{cases} x = L \\ \\ v = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad C_1 \sin \lambda L = 0 \xrightarrow{C_1 \neq 0}$$

$$\sin \lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = n\pi$$

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

حالت اولیه $n=1$: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ ①

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

$$v = c \sin \lambda x$$

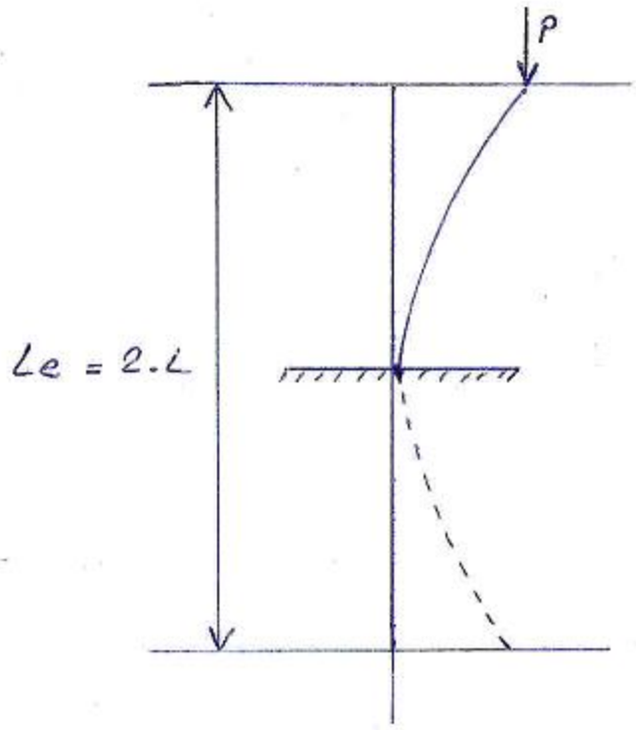
جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران - دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

* درمعادله v ثابت c تغییر مکان در وسط ستون را نشان می‌دهد. برای مقادیر $P < P_{cr}$ $(v = 0)$ است وستون حالت عمودی دارد (حالت پایدار). برای حالت $P = P_{cr}$ با ایجاد بار عرضی به ستون، آن منحرف شده و در همان وضعیت باقی می‌ماند. برای $P > P_{cr}$ با ایجاد بار عرضی به ستون تغییر مکان بطور نا محدود ادامه می‌یابد. مقدار رابطه (۱) را بار بحرانی اولر گویند. برای افزایش P_{cr} با توجه به رابطه (۱) می‌توان جنس آن یا اینرسی مقطع آن را افزایش داد. به همین ترتیب می‌توان رابطه اولر را برای ستونهای مختلف بدست آورد.

تکلیف - (ستون یک سرگیر - یک سرلولا) را بررسی کرده و P_{cr} را بیابید.

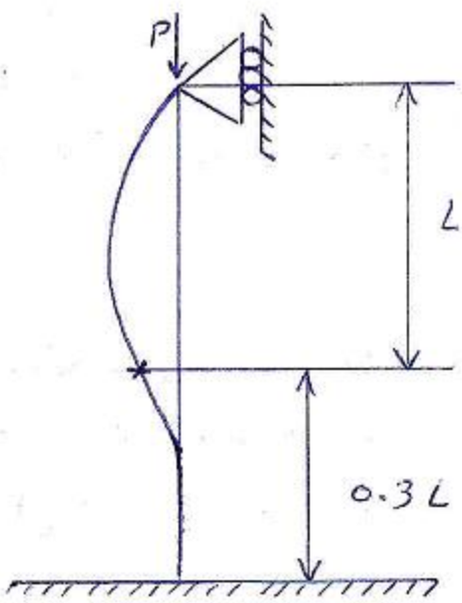
---

* با توجه به رابطه حالت ۸ می‌توان برای ستونهای ذیل بار بحرانی را با توجه به طول مؤثر (l_e) یافت که $l_e = K.l$ است. K ضریب تناسب و l طول ستون دو سرلولا است. برای مثال در ستون یک سرگیر و یک سر آزاد ذیل: $(l_e = 2 \times l)$ است.

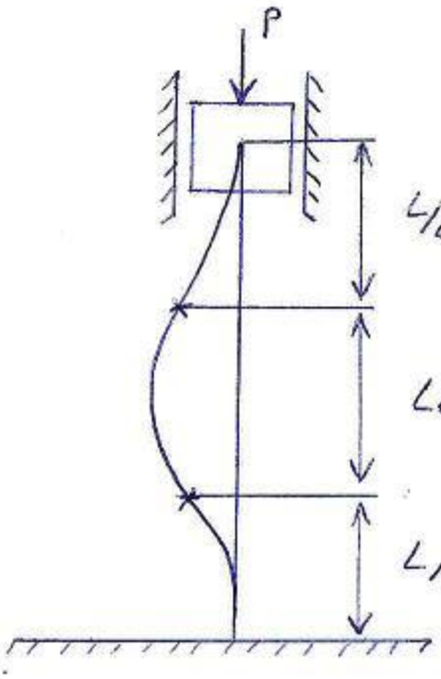


$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{\frac{Le^2}{(KL)^2}}$$

مثال - (یک سر درگیر - یک سر لولا)



مثال- (دو سر درگیر)



---

* منحنی که بر حسب L/R برای ستونها در کتاب مطالعه شود. در این نمودار :

* مقدار P که تنش حد تناسب برای جنس ستون است و نسبت L/R را ضریب لاغری گویند و برای کمترین شعاع ژیراسیون مقطع داریم :

* I اینرسی سطح مقطع حول یکی از دو محور (کمترین مقدار) است.
A مساحت سطح مقطع است.

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

* و در حالت بار بحرانی :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{AL^2} = \frac{\pi^2 E I}{(AL^2)}$$

$$= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

* این منحنی در ناحیه BC که در آن تنش بحرانی σ_{cr} کمتر از حد تنش σ_p می باشد قابل استفاده است. مرز رابطه با قرار دادن مقدار σ_p در σ_{cr} بدست می آید.

* معین است که هر قدر (L/R) افزایش یابد مقاومت بحرانی ستون به میزان خیلی زیاد کاهش می یابد.

* خط (DEF) نشاندهنده حداکثر تنش مقاومت ستون است.

* تنشی که با نمودار فوق محاسبه می گردد تنش حداکثر ستون است و برای تعیین تنش مجاز از یک ضریب اطمینان استفاده کنیم که بین (3 - 1.5) است.

$$\frac{\sigma_{max}}{F.S} = \sigma_{all}$$

* درحالتی که شرایط مرزی دو سر ستون از حالت دو سر لولا - تفاوت کند تنش بحرانی :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$$

* مثلاً می توان برای یک ستون فولادی با مشخصات زیر میزان طولی را بدست آورد که بیشتر از آن ستون تغییر شکل می دهد . برای جنس فولاد :

$$\begin{cases} E = 30 \times 10^6 \ psi \\ \sigma_p = 36 \ ksi \quad \text{تنش حد تناسب} \end{cases}$$



$$r_{Min} = \sqrt{\frac{I_{Min}}{A}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ in$$

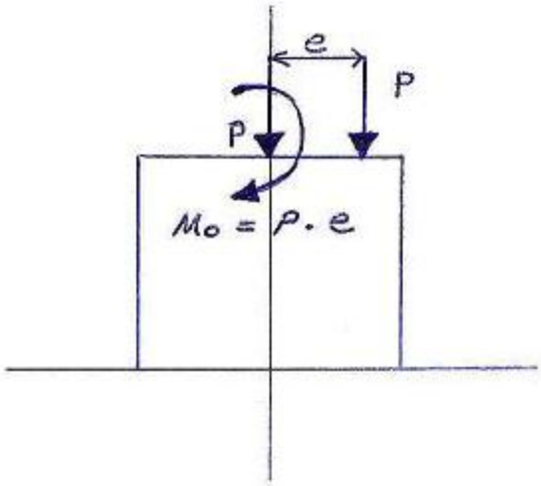
$$(L/r)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_p} = 8220 \rightarrow$$

$$L/r = 90.7 \rightarrow L = 52"$$

ستون با بار خارج از مرکز

* معمولاً در بارگذاری روی ستونها در اثر ساخت خطا وجود دارد و این بدان مفهوم است که بارگذاری دقیقاً در محور ستون وارد نمی گردد لذا برای شبیه سازی یک فاصله e

برای خروج از مرکز بار در نظری گیریم و با انتقال P به محور ستون یک نیروی محوری و یک ممان خواهیم داشت :

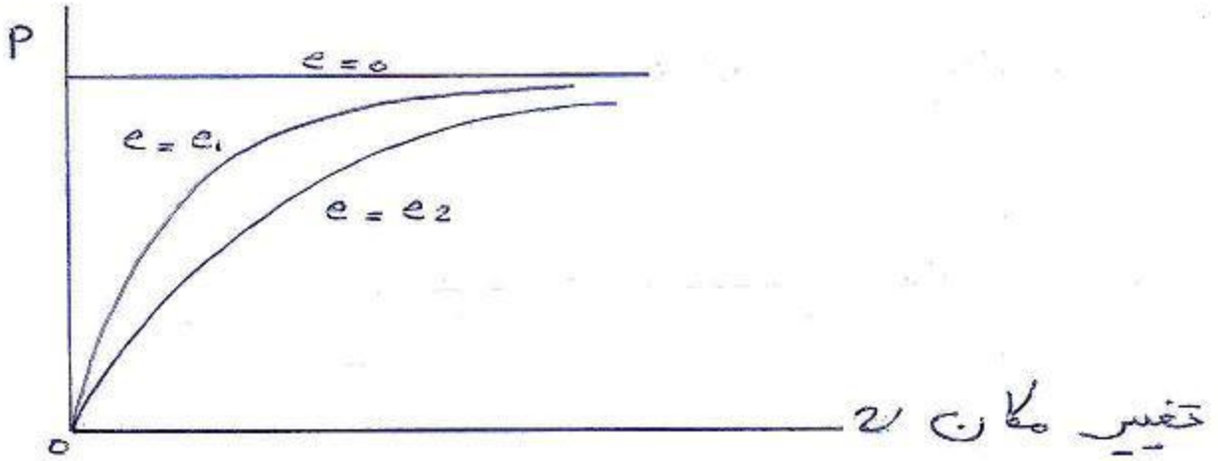


فرشاد سرایی-مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی-نظارت-اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

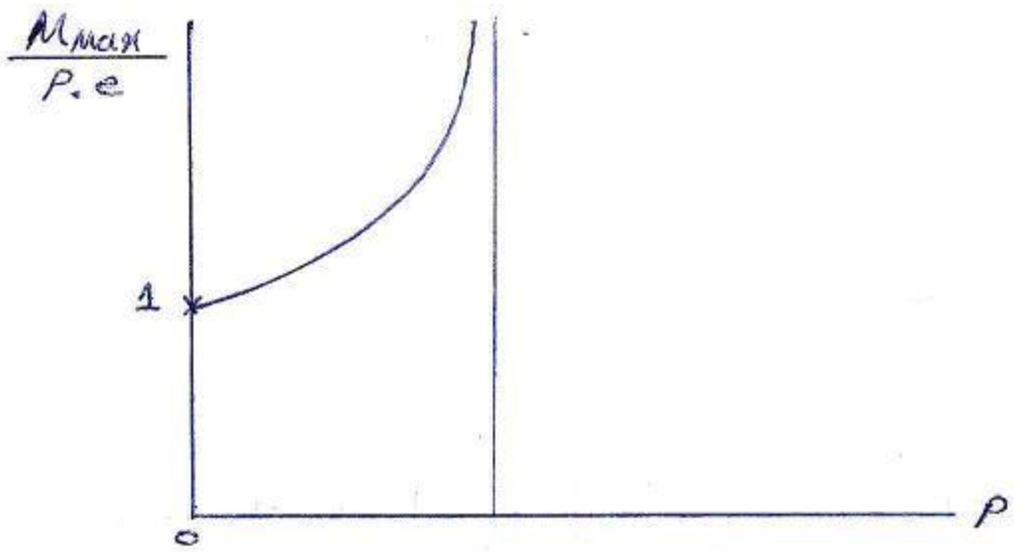
جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

* روابط ذیل را داریم (با توجه به مثال حل شده) :

$$\begin{cases} v_{max} = e\left(\sec\frac{\lambda L}{2} - 1\right) \\ P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \\ M_{max} = P.e\sec\frac{\lambda L}{2} \end{cases}$$



* وقتی ($\frac{\lambda L}{e} = \frac{\pi}{2}$) یا شد عبارت sec بسمت ∞ می رود لذا رابطه P_{cr} حاصل می گردد. و برای ممان حد اکثر می توان با توجه به رابطه sec نمودار زیر را رسم کرد:



* اگر $P = 0$ یا شد $\sec = 1$ است و نسبت M_{max} بر $P.e$ 1 می شود. لذا در سطح مقطع ستون تنش ناشی از - نیروی محوری و ممان خمشی بصورت ذیل است:

$$|\sigma_{max}| = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}\, c}{Ar^2}$$

$$= \frac{P}{A} + \frac{Pe.c}{Ar^2} \sec \frac{\lambda L}{2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\lambda L}{2}\right]$$

ضریب خارج از مرکز ستون ←

زاویه اولر ←

$$\lambda = \sqrt{\frac{P}{EAr^2}} = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$\sigma_{Max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{r}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)\right]$$

رابطه sec تنش

* با در نظر گرفتن ضریب اطمینان رابطه زیر را داریم که در آن P_{all} حداکثر بار مجاز ستون است و تنش حداکثر برابر با تنش نقطه تسلیم است

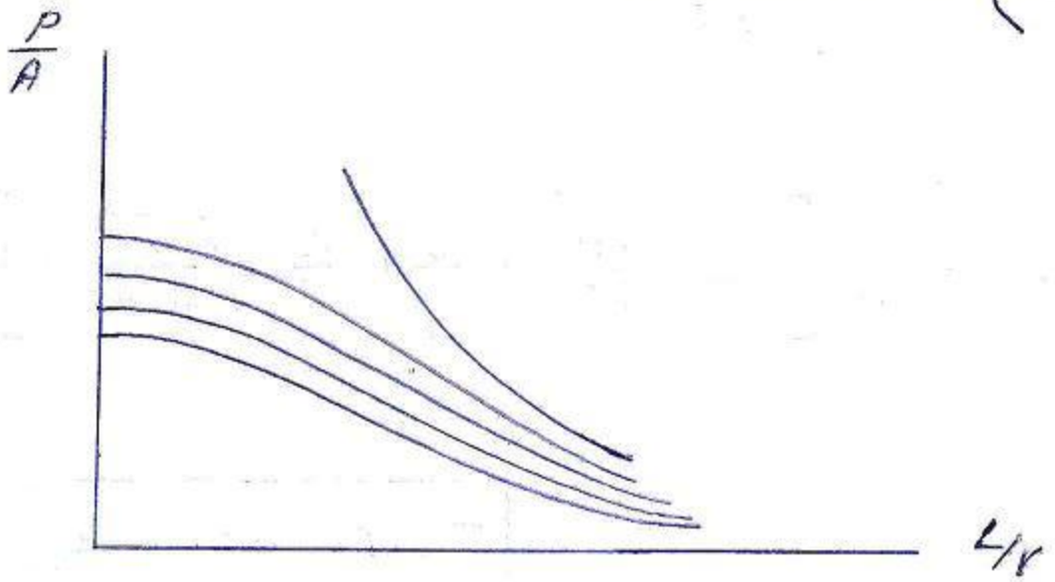
$$\sigma_{Max} = \sigma_y \cdot P = \frac{(F.S)\ P_{all}}{A} \times$$

$$\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{r}\sqrt{\frac{(F.S)\ P_{all}}{4EA}}\right)\right]$$

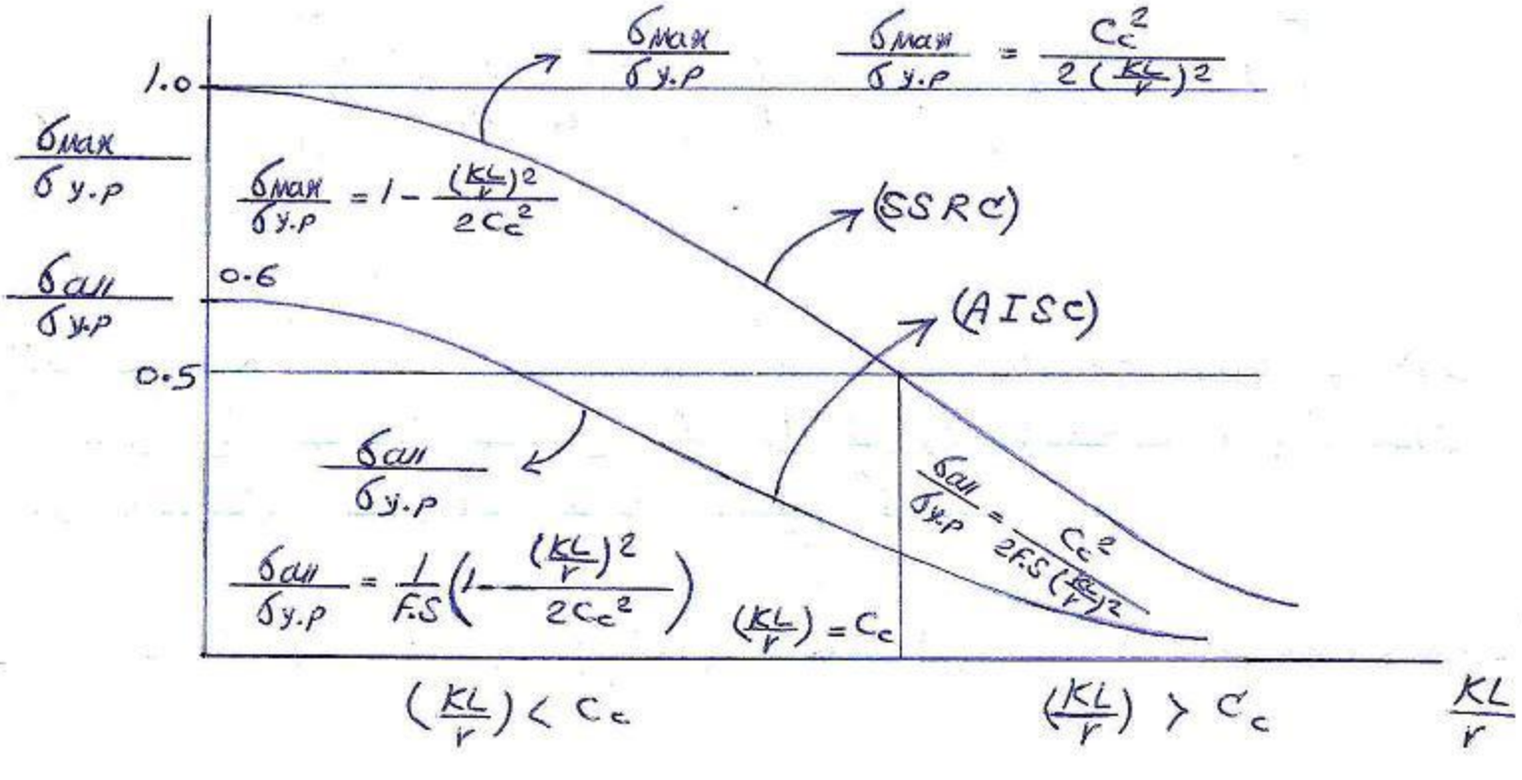
* لذا برای هر ضریب خارج از مرکز انتخابی می توان با عدد گذاری یا نمودار مقدار $\frac{P}{A}$ را طوری انتخاب کرد که ستون در لایه های خارجی خود تسلیم گردد.

نموداری برحسب $\left(\frac{ec}{r^2}\right)$ به ازای جنس $\sigma_{y.p} = 40000\ PSi$

جهت مثال رسم شده است :



فرمولهای طراحی برای ستونهای فولادی تحت بار «متمرکز»



$$F.S = \frac{5}{3} + 3\frac{(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}$$

$$F.S = \frac{23}{12} = 1.92 \qquad \frac{KL}{r} > C_c$$

$$F.S = \frac{5}{3} \qquad \frac{KL}{r} = C_c$$

$$E = 29 \times 10^6 \ psi \qquad (For\ Steel)$$

* مقدار C_c زمانی بدست می آید که ($\sigma_{Max} = \frac{1}{2}\sigma_{y.p}$)

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{y.p}}}$$

* برطبق کد (AISC) باید همواره : $\frac{KL}{r} \leq 200$

مثال - با توجه به کد AISC می خواهیم ابعاد یک ستون (سطح مقطع) را بیابیم . در صورتی که طول آن 15 فوت و دو سر لولا و نیروی وارده 200000 پاوند است . $\sigma_{y.p} = 50000\ psi$ است و جنس فولاد است .

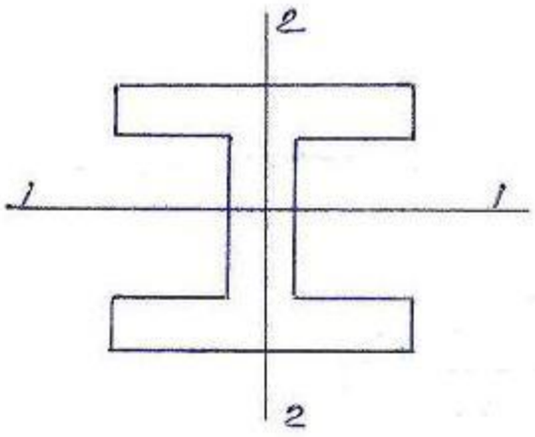
* ابتدا برای یافتن یک سطح مقطع فرض می کنیم مقدار $\frac{L}{r}$

برابر صفر باشد. لذا F.S برابر $\frac{5}{3}$ می شود و داریم :

* حدس اوّل :

$$\sigma_{all} = \frac{50}{5/3} = 30 \ ksi$$

$$A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{200}{30} = 6.7 \ IN^2$$



فرشاد سرایی- مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی- نظارت- اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران - دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

WF 8 x 24

$r_{Min} = 1.62$

$$L/r = \frac{15 \times 12}{1.62} = 112 \qquad A = 8.25 \ in^2$$

$r_{22} = 1.62 \qquad r_{11} = 3.45$

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 \times 29 \times 10^6 / 50 \times 10^3} = 107$$

$$\frac{KL}{r} > C_c \rightarrow \sigma_{all} = 11.9 \ ksi$$

$$A = \frac{200}{11.9} = 16.8 \ in^2$$

$WF\ 8 \times 58 \xrightarrow{\text{جدول}} r_{min} = 2.1''$: حدس دوم

$$\frac{KL}{r} = 86 < C_c$$

$\xrightarrow{\text{از رابطه}}$ $F.S = 1.9$

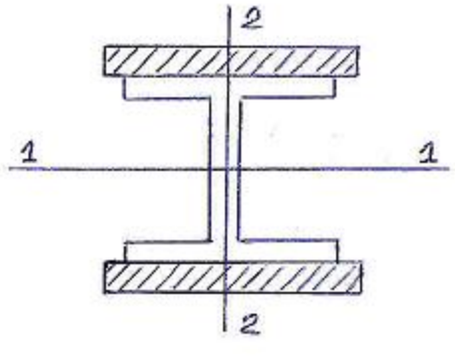
$\sigma_{all} = 17.9\ ksi \longrightarrow A = 11.2\ in^2$

$W\ 8 \times 40 \longrightarrow r_{min} = 2.40''$: حدس سوم

$P_{all} = 204000\ lb > 200000\ lb$

(جواب است)

تکلیف - در یک ستون با مقطع ($WF\ 14 \times 230$) برای بهتر کردن مقاومت ستون در دو طرف آن ورقهای ($3'' \times 24''$) جوش داده شده. اگر ستون دوسر لولا بوده و طول آن 20 ft باشد حداکثر نیروی وارده به این ستون طبق استاندارد (AISC) چقدر می‌تواند باشد. $\sigma_{y.p} = 42\ ksi$.

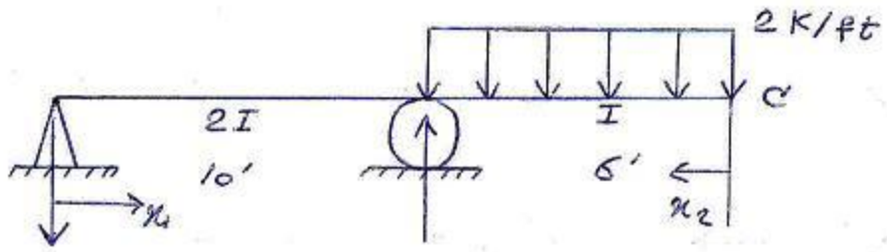


(ورقها I را افزایش می‌دهد.)

تکلیف - برای ترکیب فوق سطح مقطع مناسب بیابید که بتواند نیروی 200000 lb را تحمل کند.

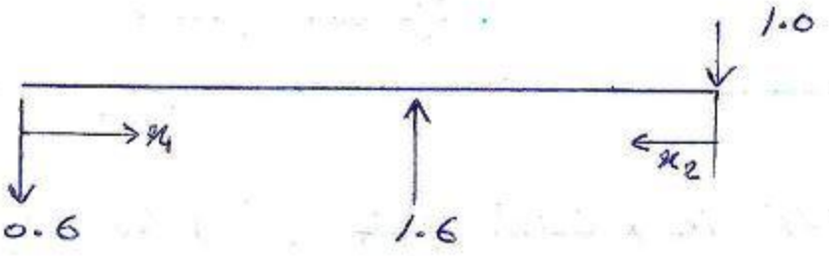
مثال - از روش بار واحد مقدار شیب و تغییر مکان را در نقطه C بیابید.

(1)

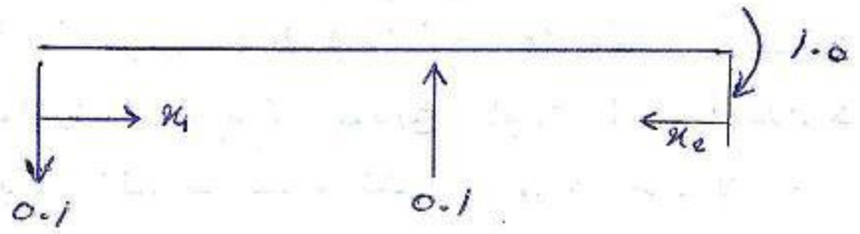


(δ_c, θ_c)

(2)



(3)



$$\left(EI = 6 \times 10^6 \quad Kips - IN^2 \right)$$

فرشاد سرایی - مهندس پایه یک تاسیسات مکانیکی
طراحی - نظارت - اجرا
نظام مهندسی: ۱۰-۴-۰-۱۷۲۷۶
پروانه مهندسی: ۱۰-۴۰۰-۰۲۸۱۵
شماره شهرسازی: ۱۰۴-۰۱۲۲۲

جزوه درس مقاومت مصالح (۲) آقای مهندس کرمجی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب تهران – دانشکده فنی (سال ۱۳۷۲)

(1) $M_L = -3.6\,x_1$

$M_L = -x_2^2$

(2) $M_u = -0.6\,x_1$

$M_u = -x_2$

(3) $M_u = -0.1\,x_4$

$M_u = -1.0$

$$\delta_c = \frac{1}{2EI}\int_0^{10} (-3.6\,x_4)(-0.6\,x_4)\,dx_1 \; + \; \frac{1}{EI}\int_0^{6} (-x_2^2)(-x_2)\,dx_2$$

$$\delta_c = 0.197 \text{ in} \downarrow \quad (+)$$

$$\theta_c = \frac{1}{2EI}\int_0^{10} (-3.6\,x_4)(-0.1\,x_4)\,dx_1 \; + \; \frac{1}{EI}\int_0^{6} (-x_2)^2(-1)\,dx_2 = 0.0032 \text{ Rad}$$