کد محصول
ES501

آخرین بروزرسانی
۱۱ بهمن ۱۴۰۳

درسنامه استخدامی

دروس عمومی

- شامل خلاصه ای از مباحث مهم و پرکاربرد به زبان ساده و روان
- تدوین شده طبق موضوعات آزمون های استخدامی اخیر
- مرور مطالب مهم و کاربردی در کمترین زمان

لینک های مفید درسنامه استخدامی دروس عمومی	
خرید این محصول	**خرید سوالات استخدامی ۱۰ سال اخیر**
خرید سوالات مصاحبه	**خرید درسنامه مصاحبه**
شبکه های اجتماعی ایران عرضه (فایل های رایگان + تخفیفات هفتگی + اخبار)	
آخرین بروزرسانی ها: ۱۴۰۳/۱۱/۱۳ اضافه شدن فصل دوم ۱۴۰۳/۱۱/۲ فایل موجود آپدیت شد.	
(برای مشاهده هر بخش روی آن بزنید)	

فهرست مطالب

❖ فصل اول: ریاضی و آمار

➢ بخش اول: مجموعه، الگو و دنباله

- مجموعه (آشنایی با مجموعه و ویژگی های آنها)

مجموعه به دسته ای از اشیا مشخص و دو به دو متمایز گفته میشود.

رخداد های میان دو یا چند مجموعه عبارتند از:

* دو مجموعه A و B در صورتی مساوی هم هستند که تمامی اعضای یک مجموعه در مجموعه دیگر نیز باشد ($A = B$)

* در صورتی که تمامی اعضای مجموعه A در مجموعه B نیز باشد اما این دو مجموعه مساوی هم نباشند میتوان گفت که مجموعه A زیر مجموعه B میباشد ($A \subseteq B$)

* اجتماع دو مجموعه، مجموعه ای شامل تمامی اعضای دو مجموعه میباشد ($A \cup B$)

* اشتراک دو مجموعه، مجموعه ای که تنها شامل اعضای مشترک دو مجموعه میباشد ($A \cap B$)

* اختلاف دو مجموعه، مجموعه ای شامل تمام اعضای مجموعه A، به غیر از اشتراک دو مجموعه A و B ($A - B$)

* تعداد اعضای مجموعه A را با n(A) نشان میدهیم

- مجموعه متناهی: مجموعه ای نامتناهی است که تعداد اعضای آن (n(A)) قابل شمارش باشد

- مجموعه نامتناهی: مجموعه ای است که تعداد اعضای آن بیشمار و یا بینهایت بوده و قابل شمارش نباشد.

* تعداد اعضای برخی مجموعه های متناهی ممکن است زیاد باشد اما با داشتن امکانات زمان ممکن است تعداد آنها را یافت.

* در تعریف مجموعه متناهی چنین میتوان گفت که: «مجموعه هایی که تعداد اعضای آنها قابل شمارش و یک عدد حسابی است، مجموعه متناهی نامیده میشوند»

* مجموعه اعداد خاصی که با آنها سر و کار خواهیم داشت عبارتند از:

* اعداد طبیعی ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$)

* اعداد حسابی ($\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$)

* اعداد صحیح ($\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$)

* اعداد گویا ($\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$)

* اعداد گنگ ($\mathbb{Q}'$ مجموعه اعدادی که نتوان به صورت نسبت دو عدد نشان داد)

* اعداد حقیقی ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$)

- الگو و دنباله (انواع الگو و دنباله ها و ویژگی های آنها)

- الگو: یک ساختار منظم از اشکال، اعداد، نماد ها و ... که ممکن است تکرار شونده، رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

- جمله عمومی: جمله عمومی یک الگو، رابطه ای است که ساختار جملات موجود در الگو را مشخص میکند و با استفاده از میتوان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.

* در حالت کلی دو نوع الگو داریم: الگوی خطی و الگوی غیر خطی

* الگوی خطی: در این دسته از الگو ها، اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است: ... , -12 , -7 , -2 , 3 , 8 , 13

* الگوی غیرخطی: در این الگوها، اختلاف میان دو جمله متوالی یکسان نمیباشد اما به طور یقین میان جملات آن یک الگو برقرار میباشد: ... , 16 , 9 , 4 , 1

- دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار میگیرند، یک دنباله مینامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده میشوند. ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. دنباله ها به دو دسته دنباله حسابی و دنباله هندسی تقسیم میشوند.

*** دنباله حسابی:**

هر جمله نسبت به جمله قبلی خود به اندازه d واحد (قدر نسبت) تغییر میکند.

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ میباشد.

اگر a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند: $b = \frac{a+c}{2}$ (واسطه حسابی)

اگر d مثبت باشد دنباله صعودی، اگر d منفی باشد دنباله نزولی و در صورتی که d برابر صفر باشد دنباله ثابت خواهد بود.

تعداد جملات با داشتن جمله اول و آخر و قدر نسبت برابر است: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$.

مجموع جملات حسابی: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

*** دنباله هندسی:**

هر جمله برابر با حاصل ضرب جمله قبلی خود در مقدار r (قدر نسبت) میباشد.

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 * r^{(n-1)}$ میباشد.

اگر a، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند: $b = \sqrt{ac}$. (واسطه هندسی)

صعودی یا نزولی بودن دنباله هندسی بر اساس r تعیین میشود: r بزرگتر از ۱ باشد دنباله صعودی، r مابین ۱ و صفر باشد دنباله نزولی، r برابر یک باشد دنباله ثابت بوده و چنانچه r کوچکتر از صفر باشد، دنباله نوسانی خواهد بود.

+ مجموع جملات دنباله هندسی: $S_n = a_1 * \frac{1-r^n}{1-r}$

➢ بخش دوم: نظریه اعداد

- توان و اعداد

- توان: تعداد دفعات ضرب عدد در خودش را توان آن عدد میگویند. عدد b را توان nام a گویند و داریم: $b = a^n$.

- ریشه: عکس توان با نام ریشه بوده و به صورت $b = \sqrt[n]{a}$ نمایش داده میشود. در این حالت a ریشه nام عدد b میباشد.

* در رادیکالی چون $\sqrt[n]{a}$ اگر n زوج باشد، مقدار a حتما باید مقداری مثبت باشد.

* روابط اولیه که در رابطه با توان ها و ریشه ها میتوان گفت به صورت زیر است

$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{m.n}$	$a^n * a^m = a^{n+m}$	$a^n \div a^m = a^{n-m}$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$a^n * b^n = (ab)^n$	$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$a^0 = 1$	$a^n = b \rightarrow \sqrt[n]{b} = a$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$n = 2k \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	$n = 2k + 1 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$a \geq 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$
$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$	$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n * b}$	$\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$	$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} \lvert a \rvert : n = 2k \\ a : n = 2k+1 \end{cases}$
$\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[nmp]{a^{mp}.b^p.c}$	$p = 2k \rightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\lvert a \rvert^m}$	$p = 2k + 1 \rightarrow \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

- عبارت های گویا

- عبارت گویا به کسرهایی گفته میشود که صورت و مخرج آن ها چند جمله ای با شروط ذیل باشد:

+ توان متغیر منفی نباشد

+ متغیر زیر رادیکال نبوده و یا توان آن کسری نباشد.

+ متغیر داخل قدر مطلق نباشد

+ مخرج عبارت برابر با صفر نباشد

+ توان هیچ یک از عبارات متغیر نباشد.

* در شروط گفته شده تنها متغیر ها نباید این شروط را داشته باشند، اگر عددها دارای شرایطی چنین باشند موردی ندارد

* در عبارت های گویا دامنه برابر با تمامی اعداد حقیقی میباشد، به استثنا اعدادی که ریشه مخرج کسر بوده و مخرج کسر را صفر میکنند: $D = \mathbb{R} - \{$ریشه مخرج کسر$\}$

* در صورتی که مخرج کسر عددی گویا نباشد، در دو حالت میتوان آن را گویا کرد:

+ مخرج یک جمله ای باشد: ضرب کردن صورت و مخرج در عبارت رادیکالی متناسب با عبارت گویای مخرج

+ مخرج چند جمله ای باشد: ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج عبارت مخرج و استفاده از انواع اتحاد ها.

- ب.م.م و ک.م.م

- عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b مینامیم (a و b هردو با هم صفر نیستند) و مینویسیم $(a, d) = d$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

+ $d|a$ و $d|b$ (مقسوم علیه مشترک بودن d)

+ $\forall m > 0; m|a, m|b \Rightarrow m \leq d$ (بزرگ بودن d از تمامی مقسوم علیه های مشترک همچون m)

- عدد طبیعی c را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b مینامیم و مینویسیم $[a, b] = c$، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

+ $a|c$ و $b|c$ (مضرب مشترک بودن c)

+ $\forall m > 0; a|m , b|m \Rightarrow c \leq m$ (کوچک بودن c از تمامی مضرب های مشترک همچون m)

- بخش پذیری

- عدد صحیح a بر عدد صحیح b بخش پذیر (قابل قسمت) است، به شرطی که عدد صحیحی چون c باشد که $a = bc$.

* اگر a بر b بخش پذیر باشد، میگوییم b ،a را میشمارد (عاد میکند) و مینویسیم $b|a$. به عنوان مثال داریم:

* اگر $b|a$، b را مقسوم علیه‌ی از a و a را مضربی از b مینامیم.

* از ویژگی های مهم بخش پذیری میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

+ اگر $b|a$، آنگاه $b| -a$ و $-b|a$

+ اگر $c|a$ و $c|b$، به ازای دو عدد صحیح x و y داریم: $c|ax + by$

+ اگر $b|a$، آنگاه $|a| \leq |b|$

+ اگر $b|1$، آنگاه b = 1 یا b = -1

+ اگر $b|a$ و $c|b$، آنگاه $c|a$

+ اگر $b|a$ و $a|b$، آنگاه b = a یا b = -a

- همنهشتی و معادلات آن

همنهشتی: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر m|a-b باشد، میگوییم «a همنهشت با b است به پیمانه m» و مینویسیم $a \equiv b \ (mod\ m)$ (در اکثر فرمولها مقدار m را بر بالای عبارت ≡ مینویسند) به زبان ریاضی داریم:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}; a \equiv b \ (mod\ m) \Leftrightarrow m|a - b(m \in \mathbb{N})$$

* دو عدد a و b به پیمانه m همنهشت هستند اگر m تفاضل آنها را عاد کرده یا بشمارد.

* منظور از mod، عملگر باقیمانده تقسیم است. اگر a و b به m تقسیم شوند، باقیمانده (mod) یکسانی خواهند داشت. این موضوع را به صورت گزاره دو شرطی زیر نیز میتوان گفت: a را به پیمانه m، همنهشت با b گویند اگر و فقط اگر تقسیم a بر m و تقسیم b بر m، باقیمانده های یکسانی داشته باشند.

* رابطه همنهشتی به پیمانه m در مجموعه اعداد صحیح، یک رابطه هم‌ارزی است. یعنی این رابطه دارای خواص بازتابی، تقارنی و ترایایی است:

* چنانچه داشته باشیم $a \equiv b \; (mod\; m)$ ، همنهشتی های زیر همواره صادق اند:

$ac \equiv bc \; (mod\; m)$	$a \pm c \equiv b \pm c \; (mod\; m)$
$a \pm mt \equiv b \pm mk \; (mod\; m)$	$a^n \equiv b^n \; (mod\; m)$

معادلات همنهشتی:

- یک رابطه همنهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \equiv b \; (mod\; m)$ را معادله همنهشتی گویند.

* منظور از حل معادله همنهشتی، پیدا کردن جواب هایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در معادله صدق کنند

* معادله همنهشتی $ax \equiv b \; (mod\; m)$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$.

- اتحاد های جبری

- چند مورد از اتحاد های برکاربرد در ریاضی عبارتند از:

اتحاد مربع مجموع دو جمله	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
اتحاد مکعب مجموع دو جمله	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$؛
ام مجموع دو جملهnفرمول اتحاد توان	$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$
ام تفاضل دو جملهnفرمول اتحاد توان	$(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} (-b)^i$
اتحاد مزدوج	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
اتحاد جمله مشترک	$(x+a)(x \pm b) = x^2 + (a \pm b)x \pm ab$
اتحاد چاق و لاغر مجموع	$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
اتحاد چاق و لاغر تفاضل	$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

➢ بخش سوم: معادلات و نامعادلات

-آشنایی با معادلات و روش حل آنها

- معادلات درجه ۱: صورت کلی این نوع معادلات به صورت $ax + b = 0$ میباشد که ریشه آن برابر است با $x = -\frac{b}{a}$

* برای به دست آوردن ریشه، ابتدا مجهول را به یک طرف معامله و معلوم را به طرف دیگر میبریم. سپس تمامی معادله را بر ضریب مجهول تقسیم میکنیم تا مجهول به دست بیاید.

- معادلات درجه ۲: معادلاتی که درآنها بالاترین توان متغیر برابر با ۲ باشد. نمایش ریاضی این نوع معادلات به صورت مقابل میباشد که در آن $a \neq 0$ میباشد: $ax^2 + bx + c = 0$

* برای حل این دسته از معادلات، روش های مختلفی از جمله روش دلتا، روش تجزیه و روش مربع کامل وجود دارد.

دلتای معادله با استفاده از فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ محاسبه میشود و ریشه ها با جایگذاری آن در فرمول $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

+ دلتا مثبت باشد ($\Delta > 0$) معادله دارای دو ریشه حقیقی، برابر با صفر باشد ($\Delta = 0$)، معادله دارای یک ریشه حقیقی و اگر منفی باشد ($\Delta < 0$)، معادله ریشه حقیقی ندارد.

* چنانچه α و β ریشه های معادله درجه ۲ باشند، میتوان اتحاد های زیر را در مورد این معادلات نوشت:

قدر مطلق اختلاف دو ریشه	ضرب دو ریشه P	جمع دو ریشه S
$\lvert\alpha - \beta\rvert = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$	$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

* اگر S و P به ترتیب مجموع و حاصلضرب دو عدد همانند α و β باشند، معادله درجه دومی به صورت زیر میتوان نوشت که α و β دو ریشه آن معادله میباشند: $x^2 - Sx + P = 0$

- معادلات گویا: معادلات گویا به صورت کلی شامل معادلاتی میباشند که به صورت کسری بوده و صورت و مخرج این کسرها، میتواند شامل چندجمله ای ها نیز باشد. دامنه این نوع معادلات شامل تمام اعداد حقیقی میباشد، به غیر از اعدادی که باعث صفر شدن مخرج کسر میشوند: $D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج کسر}\}$

* برای حل معادله گویا کافی است که با ضرب کردن طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها، مخرج ها را حذف و معادله را ساده تر کنیم و پس از آن نسبت به حل معادله اقدام کنیم. جواب هایی که ریشه مخرج ها میباشند، جواب قابل قبول برای حل معادله نیستند.

- معادلات رادیکالی: معادلاتی که متغیر در آنها زیر رادیکال باشد را معادلات رادیکالی میگویند.

- معادلات قدر مطلق: ریشه های به دست آمده باید در دامنه تعریف شده قرار گیرند و طرف مقابل قدر مطلق قرار را منفی نکنند.

- تعیین علامت چند جمله ای ها

برای تعیین علامت چندجمله ای ها ابتدا ریشه های آنها را به دست می آوریم (فارغ از درجه چند جمله ای)

تعیین علامت درجه اول	ریشه $ax+b$: مخالف a ∘ موافق a
اثر قدر مطلق و توان زوج در تعیین علامت	ریشه $(ax+b)^2$ ، $\|ax+b\|$: + ∘ +
اثر چندجمله ای در مخرج در تعیین علامت	ریشه $\frac{1}{(ax+b)}$: مخالف a ت.ن موافق a
تعیین علامت عبارت درجه ۲	
معادله درجه ۲ با دلتای مثبت	x_1 x_2 (ax^2+bx+c) : موافق a 0 مخالف a 0 موافق a
معادله درجه ۲ با دلتای صفر	x_1 (ax^2+bx+c) : موافق a 0 موافق a
معادله درجه ۲ با دلتای منفی	بدون ریشه (ax^2+bx+c) : **موافق a**

* برای تعیین علامت معادلات به صورت ضرب یا تقسیم دو چند جمله ای، ریشه هر کدام را به دست آورده و جدول تعیین علامت را تشکیل میدهیم. در نهایت برای پیدا کردن علامت معادله اصلی علامت ها را در هم ضرب میکنیم

- نامعادلات

- نکات ابتدایی که در مورد نامعادلات لازم به ذکر هستند:

$x \geq y \xrightarrow{a>0} ax \geq y$	$x \geq y \xrightarrow{a<0} ax \leq y$	$x \geq y \rightarrow x+c \geq y+c$

* در نامعادلات درجه یک، متغیر را به یک سمت انتقال داده و سپس با ضرب، تقسیم، جمع و تفریق، نامعادله را حل میکنیم.

* روش پر کاربرد در حل نامعادلات درجه دوم و کسری، استفاده از جدول تعیین علامت میباشد. این روش مخصوصا در نامعادلاتی که از بیش از یک چند جمله ای تشکیل شده اند، مورد استفاده قرار میگیرد.

* در نامعادلاتی که به صورت قدر مطلق یا توان ۲ هستند میتوان نوشت:

نامعادلات قدر مطلق	نامعادلات درجه ۲
$\begin{cases} \|x\| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a \\ \|x\| \geq a \rightarrow x \leq -a \text{ و } x \geq a \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a \\ x^2 \geq a \rightarrow x \leq -a \text{ و } x \geq a \end{cases}$

➢ بخش چهارم: توابع

- آشنایی با تابع

- زوج مرتب، با نماد (a,b) در ریاضیات، یک «زوج» از اشیا است. در اینجا «ترتیبی» که اشیا در جفت پدیدار میشوند، مهم است؛ یعنی زوج مرتب (a,b) با زوج مرتب (b,a) متفاوت است، مگر آنکه a = b.

* به هر مجموعه ای از چندین زوج مرتب، یک رابطه گفته شده $R = \{(1,2), (2,7), (4,6), (6,3), (2,4), (4,1)\}$

- تابع: یکی از انواع رابطه است. در این نوع رابطه، اعضای دو مجموعه (مجموعه دامنه (D) یا ورودی و مجموعه برد (R) یا خروجی) به یکدیگر وصل میشوند. اصلی ترین نکته در ارتباط با توابع ریاضی این است که هیچ یک از اعضای ورودی، با بیش از یک عضو خروجی رابطه ندارد. به عبارت دیگر، با قرار دادن یک ورودی در تابع، باید تنها به یک خروجی مشخص برسیم.

* برای نمایش توابع چندین روش وجود دارد که ساده ترین آنها، مجموعه زوج مرتب هاست. به رابطه ای که در آن هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه اول یکسان نداشته باشند، یک تابع گفته میشود.

+ در این نوع توابع، به مجموعه‌ی مؤلفه های اول، دامنه تابع و به مجموعه‌ی مؤلفه دوم، برد تابع گفته میشود.

* روش دیگر برای نمایش توابع، استفاده از نمودار ون (نمایش پیکانی) میباشد

* روش دیگر برای نمایش توابع استفاده از نمودار محور مختصات است. در این نمایش، یک رابطه زمانی تابع است که هر خط موازی با محور y ها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

* نوع دیگری از نمایش توابع، استفاده از ضابطه تابع هستش. اگر $y = f(x)$ یک تابع باشد، منظور از $f(a)$ عبارتی است که از قرار دادن مقدار a در متغیر x به دست می آید.

* برای تشخیص اینکه ضابطه داده شده یک تابع است یا نه، به متغیر x یک مقدار میدهیم و در صورتی که برای y بیش از یک جواب وجود داشته باشد، ضابطه داده شده تابع نیست

- ترکیب دو تابع: ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با $fog(x)$ نشان میدهیم که این تابع برابر است با $fog(x) = f(g(x))$ و دامنه این تابع ترکیبی به صورت $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ میباشد.

* لازم به ذکر است که دو تابع $fog(x)$ و $gof(x)$ مساوی هم نیستند.

- دامنه و برد

* در نمایش زوج مرتب، به مجموعه تمامی مولفه های اول، دامنه تابع و به مجموعه مولفه های دوم، برد تابع گفته میشود.

* در نمایش نمودار ون، به تمامی اعضای مجموعه اول، دامنه تابع و به اعضایی مجموعه دوم، برد تابع گفته میشود.

* در نمایش به صورت نمودار در محور مختصات، به تصویر نمودار بر روی محور xها، دامنه تابع و به تصویر نمودار بر روی محور yها، برد تابع گفته میشود.

* در نمایش به صورت ضابطه ای، مجموعه مقادیری که x میتواند اختیار کند، دامنه تابع و به مجموعه مقادیری که y میتواند اختیار کند، برد تابع گفته میشود

* دامنه تابعی همچون $y = f(x)$، را با D_f و برد تابع را با R_f نشان میدهیم.

* در به دست آوردن دامنه، نباید عبارت را ساده کنیم. زیرا ممکن است باعث حذف شدن عوامل تاثیر گذار باشد.

- دو تابع f و g هنگامی مساوی هستند که دامنه آنها مساوی هم بوده $D_f = D_g$ و به ازای هر مقدار x داخل این دامنه ها داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

عمل جبری	نمایش	دامنه تابع
جمع دو تابع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
اختلاف دو تابع	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	$(f*g)(x) = f(x) * g(x)$	$D_{f*g} = D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

- انواع تابع و خصوصیات آن

- تقسیم بندی های مختلفی برای توابع ریاضی وجود دارد.

* انواع تابع بر اساس رابطه بین دامنه و برد: تابع یک به یک، تابع چند به یک، تابع پوشا، تابع یک به یک و پوشا، تابع غیرپوشا و تابع ثابت

* انواع تابع بر اساس فرم معادله: تابع همانی، تابع خطی، تابع درجه دو یا مربعی، تابع درجه سه یا مکعبی و تابع چندجملهای

* انواع تابع بر اساس برد: تابع قدر مطلق، تابع گویا، تابع علامت، تابع فرد، تابع زوج، تابع متناوب یا دورهای، تابع جز صحیح، تابع وارون و تابع مرکب

- تابع همانی: تابعی که هر ورودی از دامنه را به همان مقدار نظیر میکند. به عبارتی دیگر $\forall x \in D_f,\ \ f(x) = x$.

- تابع ثابت: تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو میباشد. فارغ از ورودی تابع، خروجی آن همواره مقداری ثابت است.

- توابع چندجمله ای: توابعی که نمایش آنها به صورت چندجمله ای های جبری از یک متغیر باشند. دامنه این نوع توابع همه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) میباشد. از انواع آن میتوان به توابع درجه اول (توابع خطی) و توابع درجه دوم (توابع سهمی):

- تابع چند ضابطه ای (Piecewise Function): توابعی هستند که برای قسمت های مختلف دامنه، ضوابط مختلفی تعریف شده است. لازم به ذکر است که دامنه هیچ یک از این قسمت ها با قسمت های دیگر اشتراکی ندارد. از انواع توابع چند ضابطه ای میتوان به قدر مطلق، جزء صحیح و .. اشاره کرد.

* در صورتی که با قرار دادن مقادیر x- در تابع، علامت خروجی تابع تغییر نکند، میگوییم تابع ما زوج است. اما چنانچه با قرار دادن مقادیر x- در تابع، علامت تابع تغییر کند، میگوییم تابع ما فرد است:

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \rightarrow \text{تابع زوج است} \\ f(-x) = -f(x) \rightarrow \text{تابع فرد است} \end{cases}$$

- تابع وارون (معکوس): اگر f یک تابع از دامنه D_f به برد R_f باشد، آنگاه معکوس تابع f که با f^{-1} نشان داده میشود، تابعی است از $D_{f^{-1}}(=R_f)$ به $R_{f^{-1}}(=D_f)$ که نمایش آن به صورت مقابل است: $f^{-1} = \{(f(x), x): x \in D_f\}$

* شرط معکوس پذیری تابع f این است که این تابع، تابعی یک به یک باشد.

* برای به دست آوردن تابع معکوس در حالت زوج مرتب، کافی است که جای مولفه های اول و دوم را در هر زوج مرتب عوض کنیم

* برای رسم نمودار تابع معکوس در محور مختصات، کافی است ابتدا در صورت لزوم با حذف بخش هایی که مانع از یک به یک بودن تابع میشوند، آن را یک به یک کرده و پس از آن، نمودار را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم.

* برای به دست آوردن ضابطه تابع معکوس یک تابع مانند f، در معادله $y = f(x)$، ابتدا متغیر x را بر حسب متغیر y محاسبه میکنیم. سپس با تغییر نام متغیر y به متغیر x و برعکس، ضابطه تابع $y = f(x)$ را به دست میاوریم.

* از جمله پرکاربرد ترین توابع و معکوس آنها میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

تابع	معکوس تابع	تابع	معکوس تابع
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$f^{-1}(x) = \ln x$	$f(x) = a^x$	$f^{-1}(x) = \log_a x$
$f(x) = \sin x$	$f^{-1}(x) = \arcsin x$	$f(x) = \cos x$	$f^{-1}(x) = \arccos x$

- عملیات روی تابع

- انتقال عمودی و افقی توابع:

تابع $y = f(x)$ مشخص است و فرض میکنیم که k یک عدد حقیقی باشد، در اینصورت داریم:

* رسم نمودار $y = -f(x)$، قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها

* رسم نمودار $y = f(-x)$، قرینه نمودار $f(x)$ را نسبت به محور y ها

* برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ داریم:

$$f(x) + k \rightarrow \begin{cases} k > 0, \quad k \text{ واحد به بالا منتقل میشود} \\ k < 0, \quad k \text{ واحد به پایین منتقل میشود} \end{cases}$$

* برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ داریم:

$$f(x+k) \rightarrow \begin{cases} k>0, & \text{واحد به چپ منتقل میشود } k \\ k<0, & \text{واحد به راست منتقل میشود } k \end{cases}$$

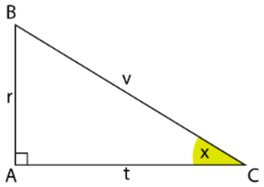
* در رسم نمودار $y = kf(x)$، عرض نقاط را در k ضرب میکنیم. k>1 باشد، نمودار منبسط و 0<k<1 باشد، منقبض میشود.

* در رسم نمودار $y = f(kx)$، طول نقاط را در $\frac{1}{k}$ ضرب میکنیم. k>1 باشد، نمودار منقبض و 0<k<1 باشد منبسط میشود.

* اعمال این تغییرات نیز از اولویت خاصی برخوردار است که ترتیب آن را در تابعی همانند $y = af(bx+c)+d$ به صورت مقابل است: $y = f(x) \rightarrow y = f(x+c) \rightarrow y = f(bx+c) \rightarrow y = af(bx+c) \rightarrow y = af(bx+c)+d$

➢ بخش پنجم: مثلثات

- آشنایی با مثلثات (دایره مثلثاتی و نسبت های مثلثاتی)



نسبت های مثلثاتی عبارتند از سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت که در یک مثلث قائم الزاویه همانند مثلث ABC زیر، مقادیر این تابع برای زاویه x عبارتند از:

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{t}{r}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{r}{t}$	$\cos x = \frac{t}{v}$	$\sin x = \frac{r}{v}$

- دایره مثلثاتی دایره ای جهت دار به شعاع یک واحد است که جهت مثبت آن، پاد ساعتگرد میباشد. این دایره توسط محور های عمود بر هم به چهار بخش تقسیم میشوند.

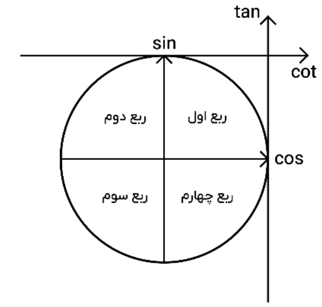
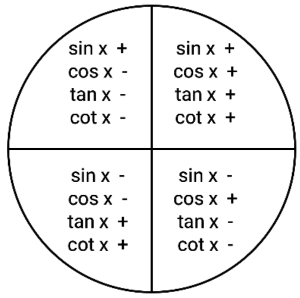
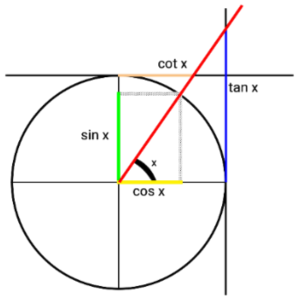
- اندازه گیری زاویه ها در دایره مثلثاتی به دو صورت درجه و رادیان انجام میگیرد.

درجه: محیط دایره را به ۳۶۰ واحد تقسیم میکنیم، اندازه هر یک از زوایای مرکزی رو به این کمان ها یک درجه میباشد.

رادیان: یک رادیان یک زاویه مرکزی است که اندازه کمان روبروی آن برابر شعاع دایره است. که این مقدار تقریباً برابر با ۵۷ درجه است.

* رابطه ای برای تبدیل درجه به رادیان و بالعکس: $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$. به عبارتی دیگر برای تبدیل درجه به رادیان کافیست آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنیم.

- دایره مثلثاتی توسط محور های عمود بر هم گذرنده از مرکز آن به چهار ربع تقسیم میشود که ربع اول در بالا و سمت راست قرار دارد و نامگذاری این بخش ها در جهت پادساعتگرد صورت میگیرد

محور ها و ربع های دایره مثلثاتی	علامت نسبت های مثلثاتی	مقدار نسبت های مثلثاتی زاویه x در دایره
		

* با توجه به اینکه شعاع دایره مثلثاتی یک واحد میباشد، میتوان گفت که مقدار سینوس و کسینوس همواره در بازه $[-1,1]$ قرار دارد.

- روابط نسبت های مثلثاتی

* در جدول زیر به برخی از روابط مثلثاتی زاویه های قرینه، مکمل و ... میپردازیم:

نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه	نسبت های مثلثاتی زوایای مکمل
$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases}$	$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \tan(\pi - x) = -\tan x \\ \cot(\pi - x) = -\cot x \end{cases}$

* نکته کلی که لازم به ذکر میباشد، این است که اگر در کمان یک نسبت مثلثاتی، مضارب صحیح π اضافه یا کم شوند تغییری در نسبت داده نمیشود، اما علامت آن ممکن است بنابر ناحیه تغییر کند. در صورتی که در یک کمان از نسبت مثلثاتی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ اضافه یا کم شود، نسبت مثلثاتی مورد نظر تغییر خواهد کرد و تغییر علامت آن نیز همچنان به ناحیه مثلثاتی بستگی دارد

- اتحادهای مثلثاتی

- اتحاد های پرکاربردی که در نسبت های مثلثاتی برقرار است را میتوان به صورت زیر لیست کرد:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ، $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x . \cos x$ $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \cos^2 x$ $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$	اتحاد های درجه دو نسبت های مثلثاتی
$\sin(2x) = 2\sin x . \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	سینوس و کسینوس دو برابر زاویه
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ $\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$	سینوس، کسینوس و تانژانت جمع و تفریق دو زاویه

- توابع مثلثاتی: به توابعی چون $y = a\sin x$ و یا $y = \tan bx$ که در آنها نسبت های مثلثاتی وجود دارد، توابع مثلثاتی گفته میشود.

در توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$، دامنه توابع برابر R و برد آنها برابر با بازه $[-1,1]$ میباشد.

+ در توابع مثلثاتی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$، دوره تناوب برابر است با $T = \frac{2\pi}{|b|}$، ماکسیمم برابر است با $max = |a| + c$ و مینیمم برابر است با $min = -|a| + c$

* تابع تانژانت به صورت $y = \tan x$ نوشته میشود، که دامنه آن به صورت $\mathbb{R} - \frac{(2k+1)\pi}{2}$ بوده و برد آن برابر با $\mathbb{R}$ است. دوره تناوب این تابع برابر $T = \pi$ میباشد.

* تابع کتانژانت به صورت $y = \cot x$ نوشته میشود، که دامنه آن به صورت $\mathbb{R} - k\pi$ بوده و برد آن برابر با $\mathbb{R}$ است. دوره تناوب این تابع برابر $T = \pi$ میباشد.

➢ بخش ششم: حد و پیوستگی

- حد

- همسایگی یک نقطه: هر بازه به صورت $(x-\alpha, x+\alpha)$ را که در آن x یک عدد حقیقی و α یک عدد حقیقی مثبت است را یک همسایگی متقارن برای x مینامند.

* در صورتی که نقطه x را از بازه حذف کنیم، بازه ای مانند $(x-\alpha, x+\alpha)-\{x\}$ به دست می آید که به آن ، همسایگی متقارن محذوف برای x میباشد.

* به بازه $(x, x+\alpha)$ یک همسایگی راست و به بازه نظیر $(x-\alpha, x)$، همسایگی چپ نقطه x گفته میشود.

- میل کردن: وقتی که x از عددی به غیر از a به سمت خود a حرکت میکند، میگوییم که x به a میل میکند. به عبارتی دیگر میل کردن x به a یعنی آنکه مقادیر x به a نزدیک میشوند.

وقتی که x از مقادیری بیشتر از a به a نزدیک میشود، میگوییم که x از راست به a میل میکند و آن را با $x \to a^+$ نشان میدهیم.

همچنین وقتی که x از مقادیری کمتر از a به a نزدیک میشود، میگوییم که x از چپ به a میل میکند و آن را با $x \to a^-$ نشان میدهیم.

* اگر مقدار f با نزدیک شدن x به نقطه a از مقدار های بزرگتر و نزدیک آن، به مقداری مانند j نزدیک شود، حد راست تابع f در نقطه x = a، برابر با j میباشد و مینویسیم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = j$

* اگر مقدار f با نزدیک شدن x به نقطه a از مقدار های کمتر و نزدیک آن، به مقداری مانند j نزدیک شود، حد چپ تابع f در نقطه x = a، برابر با j میباشد و مینویسیم: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = j$

* اگر حد چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه x = a وجود داشته باشند و مقدار این دو با هم برابر باشد، تابع $f(x)$ در آن نقطه دارای حد میباشد: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = j \to \lim\limits_{x\to a} f(x) = j$

$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = j+m$	$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = j-m$
$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)*g(x)\big) = j*m$	$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\div g(x)\big) = j\div m$
$\lim\limits_{x\to a} c*f(x) = c*j$	$\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{j} \quad (j\neq 0)$
$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big)^n = j^n$	$\lim\limits_{x\to a}\lvert f(x)\rvert = \lvert j\rvert$
$\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{j} \quad (j>0 \ or \ n=2k+1)$	

- در حالت های خاصی از حد گیری ممکن است ابهام به وجود بیاید که این حالت ها به صورت زیر میباشد:

$\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}} = \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty * 0^{\pm}$	$\infty - \infty$	1^{∞}

* در محاسبات حدی دو نوع صفر داریم، صفر مطلق یا عددی که به صورت 0 نمایش داده میشود و نوع دیگر صفر حدی است. این صفر هنگامی رخ میدهد که تابع به صفر میل میکند اما برابر با صفر نمیباشد.

در جدول زیر صفر مطلق را صرفا با *0* نشان میدهیم:

$\infty * \infty = \infty$	$\infty + \infty = \infty$	$a * \infty = \infty$
$\frac{\infty}{a} = \infty$	$a > 0: \quad \frac{a}{0^{+}} = +\infty$	$a > 0: \quad \frac{a}{0^{-}} = -\infty$
$0 * \infty = 0$	$\frac{a}{\infty} = 0$	$\frac{0}{0} = 0$
$\frac{a}{0} =$ تعریف نشده	$\frac{0}{0^{\pm}} = 0$	$\frac{0^{\pm}}{0} =$ تعریف نشده

- قضایای حد (رفع ابهام)

در صورتی که در $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$، حد صورت و مخرج در x = a برابر با صفر حدی باشد، یعنی داشته باشیم $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$، به وضعیت پیش آمده وضعیت ابهام $\frac{0}{0}$ گفته میشود.

* اگر توابع f و g چندجمله ای باشند، برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ باید عامل صفر کننده را از صورت و مخرج حذف کنیم. برای این کار میتوان از روش هایی چون اتحاد ها، تجزیه کردن، گویا کردن و ... استفاده کرد.

* در صورتی که حداقل یکی از توابع f و g عبارتی رادیکالی باشد، برای رفع ابهام میتوان صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کرد.

* در صورتی که حداقل یکی از توابع f و g یک عبارت مثلثاتی باشد، با اتحاد های مثلثاتی صورت و مخرج را آن قدر ساده میکنیم که عامل صفر کننده در صورت و مخرج ساده شود تا بتوان آنرا از صورت و مخرج حذف کرد.

روش دیگر برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$، قاعده هوپیتال میباشد. چنانچه داشته باشیم $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ و یا $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$، در صورت مشتق پذیر بودن توابع f و g، میتوان برای محاسبه حد، از صورت و مخرج به صورت جداگانه مشتق گرفت و سپس از عبارت جدید به دست آمده حد گرفت. به طور کلی داریم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \to \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

* در صورتی که در این مرحله نیز با نتیجه مبهم روبرو شدیم، میتوان مجدد از صورت و مخرج مشتق گرفت.

* قاعده هوپیتال برای حد های چپ و راست نیز برقرار است. همچنین برای هر مقدار a، حتی بینهایت نیز برقرار میباشد.

* روش دیگر برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$، استفاده از هم ارزی میباشد. توابع f و g را در همسایگی x = a هم ارز گوییم و با $f\sim g$ نشان دهیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \end{cases}$$

+ هر عبارت با درجه گویای مثبت، وقتی که $x \to 0$، هم ارز جمله ای میباشد که کمترین درجه را دارد و وقتی که $x \to \pm\infty$، هم ارز جمله ای میباشد که بیشترین درجه را دارد.

* هم ارزی های مثلثاتی وقتی که x به صفر میل میکند $(x \to 0)$ را در جدول زیر میتوانید مشاهده کنید:

$\sin^{-1} ax \sim ax$	$\sin^n ax \sim (ax)^n$	$\sin ax \sim ax$
$\cos^{-1} ax$ *	$\cos^n ax \sim 1 - \dfrac{n(ax)^2}{2}$	$\cos ax \sim 1 - \dfrac{(ax)^2}{2}$

- حد بینهایت: اگر در تابع $f(x)$ وقتی که x به a میل میکند، مقدار آن بدون هیچ محدودیتی بزرگ و بزرگتر یا کوچک و کوچکتر شود و به هیچ عدد متناهی ثابتی میل نکند، میگوییم که حد تابع در نقطه a برابر با مثبت بینهایت $(+\infty)$ یا منفی بینهایت $(-\infty)$ است.

- پیوستگی

- وقتی که حد چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه x = a موجود و مساوی باهم باشند و با مقدار تابع در نقطه x = a نیز برابر باشد، میگوییم تابع در نقطه x = a، پیوسته است: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

* چنانچه حد راست موجود و برابر با مقدار $f(a)$ باشد، تابع دارای پیوستگی راست میباشد.

* چنانچه حد چپ موجود و برابر با مقدار $f(a)$ باشد، تابع دارای پیوستگی چپ میباشد.

* ناپیوستگی ممکن است در مواردی همچون مرز توابع چندضابطه ای، جزء صحیح اعداد صحیح، رادیکال صفر رخ دهد، پس از این رو در صورت مواجه به چنین مواردی در تابع، باید این نقاط بررسی شوند، اما رخ دادن ناپیوستگی در ریشه مخرج ها همواره قطعی میباشد.

*** چند نکته در ارتباط با پیوستگی توابع چندجمله ای:**

+ چندجملهای ها روی دامنهشان، یعنی اعداد حقیقی، پیوسته هستند.

+ جمع و تفریق دو یا چند عبارت چندجملهای نیز روی اشتراک دامنههاشان (اعداد حقیقی) پیوسته است.

+ ضرب چندجملهای ها روی اشتراک دامنه هایشان پیوسته هستند.

➢ بخش هفتم: مشتق و انتگرال

- مشتق

مشتق به معنی نرخ تغییرات لحظه ای است و در حالت کلی بیان میکند که یک تابع با چه نرخی نسبت به متغیر وابسته اش تغییر میکند. مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه ای همچون $x = a$ برابر با شیب مماس بر نمودار تابع f در نقطه a میباشد.

* مشتق تابع را با $f'(x)$ نمایش میدهند. به عبارت $\frac{dx}{dy}$ مشتق y نسبت به x گفته میشود. این مقدار، تغییرات تابع y را نسبت به متغیر x در یک نقطه خاص، محاسبه میکند. رابطه مشتق به صورت زیر است:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dx}{dy}$$

* تابع $f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر است هرگاه که تابع در آن پیوسته بوده و مشتق چپ و راست موجود و معین باشد.

* برخی از مشتق های معروف و پرکاربرد (در روابط زیر u و v توابعی بر حسب x میباشند):

تابع	مشتق تابع	تابع	مشتق تابع
توابع جبری و چندجمله ای ها			
$y = c$	$y' = 0$	$y = au$	$y' = au'$
$y = u^n$	$y' = n.u'.u^{n-1}$	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
$y = \frac{a}{u^n}$	$y' = -\frac{an.u'}{u^{n+1}}$	$y = \frac{au+b}{cu+d}$	$y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}.u'$
$y = u.v$	$y' = u'.v + u.v'$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$
توابع مثلثاتی			
$y = \sin u$	$y' = u'.\cos u$	$y = \cos u$	$y' = -u'.\sin u$
$y = \tan u$	$y' = u'(1+\tan^2 u)$	$y = \cot u$	$y' = -u'(1+\cot^2 u)$
توابع نمایی و لگاریتمی			
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = e^u$	$y' = u'.e^u$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u.\ln a}$	$y = a^u$	$y' = u'.a^u.\ln a$
$y = u^v$		$y' = u^v\left(v'.\ln u + \frac{u'.v}{u}\right)$	

* در مشتق گیری از توابع مرکب همچون $fog(x)$، خواهیم داشت: $y = fog(x) = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x).f'(g(x))$

اگر $y=f(u)$ باشد که در آن u یک تابع بر حسب x، همچون $g(x)$ باشد، آهنگ تغییرات y نسبت به u برابر $\frac{dy}{du}$ و آهنگ تغییر u نسبت به x برابر $\frac{du}{dx}$ میباشد. در اینصورت آهنگ تغییر y نسبت به x برابر است با: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}*\frac{du}{dx}\rightarrow y'_x=y'_u*u'_x$

- کاربرد مشتق (شیب خط، صعودی و نزولی، اکسترمم (نسبی و مطلق)، تقعر نمودار، نقطه عطف)

- تعیین معادله خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$: ابتدا مقدار $f'(a)$ را به دست میاوریم. این مقدار برابر با شیب خط مماس میباشد و با داشتن آن معادله خط مماس را میابیم: $y=f'(a)*(x-a)+f(a)$

معادله خط عمود بر تابع در همان نقطه نیز به صورت زیر است: $y=-\frac{1}{f'(a)}*(x-a)+f(a)$

- یکی دیگر از کاربرد های مشتق بررسی صعودی یا نزولی بودن توابع در بازه های داده شده است.

* علامت مشتق تابع در بازه داده شده، نامنفی باشد $(y'\geq 0)$، تابع صعودی و اگر مثبت باشد $(y'>0)$، اکیدا صعودی است.

* علامت مشتق تابع در بازه داده شده، نامثبت باشد $(y'\leq 0)$، تابع نزولی و اگر منفی باشد $(y'<0)$ اکیدا نزولی است.

در صورتی که در مسئله به هیچ بازه ای اشاره نشده باشد، صعودی یا نزولی بودن را به کل دامنه میتوان تعمیم داد.

علامت $f'(x)$ در بازه	مثبت	منفی	صفر
یکنوایی تابع $f(x)$ در بازه	اکیدا صعودی	اکیدا نزولی	ثابت

- در صورتی که از مشتق تابع f، یعنی f'، مجدد مشتق بگیریم، به مشتق درجه ۲ دست میابیم که با f'' نشان داده میشود. با استفاده از مشتق درجه ۲ میتوان جهت تقعر توابع سهمی را نشان داد.

- کاربرد دیگر مشتق، مشخص کردن نقاط بحرانی میباشد. نقاط بحرانی به نقاطی از دامنه تابع گفته میشه که تابع در آن نقاط یا مشتق ندارد و یا اگر مشتق دارد، مقدار مشتق در اون نقطه برابر صفر هست.

* برای یافتن این نقاط، کافی است مشتق تابع را محاسبه کنیم و ریشه های آن یا نقاط دارای مشکل (بدون مشتق، مشتق چپ و راست نابرابر و ...) را به دست بیاوریم.

* در صورتی که مشتق به صورت کسری بود، هم صورت و هم مخرج را برابر صفر قرار میدهیم، ریشه های صورت و مخرج مشتق تابع، نقاط بحرانی هستند به شرطی که عضو دامنه تابع f باشند.

* توابع نمایی، لگاریتمی و هموگرافیک، نقطه بحرانی ندارند.

- از دیگر کاربرد های مشتق، تعیین نقاط اکسترمم و اکسترمم نسبی میباشد. نقاط اکسترمم، همان نقاط ماکسیمم و یا مینیمم تابع میباشد.

* پیوستگی و مشتق پذیری از الزامات نقاط اکسترمم نمیباشد.

- نقاط اکسترمم مطلق، نقاطی هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به تمامی نقاط دامنه تابع f بزرگتر یا مساوی باشد.

* اکسترمم های مطلق تابع یا در انتها و ابتدای بازه دامنه تابع هستند یا یکی از اکسترمم های نسبی تابع میباشند

- انتگرال و خواص آن

- انتگرال: روشی برای اختصاص اعداد به توابع است؛ به گونه ای که جابه‌جایی، مساحت، حجم و دیگر مفاهیم برآمده از ترکیب داده های بینهایت کوچک را به وسیله آن بتوان توصیف کرد.

- انتگرال عکس مشتق گیری است و بسته به تابعی که از آن انتگرال میگیریم میتواند معنا و مفهوم متفاوتی داشته باشد.

* به زبان ساده تر، انتگرال برابر مساحت زیر نمودار است. لذا وقتی برای یک تابع یا نمودار داده شده انتگرال را محاسبه میکنیم در واقع مساحت زیر نمودار را بدست میاوریم. فرم کلی نمایش انتگرال در محاسبات به صورت $\int f(x)dx$ میباشد.

* چنانچه تابع f را داشته باشیم و از آن مشتق بگیریم، تابع f' به دست می‌آید. حال اگر از تابع f' بخواهیم انتگرال بگیریم، به تابعی همچون $f(x)+c$ میرسیم که در این معادله c یک مقدار ثابت میباشد.

$$(f(x))' = f'(x) \Rightarrow \int f'(x)dx = f(x) + c$$

* انتگرال به دو نوع معین و نامعین تقسیم بندی میشود؛ اگر حدود انتگرال مشخص شده باشد، به آن انتگرال معین و اگر مشخص نشده باشد، به آن انتگرال نامعین گفته میشود.

- انتگرال معین: اصطلاحی است که به منظور محاسبه انتگرال در بازه ای مشخص استفاده میشود. انتگرال معین، مساحت زیر منحنی در بازه مفروض را (مثلا a تا b) محاسبه میکند. در بازه $[a,b]$ به a کران پایین و به b کران بالا گفته میشود:

$$\int_a^b f(x)dx \to \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

چندین نکته ابتدایی و اولیه که در ارتباط با انتگرال ها میتوان گفت را در جدول زیر برای شما نشان داده ایم:

$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$	$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	
$\int_a^b f(x)dx = \int_{a\pm c}^{b\pm c} f(x\mp c)dx$	$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| = \int_a^b \|f(x)\|dx$	

- انتگرال جزء به جزء: با استفاده از روش جزء به جزء میتوان انتگرال های دشوار را به انتگرال های ساده تر تبدیل کرد. در صورتی که دو تابع u و v را داشته باشیم میتوان نوشت: $\int udv = uv - \int vdu$

* استفاده از این روش به خاطر نکته زیر میسر میباشد: $d(uv) = udv + vdu \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu$

- روش تغییر متغیر: یکی از روش هایی که در انتگرال گیری برای ساده سازی انتگرال به کار میرود، روش تغییر متغیر (جایگزینی یا جانشینی) میباشد.

➢ بخش هشتم: احتمال و آنالیز ترکیبی

- اصول شمارش (جایگشت - ترکیب و ترتیب)

- اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد بطوریکه روش اول به n طریق و روش دوم به m طریق قابل انجام باشد، و این دو روش مستقل از همدیگر و غیرهمزمان باشند، برای انجام کار مورد نظر، m + n روش وجود دارد.

* تشخیص این اصل در سوالات با استفاده از واژه «یا» میباشد: «انجام این کار یا آن کار».

- اصل ضرب: اگر کاری در طی دو مرحله انجام شود که مرحله اول به n روش و مرحله دوم به m روش قابل انجام باشد (این دو مرحله همزمان هستند)، آنگاه آن کار را میتوان به $m \times n$ روش انجام داد.

* تشخیص این اصل در سوالات با استفاده از واژه «و» میباشد: «انجام این کار و آن کار».

- فاکتوریل: حاصلضرب تمامی اعداد طبیعی و متوالی از یک تا n را با نماد !n نشان میدهیم: $n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$

* مطابق با قراردادهای ریاضی فاکتوریل دو عدد یک و صفر، همواره برابر یک میباشد: $0! = 1! = 1$

- جایگشت: به تعداد حالت های قرار گرفتن n شی در کنار هم، جایگشت n شی میگویند.

* برای محاسبه جایگشت n شی چندین نکته مهم وجود دارد که باید در نظر گرفته شوند، من جمله متمایز یا نامتمایز بودن شی ها، تکراری بیا غیر تکراری بودن برخی شی ها و ... . در زیر به بررسی انواع جایگشت های n شی متمایز میپردازیم:

+ در حالت عادی که ترتیب قرار گیری مهم است، تعداد حالت های ممکن برای جایگشت n شی متمایز برابر با با $n!$ میباشد.

+ اگر k شی از n شی کنار هم باشند، تعداد جایگشت های این n شی برابر است با: $(n-k+1)! * k!$

+ اگر n شی را به دور میز گرد بچینیم، یک عضو به عنوان مبدا میباشد، تعداد جایگشت ها برابر با $(n-1)!$ خواهد بود.

- ترتیب: انتخاب r شی از میان n شی متمایز که ترتیب قرار گیری مهم است. با نماد $P(n.r)$ نشان میدهیم و برابر است با:

$$P(n.r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (0 \le r \le n)$$

- ترکیب: انتخاب r شی از میان n شی متمایز که ترتیب در آن مهم نیست. با نماد $C(n.r)$ نشان میدهیم و برابر است با:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

n تعداد همه اشیا	ترتیب (تشکیل صف)		ترکیب (تشکیل گروه)	
k تعداد انتخاب ها	عدم تکرار	وجود تکرار	عدم تکرار	وجود تکرار
نحوه محاسبه	$P(n.k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k	$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-k)!}$

- احتمال (آشنایی با احتمال، اصول احتمال، احتمال شرطی)

- آزمایش یا پدیده تصادفی: آزمایش یا پدیده ای که قبل از اتفاق نتیجه آن معلوم نباشد ولی نتایج آن قابل پیش بینی باشد.

- فضای نمونه: به مجموعه تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه گفته میشود، با S نشان داده میشود و تعداد اعضای آن را با نماد های $|S|$ یا $n(S)$ نشان میدهیم. فضای نمونه به دو دسته تقسیم میشود: فضای نمونه گسسته و پیوسته.

* آزمایش تصادفی که از دو مرحله با تعداد m و p تشکیل شده باشد، تعداد اعضای فضای نمونه برابر $n(S) = m * p$ است.

پرتاب m سکه	پرتاب m تاس	پرتاب m سکه و p تاس	انتخاب p شی از میان n شی	خانواده ای با m فرزند
2^m	6^m	$2^m * 6^p$	$\binom{m}{p} = \frac{m!}{p! * (m-p)!}$	2^m

- برآمد: به هر عضو فضای نمونه، یک برآمد گفته میشود. در هر آزمایش تصادفی، تنها یکی از اعضای مجموعه S رخ میدهد

- پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را پیشامد مینامند. فضای نمونه n عضوی تعداد 2^n پیشامد دارد.

هنگامی میگوییم پیشامد A رخ داده است که یکی از اعضای آن به عنوان نتیجه آزمایش رخ داده باشد.

* انواع پیشامد: پیشامد ساده: (دارای یک برآمد)، پیشامد ناممکن یا تهی: (هیچگاه اتفاق نیافتد)، پیشامد حتمی (حتما رخ دهد).

- A پیشامدی از فضای نمونه S باشد، احتمال وقوع پیشامد A که با P(A) نمایش داده میشود برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

* احتمال وقوع پیشامد A از فضای نمونه S همواره به صورت $0 \le P(A) \le 1$ میباشد.

متمم پیشامد	پیشامد A رخ ندهد	$P(A') = 1 - P(A)$
اجتماع دو مجموعه	یا A و یا B رخ دهد و یا هردو رخ دهند	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
اشتراک دو مجموعه	هر دو پیشامد A و B رخ دهند	$P(A \cap B)$
اختلاف دو مجموعه	پیشامد A رخ دهد اما پیشامد B رخ ندهد	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

* دو پیشامد A و B هنگامی ناسازگار هستند که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند: $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$

* دو پیشامد A و B را پیشامد مستقل مینامند هنگامی که وقوع یکی، ربطی به وقوع دیگری نداشته باشد. شرط مستقل بودن دو پیشامد به صورت $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ میباشد.

* اگر سوال به صورت «احتمال آنکه A یا B رخ دهد چه قدر است» باید مقدار $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم

* اگر در سوال گفته شده که «احتمال آنکه A و B هر دو رخ بدهند چه قدر است»، باید مقدار $P(A \cap B)$ را محاسبه کنیم

- احتمال شرطی: چنانچه A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشد و $P(B) \neq 0$ باشد، آنگاه احتمال پیشامد A به شرطی که پیشامد B رخ داده باشد، با نماد $P(A|B)$ نمایش داده میشود و فرمول محاسبه آن به صورت زیر است:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

➢ بخش نهم: آمار و اندازه گیری

- آمار و اندازه گیری (آشنایی با علم آمار - جامعه و نمونه - متغیر و انواع آن)

- جامعه آماری: مجموعه ای از افراد یا اشیا که میخواهیم در مورد آنها موضوع یا موضوعاتی را بررسی کنیم. جامعه آماری مجموعه ای از افراد یا اشیا میباشد که حداقل در یک صفت مشترک هستند. تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه مینامیم.

- سرشماری: اگر تمامی افراد یک جامعه را مورد بررسی قرار دهیم، آن جامعه را سرشماری کرده ایم. سرشماری مشکلات متعددی دارد که در زیر به آنها اشاره میکنیم:

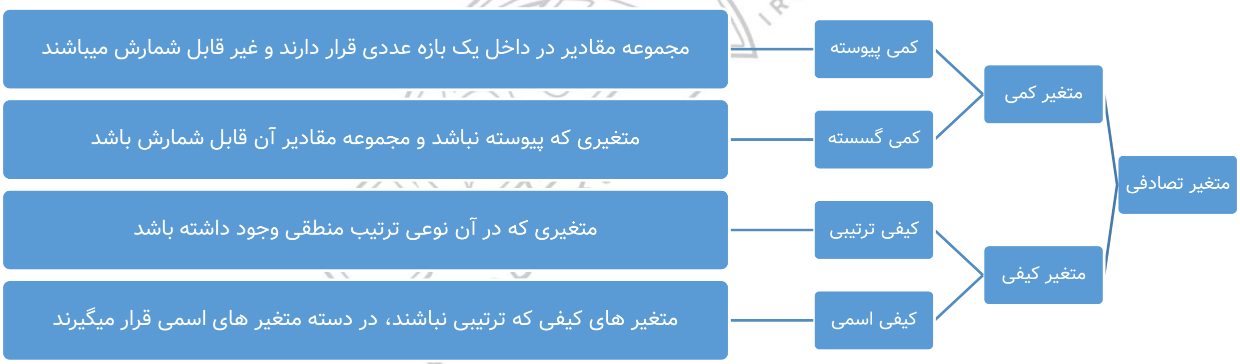
در دسترس نبودن تمام جامعه - وقت گیر بودن دسترسی به تمام جامعه - گران بودن بررسی تمام جامعه - از بین رفتن جامعه در برخی از مطالعات

- صفت: کمیت یا کیفیتی که متعلق به عناصر جامعه آماری است را صفت مینامند. صفت بر دو نوع است:

+ ثابت: همه عناصر جامعه آن را دارا باشند   + متغیر: از یک عنصر به عنصر دیگر تغییر کند

- نمونه: نمونه زیرمجموعه ای از جامعه آماری است که بیان کننده ویژگی های اصلی جامعه میباشد. تعداد اعضای نمونه را نیز اندازه نمونه مینامند.

- متغیر تصادفی: مشخصه ویژه ای از افراد جامعه که میخواهیم مورد بررسی قرار دهیم.



* متغیر تصادفی کمی: متغیر های قابل اندازه گیری که مقادیر عددی به خود میگیرند و برای آنها اعمال ریاضی قابل انجام است. (همچون قد و وزن و ...) این دسته از متغیر ها به دو دسته کمی پیوسته و کمی گسسته تقسیم میشود. (از جمله ویژگی های متغیر های کمی این است که میتوان آنها را باهم مقایسه کرد)

* متغیر تصادفی کیفی: متغیر های غیرقابل اندازه گیری که صرفا برای مقایسه و دسته بندی افراد یا اشیا در گروه ها به کار میرود. این متغیر ها لزوما مقدار عددی نمیگیرند و به دو دسته تقسیم میشود، کیفی ترتیبی و کیفی اسمی.

- دسته بندی داده ها و جدول های فراوانی (میله‌ای، مستطیلی، چند بر فراوانی و ...)

- فراوانی: تعداد دفعاتی که یک شی یا عدد تکرار میشود را فراوانی آن شی یا عدد میگوییم که با f_i نشان داده میشود.

+ فراوانی مطلق: تعداد دفعاتی که یک داده آماری در یک جامعه آماری تکرار میشود و آن را با f_i نشان میدهیم.

+ فراوانی کل یا حجم جامعه: تعداد کل اعضای یک جامعه یا مجموع فراوانی های مطلق، به صورت $n = \sum f_i$ میباشد.

+ فراوانی تجمعی: فراوانی تجمعی طبقه i ام برابر مجموع فراوانی های مطلق طبقه اول تا i است که با F_i نشان میدهیم.

$$F_i = \sum_{k=1}^{i} f_i$$

+ فراوانی نسبی: حاصل تقسیم فراوانی مطلق هر دسته بر حجم جامعه که با r_i نشان میدهیم: $r_i = \frac{f_i}{n}$.

+ فراوانی نسبی تجمعی: حاصل تقسیم فراوانی تجمعی هر دسته بر حجم جامعه که با R_i نشان میدهند.

- توزیع فراوانی: سازماندهی داده ها در آمار «توزیع فراوانی» مینامند، توزیع فراوانی جدول مرتب شده‌ی مقادیر آن داده ها است که تکرار وقوع هر داده در آن مشخص شده باشد.

- جدول توزیع فراوانی: جدولی است که برای مرتب سازی و دسته بندی داده ها به کار میرود، بر حسب کم یا زیاد بودن داده های آماری، در دو حالت میتوان جدولی برای آنها در نظر گرفت.

- دامنه تغییرات: اختلاف میان بزرگترین و کوچکترین داده که با R نشان داده میشود. دامنه ارتباطی با فراوانی داده ها ندارد.

- حدود دسته ها: اعدادی که در دو طرف یک دسته قرار میگیرند، حدود آن دسته و یا کران های بالا و پایین دسته میباشند.

- طول دسته ها: اختلاف میان کران بالا و پایین هر دسته را طول دسته مینامند و با نماد C نشان میدهند.

- مرکز دسته ها: به عنوان نماینده یا نشان دسته نیز یاد میشود، برابر با میانگین کران بالا و پایین هر دسته میباشد.

از انواع نمودار های آماری میتوان به نمودار های میله ای، نمودار های مستطیلی یا هیستوگرام، نمودار های چند بر فراوانی، نمودار های تجمعی، نمودار های دایره ای و نمودار های ساقه و برگ اشاره کرد.

هر کدام از این نمودار ها در حالت های خاصی به کار میروند، به عنوان مثال نمودار میله ای بیشتر برای متغیر های کمی گسسته و کیفی به کار میرود، نمودار دایره ای برای متغیر های کیفی و بیشتر با استفاده از درصد فراوانی مورد استفاده قرار میگیرد و ... .

- شاخص های مرکزی (میانگین، میانه، مد)

شاخص های مرکزی به مقداری گفته میشود که که مرکز داده ها را مشخص میکند. این شاخص نشان دهنده تمرکز داده ها است. شاخص های مرکزی یا گرایش به مرکز شاخص هایی هستند که با استفاده از آنها مجموعه ای از داده ها در یک مقدار یا عدد که نماینده آن مجموعه است خلاصه می شود. از جمله شاخص های مرکزی که در ادامه به آنها میپردازیم عبارتند از میانگین، میانه، نما یا مد و چارک.

- میانگین: اصلی ترین و مهمترین شاخص مرکزی، به معنای معدل کل داده ها میباشد. دارای دو حالت وزن دار و بی وزن است. در صورتی که داده ها فراوانی نداشته باشند، از میانگین بی وزن و در صورتی که داده ها فراوانی داشته باشند، از میانگین وزن دار استفاده میشود.

میانگین بی وزن	میانگین داده هایی که فراوانی ندارند	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
میانگین وزن دار	میانگین داده هایی که فراوانی دارند (مرکز دسته i ام را با x_i و فراوانی آن را با f_i نشان دهیم)	$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

* میانگین در هر جامعه آماری منحصر به فرد میباشد و همواره عددی است بین کوچکترین و بزرگترین داده.

* تمامی داده ها در عدد ثابتی ضرب شوند یا با عدد ثابتی جمع شوند، میانگین نیز در آن عدد ضرب شده یا با آن جمع میشود

- **میانه (Md):** عددی است که نصف داده ها از آن بزرگتر و نصف دیگر داده ها از آن کوچکتر هستند. برای به دست آوردن میانه ابتدا داده ها را به طور صعودی مرتب میکنیم. سپس داده میانی (داده ای که در وسط قرار میگرد) را پیدا میکنیم

* اگر تعداد داده ها فرد باشد میانه عدد وسط است، اگر تعداد زوج باشد، میانه برابر میانگین دو داده ای است که در وسط قرار دارند.

* در صورت ضرب داده ها در یک عدد ثابت و یا جمع بستن آنها با عددی ثابت، میانه نیز در آن عدد ضرب یا با آن جمع میشود.

- **مد یا نما (Mo):** داده یا داده هایی که دارای بیشترین فراوانی (تکرار) باشند.

مد تنها شاخص مرکزی است که برای متغیر های کیفی قابل استفاده میباشد و بر عکس میانگین و میانه شاخص منحصر به فردی نمیباشد و رفتار آن در مواجه با ضرب شدن در عدد ثابت یا جمع شدن با عدد ثابت، همچون میانگین و میانه میباشد.

- **شاخص های پراکندگی (واریانس، ضریب تغییرات، انحراف معیار)**

- شاخص های پراکندگی میزان پراکندگی یا میزان اختلاف بین داده ها و یا تفسیر داده ها را در جامعه آماری یا نشان میدهند. دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار از جمله شاخص های پراکندگی هستند.

- **دامنه تغییرات:** عبارت است از اختلاف بین بزرگترین داده و کوچکترین داده که آن را با R نمایش میدهند:

$$R = x_n - x_1 = x_{max} - x_{min}$$

* دامنه تغییرات یک معیار سریع برای به دست آوردن پراکندگی بین داده ها است ولی معیار مناسبی نیست.

* اگر تمامی داده ها را در عددی ضرب کنیم یا بر آن تقسیم کنیم (عدد غیر صفر)، دامنه نیز در آن عدد ضرب یا بر آن تقسیم خواهد شد.

- **واریانس:** شاخصی است که تغییرات تمامی داده ها را نسبت به یک مبدا (میانگین) بیان میکند. واریانس برابر با میانگین مجذور انحرافات از میانگین است که با نماد σ^2 نمایش داده میشود. برای محاسبه واریانس داریم:

داده ها بدون فراوانی	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}{n} - \bar{x}^2$
داده ها با فراوانی	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i)^2}{n} - \bar{x}^2$

* هر چه واریانس به صفر نزدیکتر باشد، پراکندگی میان داده ها کمتر خواهد بود

* اگر یک عدد ثابت را با همه داده ها جمع کنیم یا از همه داده ها کسر کنیم، تغییری در واریانس داده ها نخواهیم داشت

+ اگر تمامی داده ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم یا بر آن تقسیم کنیم، واریانس در مجذور آن عدد ضرب یا بر مجذور آن تقسیم خواهد شد: $\sigma^2_{(ax)} = a^2\sigma^2_{(x)}$ و یا $\sigma^2_{\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\sigma^2_{(x)}}{a^2}$

- **انحراف معیار:** از جذر مثبت واریانس، انحراف معیار به دست می آید. انحراف معیار که برابر جذر مثبت واریانس است از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

* اگر تمام داده ها برابر باشند، انحراف معیار برابر صفر خواهد بود و بالعکس

* اگر عددی ثابت را با داده ها جمع کنیم یا از آنها کسر کنیم، انحراف معیار تغییری نخواهد کرد

* اگر همه داده ها را در عدد ثابتی ضرب کنیم یا بر آن تقسیم کنیم، انحراف معیار در قدرمطلق آن عدد ضرب یا بر آن تقسیم میشود.

- **ضریب تغییرات:** از تقسیم انحراف معیار به میانگین به دست می آید و تنها شاخص پراکندگی بدون واحد میباشد:

$$C.V = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$$

* اگر داده های آماری را در عدد ثابت مثبتی ضرب کنیم، ضریب تغییرات تغییری نخواهد کرد.

➢ بخش دهم: منطق ریاضی

- **استدلال و گزاره های منطقی**

- **استدلال:** یک استدلال از چند جمله خبری (ملزومات استدلال) و یک نتیجه (نتیجه استدلال) تشکیل میشود.

- **گزاره:** گزاره جمله ای است خبری که یا درست است یا نادرست ولی هیچگاه همزمان درست و نادرست نمیباشد.

- **ارزش گزاره:** درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره میگویند. ارزش گزاره درست را با « د » یا « T » و ارزش گزاره نادرست را با « ن » یا « F » نشان میدهند.

- **جدول ارزش گزاره ها:** برای نشان دادن ارزش یک گزاره به صورت جدولی به صورت مقابل اقدام میکنیم:

p
T
F

چنانچه دو گزاره همچون p و q داشته باشیم، این دو گزاره نسبت به همدیگر چهار حالت دارند:

$$(p, q) = \{(T, T), (T, F), (F, T), (F, F)\}$$

* اگر n گزاره داشته باشیم، تعداد حالت های گزاره ها نسبت به هم 2^n میباشد.

- **نقیض یک گزاره:** نقیض p گزاره ای است که ارزش آن برعکس ارزش p باشد. نقیض p را با $\sim p$ نمایش میدهیم.

- **گزاره های هم ارز:** اگر ارزش هر دو گزاره p و q یکسان باشد، به آنها گزاره هم ارز میگوییم و مینویسیم: $p \equiv q$.

- ترکیب گزاره های منطقی

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط های گزاره ای همانند «و»، «یا»، «اگر _ آنگاه» و ...، گزاره های مرکب به دست می آیند که نمونه های آنها را در زیر بررسی میکنیم و پس از آن به بررسی هر کدام از ترکیب ها میپردازیم:

جدول ارزش ترکیب ها:

ترکیب فصلی	به عبارت «p یا q»، ترکیب فصلی دو گزاره گفته میشود و با نماد $p \vee q$ نمایش داده میشود. ارزش این ترکیب تنها زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد	p	q	$p \vee q$ T	T	T T	F	T F	T	T F	F	F
ترکیب عطفی	به عبارت «p و q»، ترکیب عطفی دو گزاره گفته میشود و با نماد $p \wedge q$ نمایش داده میشود. ارزش این ترکیب تنها زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشد	p	q	$p \wedge q$ T	T	T T	F	F F	T	F F	F	F
ترکیب شرطی	به عبارت «اگر p آنگاه q»، ترکیب شرطی دو گزاره گفته میشود و با نماد $p \Rightarrow q$ نمایش داده میشود. ارزش این ترکیب زمانی نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تألی نادرست باشد.	p	q	$p \Rightarrow q$ T	T	T T	F	F F	T	T F	F	T

- ترکیب دو شرطی: اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نمایش میدهند و آن را ترکیب دوشرطی گزاره های p و q مینامند و فقط وقتی درست که ارزش هر دو مولفه آن یکسان باشد.

- استلزام و استنتاج

* از جمله قواعد استلزام و استنتاج میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

- قاعده انتزاع:	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$	- قاعده نقیض انتزاع:	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \therefore \sim p \end{array}$
- قاعده قیاس صوری:	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore p \Rightarrow r \end{array}$	- قاعده ترکیب عطفی	$\begin{array}{c} p \\ \underline{\quad q \quad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$
- قاعده تفصیل فصلی	$\begin{array}{c} \underline{\quad p \quad} \\ \therefore p \vee q \end{array}$	- قاعده ساده سازی عطفی	$\dfrac{p \wedge q}{\therefore q}$ or $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$
- قاعده قیاس فصلی	$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$		

- سورها

سورها عبارت هایی هستند که اگر در ابتدای هر گزاره نما قرار گیرند، آن را به گزاره ای با ارزش درست یا نادرست تبدیل میکنند.

- سور عمومی: هرگاه بر سر گزاره نمایی، عبارتی مانند «هر چه باشد» یا «به ازای هر مقدار» یا «به ازای جمیع مقادیر» یا نظیر آنها قرار گیرد، آنگاه گزاره نما به گزاری ای با سور عمومی تبدیل میشود.

- سور وجودی: هر گاه بر سر گزاره نمایی عبارتی همانند «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» یا نظیر اینها قرار گیرد، آن را به گزاره ای با سور وجودی تبدیل میکند.

- سور انحصاری: هرگاه بر سر گزاره نمایی عبارتی همچون «وجود دارد یک» یا «به ازای تنها یک مقدار» و نظیر اینها قرار بگیرد، آن را به گزاره ای با سور انحصاری تبدیل میکند.

- سور صفر: هرگاه بر سر گزاره نمایی عبارتی همچون «وجود ندارد هیچ» یا «به ازای هیچ مقدار» و نظیر اینها قرار بگیرد، آن را به گزاره ای با سور صفر تبدیل میکند.

➢ بخش یازدهم: ماتریس ها

- آشنایی با ماتریس ها

- ماتریس: ماتریس تعاریف متعدد اما همراستا دارد که دقیقترین آنها بدین صورت میباشد: «منظور از یک ماتریس همچون $A_{m\times n}$، آرایشی از عناصر است که در m سطر و n ستون قرار گرفته اند. به هر یک از عناصر قرار گرفته در این ماتریس، درایه ماتریس گفته میشود. که با a_{ij} نشان داده میشود.»

- درایه های ماتریس: به هر یک از اعداد داخل ماتریس، عنصر یا درایه ماتریس گفته میشود.

* چنانچه یک ماتریس به صورت $A_{m\times n}$ داشته باشیم و a_{ij} یک درایه از این ماتریس باشد، i شماره سطر و j شماره ستونی است که درایه در آن قرار دارد.

- مرتبه ماتریس: در ماتریسی که به صورت $A_{m\times n}$ نمایش داده میشود، به $m \times n$ مرتبه ماتریس گفته میشود.

- ترانهاده ماتریس: ماتریسی است که از جابجایی درایه های سطر و ستون یک ماتریس به دست می آید.

* از انواع ماتریس های خاص بر اساس مرتبه، ماتریس های سطری و ستونی میباشند.

- ماتریس مربعی: در ماتریس مربعی تعداد سطر ها و ستون ها برابر میباشد ($m = n$)، و از موارد منحصر به ماتریس های مربعی میباشد، قطر اصلی و قطر فرعی میباشد.

- ماتریس مثلثی: ماتریس های مثلثی ماتریس هایی هستند که بسته به نوع آنها، مقادیر تمامی درایه های بالا یا پایین قطر اصلی برابر با صفر میباشد، انواع ماتریس های مثلثی عبارتند از: ماتریس بالا مثلثی، ماتریس اکیدا بالا مثلثی، ماتریس پایین مثلثی، ماتریس اکیدا پایین مثلثی

- **ماتریس صفر:** ماتریسی که مقدار تمامی درایه های آن برابر با صفر میباشد. ماتریس صفر را با O نشان میدهیم و داریم:

$$O[o_{ij}] \Rightarrow \forall i,j : o_{ij} = 0$$

عملیات روی ماتریس ها (اعمال جبری ماتریس - ترانهاده ماتریس - دترمینان ماتریس - معکوس ماتریس)

- **ضرب ماتریس در عدد ثابت:** چنانچه عدد ثابت حقیقی چون k در ماتریسی همانند $A_{m\times n}$ ضرب شود، درایه های ماتریس از ضرب تک تک درایه های ماتریس A در عدد k به دست می آید: $kA = k \times [a_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$

- **جمع و تفریق دو ماتریس:** دو ماتریس A و B هنگامی جمع یا تفریق پذیر هستند که هم درجه باشند. ماتریس C که حاصل جمع و یا تفریق این دو ماتریس است به صورت زیر تعریف میشود:

$$C = A \pm B \Rightarrow [c_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$$

- **ضرب ماتریس ها:** شرط آنکه ضرب میان دو ماتریس A و B به صورت $A \times B$ تعریف پذیر باشد، این است که تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطر های ماتریس B برابر باشد. ماتریس نتیجه ضرب دو ماتریس A و B به صورت مقابل خواهد بود: $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$

* ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد. ضرب دو ماتریس به صورت AB با BA برابر نیست: $A \times B \neq B \times A$

* خواص ضرب ماتریس ها:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
$$(A + B) \times C = AC + BC$$

* چنانچه ماتریس واحد در ماتریس A ضرب شود، نتیجه ضرب برابر با ماتریس A خواهد بود. ضرب هر ماتریس در ماتریس واحد خاصیت جابجایی دارد: $A \times I = I \times A = A$

* از خاصیت های توانی میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

$A^n \times A^m = A^{n+m}$	$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$
$(kA)^n = k^n A^n$	$(A^n)^m = A^{mn}$
$A^2 = A \Rightarrow A^n = A$	$A^2 = O \Rightarrow A^n = O$
$A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} A^{2k} = I \\ A^{2k+1} = A \end{cases}$	$A^2 = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A$

- **دترمینان ماتریس:**

دترمینان ماتریس تابعی است از مجموعه ماتریس های مربعی به مجموعه اعداد حقیقی که بر طبق قوانین معینی محاسبه میگردد. دترمینان هر ماتریس مربعی همچون A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش میدهند.

* برای ماتریس مربعی A از مرتبه ۲، محاسبه دترمینان به صورت زیر میباشد:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

- دستور ساروس (محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3)

در استفاده از دستور ساروس که مختص محاسبه دترمینان ماتریس سه در سه میباشد داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \; - \\ \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

* مهمترین کاربرد دترمینان در محاسبه ماتریس وارون یا معکوس میباشد.

- ماتریس معکوس: اگر داشته باشیم $AB = BA = I$، آنگاه A را وارون پذیر میگوییم و ماتریس B را وارون یا معکوس ماتریس A مینامیم و به طور کلی آن را به صورت A^{-1} نشان میدهیم.

* شرط لازم و کافی برای معکوس پذیر بودن ماتریس این است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

- عملیات سطری مقدماتی: اگر ماتریسی همچون A با ابعاد $m \times n$ را داشته باشیم، سه عمل زیر را میتوان روی سطرهای این ماتریس انجام داد که به این سه عملیات، عملیات سطری مقدماتی یا Elementary Row Operations گفته میشود:

+ تعویض دو سطر: عمل $R_i \leftrightarrow R_j$ جای دو سطر i و j را در ماتریس عوض میکند.

+ ضرب یک عدد غیر صفر در یک سطر: عمل tR_i عدد غیر صفر t را در همه درایه های سطر i ام ضرب میکند

+ جمع مضرب یک سطر با سطر دیگر: عمل $R_j + tR_i$، t برابر سطر i را با سطر j جمع میکند

- حل دستگاه های معادلاتی با ماتریس (حل معادلات چند مجهولی با ماتریس - عملیات سطری مقدماتی)

یکی از کاربرد های ماتریس ها در ریاضیات، استفاده از آنها برای حل دستگاه های چند معادله چند مجهولی خطی میباشد..

به مثال زیر دقت کنید:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow A \times X = B$$

در رابطه داده شده به ماتریس A ماتریس ضرایب، ماتریس X را ماتریس بردار مجهول و B را ماتریس بردار ثابت میگویند.

* حتی میتوان دستگاه های سه معادله سه مجهولی را به فرم ماتریسی در آورد و با استفاده از ماتریس ها، دستگاه مورد نظر را حل کرد:

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

- روش معکوس ماتریس: چنانچه ماتریس ضرایب در رابطه $A \times X = B$ وارون پذیر باشد داریم:

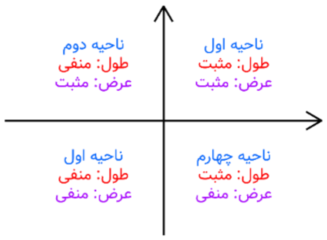
$$A \times X = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

- **روش کرامر:** برای محاسبه هر مجهول، ستون ضرایب آن را در ماتریس ضرایب حذف کرده و به جای آن ماتریس مقادیر ثابت (B) را قرار میدهیم. سپس دترمینان ماتریس جدید به دست آمده را محاسبه میکنیم و مقدار آن را بر دترمینان ماتریس ضرایب تقسیم میکنیم: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$

- **حل با استفاده از ماتریس افزوده و روش گاوسی (گاوس-جردن):** ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات، ماتریسی عددی است که هر سطر آن، ضرایب و مقادیر ثابت هر دو سمت معادله را یکجا نشان میدهد و هر ستون، نماینده ضرایب مربوط به یک متغیر است.

➢ بخش دوازدهم: هندسه تحلیلی

- هندسه تحلیلی در فضای R2 و R3 (دستگاه های مختصات)



منظور از مختصات نقطه در صفحه، بیان طول و عرض آن نقطه در صفحه مختصاتی است. صفحه مختصاتی به کمک محورهای مختصات به چهار ناحیه تقسیم میشود که شماره گذاری این ناحیه ها از ۱ تا ۴ به طور پادساعتگرد است.

* در دستگاه مختصات دو بعدی، نقطه با دو مولفه طول x_1 و عرض y_1 و به صورت (x_1, y_1) یا $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ نشان داده میشود.

فاصله میان دو نقطه A و B برابر است با: $d = |AB| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

* فاصله نقطه ای به مختصات $A(x_1, y_1)$ از خطی به معادله $ax + by + c = 0$، برابر است با: $d = |Ah| = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- معادله یک خط که به صورت $y = mx + c$ نمایش داده میشود، معادله استاندارد خط نامیده میشود. در این حالت m شیب خط و c عرض از مبدا خط میباشد.

* فرم دیگری از نمایش معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ میباشد که به آن فرم گسترده معادله خط گفته میشود و در این حالت شیب خط برابر $-\frac{a}{b}$ و عرض از مبدا برابر $-\frac{c}{b}$ میباشد.

- هندسه تحلیلی (فضای R^3):

چنانچه در محور مختصات علاوه بر طول و عرض، ارتفاع نیز در نظر گرفته شود، با مختصات سه بعدی روبرو خواهیم شد که در این دستگاه مختصات، نقطه ای همچون A دارای سه مؤلفه طول (x)، عرض (y) و ارتفاع (z) خواهد بود و به صورت $A(x_a, y_a, z_a)$ نمایش داده میشود.

* فاصله نقطه ای به مختصات $A(x_1, y_1, z_1)$ از صفحه ای به معادله $ax + by + cz + d = 0$، برابر است با:

$$d = |Ah| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- بردارها، ویژگی ها و اعمال جبری آن (بردار های - بردار های یکه (واحد) - اعمال جبری بردار ها)

به هر پاره خط جهت دار در دستگاه های مختصات (چه دو بعدی و چه سه بعدی) بردار گفته میشود. هر پاره خط دارای یک نقطه آغاز و یک نقطه پایان میباشد. چنانچه نقطه آغاز بردار برابر با A و نقطه پایانی برابر با B باشد، بردار به صورت $\overrightarrow{AB}$ نشان داده میشود.

* بردار $\overrightarrow{AB}$ با بردار $\overrightarrow{BA}$ مساوی نمیباشد: $\overrightarrow{AB} = A - B \neq B - A = \overrightarrow{BA}$

* اگر که نقطه ابتدایی برداری، مبدا مختصات و نقطه انتهایی آن نقطه ای همچون A باشد، بردار را به صورت $\vec{A}$ نشان میدهیم و با توجه به روابط گفته شده به صورت $\vec{A} = (a_1, a_2)$ یا $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ نمایش داده میشود.

* اندازه برداری به صورت $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ، به صورت $|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ میباشد.

- بردار یکه: برداری است که طول آن برابر یک واحد میباشد. در دستگاه های مختصات، بردار های یکه متناظر با محور های x، y و z به ترتیب با نماد های $\vec{\imath}$، $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ نمایش داده میشوند: $\vec{\imath} = (1,0,0)$، $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ و $\vec{k} = (0,0,1)$

* بردار یکه برای هر بردار دلخواهی که با $\vec{u}$ نشان میدهیم، برداری است که از تقسیم کردن آن بردار بر اندازه آن به دست می آید؛ به عبارتی دیگر داریم: $\overrightarrow{u_A} = \frac{\vec{A}}{|A|}$

- جمع دو بردار: جمع دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ که به صورت $\vec{a} + \vec{b}$ نمایش داده میشود برابر است:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- ضرب عدد در بردار: چنانچه عدد n که یک عدد حقیقی میباشد را داشته باشیم میتوان نوشت: $n.\vec{a} = (na_1, na_2, na_3)$ و در ارتباط با اندازه بردار جدید میتوان گفت که $|n.\vec{a}| = |n||\vec{a}|$

- ضرب داخلی بردار ها: حاصل ضرب داخلی دو بردار که به صورت $\vec{a}.\vec{b}$ نشان داده میشود، یک عدد اسکالر است.

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|.\cos\theta$$

- ضرب خارجی: حاصل ضرب خارجی به صورت یک بردار میباشد که بر هر دو بردار عمود میباشد.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = |\vec{a}||\vec{b}|.\sin\theta$$

- خط و صفحه در فضا (نقطه، خط و صفحه در فضا)

- معادله خط در فضا: معادله خط در فضا را میتوان به وسیله سه فرم نشان داد: فرم برداری، فرم پارامتری، فرم متقارن

* فارغ از فرم نشان دادن خط، نیاز به دو مورد داریم: یک نقطه بر روی خط و یک بردار در راستای خط که به آن بردار هادی میگوییم و با $\vec{u}$ نشان میدهیم.

- دو خط در فضا نسبت به هم سه حالت دارند، یا متقاطع اند، یا موازی اند یا متنافر

- معادله صفحه در فضا: برای نوشتن معادله یک صفحه در فضا به یک نقطه بر روی صفحه و یک برداری عمود بر صفحه نیاز داریم که به این بردار عمود بر صفحه، بردار نرمال گفته میشود و با $\vec{n}$ نمایش داده میشود.

- دو صفحه در فضا نسبت به همدیگر سه حالت دارند، یا منطبق اند، یا موازی یا متقاطع.

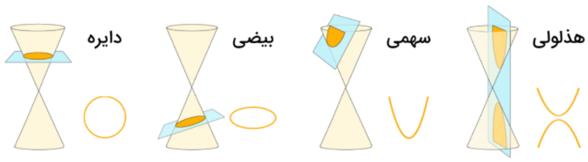
- اوضاع نسبی خط و صفحه در فضا:

یک خط نسبت به صفحه در فضا سه حالت دارد، یا منطبق است، یا موازی و یا متقاطع.

➢ بخش سیزدهم: هندسه

- مقاطع مخروطی (دایره، بیضی، و ...)

مقاطع مخروطی زمانی تشکیل میشوند که یک صفحه، به گونه ای، بخشی از مجموعه دو مخروط را که در رأس با هم مشترک هستند قطع کند. در شکل زیر نحوه ایجاد بعضی از مقاطع مخروطی نشان داده شده.



* فرم عمومی معادله عمومی مقاطع مخروطی که از آن میتوان برای هر مقطع مخروطی استفاده کرد به صورت زیر است:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

* در این معادله ضرایب A، B و C نمیتوانند همزمان برابر صفر شوند.

دایره	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A = C$
بیضی	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $AC > 0 \ \& \ A \neq C$
هذلولی	$\begin{cases} Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ -Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$ $AC > 0$
سهمی	$\begin{cases} Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$

- دایره: مجموعه (مکان هندسی) نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه ثابت O برابر با مقدار ثابتی همچون r میباشد. به O مرکز دایره و به r شعاع دایره گفته میشود. دایره را به صورت $C(O,r)$ نشان داده میشود.

* مرکز دایره نقطه $O(\alpha,\beta)$ باشد، معادله دایره به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ خواهد بود. (فرم متقارن معادله دایره).

* نقطه ای همچون A در صفحه مختصات، نسبت به دایره $C(o,r)$ در سه حالت قرار دارد: یا درون آن است $(OA < r)$، یا بر روی دایره است $(OA = r)$ و یا بیرون دایره قرار دارد $(OA > r)$

* زاویه های موجود در دایره بر دو نوع هستند: زاویه مرکزی (راس آن بر روی مرکز دایره و اضلاع آن دو شعاع دایره)، زاویه محاطی (راس آن بر روی محیط دایره و اضلاع آن دو تر از دایره).

* چنانچه دو دایره $C(o,r)$ و $C'(o',r')$ را داشته باشیم، این دو دایره نسبت به هم 6 حالت دارند: متخارج، مماس خارجی، متقاطع، مماس داخلی، متداخل، هم مرکز

- **بیضی:** مجموعه (مکان هندسی) نقاطی از صفحه که مجموع فاصله آنها از دو نقطه ثابت F و F’ برابر با مقدار ثابتی همچون 2a میباشد. به F و F’ کانون های بیضی و به 2a فاصله رئوس کانونی گفته میشود.

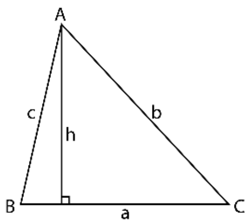
* چنانچه مرکز بیضی بر روی نقطه ای همچون $O(\alpha,\beta)$ باشد، معادله بیضی های افقی و عمودی به ترتیب به صورت زیر میباشند:

+ بیضی افقی به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ خواهد بود

+ بیضی عمودی به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ خواهد بود

- **مثلث**

مثلث از سه ضلع تشکیل شده است که به محل اتصال این اضلاع، راس مثلث گفته میشود. ارتفاع مثلث (که برای هر ضلع تعریف کرد) عبارت است از پاره خطی که از راس شروع شده و بر ضلع مقابل خود عمود میباشد. به ضلعی که ارتفاع بر آن عمود شده اس، قاعده مثلث گفته میشود. از جمله خاصیت های مثلث این است که سایر چندضلعی ها را میتوان به چندین مثلث تجزیه کرد که این تجزیه کاربرد های زیادی دارد



* مجموع زوایای داخلی یک مثلث برابر با 180 درجه میباشد: $A+B+C=180$

* مثلث بسته به اضلاع یا زوایای آن انواع خاص و منحصر به فردی دارد: متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، حاده، قائم الزاویه، منفرجه و متساوی الزاویه

- **چندضلعی های منتظم (آشنایی با چندضلعی ها و ویژگی های آنها)**

چند ضلعی انواع مختلفی دارد از جمله چندضلعی های محدب و مقعر (وابسته به اندازه زوایای داخلی)، چند ضلعی های منتظم و نامنتظم (وابسته به اندازه اضلاع و زاویه ها) و در نهایت چندضلعی هایی که بر اساس تعداد اضلاع مشخص میشوند

چند ضلعی منتظم چند ضلعی است که تمام ضلع های آن باهم و تمام زاویه های آن با یکدیگر هم اندازه هستند.

* دقت داشته باشید که هم اندازه بودن اضلاع و زاویه ها باید با همدیگر رخ دهد، وگرنه لوزی که اندازه اضلاع آن برابر باشد و مستطیلی که زاویه های آن با هم برابر هستند، چندضلعی منتظم نیستند.

* از مهمترین اجزای چندضلعی های منتظم میتوان زاویه داخلی، زاویه خارجی، ارتفاع، شعاع، زاویه مرکزی و ضلع را نام برد

* مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی همواره برابر $T=(n-2)\times 180$ میباشد.

* مجموع زوایای خارجی تمام چندضلعی ها برابر با 360 درجه میباشد.

* ارتفاع پاره خطی است که مرکز چندضلعی منتظم را به مرکز ضلع های آن متصل می کند: $h=\frac{a}{2\tan\frac{180}{n}}$

* به فاصله مرکز چندضلعی منتظم تا هر یک از راس های آن، شعاع می گویند: $r=\frac{a}{2\sin\frac{180}{n}}$

* قطر چندضلعی منتظم، پاره خطی است که از هر راس به راس های غیر مجاور رسم میشود. در یک n ضلعی منتظم، تعداد قطر ها برابر $d=\frac{n(n-3)}{2}$ میباشد.

- تشابه و تناسب

- نسبت و تناسب: تساوی بین دو نسبت، تناسب نامیده میشود، از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ میتوان روابط زیر را به دست آورد که کاربرد های فراوانی در ریاضیات دارند:

$\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$	$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$	$\frac{a}{b}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

- تشابه مثلث ها

دو مثلث ABC و A'B'C' هنگامی مشابه هم هستند که زاویه هایشان برابر و اضلاع شان مناسب هم دیگر باشد. تشابه دو مثلث ABC و A'B'C' را به صورت $ABC\sim A'B'C'$ میدهیم:

$$ABC\sim A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases}\hat{A}=\widehat{A'},\ \ \hat{B}=\widehat{B'},\ \ \hat{C}=\widehat{C'}\\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\end{cases}$$

- تالس (قضیه تالس و تعمیم آن)

- تالس: در مثلث ABC، چنانچه خطی موازی با یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر را قطع کند، چهار پاره خط ایجاد شده بر روی اضلاع یک تناسب را تشکیل میدهند.

* **تعمیم قضیه تالس:** اگر خطی دو ضلع مثلث را قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی ایجاد میشود که اندازه اضلاع آن با اندازه اضلاع مثلث اصلی متناسب است:

* عکس قضیه تالس: اگر در مثلثی چون ABC، داشته باشیم: $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$، آنگاه میتوان گفت که در آن مثلث، DE با BC موازی است ($BC \parallel DE$).

- هندسه فضایی (اشکال سه بعدی و ویژگی ها آنها)

- حجم های فضایی:

حجم ها را میتوان به دو دسته هندسی و غیر هندسی تقسیم کرد. به حجم هایی که در یکی از سه دسته حجم های منشوری، حجم های کروی و حجم های هرمی قرار داشته و یا از ترکیبی از آنها تشکیل شده باشند، حجم های هندسی میگوییم. به حجم هایی که در سه دسته ذکر شده قرار نداشته باشند و یا از ترکیبی از آنها تشکیل نشده باشند، حجم های غیر هندسی میگوییم

* دو نوع اصلی از اشکال سه بعدی وجود دارد؛ «اشکال چند سطحی» و «اشکال غیر چند سطحی».

* اشکال هندسی سه بعدی، اشکالی هستند که علاوه بر طول و عرض، بعد دیگری به نام ارتفاع هم دارند. از جمله حجم های سه بعدی میتوان به مکعب، کره، مخروط، استوانه و ... اشاره کرد.

+ اشکال چند سطحی یعنی اشکالی که وجه مسطح دارند. از جمله این اشکال میتوان مکعب، منشور ها و ... را نام برد.

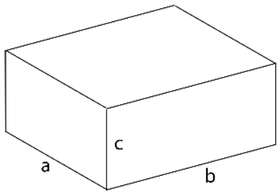
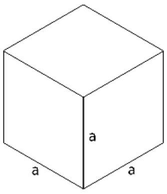
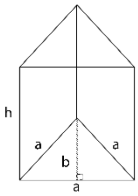
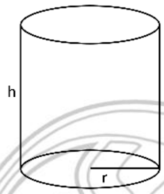
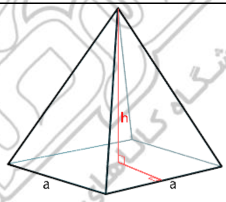
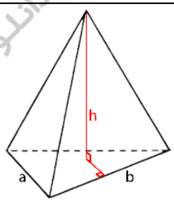
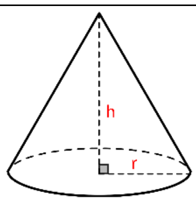
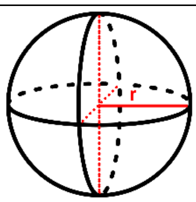
+ اشکال غیر چند سطحی یعنی اشکالی که حداقل یک سطح آنها غیر مسطح است. از جمله این اشکال میتوان کره و مخروط و ... را نام برد.

- حجم های منشوری:

حجم‌های منشوری بین دو سطح موازی قرار گرفته‌اند. در مکعب، این دو سطح موازی، دو مربع هستند. در استوانه، دو سطح موازی، دو دایره هستند. با تغییر این دو سطح موازی می‌توان حجم های منشوری مختلف به دست آورد

* به دو سطح موازی در منشور، دو قاعدهٔ منشور می‌گوییم. هر سطحی به غیر از این دو قاعده را وجه های جانبی منشور می‌گوییم. محل اتصال (اشتراک) وجه های جانبی با یکدیگر و یا با قاعده های منشور را یال های منشور می‌نامیم. محل اتصال (اشتراک) یال ها با قاعده‌ها را نیز، رأس های منشور می‌نامیم

* در جدول زیر به معرفی شکل های سه بعدی و هندسی خاص و نکات و ویژگی های آنها میپردازیم:

حجم	ویژگی ها	شکل	فرمول ها
مکعب مستطیل	* دارای ۶ وجه مستطیل شکل * دارای ۸ راس و ۱۲ یال		مساحت کل: $S=2(ab+b+ac)$ مساحت جانبی: $S_s=2(ac+bc)$ حجم: $V=a\times b\times c$
مکعب مربع	* دارای شش وجه مربعی * دارای ۸ راس و ۱۲ یال		مساحت کل: $S=6a^2$ مساحت جانبی: $S_s=4a^2$ حجم: $V=a^3$
منشور با قاعده مثلث	* دارای دو قاعده مثلثی شکل * دارای سه وجه جانبی متوازی الاضلاع * دارای ۶ راس و ۹ یال		مساحت کل: $S=3ah+2\left(\frac{1}{2}ab\right)$ مساحت جانبی: $S_s=3ah$ حجم: $V=\frac{1}{3}Ah$
استوانه	* دارای دو قاعده دایره شکل به قطر r * بدون یال و راس *دارای وجه جانبی یکپارچه مستطیلی		مساحت کل: $S=2\pi r^2+2\pi rh$ مساحت جانبی: $S_s=2\pi rh$ حجم: $V=h\pi r^2$
هرم	* با قاعده n ضلعی منتظم * دارای وجه ها جانبی مثلثی شکل * دارای n+1 راس و 2n یال		مساحت کل: مساحت قاعده + مساحت جانبی حجم: $V=\frac{1}{3}Ah$
هرم با قاعده n ضلعی	* قاعده n ضلعی * دارای وجه ها جانبی مثلثی شکل * دارای n+1 راس و 2n یال		مساحت کل: مساحت قاعده + مساحت جانبی حجم: $V=\frac{1}{3}Ah$
مخروط	* دارای قاعده دایره شکل * دارای یک راس و یک یال (محل اتصال قاعده به سطح جانبی)		مساحت کل: $S=\pi r\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)$ حجم: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$
کره	* دارای قاعده نبوده و محصور بین چند وجه نمیباشد		مساحت کل: $S=4\pi r^2$ حجم: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

❖ فصل دوم: هوش و استعداد تحصیلی

➢ بخش اول: هوش منطقی (استدلالی)

- درک مطلب:

برای بخش درک مطلب، یک یا دو متن چند پاراگرافی به همراه چند سوال مرتبط با متن داده میشود. در اکثر آزمون ها، موضوع متن داده شده با توجه به سازمان استخدامی تعیین و تالیف میشود.

هدف از بخش درک مطلب در سوالات هوش، سنجش توانایی فرد در درک متون، قدرت تجزیه و تحلیل، یافتن اطلاعات خاص و به کار بردن اطلاعات میباشد. در توضیحی دیگر میتوان گفت که سوالات این بخش، توانایی های فرد را در موارد زیر ارزیابی میکنند:

+ تشخیص اطلاعات صریح + برداشت مفاهیم ضمنی + تحلیل ساختار متن

+ نتیجه گیری منطقی + درک هدف نویسنده

>> با توجه به موارد بالا، ماهیت و نوع سوالات در بخش درک مطلب به طور کلی به صورت زیر میباشد:

+ منظور اصلی نویسنده از متن چیست؟ + مناسب ترین عنوان برای متن داده شده کدام میباشد؟

+ جمله داده شده در کدام جایگاه میتواند قرار بگیرد؟ و ...

>> اصولی ترین راهکار برای پاسخ دهی به این دسته از سوالات، مطالعه اصولی و دقیق و تحلیلی متن است. این مطالعه را میتوان در سه گام انجام داد:

+ گام اول: خواندن صورت سوال ها + گام دوم: خواندن دقیق متن + گام سوم: پاسخ به سوالات

* مهمترین نکته در پاسخ دهی به سوالات درک مطلب این است که نتیجه گیری و پاسخ دهی باید بر اساس آنچه در متن داده شده است باشد، خواه این موارد صحیح باشند یا غلط، خواه مورد توافق با باور های ذهنی ما باشند یا نه.

>> سوالات درک مطلب به طور کلی به دو دسته سوالات کلی متن و و سوالات جزئی متن تقسیم میشوند، که این دسته ها به موارد زیر قابل تقسیم هستند

- سوالات کلی متن:

* یافتن ایده یا پیام اصلی متن * یافتن ساختار کلی متن

* یافتن هدف کلی نویسنده * یافتن موضوع قبل یا بعد از متن

- سوالات جزئی متن

* جزئیات اشاره شده در متن * جزئیات ضمنی در متن

- استدلال منطقی:

هدف این دسته از سوالات، سنجش و ارزیابی توانایی فرد در درک و تشخیص ساختار استدلال درست و نادرست میباشد. سوالات استدلالی به دو دسته سوالات تحلیل متنی و سوالات گزاره های منطقی تقسیم بندی میشوند. در این دو دسته متن کوتاهی آورده میشود که برای پاسخ دهی به آنها باید با انواع استدلال آشنایی داشته باشید تا بتوانید از متن نتیجه گیری مطلوب را حاصل کنید.

انواع استدلال عبارتند از: استدلال قیاسی (استنتاجی) - استدلال استقرایی - استدلال تشبیهی

* سوالات منطقی در آزمون ها به حالت های زیر طراحی میشوند:

+ سوال در خصوص تضعیف استدلال + سوال در خصوص تقویت و تحکیم استدلال

+ سوال در خصوص فرضیه پردازی و نتیجه گیری + سوال در خصوص یافتن فرض پنهان

* سوالات تقویت و تضعیف برای هر نوع استدلالی مطرح میشوند اما سوالات نتیجه گیری و یافتن فرض پنهان، اکثرا مبتنی بر استدلال قیاسی بوده و از سایر استدلال ها کمتر استفاده میشود.

- تضعیف استدلال

در این سوالات، پس از ارائه یک متن کوتاه، خواسته میشود تا گزینه ای را که بیش از همه استدلال موجود در متن را تضعیف می کند انتخاب شود. بسته به نوع استدلال، روش های مختلفی برای تضعیف آن وجود دارد، لذا ابتدا باید نوع استدلال موجود را تشخیص داد.

- تقویت استدلال

مشابه تضعیف استدلال، در تقویت استدلال، پس از یک متن کوتاه، خواسته میشود تا گزینه ای را که بیش از همه، استدلال موجود در متن را تقویت میکند، انتخاب شود. روش های مختلفی برای تقویت یک استدلال وجود دارد که از جمله آنها میتوان به آشکار کردن فرض پنهان نویسنده و یا ذکر مثال هایی درباره نتیجه استدلال اشاره کرد.

- نتیجه گیری از استدلال

نتیجه گیری از استدلال فقط باید بر اساس مطالب مطرح شده در متن صورت گیرد و معمولاً نتیجه گیری، بر اساس جملات اول و آخر متن میباشد، لذا باید دقت بیشتری را خرج این جملات کرد.

- یافتن فرض پنهان

فرض پنهان، مقدمه ای است که عملاً در استدلال وجود دارد ولی در متن بدان اشاره ای نشده است. فرض پنهان حلقه واسط بین مقدمات و نتیجه گیری متن میباشد؛ که به توانایی پاسخ دهنده در یافتن آن بستگی دارد. فرض پنهان در واقع جزئی از استدلال متن است و در چارچوب آن قرار دارد و نباید فضای خارج از متن یا باورهای شخصی را در آن دخالت داد.

>> در دسته بندی سوالات استدلال منطقی میتوان به موارد زیر اشاره کرد که هر کدام یک مهارت خاص را در فرد میسنجد:

+ سوال استنتاجی + سوال قیاسی + سوال فرضیه‌پردازی، نتیجه‌گیری + سوال روابط علت و معلولی

>> تکنیک های حل مسئله

- تحلیل گام به گام - رسم نمودار یا جدول - شناسایی کلمات کلیدی

- آزمایش گزینه‌ها - تمرکز بر منطق، نه اطلاعات بیرونی

>> اشتباهات رایج:

- نادیده گرفتن تمام شرایط مسئله: برخی شرایط ممکن است پیچیده یا پنهان باشد. هر شرط نیاز به بررسی دقیق دارد.

- اتکا به حدس: در این دسته از سوالات، هیچگاه نباید بر اساس حدس و گمان اقدام به پاسخ دهی شود.

- اشتباه در تفسیر کلمات کلیدی: نادیده گرفتن اهمیت کلمات کلیدی میتواند فرد را به سمت پاسخ نادرست گمراه کند.

- مدیریت ضعیف زمان: اکثر سوالات میتوانند زمان‌بر باشند، لذا مدیریت زمان از اهمیت خاصی برخوردار است.

- تحلیل منطقی

تحلیل منطقی بخشی از آزمون هوش و استعداد است که مهارت های استدلالی، تحلیلی و نتیجه‌گیری فرد را مورد ارزیابی قرار میدهد. این بخش با تمرکز بر فهم روابط پیچیده، شناسایی الگوها و تحلیل شرایط مختلف، توانایی فرد در برخورد با مسائل غیرمعمول را محک میزند.

>> هدف طراحی این دسته از سوالات ارزیابی و بررسی توانایی های فرد در زمینه های زیر میباشد:

+ درک روابط پیچیده+ تفکر نظام‌مند + استنتاج و تعمیم + حل مسائل چندبخشی

سوالات این بخش مسائلی هستند که نیاز به پیش فرض ذهنی ندارند و برای پاسخ دهی باید سه گام اصلی طی شود:

+ مدل سازی مسئله تعریف شده بر اساس قواعد موجود

+ خلاصه کردن قواعد بر اساس مدل بدست آمده

+ پاسخ به سوالات براساس مدل و قواعد مسئله

سوالات تحلیل منطقی را میتوان در یک تقسیم‌بندی کلی به دسته‌های زیر تقسیم کرد:

- سوالات تحلیلی یا جدول‌بندی - سوالات الگویابی و شناسایی توالی

- سوالات شرایط و محدودیت ها - سوالات ترتیبی - سوالات ترکیبی

>> تکنیک های حل مسئله

برای حل سوالات تحلیل منطقی، در زیر به معرفی تکنیک‌های لازم و مناسب میپردازیم که برای بررسی و حل سوالات این بخش، میتوانید از آنها استفاده نمایید:

- خواندن دقیق سوال - تحلیل گام به گام - رسم نمودار یا جدول

- شناسایی کلمات کلیدی - کنترل گزینه‌ها - تمرکز بر منطق، نه اطلاعات بیرونی

! توجه: استدلال منطقی روی روابط کلی و ساده‌تر تمرکز دارد و به استنتاج از اصول عمومی میپردازد و تحلیل منطقی شامل مسائل چندلایه و پیچیده‌تر است که نیازمند تحلیل دقیق شرایط و داده ها است.

- مسائل جدول بندی و ترکیبی

از مهمترین بخش های سوالات تحلیل منطقی، سوالات جدول بندی و مسائل ترکیبی هست. برای حل این نوع مسائل نیازی به هیچ نوع پیش فرضی ذهنی نیست. حل این مسائل را میتوان در طی سه گام انجام داد که این گام ها عبارتند از:

+ مدل‌سازی مسئله تعریف شده بر اساس قواعد موجود

+ خلاصه کردن قواعد بر اساس مدل به دست آمده

+ پاسخ به سوالات بر اساس مدل و قواعد مسئله

بهترین روش برای مدل سازی مسائل، استفاده از جدول ها و یا شکل ها میباشد. در مسائل، برخی از اطلاعات داده شده ثابت هستند و میتوان با رسم جدول و شکل، آنها را مشخص کرد تا برای پاسخ به هر سوال نیازی به بررسی مجدد کل مسئله برای یافتن آنها نباشد. این اطلاعات ثابت، کلید حل مسائل خواهند بود.

- الگویابی منطقی

الگویابی در سوالات هوش مسئله ای مهم است که در انواع مختلفی مشاهده میشود و از انواع آن میتوان به الگو های عددی، الگو های تصویری، الگو های کلامی و ترکیب این سه مورد اشاره کرد.

- الگوی ترکیبی عدد و شکل: این دسته از الگو ها، الگو هایی هستند که اعداد موجود در آنها را نمیتوان دنباله ای از اعداد در نظر گرفت. در این حالت مجموعه ای از اعداد در شکل ها و دسته های مختلف داده میشود که در میان آنها رابطه ای برقرار است و این رابطه در سایر شکل ها و دسته ها نیز صدق میکند.

- الگوی ترکیبی عدد و حرف: در این دسته هر چند نامشخص و مخفی ولی رابطه ای از اعداد نیز در سوالات وجود دارد. در این دسته از سوالات موارد مختلفی همانند تعداد حروف و یا حتی تعداد نقاط باید مورد توجه واقع شود زیرا که هیچ مانعی برای طراح برای استفاده از آنها وجود ندارد.

➢ بخش دوم: هوش کلامی

سوالات بخش هوش کلامی در آزمون ها، از قسمت های مختلفی تشکیل شده اند. فارغ از تفاوت های ظاهری که در میان سوالات این دسته وجود دارد، در همه سوالات مفهوم مورد نظر در قالب کلمات و عبارات ذکر گردیده است که از این نظر همگی مشابه هم هستند. سوالات هوش کلامی به طور عمده شامل حالت های زیر میباشد:

+ طبقه بندی کلمات + نسبت کلامی (استدلال کلامی) + طبقه کلمات

+ کلمات متضاد و مترادف + معنی لغات

سوالات این بخش شباهت کمتری به سؤالات هوش دارند و بعضی از سوالات مانند معانی لغات یا کلمات متضاد و مترادف و چیزهایی از این نوع، شباهت های زیادی به سوالات ادبیات فارسی آزمون ها دارند.

- طبقه بندی کلمات

بخش طبقه بندی کلمات خود به دو دسته تقسیم میشود.

+ یک موضوع بین تمامی گزینه ها به غیر از یک گزینه مشترک است و هدف یافتن گزینه غیرمشترکه

+ کلمه یا عبارت داده شده با گزینه ها ارتباط نزدیکی دارد، اما از نظر منطقی با یکی از گزینه ها، ارتباط بیشتر و نزدیک تری از نظر طبقه ای یا معنایی دارد.

- تناسب لغوی

در این نوع از سوالات رابطه بین کلمات مورد نظر است. معمولا در متن سوال نوعی رابطه یا نسبت بین دو کلمه مشخص شده و از فرد خواسته میشود که چنین رابطه ایی را بین دو کلمه دیگر برقرار کند.

>> سوالات این دسته در قالب های متفاوتی طراحی میشوند در زیر به بررسی برخی از آنها میپردازیم:

- در متن سوال سه کلمه یا سه عبارت داده میشود که بین دوتای آنها، یک نوع رابطه وجود دارد که فرد باید ابتدا این رابطه را کشف کند، سپس از میان گزینه ها کلمه ای را انتخاب کند که رابطه مورد نظر را بهتر و بیشتر با کلمه سوم برقرار میکند.

- ارتباط میان دو کلمه یا عبارت در متن سوال داده میشود و در هر گزینه دو کلمه یا عبارت داده میشود که فرد باید ارتباط بین آنها را با ارتباط به دست آمده در صورت سوال مقایسه کند و گزینه ای را که ارتباط مشابهی دارد را انتخاب کند.

از انواع رابطه هایی که میتوان میان واژه ها عبارت ها در این دسته از سوالات دید، میتوان موارد زیر را نام برد:

+ رابطه هدف + رابطه علت و معلولی

+ رابطه جزء و کل + رابطه جزء و جزء

+ رابطه فعل و مفعول + رابطه مترادف و متضاد

+ رابطه مکانی + رابطه کار و کارگر

+ رابطه محصول و ماده اولیه + رابطه ابزار و اندازه

+ رابطه ابزار و کاربر + رابطه ابزار و کاربرد

+ رابطه کمیت و واحد + رابطه مترادف یا متضاد

+ رابطه بزرگ و کوچک (والد و اولاد)

➢ بخش سوم: هوش ریاضی

هدف بخش هوش ریاضی (کمیتی)، سنجش میزان تسلط داوطلبان بر مفاهیم ریاضی و هوش عددی میباشد. در این بخش سطح سوالات طراحی شده متفاوت است. بخش کمیتی سوالات هوش در مجموع شامل سوالات حل مسئله، سوالات قیاس کمی، کار با داده های آماری و هوش عددی میشود.

- نسبت و تناسب

- نسبت: رابطه میان دو کمیت همجنس از نظر اندازه، که مشخص میکند یک کمیت چند برابر دیگری است را نسبت میگویند.

- تناسب: هر گاه دو نسبت باهم برابر باشند، تشکیل یک تناسب میدهند. (برقراری تساوی بین دو نسبت را تناسب میگویند)

از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ میتوان روابط زیر را به دست آورد که کاربرد های فراوانی در ریاضیات دارند:

$\frac{a}{b \pm a}=\frac{c}{d \pm c}$	$\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d}$	$\frac{a}{b}=\frac{a \pm c}{b \pm d}$	$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

از انواع تناسب میتوان به مواردی همچون تناسب مستقیم، تناسب معکوس و تناسب مرکب اشاره کرد:

+ تناسب مستقیم: افزایش یا کاهش یکی از نسبت ها باعث افزایش یا کاهش دیگری به همان نسبت میشود.

+ تناسب معکوس: رابطه میان دو نسبت به صورت افزایش/کاهش یا کاهش/افزایش میباشد.

+ تناسب معکوس شکسته: این نوع از تناسب در مسائلی به کار میرود که در آنها یکی از کمیت ها پس از طی دوره ای تغییر میکند.

+ تناسب مرکب: این دسته از تناسب، ترکیبی از دو حالت قبلی میباشد.

میانگین توافقی یا همساز:

میانگین توافقی اعداد مثبتی همچون x_1، x_2، ... و x_n به صورت زیر تعریف میشود:

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

میانگین توافقی در سوالاتی همانند چند شیر و یک حوض، چند نفر و نقاشی اتاق و ... به کار میرود.

- درصد (خرید و فروش - سود و زیان - رشد و زوال)

نسبتی که در آن مخرج برابر ۱۰۰ باشد، درصد نامیده میشود. در صورتی که در نسبت دو عدد، مخرج کسر برابر با ۱۰۰ نباشد، برای بیان آن به صورت درصدی، کافی است که عدد را در ۱۰۰ ضرب کنیم و آن را به صورت درصدی بیان کنیم:

در صورتی که بخواهیم میزان تغییرات یک متغیر را به درصد بیان کنیم، باید که مقدار تغییرات میان دو حالت اولیه و ثانویه را بر مقدار اولیه تقسیم کنیم و در نهایت آن را در ۱۰۰ ضرب کنیم: $\Delta x=\frac{x_2-x_1}{x_1}*100$

یکی از انواع سوالات درصد، بدین گونه میباشد که قیمت اولیه کالایی داده شده و درصد رشد برای آن تعیین میشود و از فرد قیمت نهایی کالا خواسته میشود. (در این رابطه + نشان دهنده افزایش و - نشان دهنده کاهش میباشد.): $a'=(1 \pm t)a$

چنانچه چندین درصد رشد مختلف برای کالایی بیان شود، خواهیم داشت: $(a'=a(1 \pm t)(1 \pm s)(1 \pm r) \times \ldots)$

* مسائل درصدی که با حالت هایی مشابه سه حالت نهایی در بالا طراحی میشوند، تحت عنوان مسائل خرید و فروش یا سود و زیان نیز بیان میشوند.

- الگو ها و روابط عددی

در این بخش از سوالات هوش، دسته ای از اعداد داده میشود که در میان اعداد رابطه و الگوی خاصی وجود دارد:

- دنباله هایی که از یک دنباله حسابی یا هندسی پیروی میکنند.

- دنباله هایی که مشابه دسته اول هستند با این تفاوت که خود قدر نسبت، از یک الگوی خاص پیروی میکند.

- دنباله هایی که دو قدر نسبت دارند. به عنوان مثال جمله های فرد و جمله های زوج دارای قدر نسبت های متفاوت هستند.

- دنباله هایی که اکثرا به صورت جمع دو عدد قبلی یا نسبت دو عدد قبلی به دست می آیند (دنباله فیبوناچی).

- کار با داده های آماری/ عددی

در سوالات این بخش، داده های کمی یک تحقیق در قالب یک جدول یا نمودار و یا ترکیبی از آنها به عنوان صورت مسئله آورده میشود و از داوطلبان خواسته میشود تا با انجام تحلیل بر روی داده ها، به اطلاعات دقیق تری دست یافته و به سوالات پاسخ دهند

>> در این دسته از سوالات، اطلاعاتی در قالب جدول یا نمودار آماری داده میشود و فرد باید درصد یا مقادیری که در پرسش ها خواسته شده را محاسبه نماید. سوالات این بخش را به طور کلی میتوان در سه دسته زیر تقسیم بندی کرد:

+ سوالات مبتنی بر جداول اطلاعاتی + سوالات مبتنی بر نمودار های آماری

+ سوالات مبتنی بر ترکیب جدول و نمودار

* به شاخص های میانگین و میانه و مد، شاخص های مرکزی گفته میشود.

- میانگین: برای به دست آوردن میانگین چندین داده عددی، ابتدا مجموع آنها را به دست میاوریم و سپس مقدار به دست آمده را بر تعداد آنها تقسیم میکنیم.

+ چنانچه عددی همچون a را به داده ها اضافه کنیم میانگین جدید برابر خواهد بود با: $\bar{x} = \frac{X+a}{n+1}$

+ میانگین همواره عددی است بین کوچکترین و بزرگترین داده.

میانه: داده ای که نصف داده ها از آن بزرگتر و نصف دیگر از آن کوچکتر هستند. ابتدا داده ها را صعودی مرتب میکنیم سپس اگر تعداد فرد باشد، داده ای که در وسط قرار میگرد، و اگر تعداد زوج باشد، میانگین دو داده وسطی برابر مد میباشد.

مد: کافی است تعداد داده ها را بشماریم سپس داده ای که بیشترین تعداد را داشته باشد، مد مجموعه خواهد بود.

* میانه و مد نیز در مواجهه با جمع یا ضرب داده ها با عدد ثابت، همانند میانگین رفتار میکند.

- آنالیز ترکیبی

- اصل جمع: کار به دو روش که روش اول به n طریق و روش دوم به m طریق قابل انجام است صوت میگیرد، اگر دو روش مستقل باشند، برای انجام کار مورد نظر، $m + n$ روش وجود دارد.

- اصل ضرب: کار در دو مرحله که مرحله اول به n روش و مرحله دوم به m روش قابل انجام است صورت میگیرد که این دو مرحله همزمان هستند، آنگاه کار را میتوان به $m \times n$ روش انجام داد.

- جایگشت: تعداد حالت های قرار گرفتن n شی در کنار هم. در حالتی که ترتیب قرارگیری مهم است، تعداد حالت های ممکن برای جایگشت n شی متمایز برابر $n!$ میباشد.

n تعداد همه اشیا	ترتیب (تشکیل صف)		ترکیب (تشکیل گروه)	
k تعداد انتخاب ها	عدم تکرار	وجود تکرار	عدم تکرار	وجود تکرار
نحوه محاسبه	$P(n.k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k	$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-k)!}$

- نظریه اعداد

- توان: تعداد دفعات ضرب عدد در خودش. (b را توان nام a گویند و داریم: $b = a^n$.)

- ریشه: عکس توان که نامش ریشه بوده و به صورت $b = \sqrt[n]{a}$ نمایش داده میشود. در این حالت a ریشه nام عدد b میباشد.

- ب.م.م: عددی همچون a را ب.م.م یا بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد میگوییم هرگاه که دو شرط زیر را داشته باشد:

+ عدد a مقسوم علیه مشترکی برای دو عدد داده شده باشد. (هر دو عدد بر a بخش پذیر باشند)

+ عدد a در میان مجموعه مقسوم علیه های مشترک، بزرگترین باشد

- ک.م.م: عددی همچون b را ک.م.م یا کوچکترین مضرب مشترک دو عدد گوییم هرگاه که دو شرط زیر برای آن برقرار باشد:

+ عدد a مضرب مشترکی از هر دو عدد داده شده باشد. (عدد a بر هر دو عدد بخش پذیر باشد)

+ عدد a در میان مجموعه مضرب های مشترک هر دو، کوچکترین عدد باشد

- بخش پذیری: اگر a و b دو عدد صحیح باشند، میگوییم a بر b بخش پذیر (قابل قسمت) است، به شرطی که عددی صحیح مانند c وجود داشته باشد که $a = bc$.

- اتحاد های جبری: تساوی هایی که یک یا چند متغیر دارند و به ازای همه مقادیر متغیرها صدق میکند و برقرار است.

➢ بخش چهارم: هوش بصری (هندسی)

بخش بصری سوالات هوش آزمون های استخدامی، نسبت به سایر بخش های این سوالات، از اعتبار، فراوانی و سختی نسبتا بالایی برخوردار هستند. تنوع طراحی در این دسته از سوالات نیز بالا میباشد و دست طراح برای بازی با ذهن داوطلب باز تر از سایر قسمت ها است.

- مروری بر اشکال دو بعدی و سه بعدی

- دایره: یک منحنی بسته که شامل نقاطی است که فاصله آنها از یک نقطه معین و ثابت، مقداری ثابت میباشد.

- مثلث: یک سه ضلعی مسطحِ بسته که تمامی اضلاع آن خط راست میباشند. مجموع زوایای داخلی تمامی مثلث ها همواره برابر ۱۸۰ درجه میباشد.

- ذوزنقه: چهارضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشد، ذوزنقه نامیده میشود.

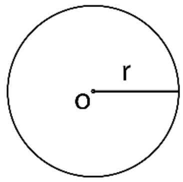
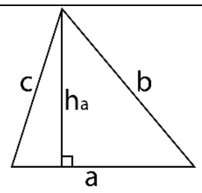
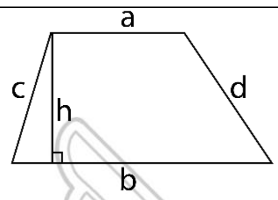
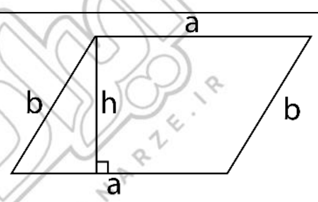
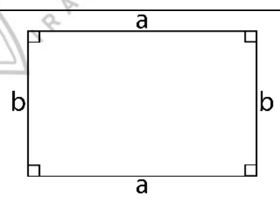
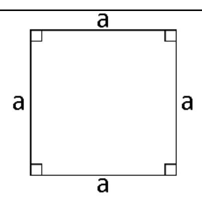
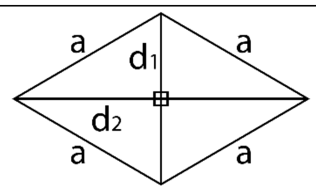
- متوازی الاضلاع: چهارضلعی که در آن، اضلاع روبرو موازی و برابر همدیگر باشند. در این چهارضلعی زاویه های مقابل به هم برابر هم بوده و زاویه های مجاور، مکمل یکدیگر میباشند.

- مستطیل: نوع خاصی از متوازی الاضلاع که در آن تمامی زوایا برابر ۹۰ درجه میباشند.

- مربع: نوعی دیگر از انواع متوازی الاضلاع که در آن هم تمامی زاویه ها برابر ۹۰ درجه هستند، هم اندازه تمامی اضلاع یکسان میباشد.

- لوزی: نوعی متوازی الاضلاع که در آن اندازه تمامی اضلاع یکسان میباشد اما زوایای آن حتما یکسان نیستند.

>> مساحت و محیط اشکال یادآوری شده در جدول زیر مشخص است:

نام	شکل	مساحت	محیط
دایره		$S = \pi r^2$	$P = 2\pi r$
مثلث		$S = \frac{1}{2} \times a \times h_a$	$P = a + b + c$
ذوزنقه		$S = \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$	$P = a + b + c + d$
متوازی الاضلاع		$S = a \times h$	$P = 2(a + b)$
مستطیل		$S = a \times b$	$P = 2(a + b)$
مربع		$S = a^2$	$P = 4a$
لوزی		$S = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$	$P = 4a$

- چند ضلعی منتظم: چند ضلعی است که تمام ضلع های آن باهم و تمام زاویه های آن با یکدیگر هم اندازه هستند. از شناخته شده ترین چندضلعی های منتظم میتوان به مثلث متساوی الاضلاع و مربع اشاره کرد.

- چنانچه یک چندضلعی با n ضلع داشته باشیم، در ارتباط با آن میتوان به موارد زیر اشاره کرد:

+ تعداد قطر ها برابر $d = \frac{n(n-3)}{2}$ میباشد. + تعداد شعاع و ارتفاع برابر با n میباشد.

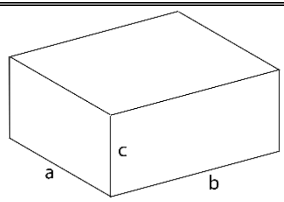
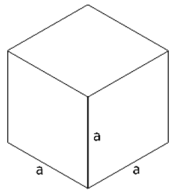
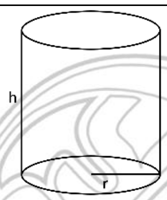
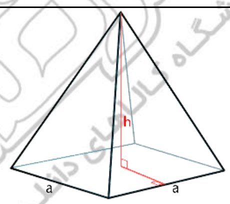
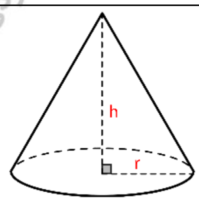
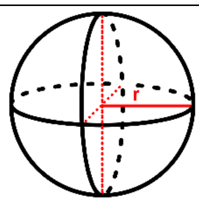
- کره: مجموعه نقاطی از فضا گفته میشود که از یک نقطه ثابت در فضا فاصله یکسانی دارند. به نقطه ثابت مرکز کره و فاصله هر نقطه روی سطح کره از مرکز را شعاع کره میگویند.

- مکعب مربع: حجم هندسی محبوس بین ٦ وجه مربعی شکل و یکسان. به هر یک از ضلع های وجه ها، یال و به مکان تماس سه وجه، راس گفته میشود.

- مکعب مستطیل: مکعب مستطیل نیز همانند مکعب مربع میباشد با این تفاوت که وجه های آن مستطیل شکل میباشند.

- استوانه: از دوران یک مربع یا مستطیل به دور یکی از اضلاع آن به دست می آید. دارای دو قاعده یکسان به صورت دایره میباشد.

- مخروط: از دوران یک مثلث قائم الزاویه به دور یکی از اضلاع قائم آن به دست می آید. این حجم فضایی دارای یک قاعده دایره ای شکل میباشد که در مقابل آن یک راس وجود دارد.

حجم	ویژگی ها	شکل	فرمول ها
مکعب مستطیل	* دارای ٦ وجه مستطیل شکل * دارای ۸ راس و ۱۲ یال		مساحت کل: $S = 2(ab + b + ac)$ مساحت جانبی: $S_s = 2(ac + bc)$ حجم: $V = a \times b \times c$
مکعب مربع	* دارای شش وجه مربعی * دارای ۸ راس و ۱۲ یال		مساحت کل: $S = 6a^2$ مساحت جانبی: $S_s = 4a^2$ حجم: $V = a^3$
استوانه	* دارای دو قاعده دایره شکل به قطر r * بدون یال و راس *دارای وجه جانبی یکپارچه مستطیلی		مساحت کل: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ مساحت جانبی: $S_s = 2\pi rh$ حجم: $V = h\pi r^2$
هرم	* با قاعده n ضلعی منتظم * دارای وجه ها جانبی مثلثی شکل * دارای n+1 راس و 2n یال		مساحت کل: مساحت قاعده + مساحت جانبی حجم: $V = \frac{1}{3}Ah$
مخروط	* دارای قاعده دایره شکل * دارای یک راس و یک یال (محل اتصال قاعده به سطح جانبی)		مساحت کل: $S = \pi r\left(r + \sqrt{r^2 + h^2}\right)$ حجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
کره	* دارای قاعده نبوده و محصور بین چند وجه نمیباشد		مساحت کل: $S = 4\pi r^2$ حجم: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- روابط میان شکل ها (نسبت بین شکل ها - ترکیب شکل ها - شباهت شکل ها - الگو های تصویری)

ماهیت، ساختار و نوع کلی سوالات در بخش روابط تصویری را میتوان در حالت های زیر مشاهده کرد:

+ با توجه به تصاویر داده شده، کدام یک میتواند تصویر بعدی باشد؟

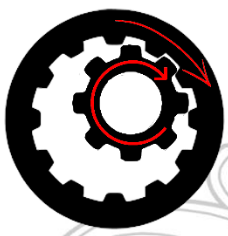
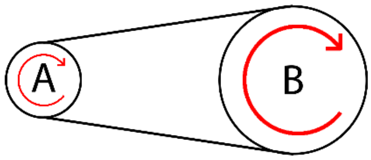
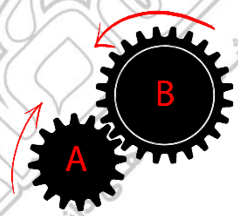
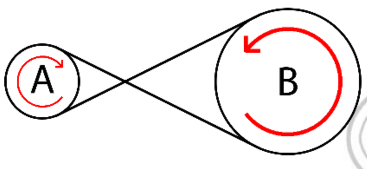
+ در جدول زیر جای خالی را با کدام شکل میتوان تکمیل کرد؟

+ با توجه به ارتباط بین دو شکل اول، کدام گزینه میتواند به جای علامت سوال باشد؟ و ...

>> برای پیدا کردن الگویی که میان شکل ها نهفته است باید دید که میان هر تصویر با تصویر بعدی خود چه تفاوت هایی وجود دارد. تفاوت ها میتوانند شامل مواردی همچون اندازه شکل ها (حتی کوچکترین موارد همچون خطوط ساده)، دوران و چرخش شکل ها، قرینه شدن شکل ها، تعداد شکل ها و ... باشند.

- چرخش چرخدنده ها

در برخی مسائل با چرخش چرخدنده ها و یا تسمه ها مواجه هستیم. برای حل این دسته از مسائل از دوران و قواعد فیزیکی آنها کمک میگیریم. دو چرخدنده یا دو دیسک که با تسمه به هم وصل شده اند بر روی هم دو نوع تاثیر میگذارند:

تاثیر مستقیم	چرخش چرخ یا دیسک در یک جهت منجر به چرخش دیسک یا چرخ دیگر در همان جهت میشود. این حالت هنگامی رخ میدهد که چرخدنده ها در داخل همدیگر باشند یا اینکه تسمه اتصال دیسک ها خود را قطع نکند		
تاثیر معکوس	چرخش چرخ یا دیسک در یک جهت منجر به چرخش دیسک یا چرخ دیگر در خلاف جهت دیسک اولیه میشود. این حالت هنگامی رخ میدهد که چرخدنده ها بیرون هم باشند و یا اینکه تسمه اتصال دیسک ها خود را قطع کند		

- حجم های گسترده فضایی

در اینگونه سوالات، گسترده ایی از یک حجم سه بعدی داده میشود فرد باید یکی از شکل های سه بعدی داده شده به عنوان گزینه را مربوط به شکل گسترده میباشد انتخاب کند.

در برخی موارد ممکن است شکل سه بعدی به عنوان سوال و چهار گسترده آن به عنوان پاسخ داده شوند.

- شمارش حجم های فضایی

حجمی متشکل از چند مکعب داده میشود و از فرد خواسته میشود که تعداد مکعب های تشکیل دهنده شکل را مشخص کند. شکل های داده شده به دو دسته تقسیم میشوند:

+ دسته اول اشکالی هستند که میتوان با شمارش ابعاد شکل اصلی و کم کردن یا اضافه کردن چند مکعب به آن، پاسخ صحیح را مشخص نمود

+ دسته دوم اشکالی هستند که ابعاد شکل اصلی در آنها مشخص نیست. برای شمارش مکعب های اینگونه شکل ها ابتدا آن را طبقه بندی کرده و سپس مکعب های هر طبقه را جداگانه شمارش میکنیم که مجموع آنها، همان تعداد مکعب های تشکیل دهنده شکل اصلی خواهد بود.