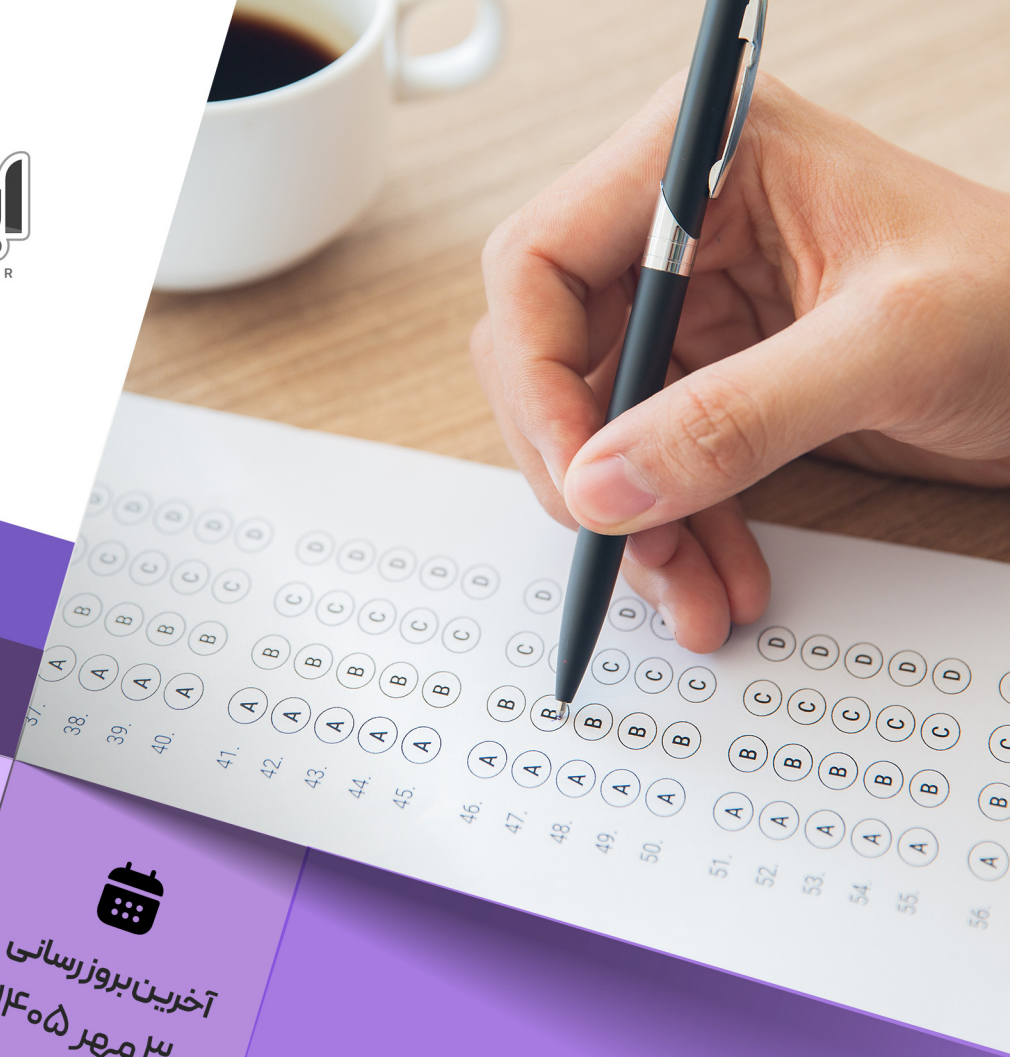
ایران عرضه
فروشگاه کالاهای دانلودی
IRANARZE.IR



IranArze.ir
@iranarze

تعداد صفحات
۲۲۸

آخرین بروزرسانی
۳۰ مهر ۱۴۰۵

جزوه

تحلیل سازه ها

- شامل جزوات آموزشی درس تحلیل سازه ها
- ویژه آزمون های استخدامی و اخذ مدرک

انتشار یا استفاده غیر تجاری از این جزوه، بدون حذف لوگوی ایران عرضه "مجاز" می باشد
IRANARZE.IR

لینک های مفید آزمون ها

خرید سوالات بانکدار مهندسی ساختمان (عمران) بانک سینا	**خرید سوالات کارشناس ساختمان و تاسیسات توزیع برق**
خرید سوالات مهندسی عمران آبفا	**شبکه های اجتماعی ایران عرضه** (فایل های رایگان + تخفیفات هفتگی + اخبار)

(برای مشاهده هر بخش روی آن بزنید)

فهرست مطالب

- فصل اول: خلاصه تحلیل سازه ۱ به کوشش کاظم - صفحه ۴
- فصل دوم: خلاصه تحلیل سازه ۲ - صفحه ۱۱۵
- فصل سوم: خلاصه و نکات روش های تحلیل سازه ها به کوشش شیرانی – صفحه ۱۵۹

IRANARZE.IR
فروشگاه کالاهای دانلودی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

جزوه درس :

تحلیل سازه ۱

استاد :

جناب آقای مهندس طاحونی

نگارش:

حمید کاظم

(کارشناس عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

(دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش سازه دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

تابستان ۱۳۸۹

حمید کاظم

«تحلیل سازه»

«حساب آماری مهندس طاحونی»

دانلود سوالات آزمون

«بسم الله الرحمن الرحیم»

فهرست مطالب:

۱) تعریف و تشخیص سازه‌ها
۲) نیروهای داخلی و رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی ← میان ترم اول خیلی خوب میشن
۳) خرپاها
۴) خط تأثیر ← میان ترم دوم خراب می‌کند
۵) تغییر شکل سازه‌ها
۶) تحلیل سازه‌های نامعین ← پایان ترم متوسط

امتیازات:

۱) حل تمرین و طلس حل تمرین — استاد حل تمرین + امتیاز اضافه
۲) امتحان میان ترم اول
۳) امتحان میان ترم دوم
۴) امتحان پایان ترم

توجه: در هر برگه امتحانی، به ترتیب بودن و تمیزی برگه 5 نمره از 100 نمره را داراست.

ماخذ:

۱) در زمینه کتب انگلیسی، کتاب‌های باغبان زیر هستند:

1) Theory of structures 2) Structural analysis 3) Analysis of structures
4) Norris & Wilbur
5) Hillberg Burg (کتاب جدیدات)

مخصوص کتب:

۲) جزوه طالبی
۳) کتاب تحلیل سازه‌ها (لیل آبادی - طاحونی)

مبحث مربوط در هر امتحان برای امتحان بعدی حذف خواهد شد.

فصل اول

حمید کاظم

کلیات ، تشخیص سازه ها

تعریف سازه : عضو یا مجموعه‌ای از اعضا می‌باشد که برای تحمل یا انتقال نیرو به کار می‌رود. کلمه فارسی بسیار خوبی است که معادل structure به کار برده می‌شود.

طبقه‌بندی سازه‌ها : سازه‌ها را می‌توان با بینش‌های مختلف طبقه‌بندی کرد. ما در اینجا طبقه‌بندی هندسی یا آموزشی هستیم. در این درس سازه‌ها را به شکل زیر طبقه‌بندی می‌نماییم.

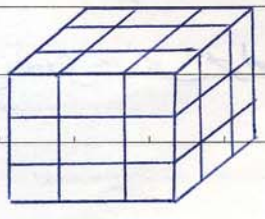
۱) سازه‌های وزنی (gravity structures) : سازه‌هایی هستند که عامل پایداری آن‌ها در مقابل بار قائم وزن آن‌هاست.

۲) سازه‌های قاب‌بندی شده (framed structures) : سازه‌های قاب‌بندی شده مجموعه‌ای از تیرها، ستون‌ها، اعضای خمشی، خمشی و غیره هستند که تشکیل حجم مشخصی می‌دهند که عامل پایداری آن‌ها در مقابل بارهای خارجی نه تنها وزن بلکه در حالت غالب هندسه آن‌هاست. یعنی با دادن هندسه مناسب به مجموعه پایداری آن‌ها را تأمین می‌نماید. اکثر ساختمان‌ها از سازه‌های قاب‌بندی شده‌اند. ساختمان‌های مسکونی، اداری، تجاری، یادبود، علائم، سازه‌های حوالیجاوه در واقع سازه‌های قاب‌بندی شده‌اند. تمرکز اصلی تحلیل سازه‌های ۱ و ۲ سازه‌های قاب‌بندی شده است.

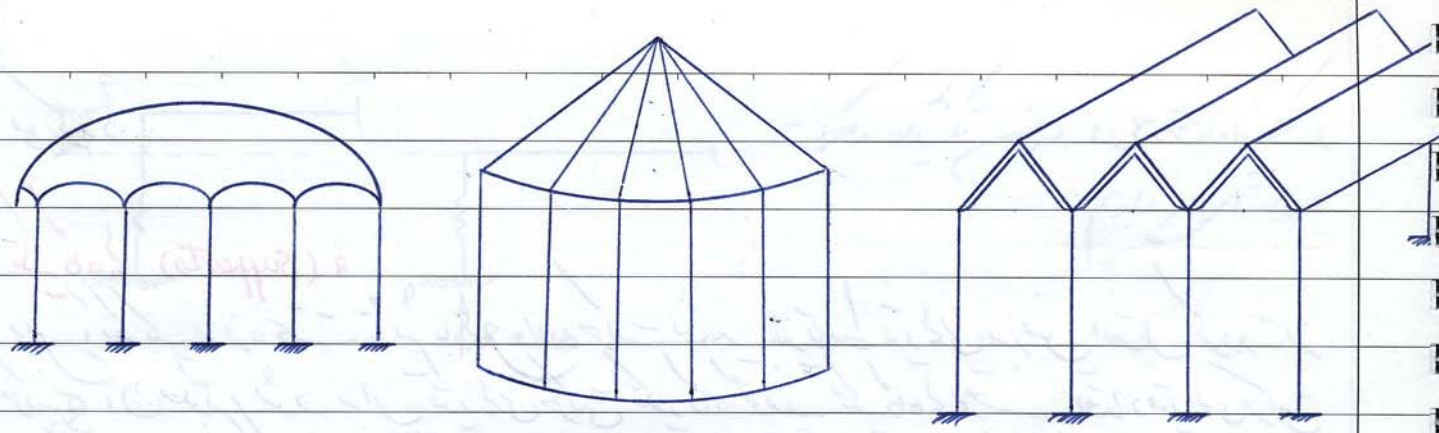
۳) سازه‌های پوسته‌ای (shell structures) : عامل قالب و پایداری سازه‌های پوسته‌ای، هندسه آن‌ها می‌باشد. وجه تمایز این سازه‌ها با سازه‌های قاب‌بندی شده در این است که سازه‌های پوسته‌ای معمولاً از ورق و یا محیط‌هایی یک پارچه‌ای هستند که به آن‌ها هندسه خاصی داده شده است. گنبدها، پوشش‌های زین اسبی، ورق‌های تا شده، پوسته‌های استوانه‌ای و گروی از انواع سازه‌های پوسته‌ای هستند. تحلیل این گونه سازه‌ها که دارای کاربردهای صنعتی و یا معماری هستند، معمولاً در دروس بعدی مثل تحلیل صفحه‌ها و پوسته‌ها مورد توجه قرار می‌گیرند.



سازه وزنی



سازه قاب‌بندی شده



سازه‌های پوسته‌ای

علم تحلیل سازه: علمی است که در آن رفتار سازه از نقطه‌ای که بار به آن اعمال می‌گردد تا لحظه‌ای که بار به تکیه‌گاه‌ها منتقل می‌گردد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

هدف از تحلیل سازه: وقتی که سازه‌ای را مورد تحلیل قرار می‌دهیم به دنبال اهداف زیر می‌باشیم:

۱) بررسی پایداری، ناپایداری، معینی و نامعینی

۲) تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی

۳) تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودارهای آن‌ها

۴) می‌توانیم تغییر شکل سازه

سازه‌های فضایی (۳ بعدی) و سازه‌های صفحه‌ای (دوبعدی):

سازه‌های فضایی: همه سازه‌ها ۳ بعدی هستند. یعنی حجمی از فضا را اشغال کرده و در اختیار ما قرار می‌دهد. دسته بسیار بزرگی از سازه‌های ۳ بعدی از نقطه‌نظر تحلیل قابل تبدیل به مجموعه‌ای از سازه‌های دوبعدی هستند، یعنی می‌توان آن‌ها را با توجه به اطلاعات مربوط به سازه‌های دوبعدی تحلیل نمود. دسته دیگر از سازه‌های فضایی وجود دارند که رفتار آن‌ها قابل تجزیه به رفتار دوبعدی نیست و حتماً باید ۳ بعدی بررسی شود. به این دسته سازه‌ها، سازه‌های فضاکار گوییم. پوسته‌ها دسته بسیار مهمی از سازه‌های فضاکار هستند.

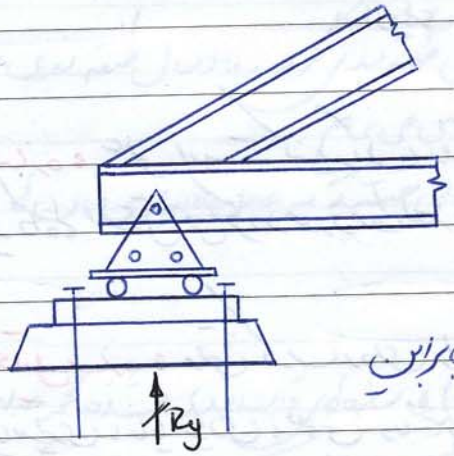
سازه‌های صفحه‌ای: سازه‌هایی می‌باشند که در آن، سازه و بارهای وارد بر آن عمل در یک صفحه قرار دارند. درس تحلیل سازه‌ها ۱ اختصاص به سازه‌های قاب خمشی شده صفحه‌ای دارد. تجربه نشان می‌دهد که اکثر سازه‌های فضایی قابل تحلیل به صورت دوبعدی می‌باشند. وجود بعد سوم در سازه‌های فضایی اصول و روش‌های کار را تغییر نمی‌دهد و فقط به علت وجود بعد سوم عملیات قدری پرحجم و پیچیده

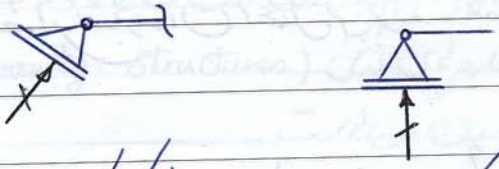
می کردد.

تکیه گاه ها (supports)

برای اینکه یک سازه تحت تاثیر بارهای وارده حرکت نماید باید توسط قیدهایی به زمین اتصال کردد تا از حرکت آن جلوگیری شود. به این قیدهای حرکتی تکیه گاه گویند. تکیه گاه ها برحسب تعداد قیدهای حرکتی طبقه بندی می شوند.

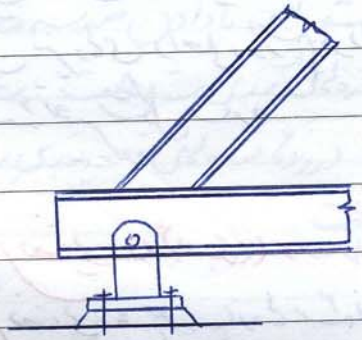
۱) تکیه گاه غلتکی:



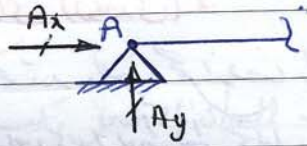


فقط یک قید در امتداد عمود بر سطح تکیه گاه ها وجود می آورد. بنابراین فقط یک واکنش در امتداد قید حرکتی خواهد داشت.

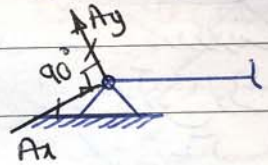
۲) تکیه گاه مفصلی:



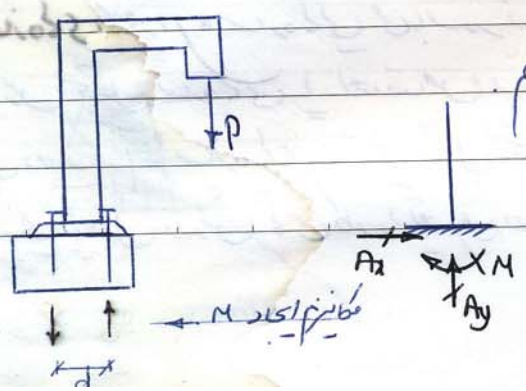
* هر تکیه گاهی در هر امتدادی که در برابر آن ممانعت ایجاد کند باعث ایجاد واکنش می شود.

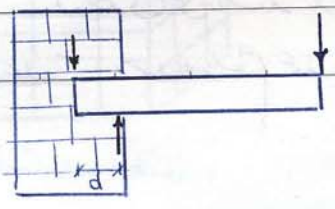


در تکیه گاه مفصلی واکنش های Ax و Ay گونه بر هم عمود هستند لذا جهت عمومی آن ها می تواند طبق تجزیه حل مسئله در نظر گرفته شود.

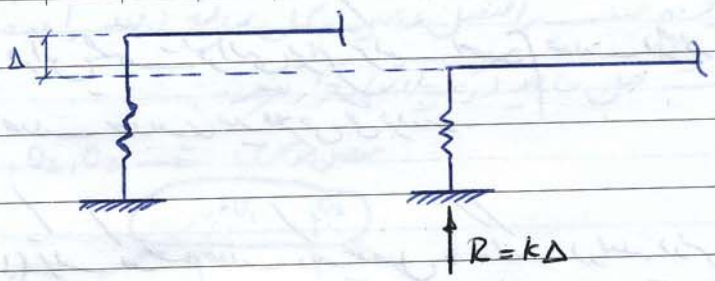


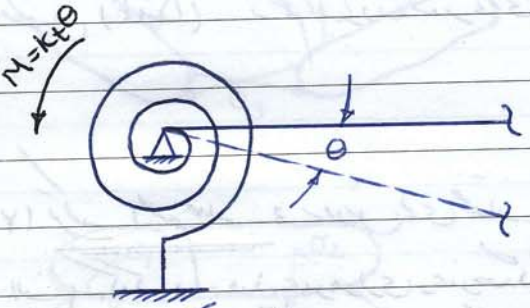
۳) تکیه گاه گیردار: در تکیه گاه گیردار اتصال وجود دارد و هیچ درجه حرکت در امتداد x و نه حرکت در امتداد y و نه دوران وجود ندارد.



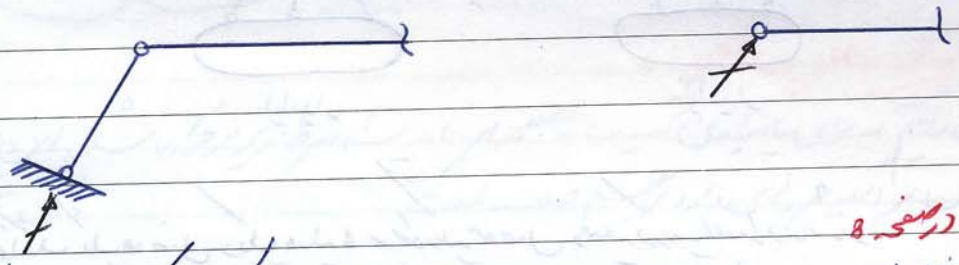


۴) تکیه‌گاه ارتجاعی: در این تکیه‌گاه حرکت در راستای فنر داریم.

1) 

2) 

۵) تکیه‌گاه رابط یا میله‌ای (Link): یک عضو دو سر لولا است که می‌تواند در راستای محورش نیرو وارد یا وارد کند.



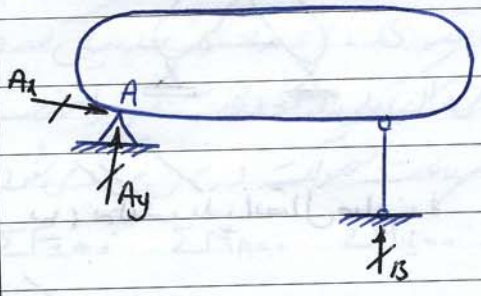
پایداری جسم صلب در صفحه:

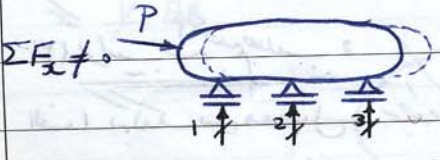
هدف تعیین حداقل مولفه لازم برای پایداری این جسم صلب در صفحه می‌باشد (جلوگیری از حرکت در راستای نیرو)

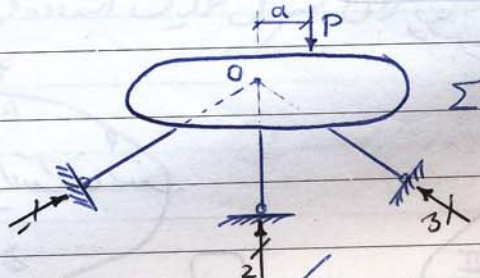
حداقل مولفه‌های لازم برای پایداری جسم صلب در صفحه وجود ۳ عدد مولفه می‌باشد. مشروط بر اینکه:

۱) سه مولفه با هم موازی نباشند
۲) سه مولفه در یک نقطه همگرا نباشند

} ناپایداری هندسی







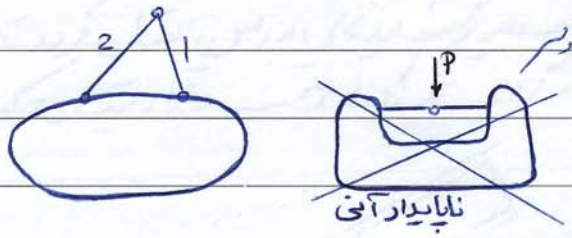
اگر پایداری نه واسطه وجود تعداد مولفه کمتر از ۳ عدد باشد ناپایداری استاتیکی نام دارد.

* وقتی جسم صلب پایدار است یعنی برآیند اعمال نیرو جسم تعادل خود را حفظ می‌کند.

قوانین ترکیب اجسام صلب در صفحه:

در این قسمت قوانینی برای ترکیب اجسام صلب و صفحه با حداقل مولفه‌ی لازم بطوریکه ایجاد درجه آزادی صلب حداقل بماند تعریف می‌گردند.

۱) ترکیب یک جسم صلب و یک مفصل: به کمک دو میله دو سر مفصل (link) که هم امتداد نباشند، انجام داد.

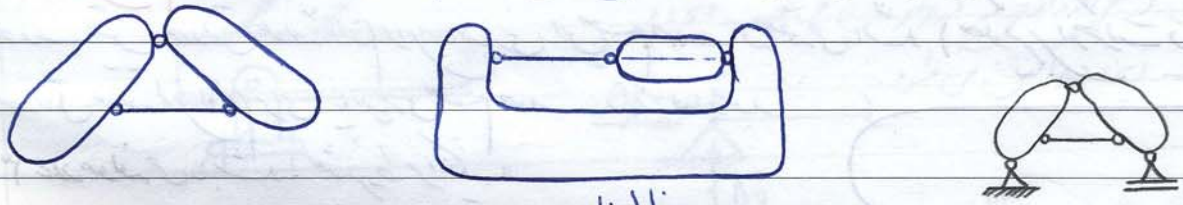


۲) ترکیب دو جسم صلب: به روش‌های مختلفی توان این ترکیب را انجام داد.

الف) به کمک سه میله غیر موازی و غیر همگذر:



ب) به کمک یک مفصل و یک میله: به طوریکه مفصل و میله در یک امتداد نباشند.

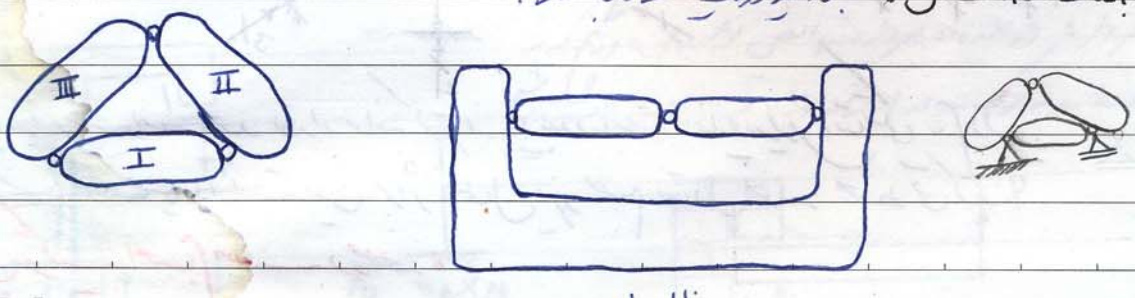


پ) به کمک یک اتصال صلب:



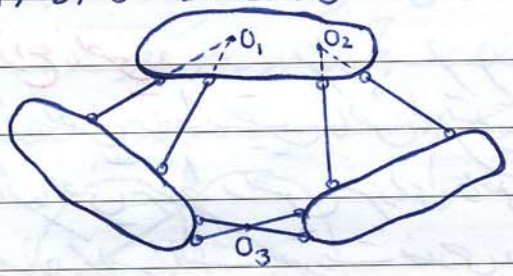
۳) ترکیب ۳ جسم صلب:

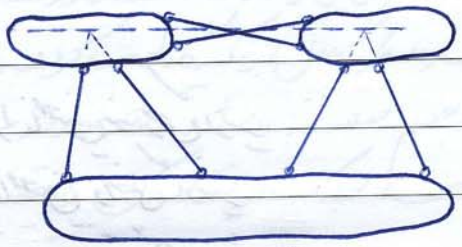
الف) به کمک سه مفصل: به طوریکه درجه آزادی نباشند.



ب) به کمک شش میله، تصویری حرکتی جسم صلب را متصل نمائید. محل تقاطع دو میله را مفصل موهومی گویند. مفاصل موهومی می توانند حالت نقل نمایند و در یک امتداد حرکت کنند.

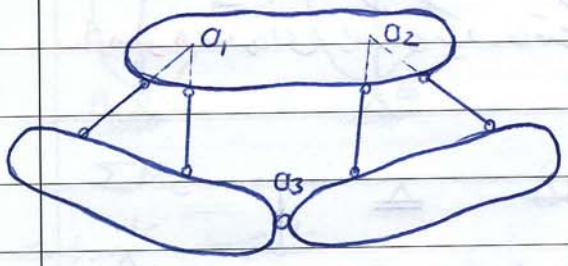
O_1, O_2, O_3 ← مفصل موهومی





نایایدار

ج) به کمک ترکیبی از مفصل و میله، تصویری مفصل های واقعی و موهومی در یک امتداد حرکت کنند.



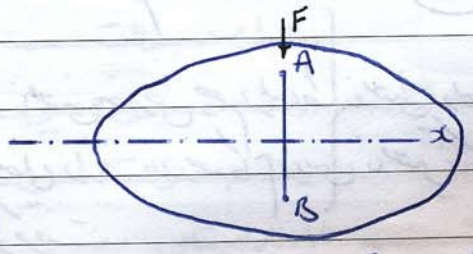
معادلات تعادل استاتیکی ـ معین و نامعین

از درس استاتیک می دانیم که برای پایداری یک سازه صفحه ای باید ۳ شرط زیر برقرار باشد. این ۳ شرط در واقع شرط صفر بودن برآیند نیروهای وارد بر جسم صلب است.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases}$$

به معادلات فوق معادلات تعادل در صفحه گفته می شود که تعداد آن ها برابر با ۳ می باشد. نوشتن معادله لنگر نسبت به نقطه دلخواهی مانند A، اینجا معادله جدیدی ایجاد می کند و معادله بدست آمده ترکیب خطی از ۳ معادله قبلی است. اما می توان یکی از این معادلات نیرو را حذف کرد و به جای آن معادله لنگر نسبت به نقطه جدید نوشت. این امر باعث تسهیلات در حل مسئله می شود و یا از معادله چهارم می توان برای کنترل عملیات استفاده کرد. $\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_{AB} = 0$

x ⊥ AB



در شکل مقابل ۳ شرط برقرار است ولی تعادل وجود ندارد.

می توان ۳ شرط را به صورت ۳ معادله لنگر نوشت. در این حالت A، AB و C نباید بر یک امتداد واقع گردند.

$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_{AB} = 0 \quad \Sigma M_C = 0$



نهال
NAHAL

معین و نامعین: اگر بتوان کلیه واکنش های تکیه گاهی و نیروهای داخلی یک سازه را با کمک معادلات تعادل فوق تعیین نمود، در اینصورت سازه معین نامیده می شود. در غیر اینصورت سازه نامعین است.

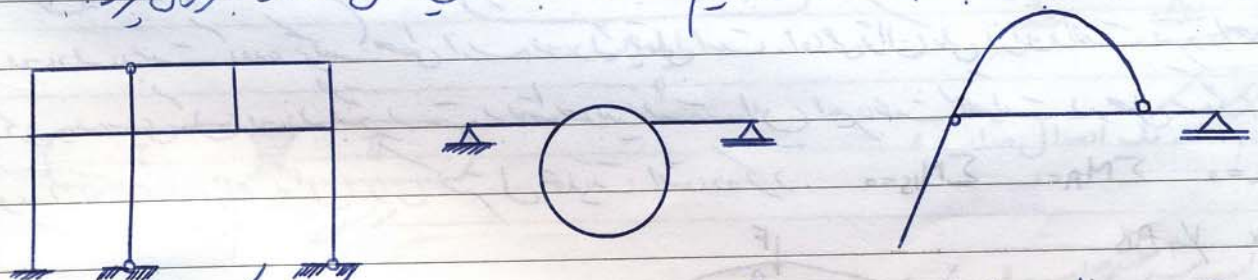
انواع نامعینی:
اگر نامعینی مربوط به تعیین واکنش های تکیه گاهی باشد آن را نامعینی خارجی گویند.
اگر نامعینی مربوط به تعیین نیروهای داخلی باشد آن را نامعینی داخلی گویند.
سازه ممکن است بصورت خارجی و داخلی نامعین بصورت توأم باشد.
از نظر نامعینی خارجی و داخلی سازه ها را در دو دسته باز و بسته طبقه بندی می نمایند.

سازه باز: سازه ای را باز گویند که فاقد هرگونه کادر یا حلقه باشد.



سازه های باز فقط از نظر خارجی بررسی می شوند و نامعینی داخلی برای آن ها مفهومی ندارد. یعنی یک سازه باز اگر از نظر خارجی معین باشد، از نظر نیروهای داخلی نیز معین است.

سازه بسته: سازه ای است که دارای یک یا چند حلقه یا کادر باشد. خرپاها و قاب ها در این رده از سازه ها قرار دارند. کمی خرپا را در بحث خود واگذار می کنیم. اما قاب ها در این فصل مورد توجه قرار خواهند گرفت.

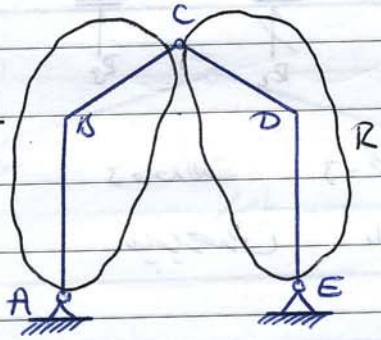


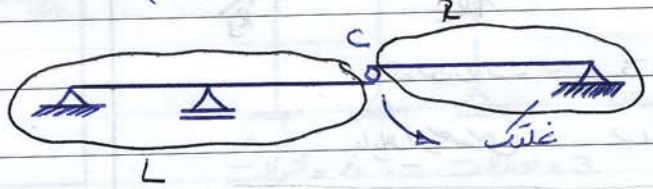
سازه بسته هم از لحاظ نامعینی خارجی و هم از لحاظ نامعینی داخلی باید مورد بررسی های لازم قرار گیرد. هر کادر یا حلقه ۳ درجه نامعینی داخلی دارد. در جریان بررسی نامعینی یک سازه بسته باید به تعداد هر کادر یا حلقه ۳ درجه نامعینی داخلی در نظر گرفت.



روابط تعرض: بیان کردیم که تعداد معادلات تعادل استاتیکی ۳ عددی باشد. (بعضی از سازه ها طراح

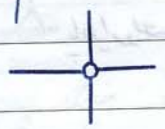
عمداً شرایطی ایجاد می‌نمایند که یکی از زنجیرهای داخلی صفر گردد. این شرایط یا خرابیت‌هایی در معادله تعادل مستقل محدودیتی می‌نامند که باید برای معادلات تعادل استاتیکی اضافه گردد. به این معادله شرط می‌گویند.
معادلات شرطی می‌توانند به علت وجود مفصل داخلی یا غلتک داخلی یا خرابیت مشابه باشند.
اگر یک سازه به طور کامل از یک نقطه جدا گردد، می‌توان به وجود معادله شرطی پی برد. بعضی از سازه‌ها جدا شده هم صلب باشند فاقد معادله شرطی است و اگر هم صلب نباشند، برای معادله شرطی خواهند بود که باید تعداد آن را تعیین کرد.





$\sum M_C = 0$ قطعه چپ یا قطعه راست $\sum F_x = 0$ یک قطعه $\sum M_C = 0$ قطعه راست یا قطعه چپ

توجه: اگر m عضو در نقطه‌ای به یکدیگر مفصل گردند $m-1$ معادله شرطی خواهیم داشت. معادله $\sum M$ از تعادل کل سازه به دست می‌آید.


⇒ 3 معادله شرطی

تشخیص سازه

تشخیص سازه به جرأت می‌توان گفت که به کمک آن مشخص می‌گردد سازه پایدار یا ناپایدار، معین یا نامعین است. دو بعد نامعینی سازه نیز در صورت فروم تعیین می‌گردد. برای تشخیص سازه‌ها از روش جدولی استفاده می‌گردد.

- تشخیص سازه‌ها
  - سازه‌های باز
    - ۱) ساده: (از یک قطعه تشکیل شده و فاقد معادله شرطی است)
      - کمتر از سه مجهول ← ناپایدار استاتیکی
      - 3 = تعداد مجهول و معین
      - 3 < تعداد مجهول و نامعین
      - 3 = تعداد مجهول و معین ← ناپایداری هندسی تدقیق گردد.
    - ۲) ترکیبی: تعداد روابط = تعداد شرطی + 3 (از ترکیب چند قطعه تشکیل شده و دارای معادله شرطی است)
      - روابط < مجهولات ← ناپایدار استاتیکی
      - روابط = مجهول و معین
      - روابط < مجهولات و نامعین
      - روابط = مجهول و معین ← ناپایداری هندسی تدقیق گردد
  - سازه‌های بسته
    - روابط < مجهولات ← ناپایدار استاتیکی
    - روابط = مجهولات ← معین خارجی و داخلی
    - روابط > مجهولات
      - معین خارجی ـ نامعین داخلی
      - نامعین خارجی ـ معین داخلی
      - نامعین خارجی ـ نامعین داخلی
      - شرط لازم است لکن کافی نیست. پایداری تدقیق شود

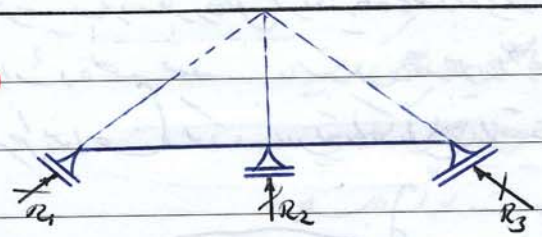
مثال ۵

1) 

مجهول = 2 معادلات = 3

بازساده

سازه ناپایدار استاتیکی

2) 

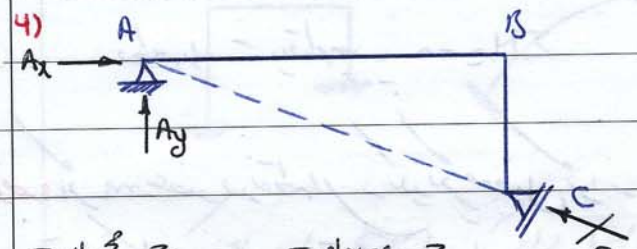
مجهولات = 3 معادلات = 3

ناپایدار هندسی سازه مبنا

3) 

مجهولات = 3 معادلات = 3

ناپایدار هندسی بازساده

4) 

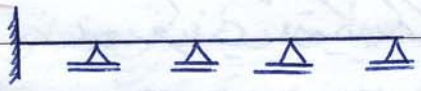
مجهولات = 3 معادلات = 3

ناپایدار هندسی بازساده

5) 

مجهولات = 3 معادلات = 3

پایدار و معین

6) 

مجهول = 7 معادلات = 3

پایدار و ۴ درجه نامعین

7) 

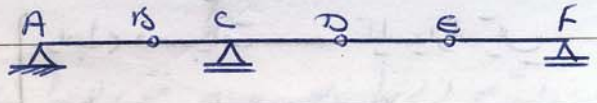
مجهولات = 4 معادلات = 3+1=4

سازه پایدار و معین بازرگیبی

8) 

مجهولات = 3 معادلات = 3+1=4

سازه ناپایدار استاتیکی بازرگیبی

9) 

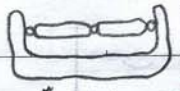
مجهولات = 4 معادلات = 3+3=6

ناپایدار بازرگیبی

10) 

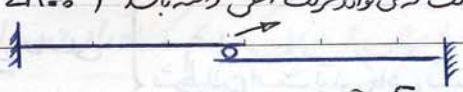
مجهولات = 4 معادلات = 3+1=4

بنابراین استثنائاً ناپایدار است.



*در حرب سازه ای شکل
لولا در اعتدادهم قرار
بگیرند سازه ناپایدار
گرفته است.

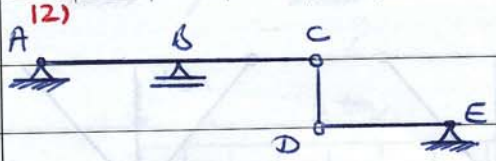
*علتش است که می تواند حرکت افقی داشته باشد ($\Sigma F_x=0$, $\Sigma M=0$)

11) 

مجهولات = 6 معادلات = 3+2=5

پایدار و ۱ درجه نامعین

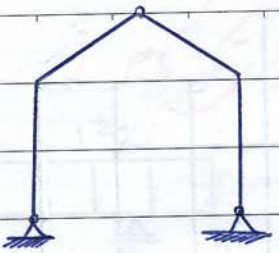
12)



مجهولات = 5 تعادل استاتیکی = 3 شرط = 2 — 5

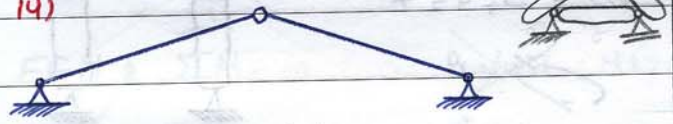
پایدار و معین

13)



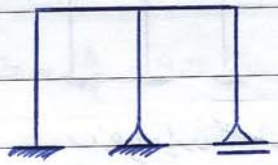
مجهولات = 4 معادلات = 3+1=4

14)



پایدار

15)

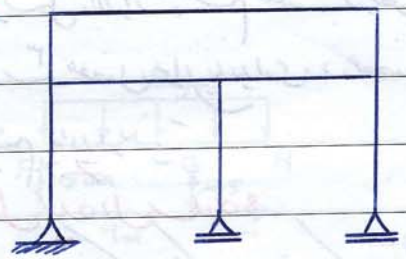


نابرسده

مجهولات = 6 معادلات = 3

پایدار و سه درجه نامعین

16)

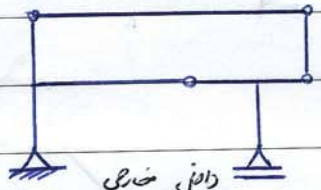


مجهولات = 4 + 3 = 7 (داخل + خارجی)

معادلات = 3

پایدار و 4 درجه نامعین (خارجی 1 + داخل 3)

17)

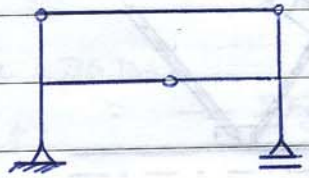


ناپایدار (داخل)

مجهولات = 3 + 3 = 6 (داخل + خارجی)

معادلات = 3 + 4 = 7

18)

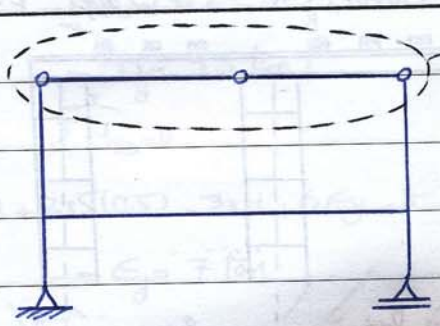


مجهولات = 3 + 3 = 6

معادلات = 3 + 3 = 6

پایدار و معین داخل

19)



ناپایدار کلی

20)

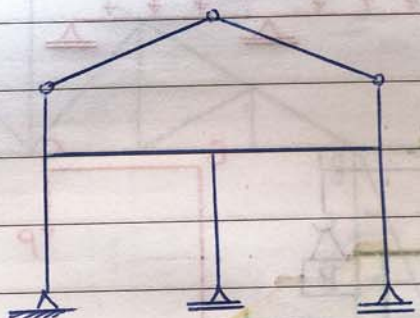


مجهولات = 3 + 3 = 6

معادلات = 3 (استاتیکی) + 1 = 4

پایدار و 2 درجه نامعین داخل

21)



مجهولات = 4 + 3 = 7

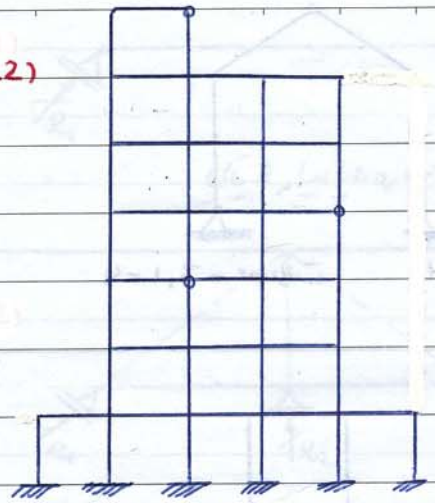
معادلات = 3 + 3 = 6

پایدار و یک درجه نامعین خارجی

نخل NAHAL

۱) اگر شکل پایین را دو جسم صلب در نظر بگیریم به جای وجود یک مفصل و یک میله برای پایداری فقط یک میله داریم. پس جسم پایدار نیست.

22)



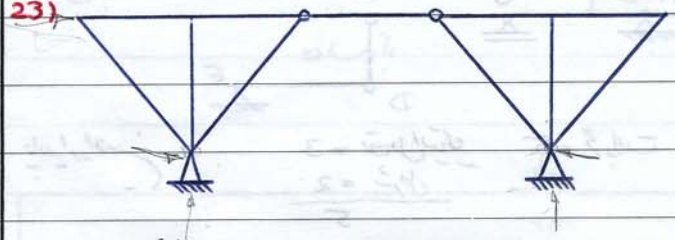
سازه پایدار و نامعین 15 درجه خارجی

42 درجه داخلی

مجهولات = $6\times3+16\times3=18+48=66$

معادلات = $3+6=9$

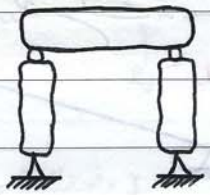
23)



خارجی

مجهولات = $4+12=16$

معادلات = $3+4=7$



۹ درجه نامعین

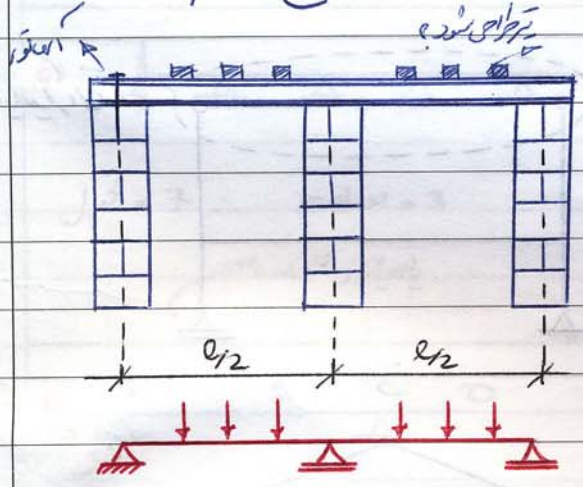
نایپایدار

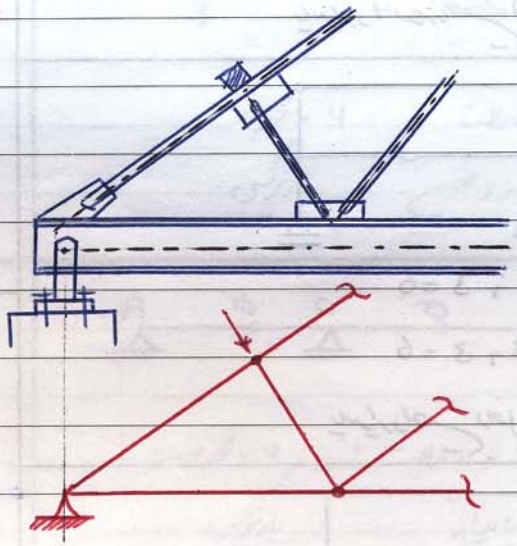
۲) اگر شکل بالا را ۳ جسم صلب در نظر بگیریم به جای وجود ۳ مفصل برای پایداری دو مفصل داریم. پس جسم پایدار نیست.

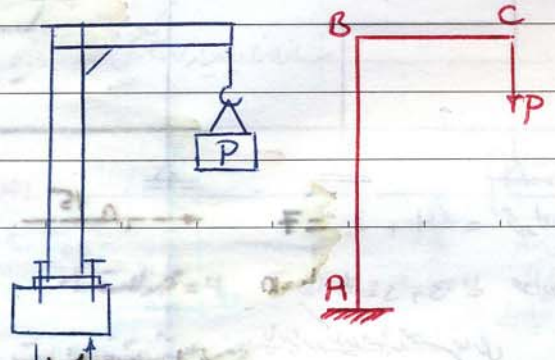
مدل ایده‌ال سازه‌ها

طراح هندسی در ارزیابی سازه باید خطا داده‌ای شود، خود سازه نیست که مدلی از سازه است که هر چه قدر با رفتار واقعی عضو مطابقت داشته باشد مدل سازی دقیق‌تر بوده و دقت نتایج بیشتر خواهد شد.

برای این منظور چند نمونه کوچک ارائه می‌شود.

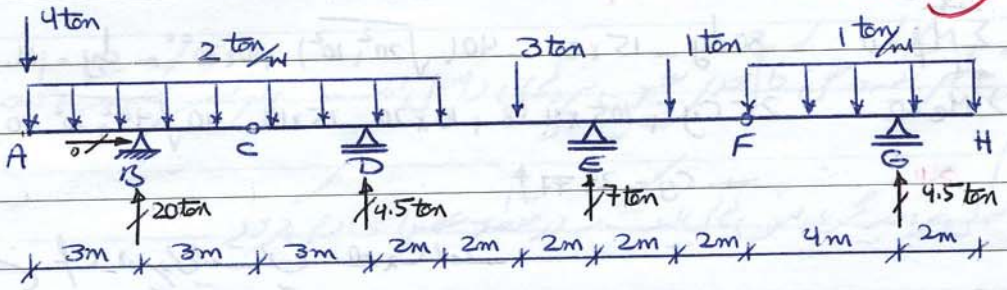








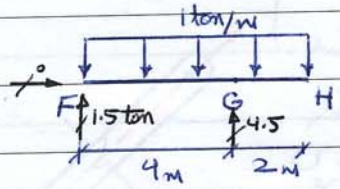
تعیین واکنش های تکیه گاهی

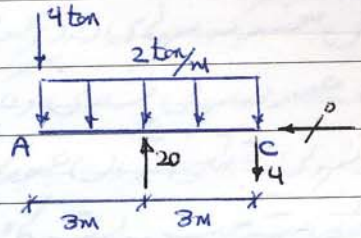


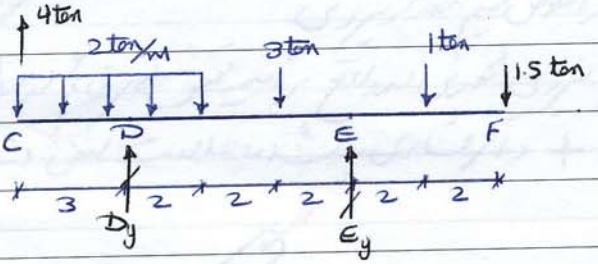
FGH : $\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_F = 0 \rightarrow -6\times3 + 4G = 0 \rightarrow G = \frac{18}{4} = 4.5 \text{ ton}$

کل : $\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$

ABC : $\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_C = 0 \rightarrow -3B_y + 4\times6 + 12\times3 = 0 \Rightarrow B_y = 20 \text{ ton}$







CDEF : $\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_E = 0$

$-1.5\times4 - 1\times2 + 3\times2 - 6D_y + 10\times6.5 - 4\times9 = 0$

$\rightarrow D_y = 4.5 \text{ ton} \uparrow$

$\overset{+}{\circlearrowleft}\sum M_D = 0$

$-4\times3 + 2\times5(0.5) - 3\times4 + 6E_y - 8 - 10(1.5) = 0$

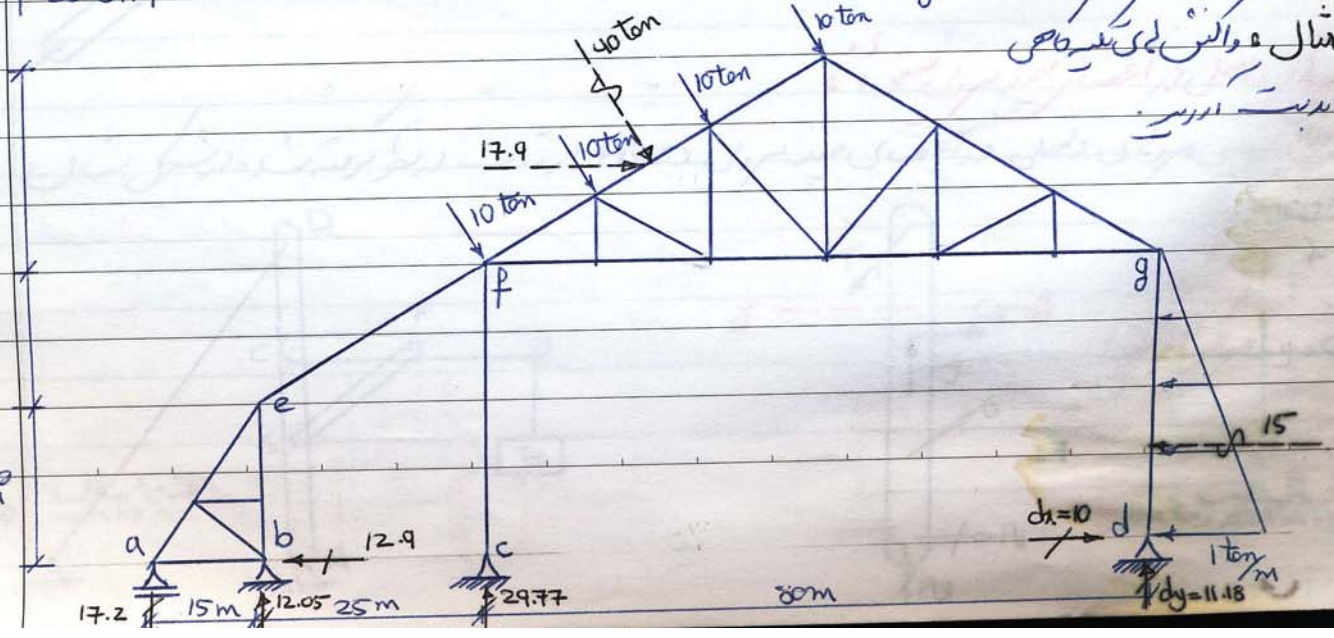
$\rightarrow E_y = 7 \text{ ton}$

$14 + 22 = 36 \text{ ton} \downarrow$

$36 \text{ ton} \uparrow$

$\rightarrow \sum F_y = 0$ برقرار است

مثال: واکنش های تکیه گاهی



عضو dg : $\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_g = 0 \quad 30 d_x - 15 \times 20 = 0 \rightarrow d_x = 10\ ton$

عضو fgd : $\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_f = 0 \quad 80 d_y - 15 \times 20 - 40\left(\sqrt{20^2+10^2}\right) + 10 \times 30 = 0 \rightarrow d_y = 11.18\ ton$

عضو efgd : $\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_e = 0 \quad 25 C_y + 105 \times 11.18 + 10 \times 20 - 15 \times 10 - 40\sqrt{45^2+20^2} = 0$

$\rightarrow C_y = 29.77 \uparrow$

چون f در نیروی یاتن $C_x = 0$ است.

کل سازه : $\Sigma F_x = 0 \rightarrow -b_x - 15 + 10 + 17.9 = 0 \Rightarrow b_x = 12.9$

عضو abe : $\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_e = 0 \rightarrow 12.9 \times 20 = 15 a_y \Rightarrow a_y = 17.2 \downarrow$

کل سازه : $\Sigma F_y = 0 \rightarrow 11.18 - 35.8 + 29.77 + 15_y - 17.2 = 0 \Rightarrow 15_y = 12.05$

فصل دوم:

حمید کاظم

تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودار تغییرات آن‌ها در طول عضو

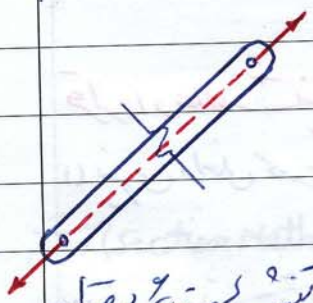
قبل از تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی قادر به تعیین نیروهای داخلی است. برای این کار ابتدا با ماهیت نیروهای داخلی آشنا می‌شویم.

به طور کلی نیروی داخلی برآیند مجموعه تنش‌هایی است که در مقطع عضو ایجاد می‌گردد.

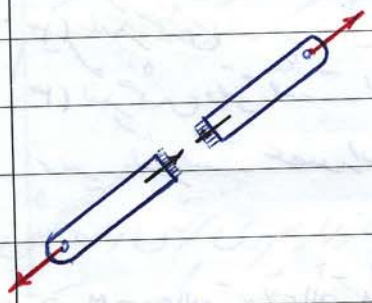
نیروی داخلی اعضای دو نیرویی:

اعضای دو نیرویی اعضای مستقیم می‌باشند که دو انتهای آن‌ها مفصلی است و فقط از طریق دو انتهای خود نیروهای خارجی دریافت می‌کنند. نمونه‌هایی از اعضای دو نیرویی موجود در خرپاها می‌باشد. از اعضای دو نیرویی همگس نیز در قاب‌ها نیز استفاده می‌گردد.

اعضای دو نیرویی وقتی در حال تعادل هستند که نیروهای وارد بر دو انتهای آن‌ها هم امتداد و مختلف الجهت باشند. در این صورت ممکن است عضو دو نیرویی فشاری و یا کششی باشد.

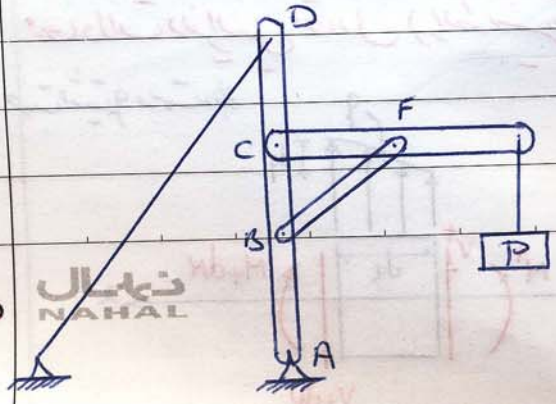


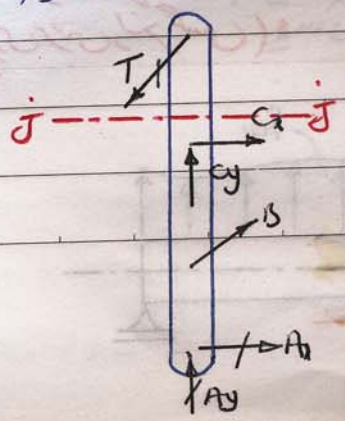
برای تعیین نیروی داخلی در عضو دو نیرویی مقطعی از آن عمود بر محور عضو رسم می‌شود. ملاحظه می‌شود برای حفظ تعادل هر کدام از قطعات چپ و راست که هست یک نیروی محوری در محل قطع شده داشته باشیم. اگر محل مقطع را عوض کنیم مقدار نیروی محوری تغییر نمی‌کند و در طول عضو ثابت است. این نیروی محوری همواره تمایل به ایجاد تنش‌های قائم در مقطع را می‌باشد. حال قرارداد کنیم باشد با علامت + و اگر فشاری باشد با علامت منفی (−) در نظر گرفته می‌شود.



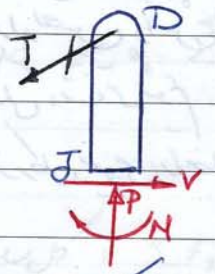
نیروهای داخلی در اعضای چند نیرویی صفحه‌ای:

برای بررسی نیروهای داخلی در اعضای چند نیرویی ABCD ابتدا در نظر گرفته شده در شکل نشان داده می‌شود.





برای مطالعه نیروهای داخلی مقطع J از آنال عمود داده، نمودار آزاد DJ را رسم می‌کنیم.



در این نمودار آزاد برای حفظ تعادل نیروی برآیند قائم نیاز به نیروی داخلی محوری P می‌باشد. برای تعادل برآیند افقی نیاز به نیروی برشی داخلی V می‌باشد و برای تعادل لنگر وجود لنگر خمشی M لازم است.

در اعضای چند نیروی صفحه‌ای دو حالت کلی وجود این ۳ نیروی داخلی لازم است. از طرف دیگر با تغییر مقطع J مقادیر نیروهای داخلی نیز تغییر می‌کند حتی ممکن است جهت نیز عوض گردد. پس برای طراحی لازم است نمودار تغییرات آن‌ها در طول عضو رسم گردد.

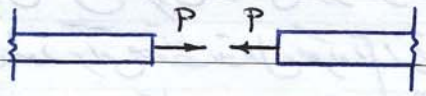
P: نیروی محوری داخلی = تلاش محوری

V: نیروی برشی داخلی = تلاش برشی

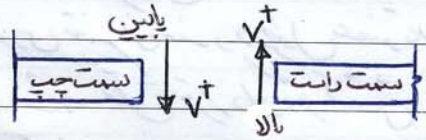
M: لنگر خمشی داخلی = تلاش خمشی

قرارداد علامت نیروهای داخلی:

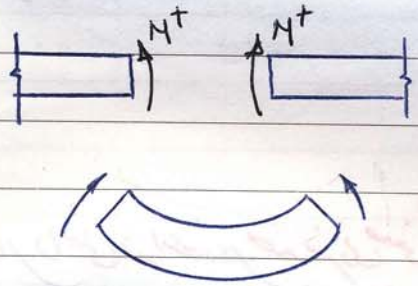
۱) نیروی داخلی محوری P وقتی مثبت است که کششی باشد.



۲) نیروی برشی وقتی مثبت است که در قطعه سمت چپ به سمت پایین و در سمت راست به سمت بالا باشد.

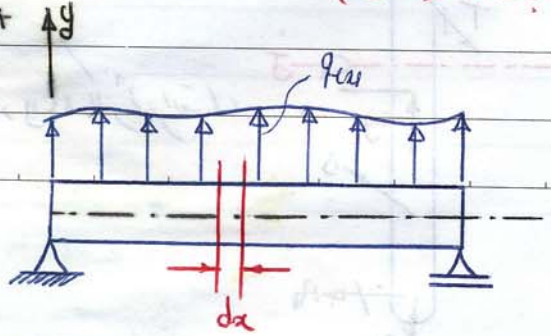


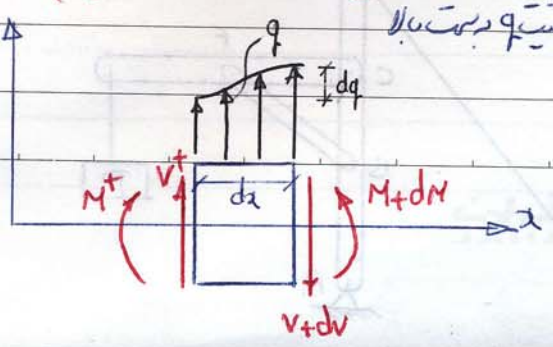
۳) لنگر خمشی وقتی مثبت است که در تار پایین ایجاد کشش نماید. لنگر مثبت عضو را به صورت کاسه‌ای در می‌آورد.



معادلات دیفرانسیل تعادل (رابطه بین بارگذاری، نیروی برشی و لنگر خمشی):

* جهت مثبت q به سمت بالا





$$\Sigma F_y = 0 \uparrow^{+} \Rightarrow V - (V+dV) + q\,dx + dq\,dx\,\tfrac{1}{2} = 0$$

$$\rightarrow -dV + q\,dx = 0 \rightarrow q(x) = \frac{dV}{dx}$$

شیب نمودار برش برابر شدت بار وارده است.

$$\int_C^D q(x)\,dx = \int_C^D dV \rightarrow V_D - V_C = \int_C^D q\,dx \quad (V_2 - V_1 = \int q\,dx)$$

تغییرات برش بین دو نقطه C و D برابر است با بار وارده بین دو نقطه C و D (مقدار بار وارده)

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -M + (M+dM) - (V+dV)\,dx + q\frac{(dx)^2}{2} + \frac{1}{2}dq\,dx\,dx\,\frac{2}{3} = 0$$

$$\rightarrow dM - V\,dx + (dx)^2 dV = 0 \rightarrow V(x) = \frac{dM}{dx}$$

شیب نمودار لنگر خمشی برابر نیروی برشی در هر مقطع می باشد.

$$\int_C^D V(x)\,dx = \int_C^D dM \rightarrow M_D - M_C = \int_C^D V\,dx \quad (M_2 - M_1 = \int V\,dx)$$

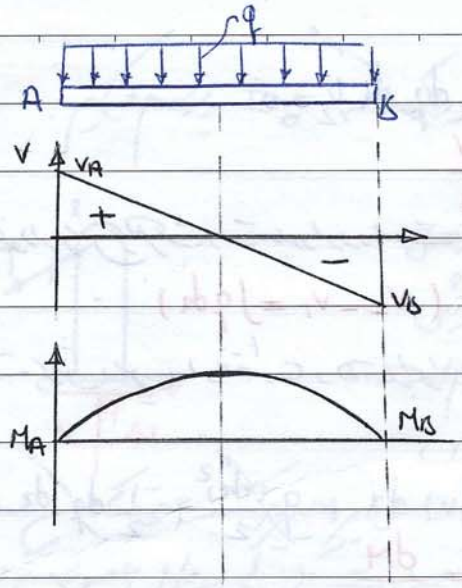
تغییرات لنگر خمشی بین دو نقطه C و D برابر با سطح زیر نمودار برش بین دو نقطه C و D.

رسم نمودار تغییرات نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری:

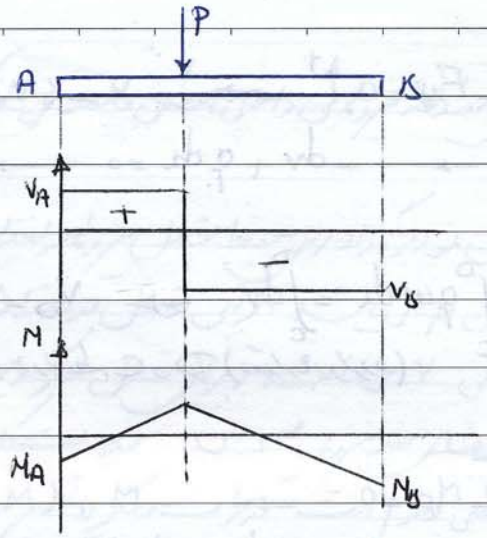
۱) ساده ترین روش برای رسم نمودار تغییرات نیروهای داخلی روش مقطع زدن (Section Method) است. در این روش در محل مورد مطالعه مقطعی عبور داده شده و نیروهای داخلی از جهت لمست تعادل دورهای آن نمایش داده می شوند. معادلات تعادل برای قسمت چپ یا راست برانوشته نیروهای داخلی محاسبه می گردد. این روش در اکثر مواردی که قرار است در دو مثال کلی بعدی از آن استفاده کنیم را همین جا توضیح خواهیم داد.

۲) روش جمع زدن (Summation Method) & در این روش برای رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی از معادلات دیفرانسیل تعادل و نتایج حاصل از آن استفاده می شود. این روش کاربردی است در مثال کلی این فصل بیشتر از آن استفاده خواهد شد. توجه شود که نیروی محوری کماکان با روش مقطع زدن محاسبه می گردد.

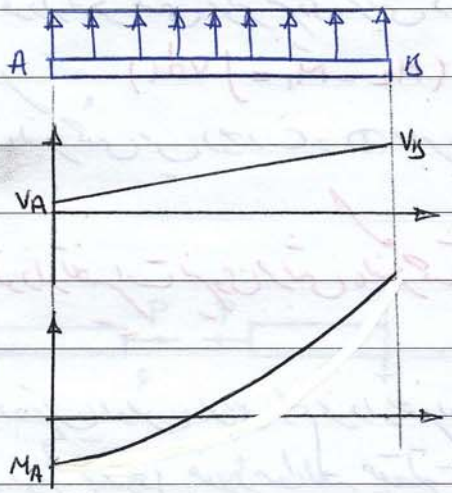
1)



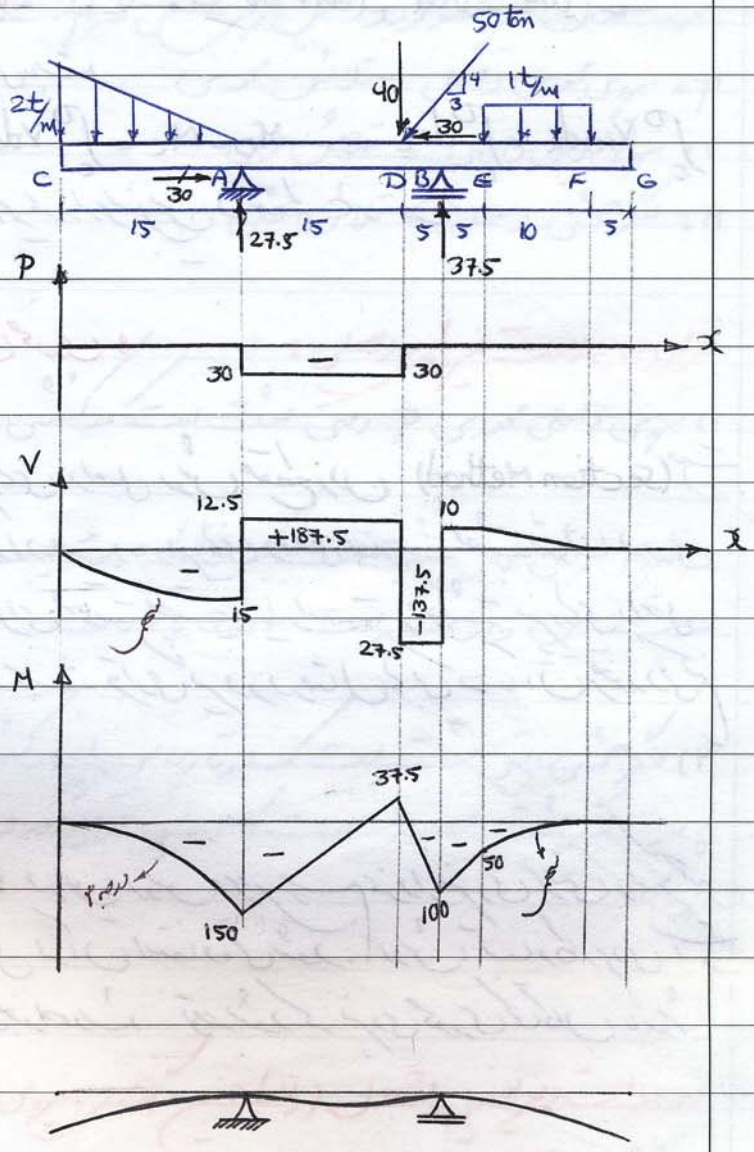
2)



3)



4)

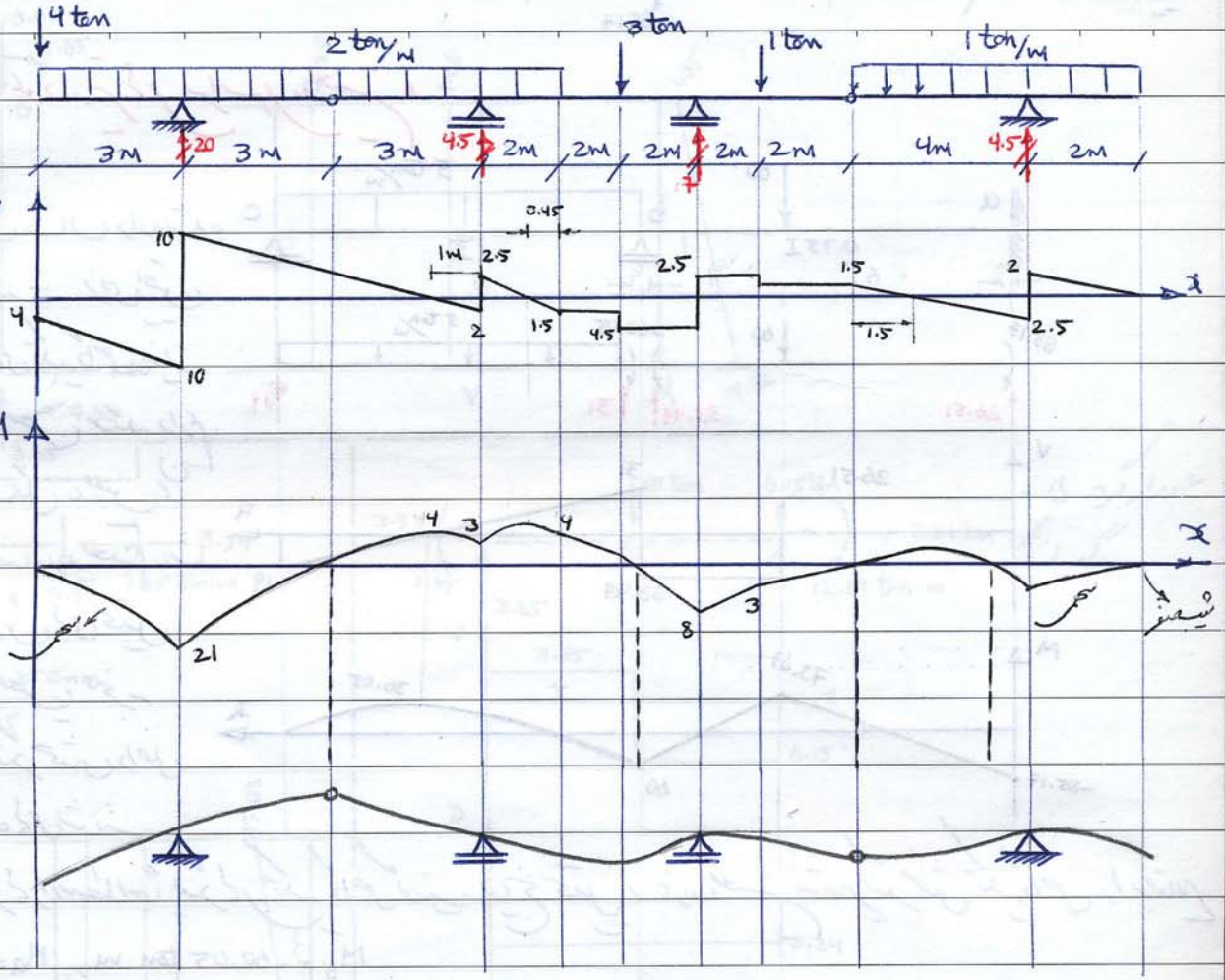


نکته: در حضور بار گسترده یکنواخت و لنگر خمشی حداکثر تمام نیروهای خارجی باید مولفه‌ای در امتداد عمود بر محور عضو تجزیه گردند.

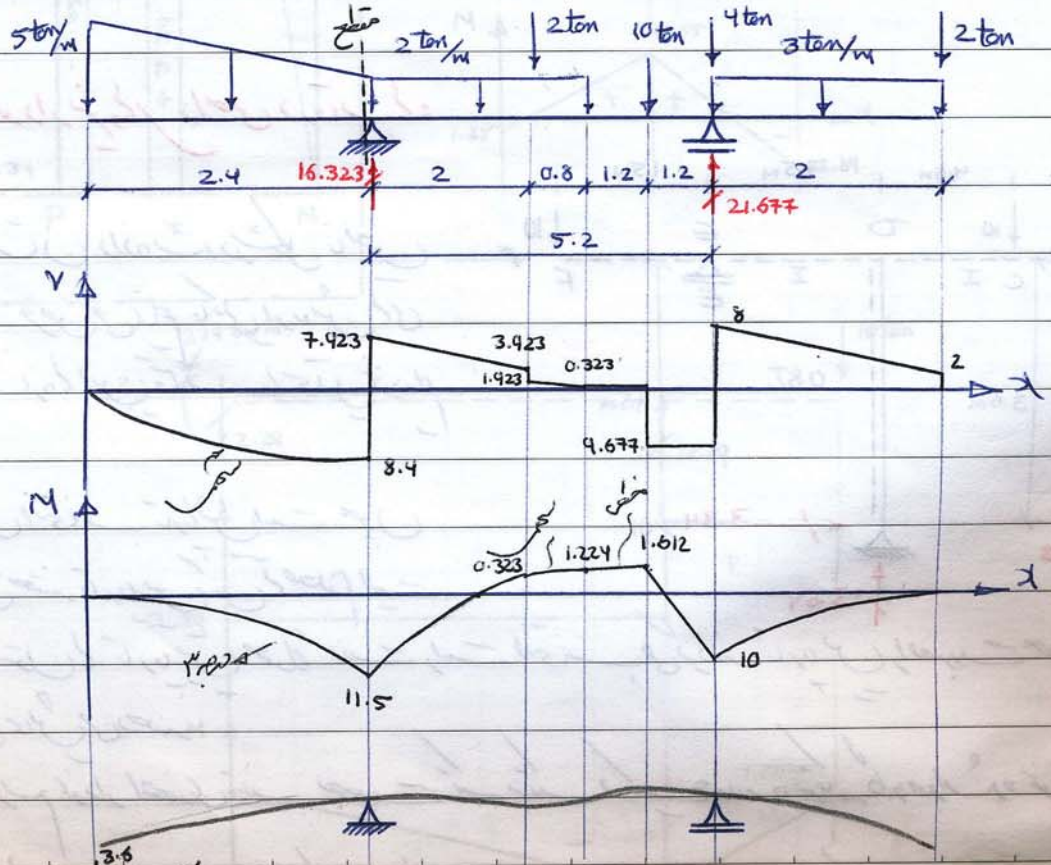
منحنی داخلی بادبند هر نمودار برش ندارد لذا لنگر خمشی ثابت است.

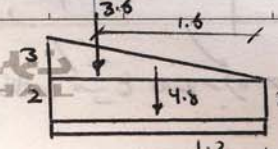
نهال
NAHAL

5)



6)



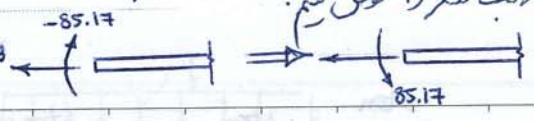


$M = 4.8 \times 1.2 + 3.6 \times 1.6 = -11.5$

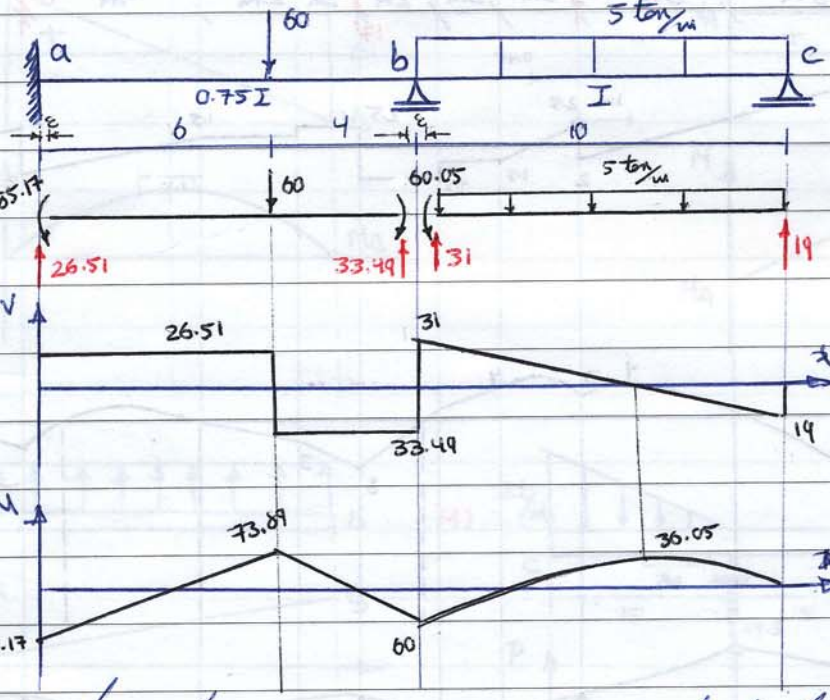
NAHAL

اگر لنگر خمشی داخلی داده شد در نقطه مورد نظر مقطع می زنیم و جهت قراردادی لنگر را رسم می کنیم و سپس عدد را بر روی جهت قراردادی قرار می دهیم. اگر عدد لنگر منفی بود می توانیم جهت لنگر را عوض کنیم.

مثال پایین (نقطه a)



رسم نمودار تیر کلی برای نامعین

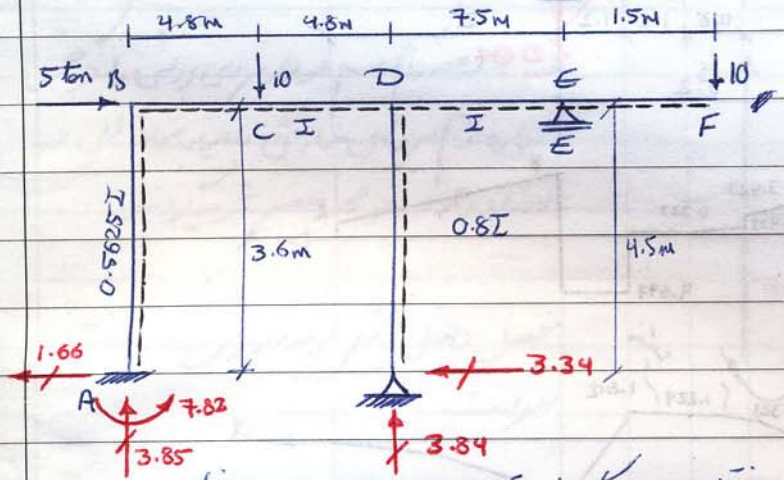


تیر سراسری نشان داده شده نامعین است. برای تعیین واکنش های تکیه گاهی نیاز به تحلیل نامعین مسئله داریم. در تحلیل مسائل نامعین می بایست ابتدا معلوم باشد اعضا چه نیروی داخلی دارند. لذا روش های تحلیل مسائل نامعین منجر به تعیین لنگر خمشی داخلی در تکیه گاه ها می شوند.

این لنگر ها را اصطلاحاً لنگر های تکیه گاهی گویند. نتایج تحلیل سازه نامعین مقادیر لنگر خمشی تکیه گاهی را به ما می دهد

$$M_b = -60.05 \text{ ton.m}, \quad M_a = -85.17 \text{ ton.m}$$

رسم نمودار نیروی داخلی در قاب ها



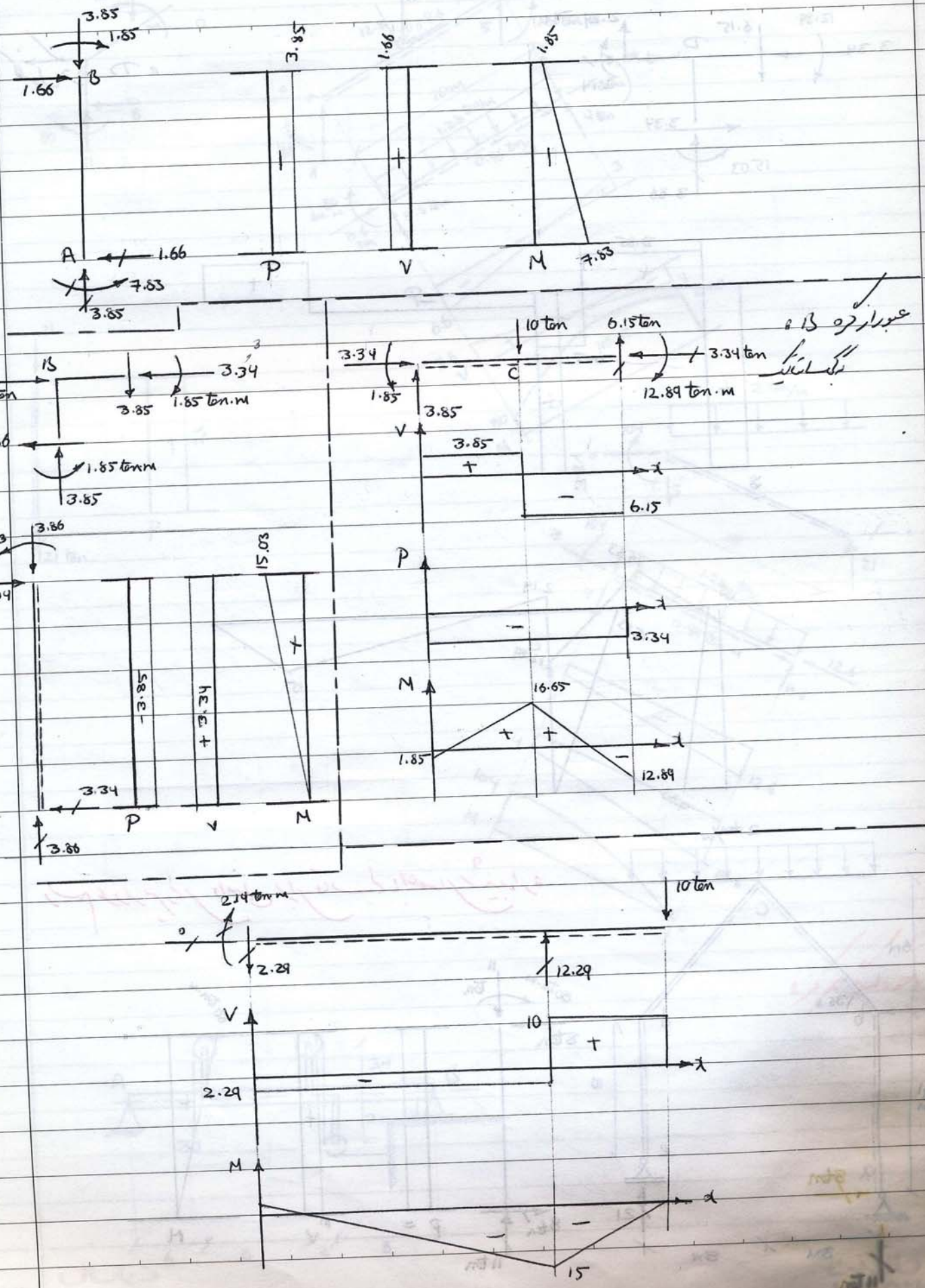
قاب نشان داده شده در شکل نامعین است. فرض می نماییم با کلی از روش های تحلیل سازه های این قاب را تحلیل نموده ایم.

گام بعدی انتخاب تاریاس است. همچون تیر ها لنگر خمشی تاریاس آن ها معلوم است.

در مورد ستون ها تاریاتین معمولاً دست راست انتخاب می کنند. تاریاس را به صورت مقابل نشان می دهند.

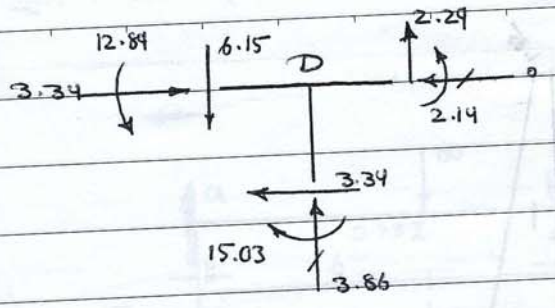
برای رسم نمودار اعضای قاب به صورت تک تک در کنار ع مانده به تکیه گاه صدا شده نمودار آن را رسم می کنیم.

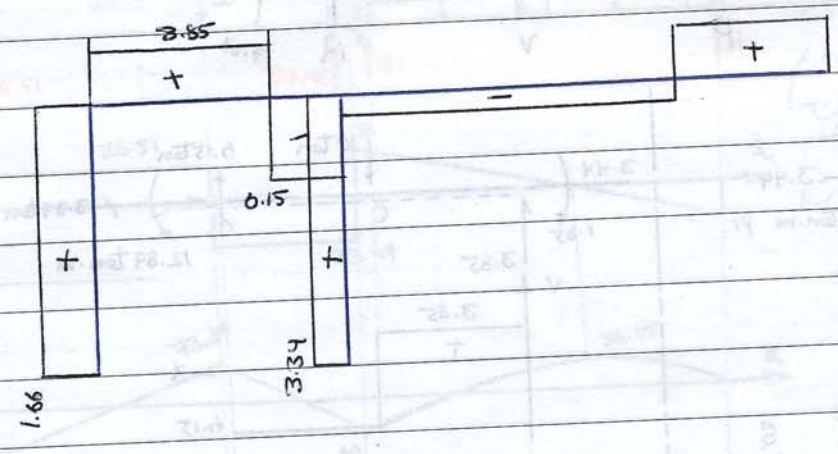
عضو AB را کنار ع مانده به گره جدا می کنیم و بعد گره کاری نداریم یعنی 5 ton را رسم می کنیم.

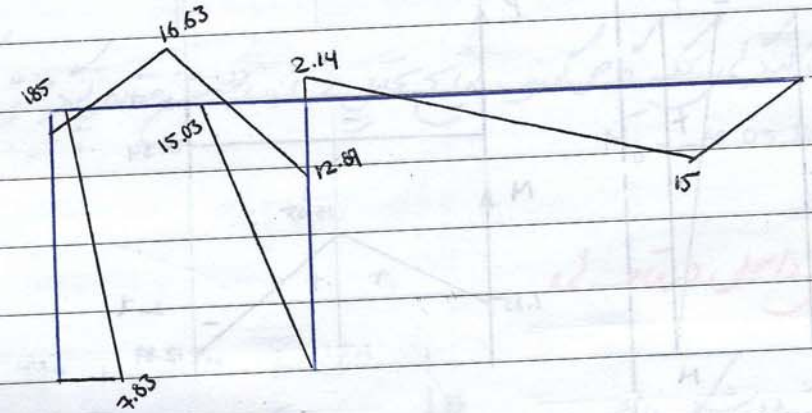


عبور از تیر AB و نگاشتن

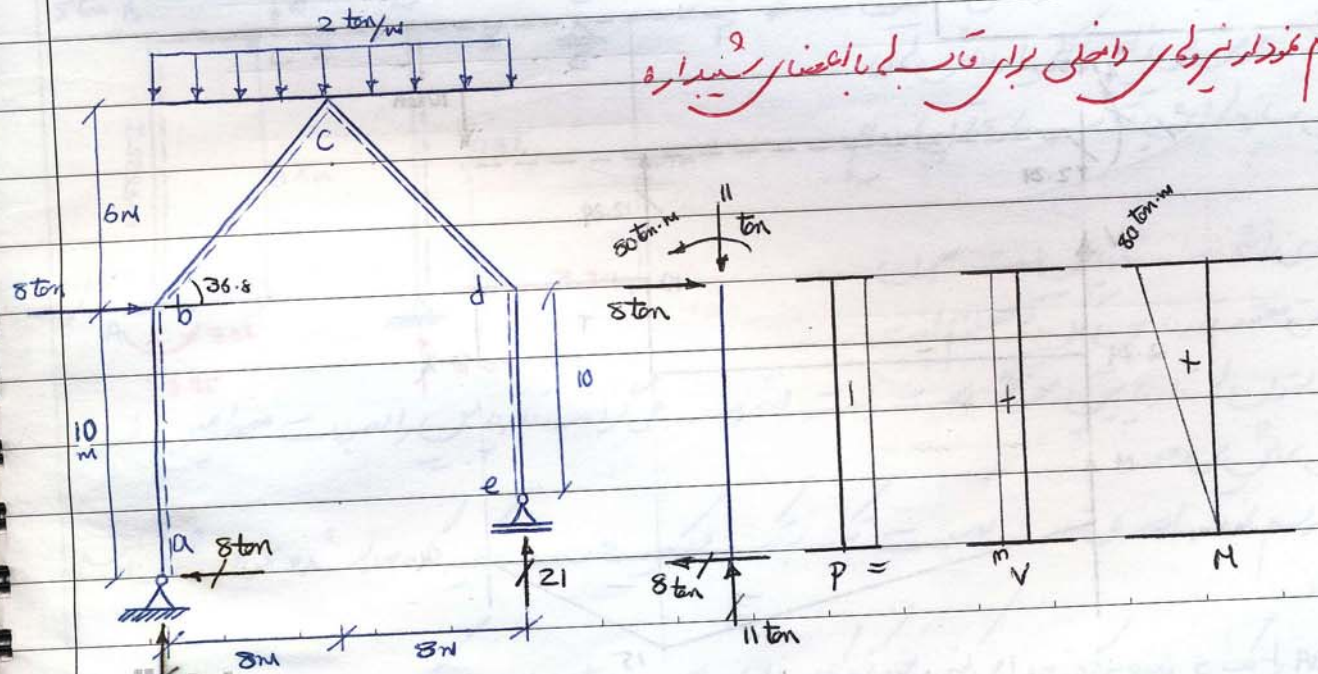
کنترل گره D

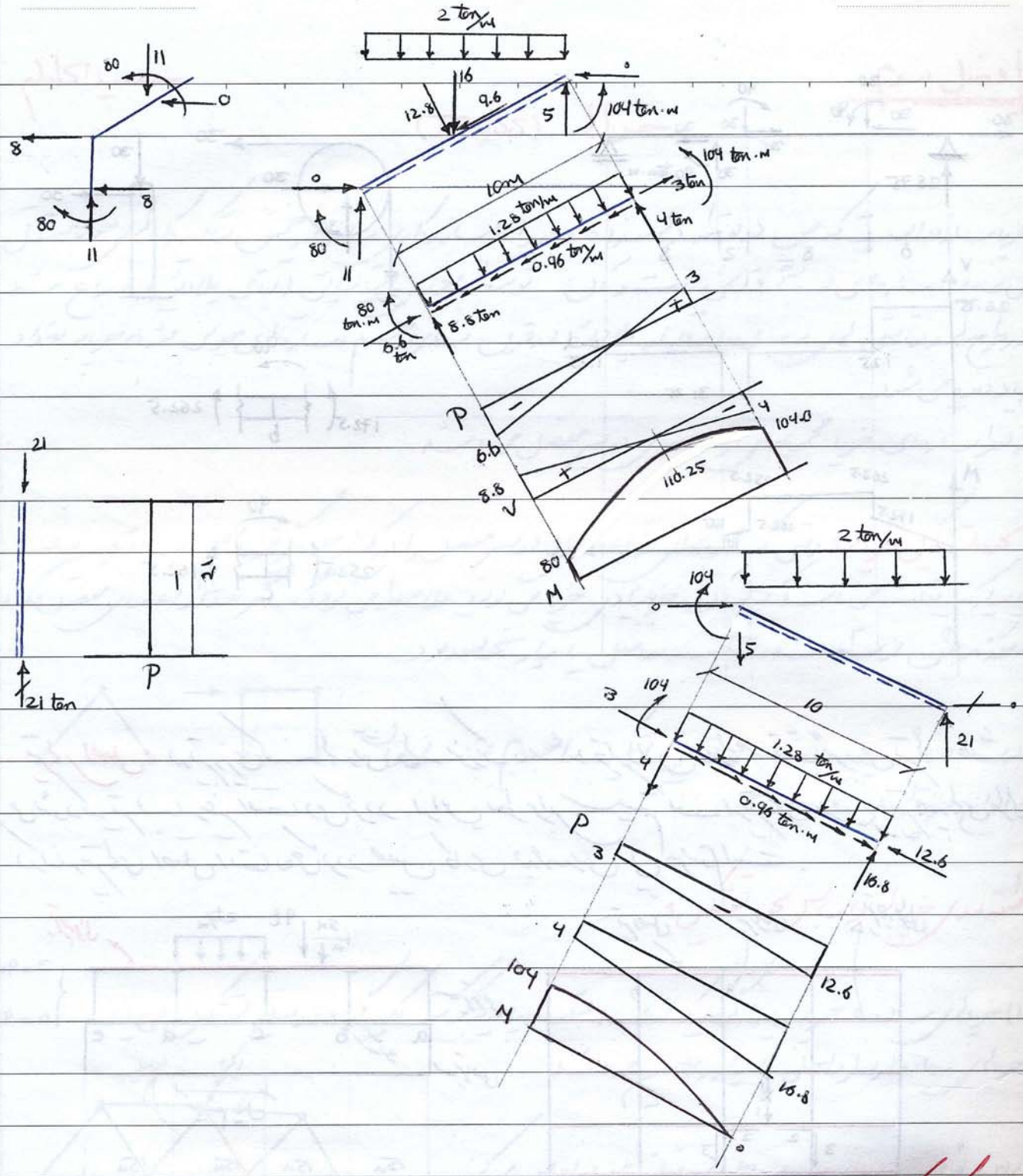




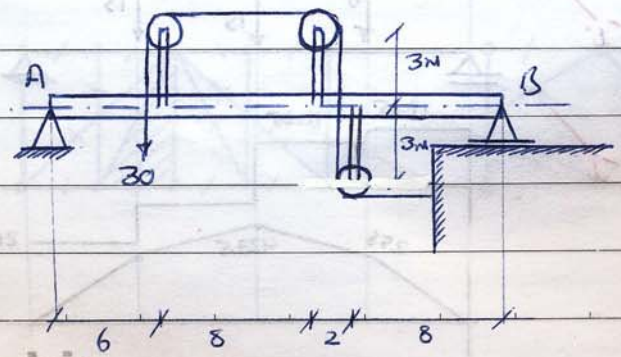


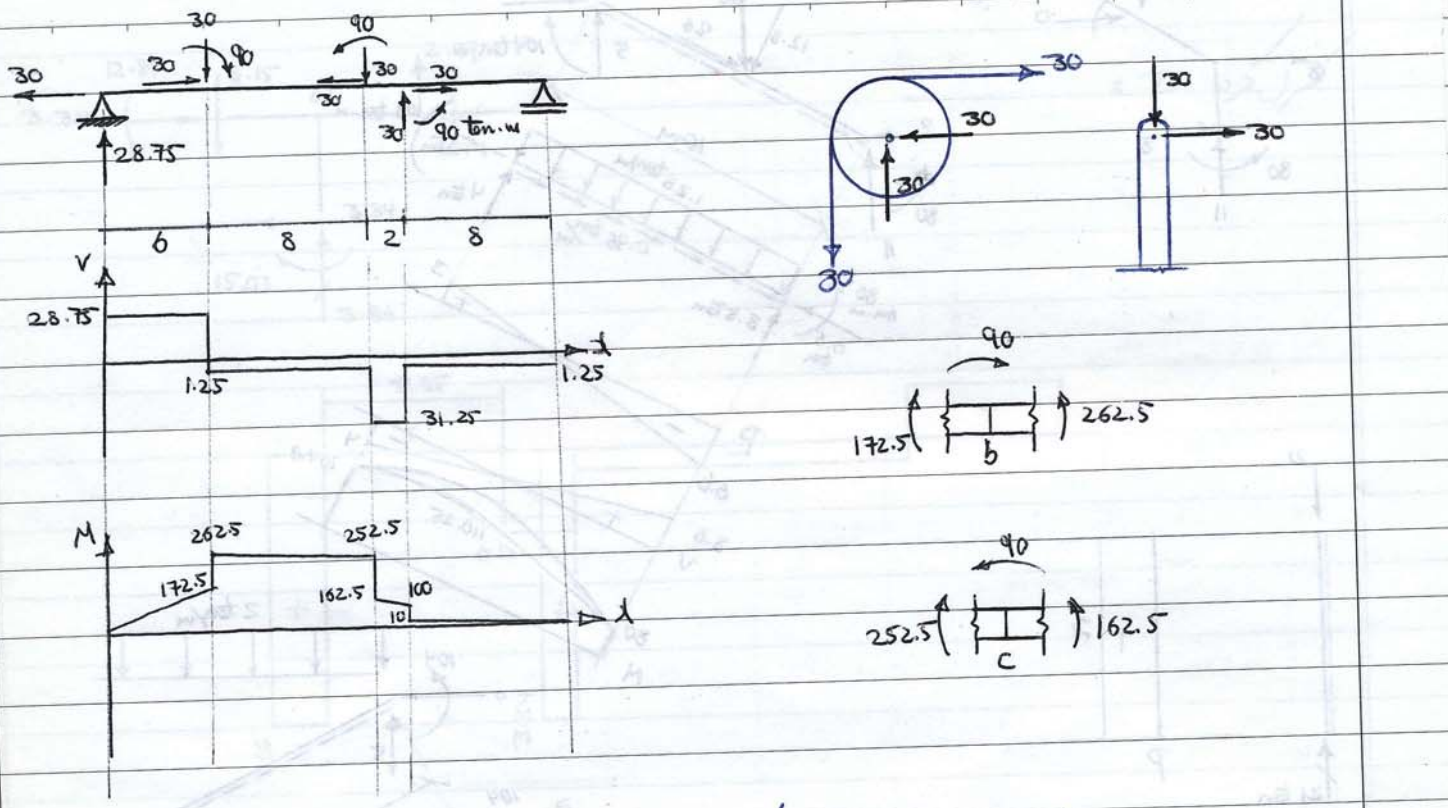
رسم نمودار نیروی داخلی برای قاب یا اعضای شیبدار



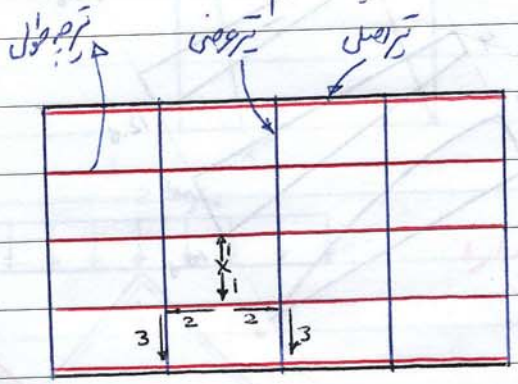


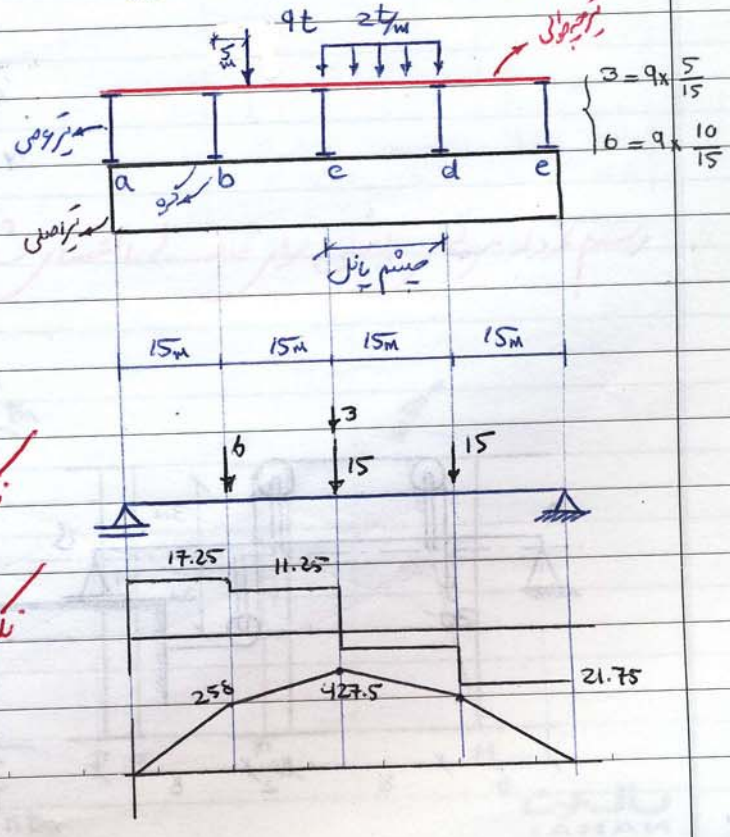
وجود لنگر تمرکز ۵





تیرکمر اصلی: در تیرریزی کف که وقتی دهانه بزرگ باشد قرار دادن تیرها مستقیماً بر روی تیرکمر باعث می‌شود که تیر بسیار غیر اقتصادی گردد. از این نظر برای سیستم کف از تیرهای عرضی و تیرهای طولی در کنار تیرکمرهای اصلی استفاده می‌گردد. چنین کاری نامعینی بالا می‌رود است.





نکته: تیر اصلی با فقط از طریق تیرهای اصلی می‌شود

نکته: برش در تیر همیشه ثابت است. لنگر حداکثر در محل تیرهای عرضی می‌دهد

فصل سوم

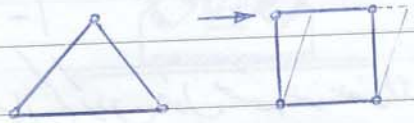
حمید کاظم

خرپاها (TRUSS)

خرپا سازه‌ای است که بین دو نقطه (یا بیشتر) بسته شده و بار را با سازوکاری به غیر از خمش به تکیه‌گاه‌های مختلف منتقل می‌نماید. سازه‌ای نسبتاً قدیمی است و آن توسط معماری ایتالیایی (آندرا پالادیو) ابداع شد و طراحی و ساخت پل‌های مانده از پالادیو در قرن شانزدهم، سازه‌های محبوبی مثل خرپا بتعداد زیاد دیده می‌شود.

از نظر سازه‌ای خرپا مجموعه‌ای از اعضای دو سر مفصل می‌باشد.

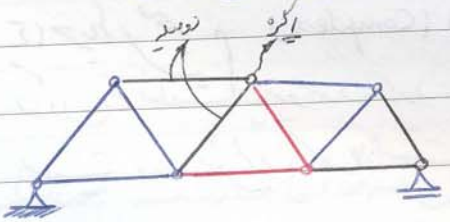
نحوه تشکیل خرپاها: وقتی که مجموعه‌ای از اعضای دو سر مفصل را در کنار هم قرار دهیم، ساده‌ترین حالت پایدار یک مثلث می‌باشد که به آن **خرپا بنیادی** خرپا می‌گوییم. ملاحظه می‌شود که اگر تعداد اعضای مفصل شده بیشتر از ۳ باشد، ترکیب حاصل پایدار نخواهد بود.



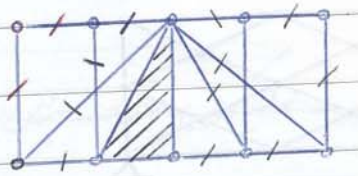
بارشده مثلث پایه یا ساده‌ترین ترکیب احسنام صلب می‌توان برانواع خرپاها دست یافت.

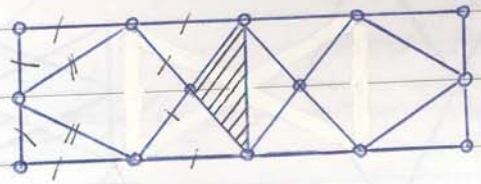
طبقه‌بندی خرپاها براساس نحوه تشکیل:

۱) **خرپاهای ساده:** خرپایی را گوییم که از یک مثلث پایه به کمک گره و دو میله تشکیل می‌یابد. خرپاهای ساده از نظر داخلی پایدار و معین می‌باشد.

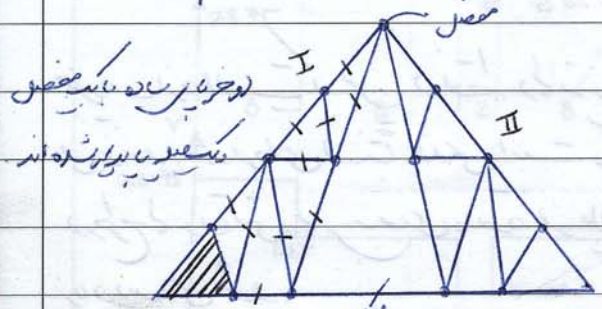


برای اثبات خرپایی ساده خرپایی مثلثی مبنا فرض می‌کنیم و روش دو میله یک گره را بررسی می‌کنیم.

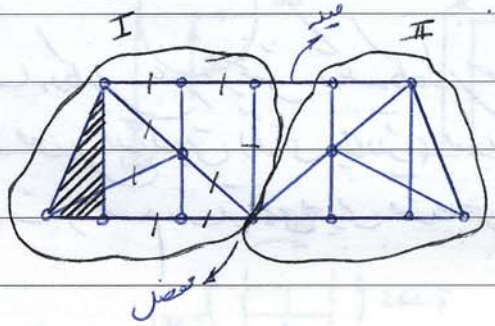




۲) خرپای مرکب: خرپایی مرکب از ترکیب دو یا چند خرپای ساده با یک قوانین ترکیب احجام صلب تشکیل می‌یابد.

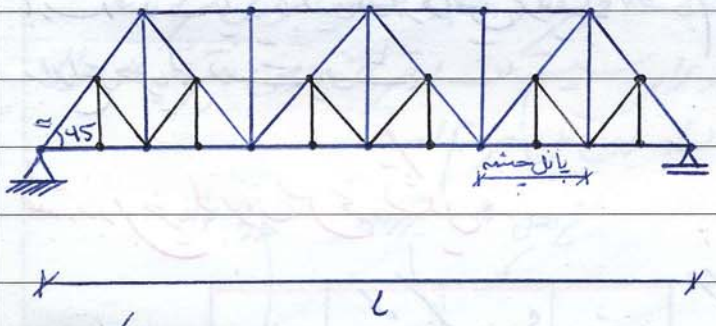


خرپای Fink



خرپایی مرکب نیز از لحاظ داخل معین و پایدار است.

۳) خرپای تقسیم شده: خرپایی ساده هستند که دهانه آن به علت بزرگی جهش زیاد می شود طول جهش تقسیم شده و کوچک تر شود. معمولاً در خرپای پل سازی یا دهانه های بلند مورد استفاده دارد.

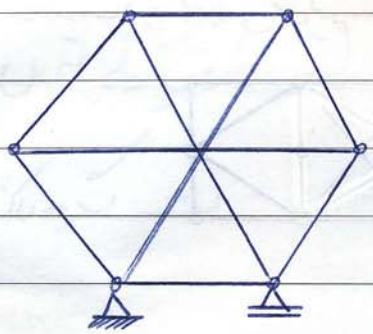


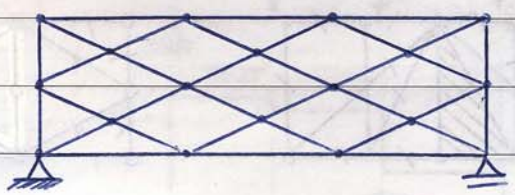
برای کم کردن طول جهش از عضوهای فرعی و ثانویه استفاده می کنند.

$\frac{1}{10}$ تا $\frac{1}{6}$ L

L

۴) خرپای معجم (Complex): مجموعه‌ای از اعضای دو سر مفصل می باشند که پایدار و جسم، لکن در آن نه قطعات یا درجه نامعینی وجود ندارد. پایداری آن به (تشخیص) و یک روش کلی هندسی امکان پذیر نیست و با روش کلی که در دست است نمی توان مورد بحث قرار گیرد بررسی می شود.

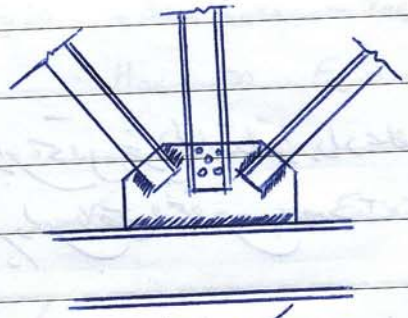




مفروضات اولیه تحلیل خرپاها: برای اینکه بتوان خرپایی را با اصول استاتیک (شرط تعادل) تحلیل نمود باید مفروضات زیر را در آن انجام دهیم.

خرپاهای واقعی دارای تمام این مشخصات نیستند، لکن اگر مفروضات ما بتواند به نتایج کاربردی منجر شود و چنین نتایجی حاصله اختلاف زیادی با تحلیل دقیق نداشته باشد می توان از این مفروضات استفاده نمود و تحلیل خرپا را ساده نمود.

۱) اعضای خرپا در انتها به گره ها جوش شده و اصطکاک در بولا صفر است. (خرپاهای واقعی نه تنها اعضا در انتها جوش نمی شوند، بلکه حتی به گره ها پرچ نیز می کردند. این اتصال شرط اصطکاک بولا را ندارد)



اتصالات واقعی نه تنها بولایی نیستند بلکه صلب می باشند و تحلیل واقعی نشان می دهد که در اعضای خرپا، علاوه بر نیروی محوری، لنگر خمشی نیز در انتها ظاهر می شود. به این لنگرها، لنگرهای ثانوی گویند. تجربیات عملی نشان می دهد وقتی که ارتفاع خرپا در حدود 0.1 تا 0.6 دهانه باشد و زوایای قطری که در حدود 45° باشد مقدار لنگرهای ثانوی کوچک بوده و نیروی محوری خرپای ایده آل را برای خرپای واقعی خواهد بود. پس با این شرط اطمینان نوعی برای طراحی نیز می دهیم.

۲) اعضای خرپا مستقیم می باشند (اگر نباشد نیروی محوری لنگر می سازد)

۳) نیروهای خارجی وارده به گره ها متمرکز اعمال می شوند. در عمل تأمین این شرط امکان پذیر است. تنها نقطه ای که نیروی خارجی بر عضو خرپا وارد می شود گره است. در عمل وزن اعضا را به صورت دو نیروی متمرکز در دو انتها اعمال می کنیم.

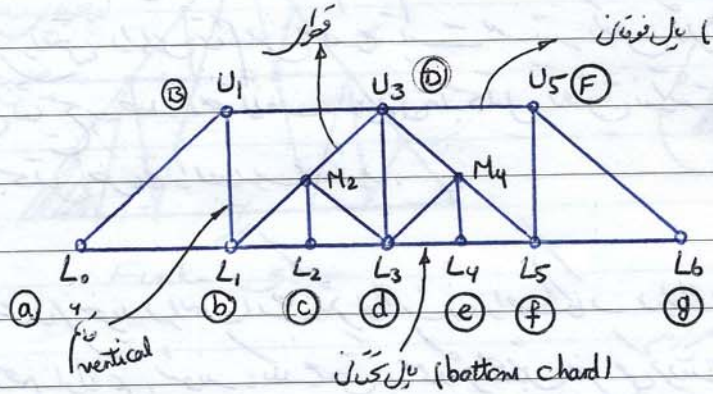
تغییر شکل های خرپا کوچک هستند و خرپای تغییر شکل یافته با حالت اولیه آن اختلاف چندانی ندارد.

نتیجه مفروضات فوق: اعضای خرپا 2 نیرویی می باشند و در آن ها فقط نیروهای محوری ایجاد می گردد. نیروی محوری می تواند کششی یا فشاری باشد. در این صورت با علامت مثبت فشاری و با علامت منفی کششی می باشد.

نهال NAHAL

با هیچ نشان می دهند

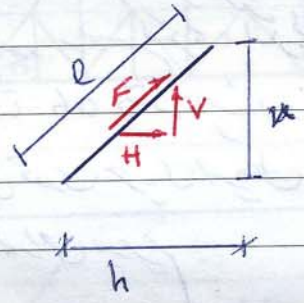
نامگذاری اعضای خرپاه



برای تحلیل خرپا ها ابتدا جهت اعضا را فرض می کنیم. نیروهای داخل کشش با علامت + و نیروهای داخل فشاری با علامت - در نظر گرفته می شوند



ارتباط بین مولفه ها و هندسه عضو



$$\frac{F}{l} = \frac{H}{h} = \frac{V}{v}$$

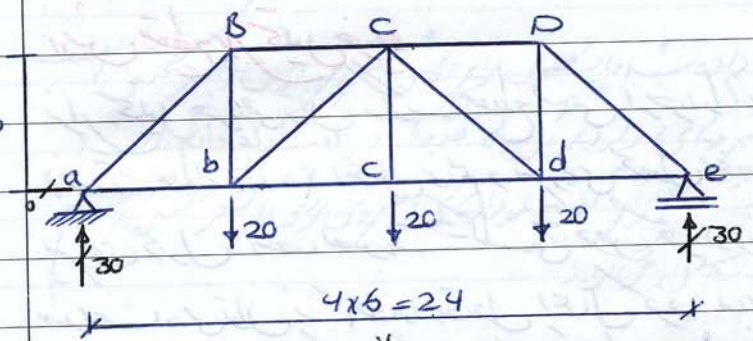
روش گره برای تحلیل خرپاه

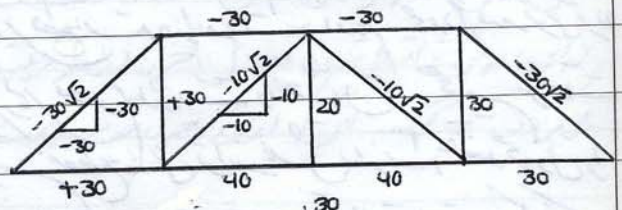
در روش گره برای تحلیل خرپا، ابتدا واکنش های تکیه گاهی محاسبه می شود. سپس گره های خرپا بصورت مجزا آزاد شده و نمودار آزاد آن ها رسم می گردد. در این نمودار آزاد نیروهای معلوم در جهت واقعی و نیروهای مجهول اعضا بصورت کششی نمایش داده می شوند. سپس معادلات تعادل را برای این گره اعمال می کنیم. با توجه به اینکه نیروها متقاطع هستند دو معادله تعادل نیرو خواهیم داشت.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

بنابراین باید گره ای را آزاد نمایم که دو مجهول بیشتر نداشته باشد. همچنین توصیه می شود تا حد امکان از گره هایی که در آن ها نیروی صفر وجود دارد جهت رسم نمودار آزاد استفاده شود. این نیروها با استفاده از معادلات تعادل گره های مجاور قابل تعیین هستند.

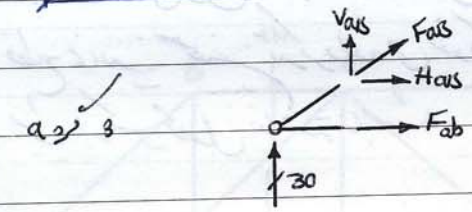
مثال: خرپای نشان داده شده در شکل را تحلیل نمایید.

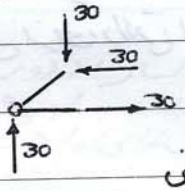




روش استاتیک ذهنی

گره a:





$\Sigma F_y = 0 \quad +30 + V_{as} = 0 \rightarrow V_{as} = -30$ ton

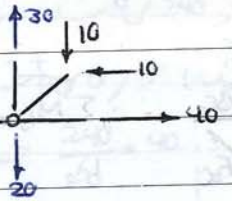
$H_{as} = -30 \quad F_{as} = -30\sqrt{2}$ فشار

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{ab} + H_{as} = 0$

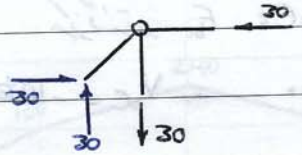
$\rightarrow F_{ab} - 30 = 0 \rightarrow F_{ab} = 30$ کششی

* روش استاتیک ذهنی وقتی قابل استفاده است که در گره ۲ مجهول ۲ معادله ۲ مجهولی نداشته باشیم.

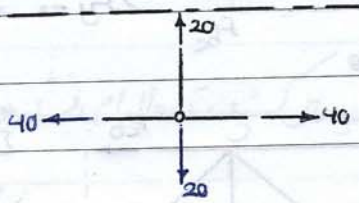
گره b:



گره B:



گره C (کوچک):



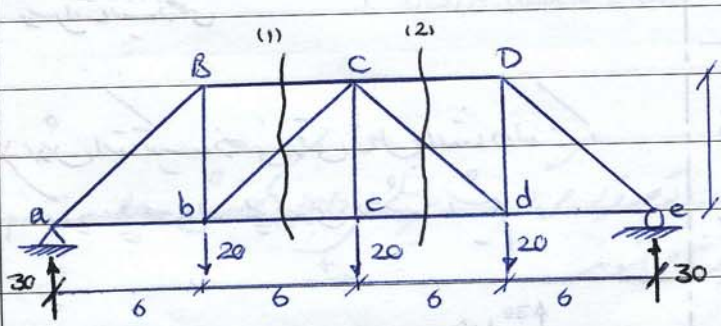
* بقیه اعضا را توسط تقارن می توان بدست آورد.

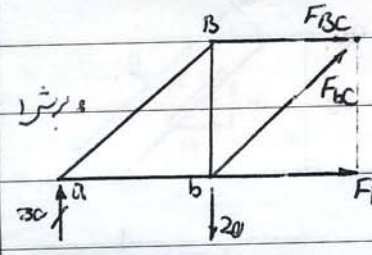
مرکز گشتاور نیرو نقطه‌ای گفته می‌شود که وقتی نسبت به آن ممان می‌گیریم تنها آن نیروی مجهول باقی بماند.

روش مقطع برای تحلیل خرپاها

برای تحلیل خرپاها می‌توان به کمک مقطع قسمتی از خرپا را از بقیه جدا کرد، معادلات تعادل را برای آن قسمت جدا شده) اعمال نمود و نیروهای مجهول اعضای قطع شده را بدست آورد. معمولاً فقط نیروی اعضای مجهول اعضا بصورت کششی فرض می‌گردد و نیروهای معلوم با جهت واقعی‌شان. همچنین برای قسمت جدا شده می‌توان ۳ معادله تعادل اعمال کرد. بنابراین مقطع ما نمی‌تواند بیش از ۳ عضو مجهول را قطع نماید. همچنین توجه داده می‌شود که در هنگام نوشتن معادلات تعادل از معادلاتی استفاده کنیم که بیش از یک مجهول نداشته باشد.

مثال: خرپای نشان داده شده در مثال قبل را به روش مقطع تحلیل نمایید.



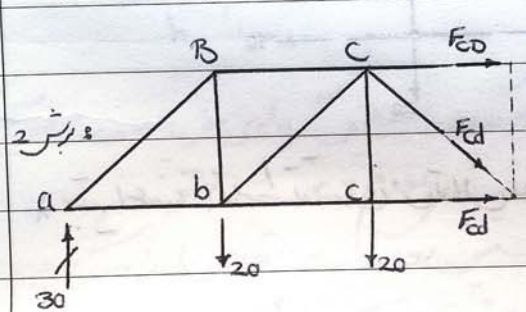


برش ۱

$\overset{+}{\leftarrow}\ \Sigma M_b = 0 \quad -F_{BC}\times 6 - 30\times 60 = 0 \rightarrow F_{BC} = -30\ ton$

b و F_{BC} حول گشتاور C و F_{bc} حول گشتاور

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +30 - 20 + V_{bc} = 0 \rightarrow V_{bc} = -10\ ton$



برش ۲

$\overset{+}{\leftarrow}\ \Sigma M_{\text{حول } C} = 0 \quad F_{cd}\times 6 + 20\times 6 - 30\times 12 = 0 \rightarrow F_{cd} = 40\ ton$

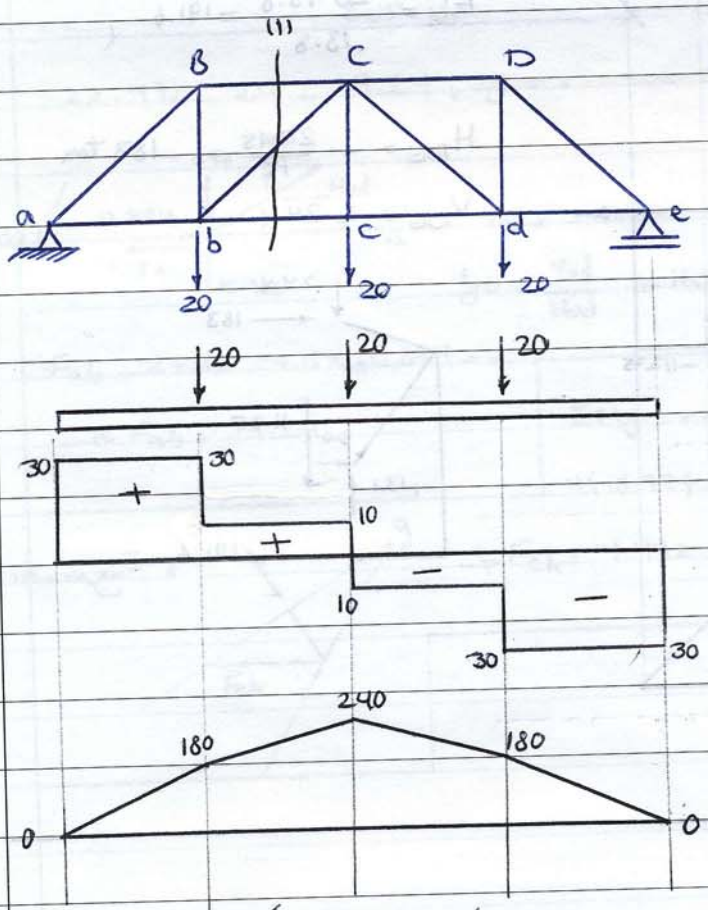
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +30 - 20 - 20 + V_{cd} = 0 \rightarrow V_{cd} = 10\ ton$

نهال NAHAL

روش نیروی برشی و لنگر خمشی

توضیحی که در قسمت قبل برای روش مقطع داده شد پایه و اصول برای روش نیروی برشی و لنگر خمشی است. این روش در خرپاهایی قابل استفاده است که نیروهای وارد بر آن فقط در امتداد قائم باشد. در این روش ابتدا تیری معادل خرپا در نظر گرفته شده و برای آن نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی رسم می‌گردد. به کمک این نمودارها خرپا به سرعت تحلیل می‌گردد.

مثال: خرپای نشان داده شده در مثال قبل را به روش نیروی برشی و لنگر خمشی تحلیل کنید.



$$F_{bc} = \frac{240}{6} = 40$$

$$F_{ISC} = \frac{180}{6} = -30$$

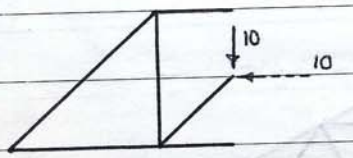
نقطه C (بزرگ) برگشتاور F_{bc} می‌باشد و چون نمودار لنگر خمشی دارای لنگر 240 می‌باشد و نیروی F_{bc} نسبت به نقطه C (بزرگ) برابر 6 می‌باشد،

پس:

$$F_{bc} = \frac{240}{6} = 40$$

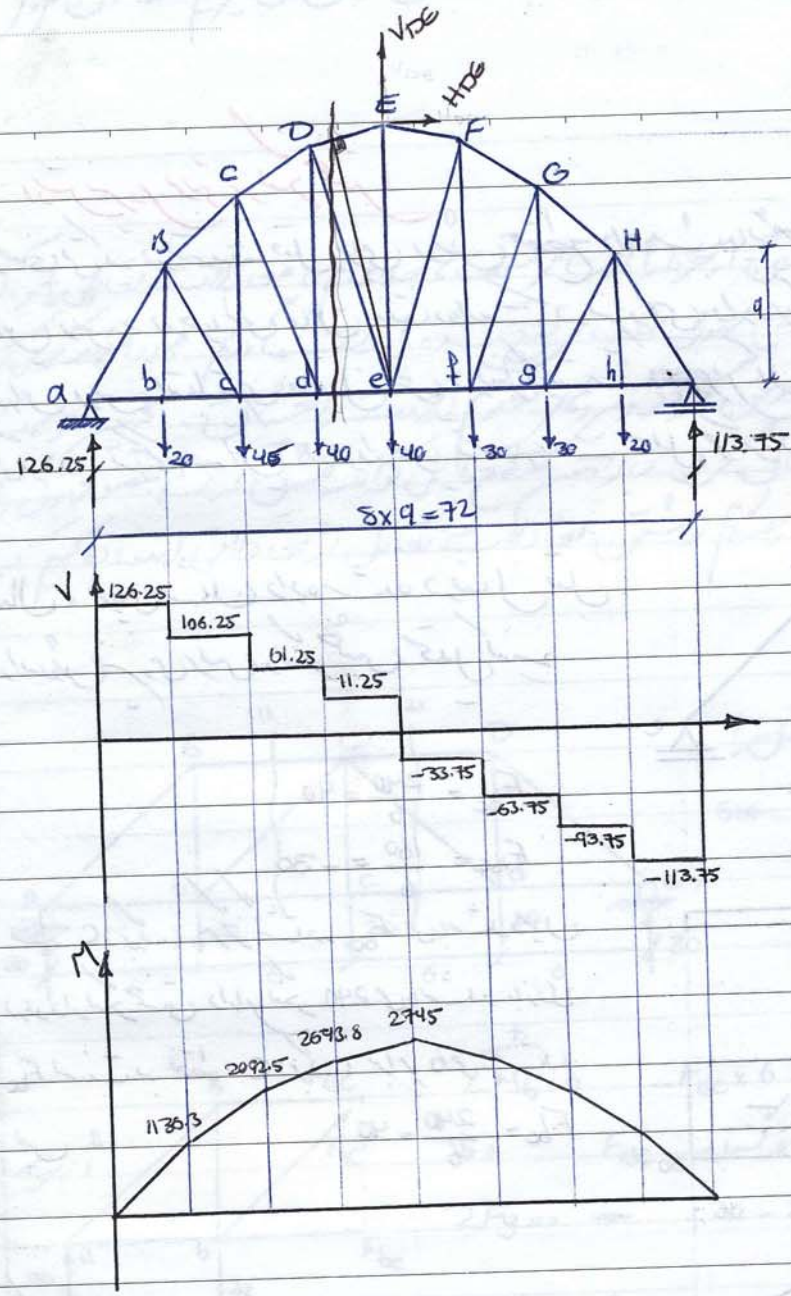
* لنگر مثبت را پایین رسم کرده و تار بالا را فشرده.

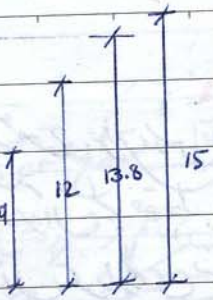
با استفاده از نمودار نیروی برشی می‌توان مولفه قائم کلیه اعضای قطری را بدست آورد. مقطع (1) را که در آن عضو قطری Cb قطع شده را در نظر می‌گیریم. طبق قرارداد نیروی برشی بدین در مقطع (1) نیروی برشی مثبت است، پس جهت نیروی برشی مقاوم در مقطع قسمت سمت چپ به سمت پایین می‌باشد. بنابراین مولفه قائم نیروی عضو قطری Cb نیز به سمت پایین و مساوی 10 تن است.



نهال
NAHAL

مثال: خریا مقابل را تحلیل کنید

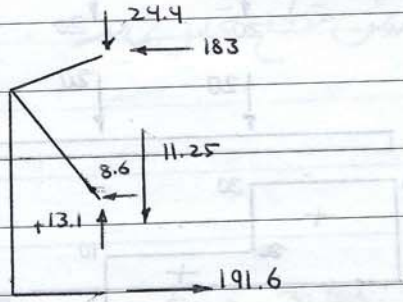


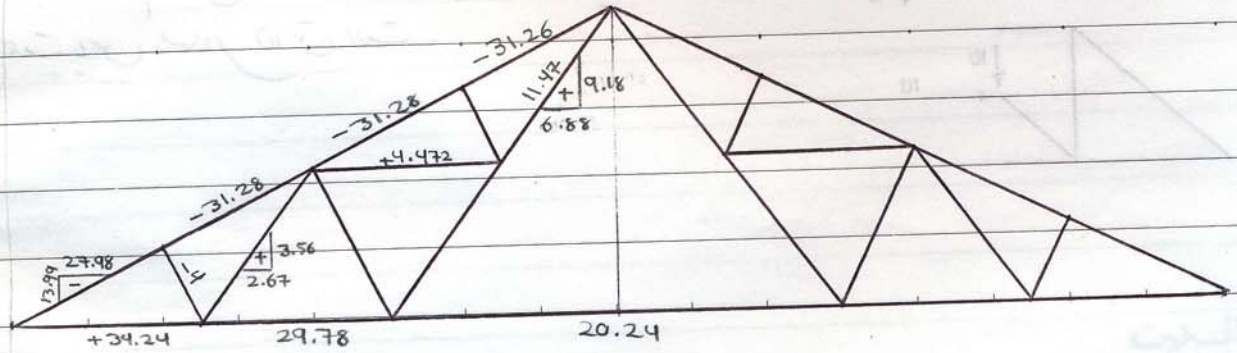


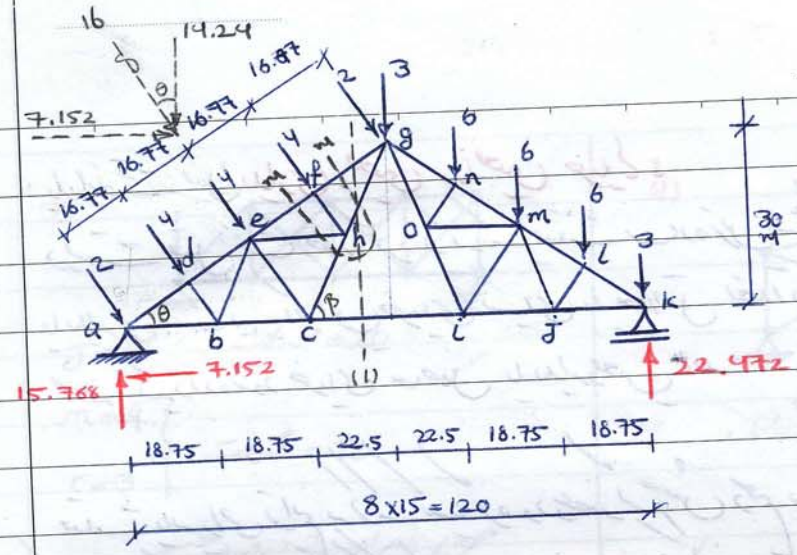
$$F_{de} = \frac{2643.8}{13.8} = 191.6$$

$$H_{DE} = -\frac{2745}{15} = -183 \text{ ton}$$

$$V_{DE} = -24.4$$







$tg\theta = \frac{1}{2}$ $\sin\theta = 0.447$ $C_1\theta = 0.89$

مثال

$\Sigma M_a = 0$

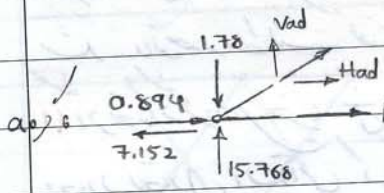
$\rightarrow 4(16.77) + 4(2\times16.77) + 4(3\times16.77)$

$+ 2(4\times16.77) + 3(4\times15) + 6(5\times15)$

$+ 6(6\times15) + 6(7\times15) + 3(8\times15)$

$= 8\times15\ l_{cy}$ $\quad l_{cy} = 22.472$

$22.472 - 24 - 14.24 + a_y = 0 \rightarrow a_y = 15.768$ $\quad a_x = 7.152$

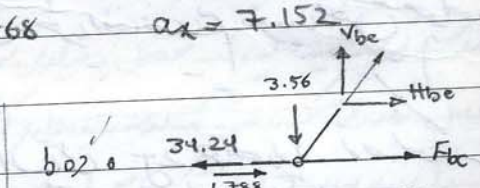


$V_{ad} = -13.99$

$tg\theta = \frac{V_{ad}}{H_{ad}} \rightarrow H_{ad} = -27.98$

$F_{ab} - 27.98 - 7.152 + 0.894 = 0$

$\rightarrow F_{ab} = 34.24$



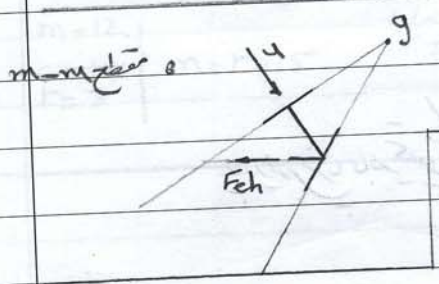
$V_{be} = 3.56$ $\quad \frac{3.56}{15} = \frac{H_{be}}{11.25}$

$H_{be} = 2.67$ $\quad F_{bc} = 29.78$

$\Sigma M_g = 0$

$4(16.77) - F_{eh}(15) = 0$

$\rightarrow F_{eh} = 4.472$



$\Sigma M_g = 0$

$4(16.77) + 4(2\times16.77) + 4(3\times16.77)$

$+ 2(4\times16.77) - 7.152(30)$

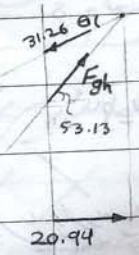
$- 15.768(60) + F_{ei}(30) = 0$

$\rightarrow F_{ei} = 20.24$

$\Sigma M_c = 0$

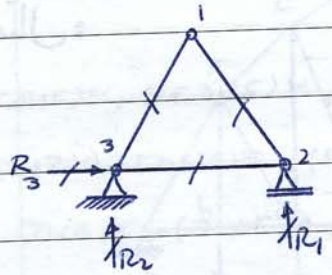
$2(2\times16.77) - 15.768(2\times18.75)$

$- F_{fg}(16.77) = 0 \rightarrow F_{fg} = -31.26$



$F_{gh}(C_{53.13}) + 20.94 = 31.26(0.89)$

پایداری و ناپایداری، معین و نامعین خرپاها



درگذشته قبل مشاهده کردید یک مثلث ساده‌ترین شکل خرپای پایدار می‌باشد. اگر این خرپای مبنا با حداقل تعداد مولفه‌ای که صفحه تکیه داده شود خرپای حاصل پایدار و معین است.

حالت پایه‌ای را می‌توانیم به یک گره و دو عضو گسترش دهیم بدون اینکه درجه پایداری و معین بودن آن تغییر ایجاد کند. حال اگر بدون اینکه گره‌ای به خرپا اضافه کنیم، تعدادی عضو به خرپا اضافه نماییم خرپا نامعین خواهد شد. با توجه به مطالب گفته شده می‌توانیم اینطور نتیجه‌گیری نماییم:

۱) اگر تعداد گره‌های خرپا J باشد تعداد معادلات تعادل استاتیکی $2J$ خواهد بود. توجه شود که ۳ معادله تعادل استاتیکی که برکل سازه نوشته می‌شود مستقل از $2J$ معادله است.

۲) اگر m تعداد اعضای خرپا و r تعداد مولفه‌های تکیه‌گاهی باشد، تعداد مجهولات مساوی $m+r$ خواهد شد. می‌توانیم بنویسیم:

تعداد مجهولات $= m+r$ ، تعداد معادلات $= 2J$

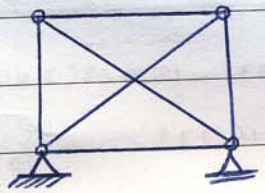
1) $2J > m+r$ خرپا ناپایدار استاتیکی

2) $2J = m+r$ خرپای معین

3) $2J < m+r$ خرپای نامعین

} پایداری خرپا باید تحقیق گردد (شرط لازم است ولی کافی نیست)

1)

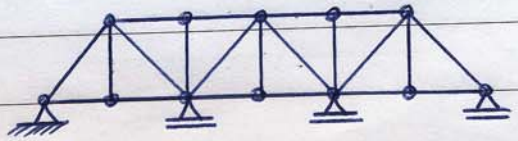


$J=4 \rightarrow$ معادلات $= 8$

$m=6$, $r=3$ $\rightarrow$ مجهولات $=9$

خرپای پایدار و یک درجه نامعین

2)



$J=12$ $\quad 2J=24$

$m=21$, $r=5$ $\rightarrow m+r=26$

خرپای پایدار و 2 درجه نامعین خارجی

نهال
NAHAL

3)



$J=10$ $\quad$ تعداد درجات $=20$

$m=19$ } مجهولات $=22$
$r=3$ }

خرپای پایدار و 2 درجه نامعین

4)



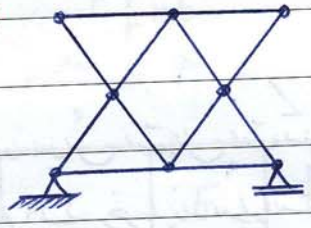
$J=13$ $\quad 2J=26$

$m=22$ }
$r=4$ } $m+r=26$

خرپای پایدار و معین

دو عضو توانایی حمل نیرو دارند ولی اینجا فقط یک عضو بکار رفته که باعث یک درجه ناپایداری گشته است. برای جبران این ناپایداری به جای 3 مولفه تکیه گاهی از چهار مولفه استفاده شده است.

5)



$J=8$ $\quad 2J=16$

$m=12$ }
$r=3$ } $m+r=15$

خرپای ناپایدار است.

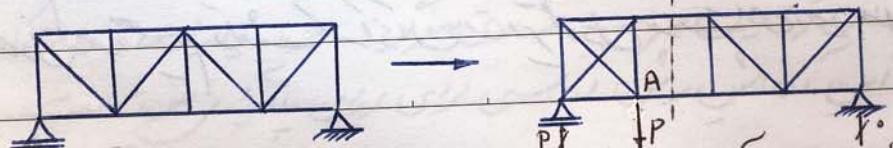
دلایل ناپایداری خرپا:

۱) تعداد معادلات $2J$ بزرگتر از $m+r$.

۲) عدم وجود تکیه گاهی مناسب. اگر هندسه ای از خرپا تکیه گاهی مناسب مشخص نشود می تواند فقط از لحاظ هندسی برای ناپایداری خرپا باشد.

۳) تکیه گاه های ناپایدار نیز می توانند دلیلی بر ناپایداری باشند.

۴) استدلال کلی این است که اگر توانیم ثابت نماییم خرپایی فقط برای یک حالت بارگذاری ناپایدار است می توانیم نتیجه گیری نماییم که کل خرپا ناپایدار است.



J ، m ، r تغییری نکرد.

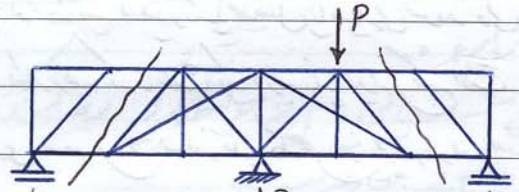
بار P را به A وارد می کنیم. تکیه گاه ها را حذف می کنیم. (با مقطع زدن در عضو رابط A) سپس $\sum M=0$ برقرار نمی باشد.

NAHAL نهال

۵) تحلیل خرپا. اگر نتوانیم با یکی از روش‌های گفته شده ناپایداری خرپا را تشخیص گیری نمائیم، برای تشخیص ناپایداری اقدام به تحلیل خرپا می‌نمائیم. اگر در حین تحلیل به وجود تناقض برخوردیم، متین این است که خرپا ناپایدار می‌باشد. (نیروی عضو را از دو راه دو عدد متفاوت بدست می‌آوریم).
در حالت نیمه‌پخته‌تر این روش صفر به روش باصفر می‌گردد و از آن برای تشخیص ناپایداری خرپاهای مهم استفاده می‌شود. در فرصت مناسب مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال‌هایی از استدلال‌های استاتیکی:

1)

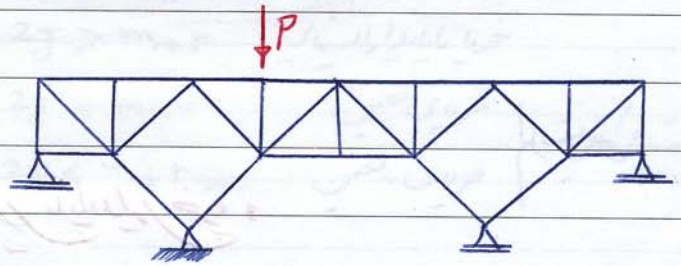


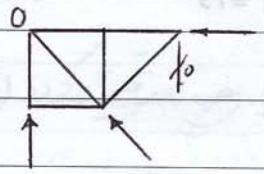
$J=14$ $2J=28$

اما با روش استدلال استاتیکی با اعمال بار P مشخص می‌شود که $\Sigma M \neq 0$ و خرپا ناپایدار است.

$m=25$
$r=4$ $\Big\}$ $m+r=29$

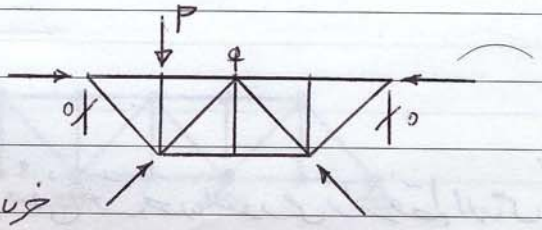
2)





$J=18$ $2J=36$

$m=31$
$r=5$ $\rightarrow$ $\Big\}$ $m+r=36$

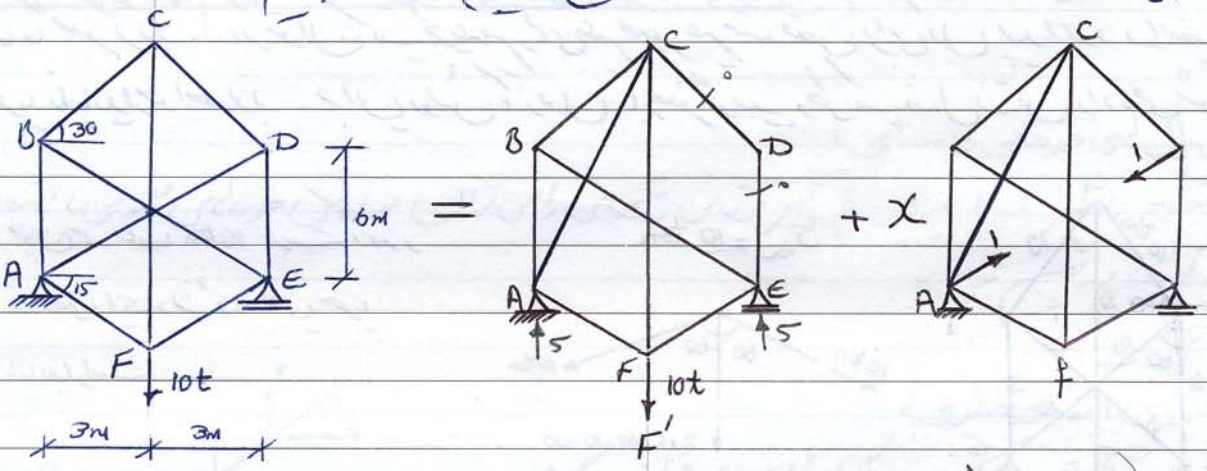


خرپا ناپایدار است.

$\Sigma M_q \neq 0$

تحلیل خرپایی صفحه: خرپای صفحه را این توان با روش گره یا مقطع حل نمود. زیرا این توان گره‌ای را با دو مجهول نامقطعی یا سه مجهول دیگر پیدا کرد. یک روش آنست که تمام گره‌های خرپای صفحه را با یکدیگر به صورت جسم آزاد در نظر بگیریم. در این صورت $2J$ معادله تعادل برای تعیین $m+r$ مجهول خواهیم داشت که از آن مقادیر مجهول بدست می‌آید. حل این معادلات جبری ممکن

است دقت کم باشد. روش دوم استفاده از اصل روی هم گذاری است که توسط شخصی به نام ممکر پیشنهاد شده است. طی یک مثال به توضیح این روش می پردازیم.



	F'	f	$F = F' + xf$
AB	+6.22	-1.382	-26.1
BC	+4.55	-1.01	-19.1
CD	0	-0.816	-19.1
DE	0	-1.115	-26.1
EF	+4.08	-0.91	-17.2
FA	+4.08	-0.91	-17.2
BE	-5.58	+1.24	+23.42
CF	+7.89	+0.471	+18.9
AC	-10.89	+0.465	0

$$F_{AC} = F'_{AC} + x f_{AC} = 0$$

$$-10.89 + 0.465x = 0$$

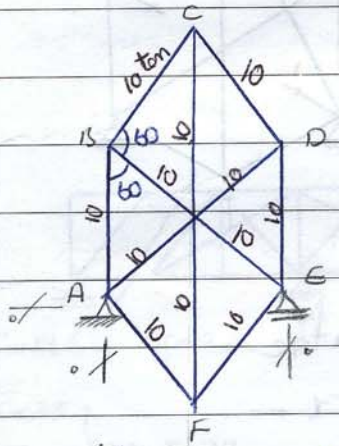
$$x = +23.42$$

$$F_{AD} = 0 + 1 \times x = 23.42\ t$$

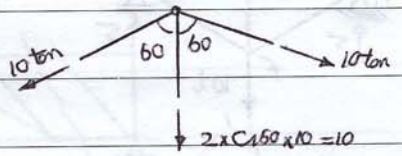
پایداری خرپای مُعمم، روش بار صفر

در صورتیکه برای تشکیل یک خرپا (هر نوع خرپا) $2j$ عدد قید تشکیل شود از حل این دستگاه نیروهای مجهول اعضا قابل تعیین خواهد بود. این دستگاه وقتی دارای جواب است که دترمینال ضرایب مخالف صفر باشد، بنابراین اگر دترمینال ضرایب مساوی صفر شود، خرپا ناپایدار بوده و دستگاه دارای جواب نمی باشد. این آزمایش روش مناسبی برای بررسی پایداری خرپا است.

راه دوم به طرق دیگر که قابلیت استفاده عمل داشته باشد بیان نمود. بدین معنا که آیا خرپایی تحت تاثیر هیچگونه بار خارجی نباشد تنها حالت تعادل برای آن اینست که نیروهای داخلی آن تماماً صفر گردد. اگر بتوان یک مجموعه نیروهای غیر صفر غیر متناقض برای آن پیدا نمود در این صورت خرپا ناپایدار خواهد بود. بر این روش آزمون بارصفر نیز وقتی مثال نشان داده می شود.

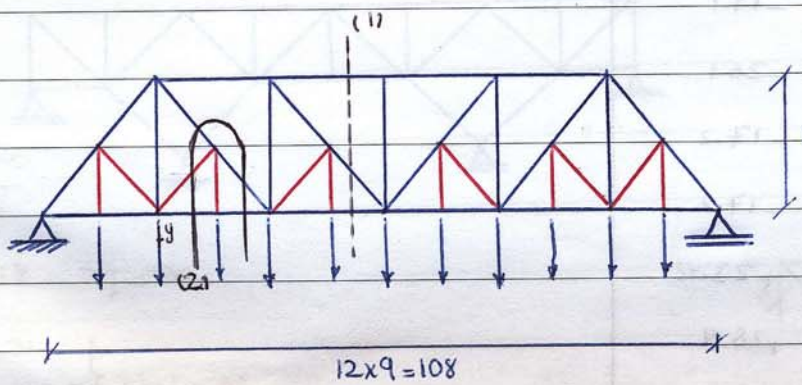


$S_{BC} = 10\ ton$



چون که عضو 10ton بدست آمد و تناقض ایجاد نشده یعنی خرپا ناپایدار است.

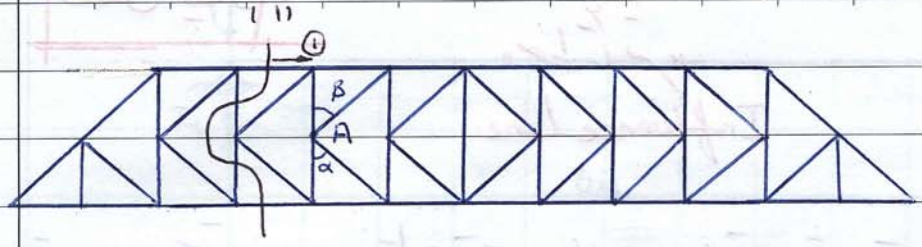
تحلیل خرپای تقسیم شده: تحلیل خرپای تقسیم شده مثل یک خرپای معمولی است. بدین تفاوت که سایر نیروهای اعضای تقسیم شده را بخوی تعیین نمود. این کار با یک مقطع امکان پذیر است.



برای شکل آی زیر با مقطع (1) می توان از طریق لنگر گشتاور نیروی برشی نیروی اعضای آن را بدست آورد.

$P \times 9 + y \times 18 = 0 \longrightarrow y = -P/2$

تحلیل خرپای K



تحلیل یال‌های فوقانی و تحتانی

با عبور مقطعی نظیر ۱-۱ نیروی یال‌های فوقانی و تحتانی را می‌توان به روش خرپاهای معمولی با استفاده از نقطه گسسته و رتقی نمود.

تعیین نیروی اعضای قطری

$\alpha = \beta$

نمودار آزاد گره A را می‌کشیم. اگر زاویه اعضای قطری با هم مساوی باشند برش متشابه به طور مساوی بین مولفه‌های قائم دو قطری تقسیم خواهد شد. با توجه به شیب مخالف دو قطری اگر در یک قسمت فشاری باشد، در دیگری کششی است.

فصل چهارم:

حمید کاظم

«خط تأثیر»
Influence Line

تا به حال کلیل سازه فقط تحت بارهای با موقعیت ثابت مورد توجه قرار گرفت. بارهایی وارد بر یک سازه می توانند متحرک باشند. مثال خوبی از این موضوع پل هایی می باشند که بارهای زنده وارد بر آن ها کامیون هایی هستند که با سرعت کم روی آن عبور می نمایند. هنگام عبور وضع را می توان به طور آرام تر در یک حالت ایستا مشاهده نمود. حال به جای این بارهای زنده که یک مکان از محلی به محل دیگر تغییر می دهد این عامل متحرک است.

مقدار یک تابع مشخص از یک سازه (واکنش تکیه گاهی، نیروی داخلی و یا تغییر شکل) یک تابع از سازه می باشد که تشکل به عوامل زیر دارد.

۱) مقدار بار وارده

۲) موقعیت بار وارده

۳) محل مورد نظر برای مطالعه تابع

با تهیه جمع بندی که مهندس آلمانی به نام وینکلر (Winkler) ایده ای ابداع نمود که این بررسی به جای ۳ متغیر با یک متغیر انجام شود.

۱) هر بار فقط یک تابع مشخص بررسی شود.

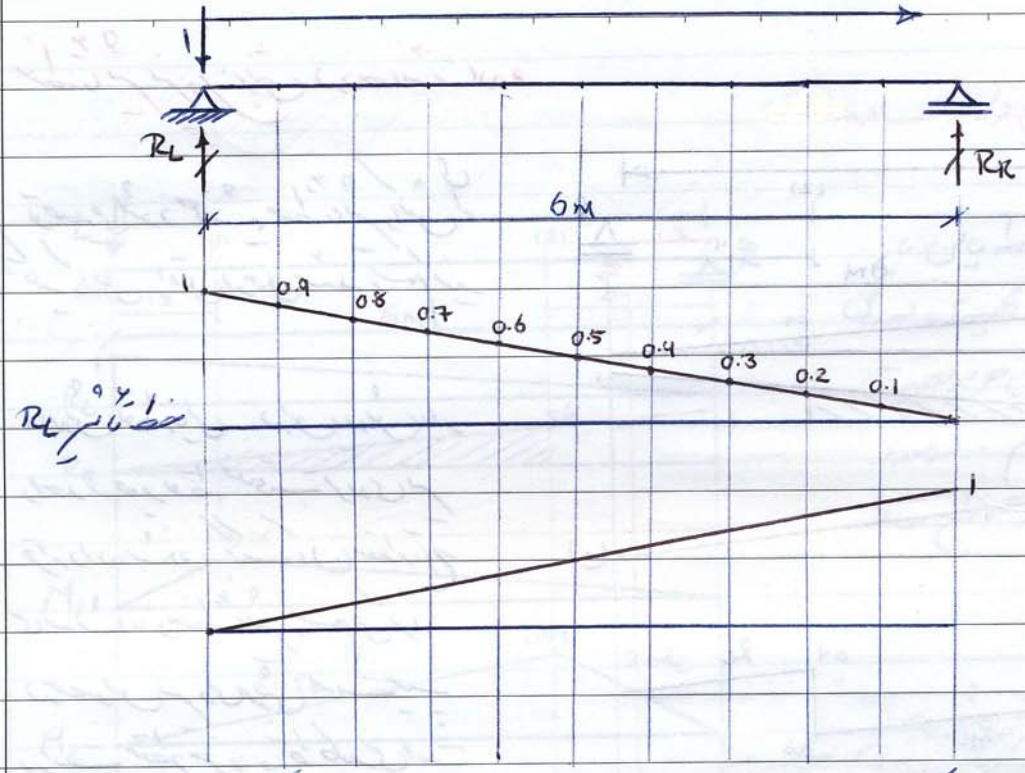
۲) مقدار بار را واحد در نظر گرفته می شود.

۳) موقعیت بار واحد می تواند متغیر باشد.

نمودار که تغییرات تابع را بر حسب موقعیت بار واحد نشان دهد خط تأثیر نامیده می شود.

رسم خط تأثیر واکنش های تکیه گاهی تیر ساده

ساده ترین روش رسم خط تأثیر نقطه یابی است. یعنی بار واحد را بر روی موقعیت های مختلف از روی سازه قرار می دهیم و در هر موقعیت مقدار تابع را حساب می کنیم و مقادیر بدست آمده را به صورت عرض خط تأثیر از بار واحد نمایش می دهیم. با کم کردن تعداد نقطه یابی ها می توان به دقت قابل قبول رسید به طوری که تعداد نقطه یابی ها کم گردد.



تعداد تقسیمات خط تاثیر توابع دیگر بسته به نحوه تغییرات خط است. برای مثال تغییرات خطی در طول دهانه نیاز به تعداد نقاط کمتری برای رسم خط تاثیر دارد. اما برای تغییرات سهمی شکل یا پیچیده تعداد نقاط بیشتری برای رسم خط تاثیر لازم است. برای مثال در تیر یک دهانه ساده با بار گسترده یکنواخت، خط تاثیر لنگر وسط دهانه سهمی شکل است و برای رسم آن حداقل ۵ نقطه لازم است. اما خط تاثیر برش وسط دهانه خطی است و برای رسم آن ۳ نقطه کافی است.

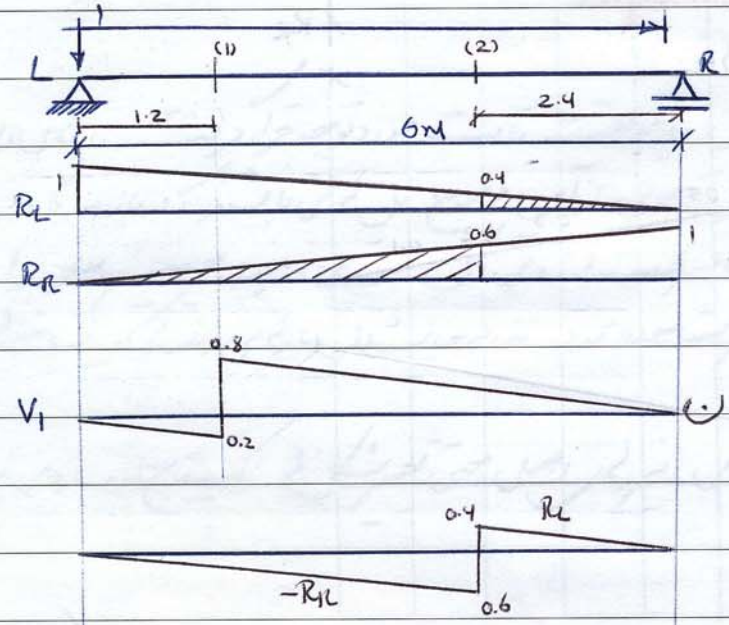
برای رسم خط تاثیر یک تابع ابتدا باید تکیه‌گاه‌ها را رسم کرد. سپس نقاط را نقاط کلیدی می‌نامیم. نقاط کلیدی نقاطی هستند که تشخیص می‌دهیم در آن‌ها تغییر شکل و یا تغییر ناگهانی در خط تاثیر وجود دارد. نقاط ابتدا و انتهای تکیه‌گاه‌ها، محل واکنش‌های تکیه‌گاهی، لولاهای داخل تقاطع هستند که می‌توان برای تیرهای پیوسته نیز تعمیم داد و باید به عنوان نقاط کلیدی مورد بررسی قرار گیرند.

تعداد نقاط رسم خط تاثیر قابل توصیه است که نقاط دیگری به عنوان کنترل توصیه شود. به عنوان مثال برای رسم خط تاثیر واکنش تکیه‌گاهی سمت راست. یک بار بار واحد را در نقطه مبدا قرار دهیم. واکنش محاسبه می‌شود. یک بار بردی واکنش راست می‌گذاریم صفر کرده واکنش یک می‌شود. با وصل کردن این دو نقطه نمودار کامل می‌شود.

برای کنترل از نقطه دیگری $\sum F_y$ استفاده می‌کنیم.

خط تاثیر نیروی برشی تیرهای ساده

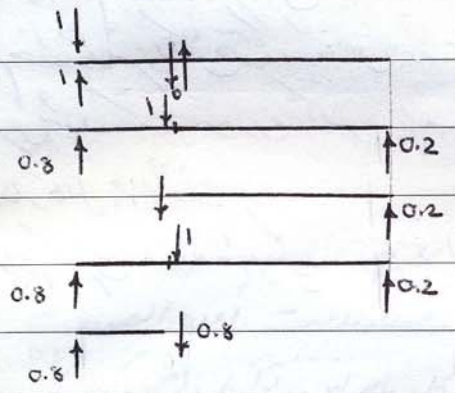
توصیه می‌شود همیشه خط تاثیر را کنار تیر یا کنار شکل رسم کنید.



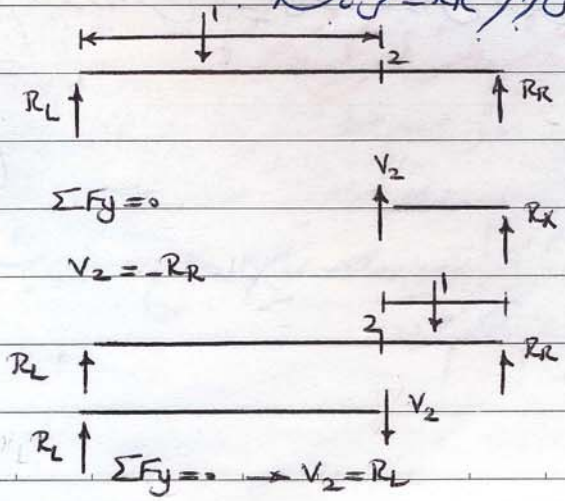
۱) روش نقطه‌یابی: در این روش بار واحد در صدها نقطه فیزیکی تیر قرار داده شده و به ازای آن مقدار تابع خواسته شده و خط تاثیر رسم می‌گردد. در خصوص نیروی برشی سمت چپ و راست مقطع جزء نقاط کلیدی است و بار واحد باید در آن نقاط قرار گیرد.

برای رسم خط تاثیر نیروی برشی مقطع 2 از روش استدلال انتکی استفاده می‌نماییم.

این روش می‌تواند در بسیاری از مسائل بکار گرفته شده و باعث سهولت در حل مسائل گردد. در روش استدلال انتکی، خط تاثیر مورد نظر را به خطوط تاثیری که قبلاً رسم شده‌اند مربوط می‌نماییم.

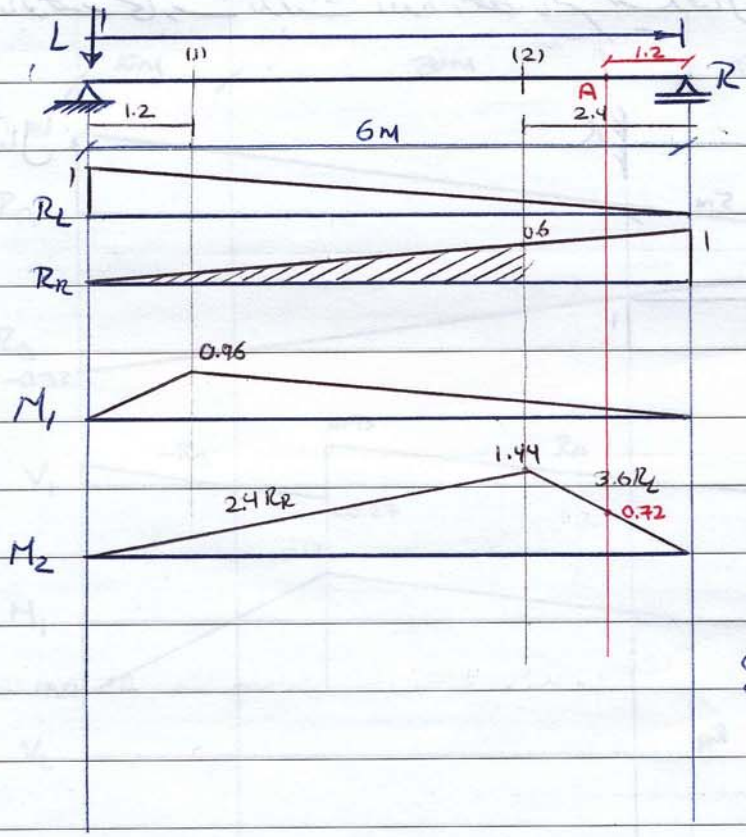


* بار واحد هر طرف مقطع خود در برش بود برای طرف دیگر رابطه تعادل (استدلال انتکی) بنویسید.



نهال
NAHAL

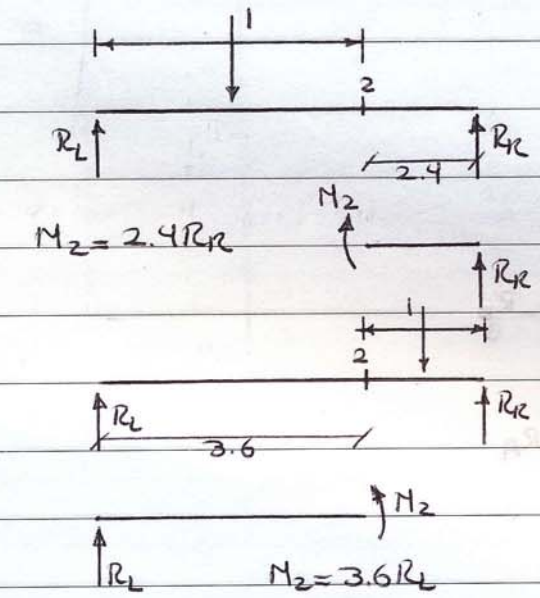
خط تاثیر تیر جسمی برای تیر ساده



۱) نقطه‌یابی: در روش نقطه‌یابی بار واحد را در روی محل نقطه کلیدی در روی سازه قرار می‌دهیم و به ازای هر موقعیت مقدار تابع را محاسبه می‌کنیم. در مورد تیر جسمی تنها نقاط کلیدی می‌باشند.

۲) استدلال استاتیکی: در این روش خط تاثیر معمولاً نظر به توابعی مربوط است که خط تاثیر آن‌ها قبلاً رسم شده است. بهترین توابع برای این منظور خطی‌اند.

* اگر بار واحد را در نقطه A وارد کنیم لنگر در مقطع 2 0.72 خواهد شد.

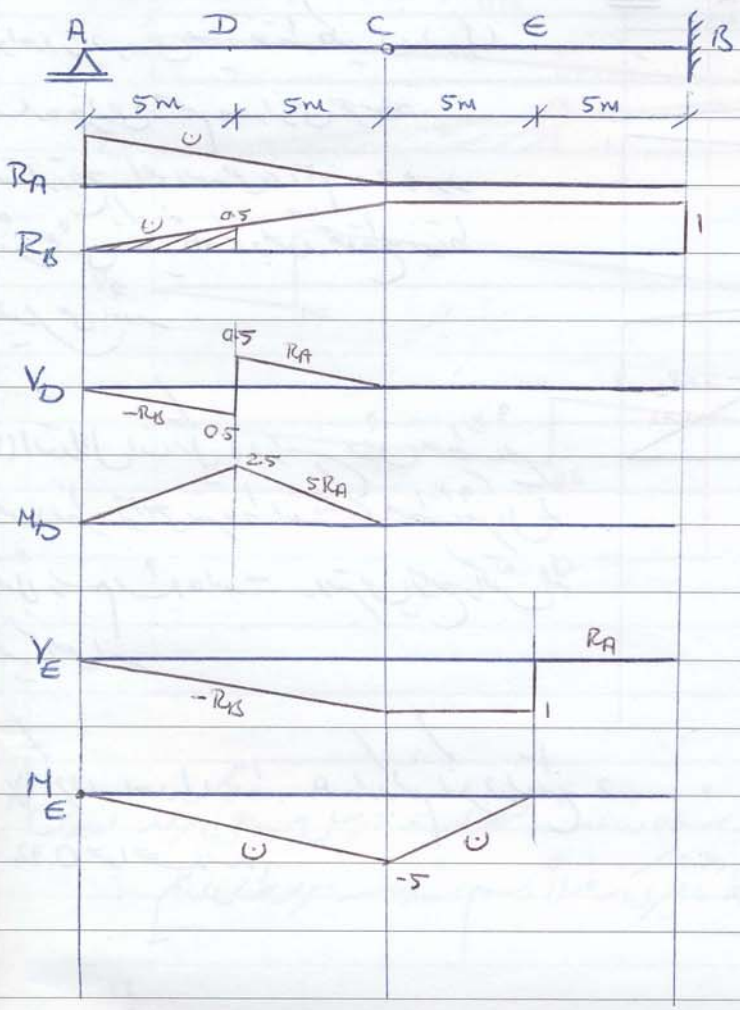


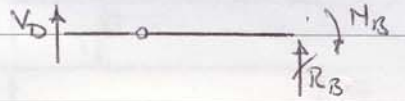
نهال NAHAL

خط تاثیر برای تیر با تغییر ناگهانی سطح مقطع

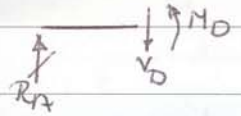
با توجه به مکانیک مقدماتی آموخته‌ایم خط تاثیر چند مثال ارائه می‌کنیم.

مثال ۱:

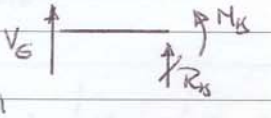




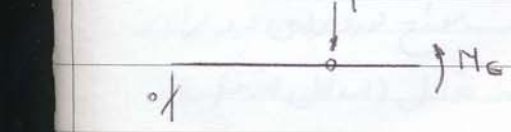
$V_D = -R_B$



$V_D = R_A \qquad M_D = 5R_A$

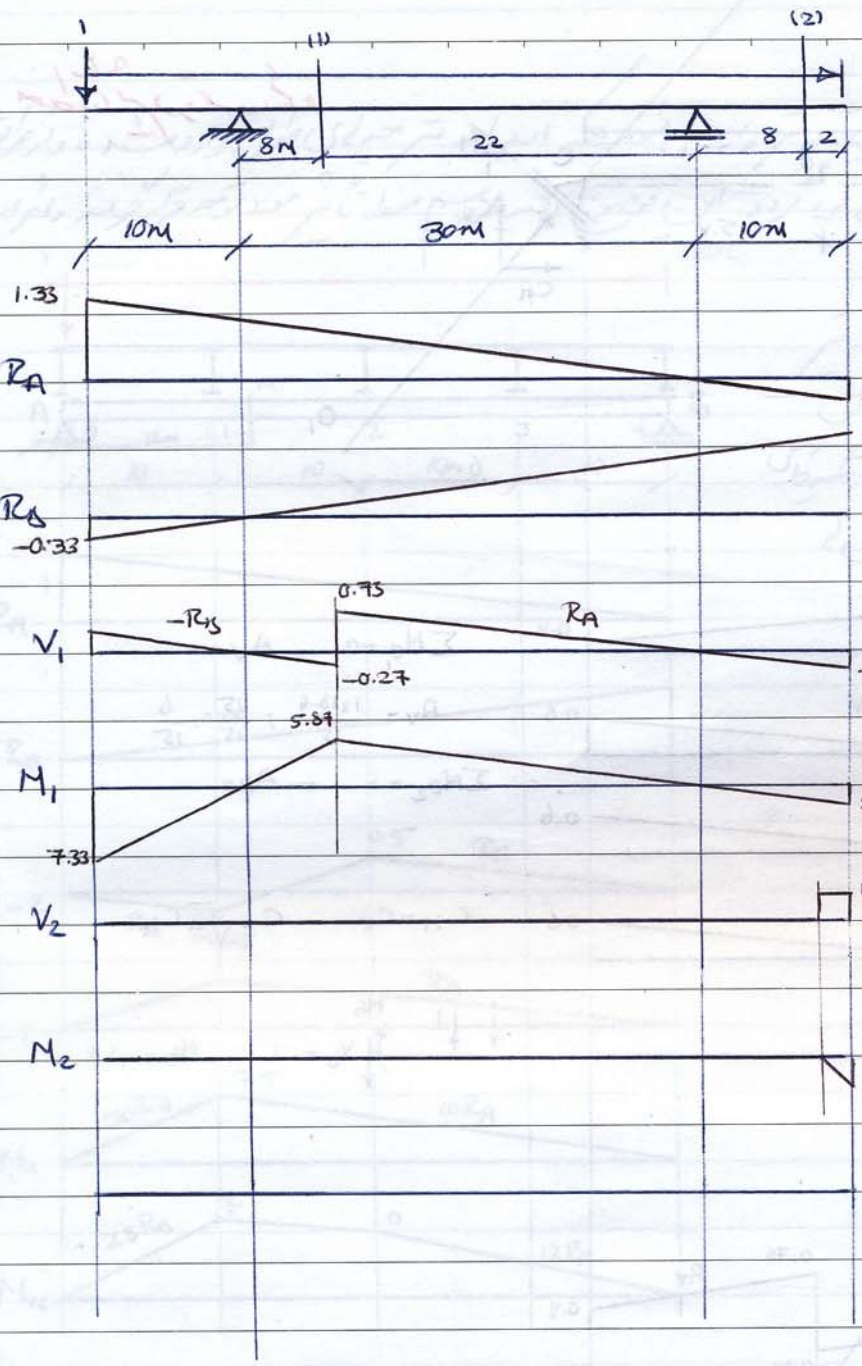


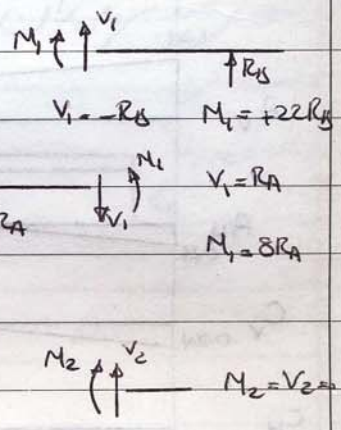
$V_E = -R_B$



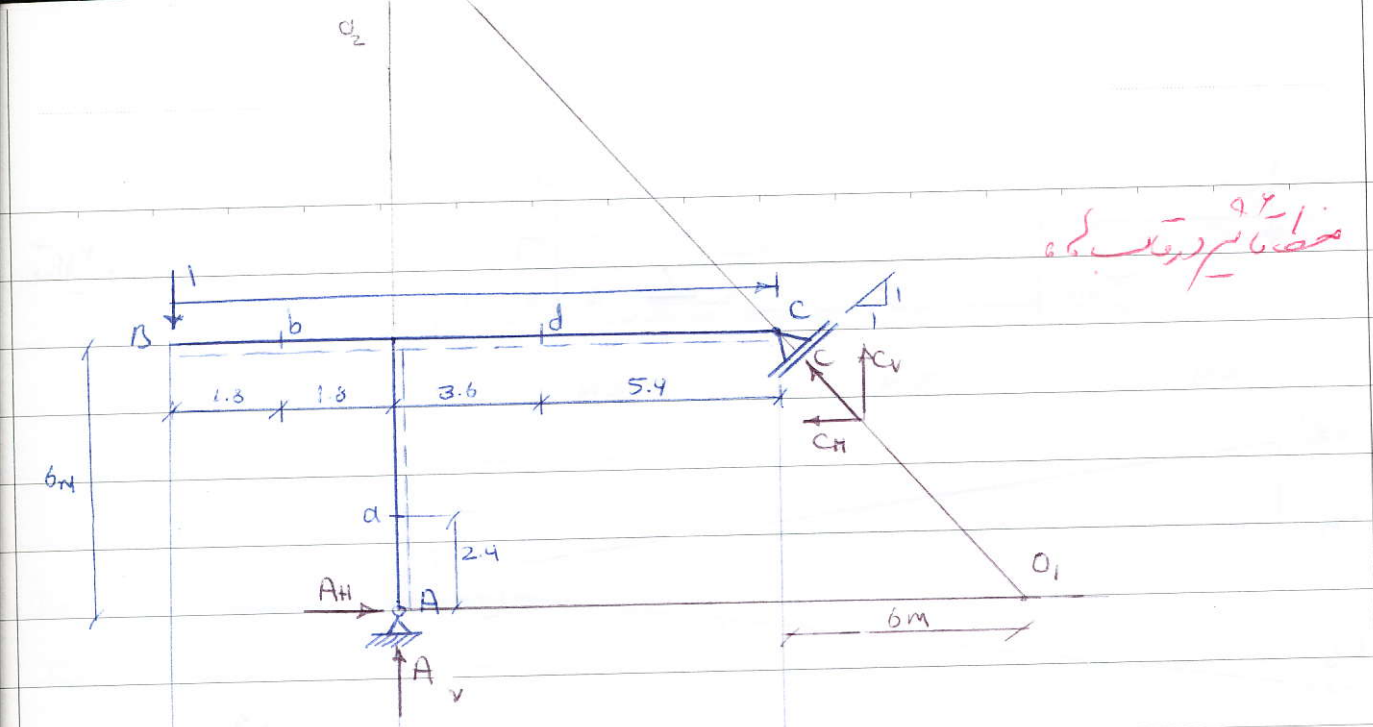
$M_E = -5$

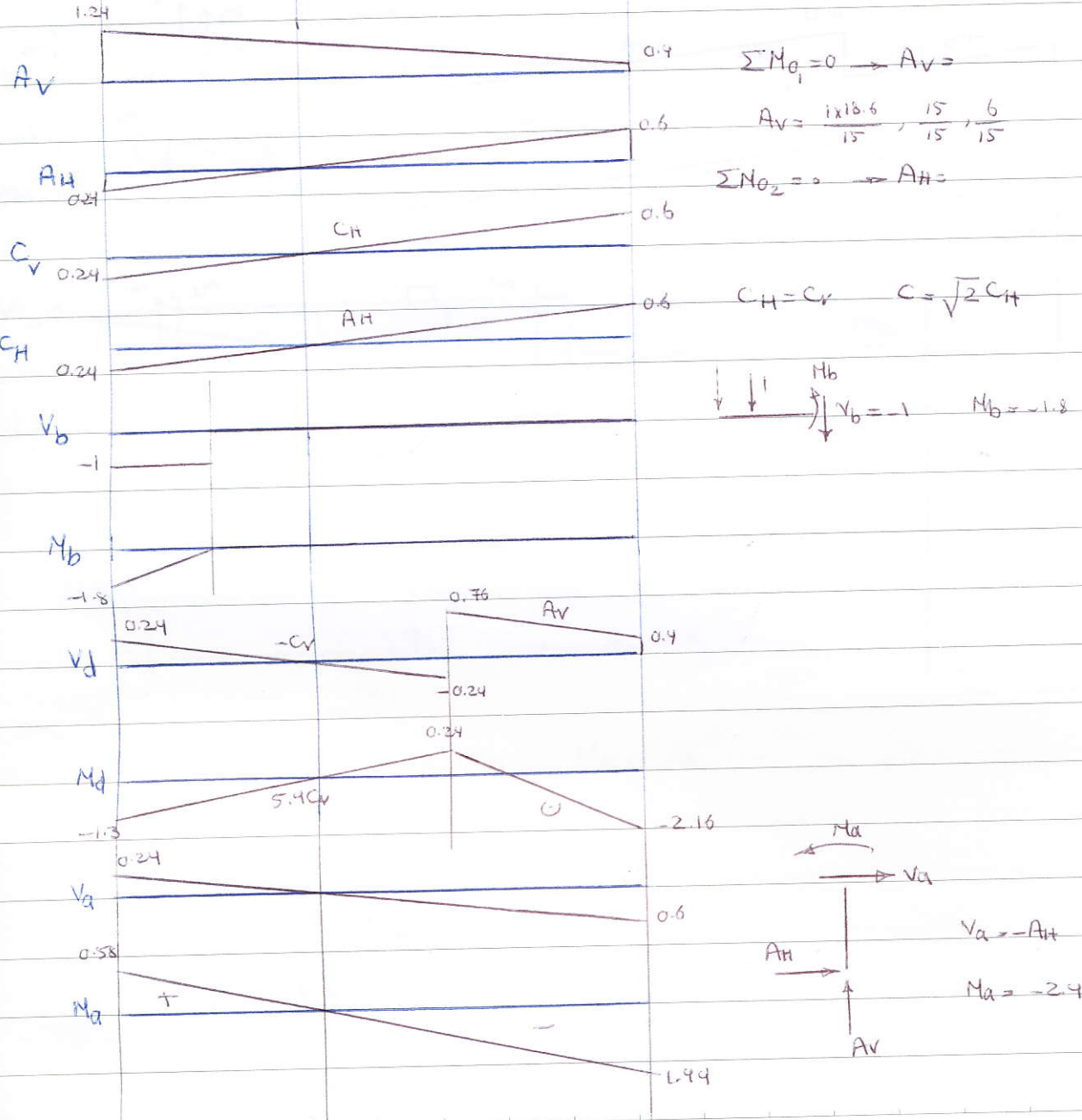
مثال ۶


1
(1)
(2)
8M
22
8
2
10M
30M
10M
1.33
R_A
-0.33
1.33
R_B
-0.33
V_1
$-R_B$
0.75
R_A
-0.27
-0.33
5.87
M_1
2.67
7.33
V_2
1
M_2
-2


M_1
V_1
R_B
$V_1 = -R_B$
$M_1 = +22R_B$
M_1
R_A
V_1
$V_1 = R_A$
$M_1 = 8R_A$

M_2
V_2
$M_2 = V_2 =$





$\Sigma M_{O_1} = 0 \rightarrow A_V =$

$A_V = \frac{1 \times 18.6}{15}, \frac{15}{15}, \frac{6}{15}$

$\Sigma M_{O_2} = 0 \rightarrow A_H =$

$C_H = C_V \qquad C = \sqrt{2}\, C_H$

$V_b = -1 \qquad M_b = -1.8$

$V_a = -A_H$

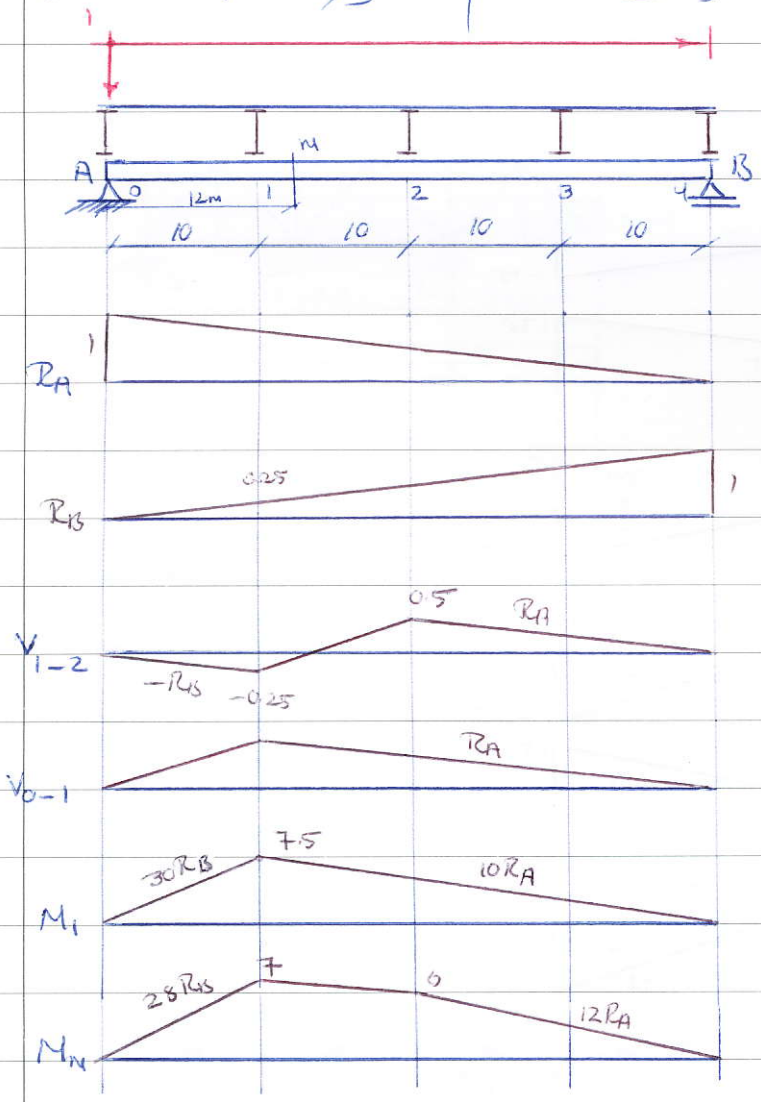
$M_a = -2.4 A_H$

خط تاثیر تیرهای اصلی

در تیرهای اصلی بار واحد مستقیماً به تیر وارد می‌شود بلکه ابتدا در تیرچه‌های طولی وارد شده و از طریق تیرهای عرضی و گره‌ها به تیر اصلی منتقل می‌گردد. این موضوع باید در رسم خط تاثیر مورد توجه قرار گرفته و اثرات آن اعمال شود.

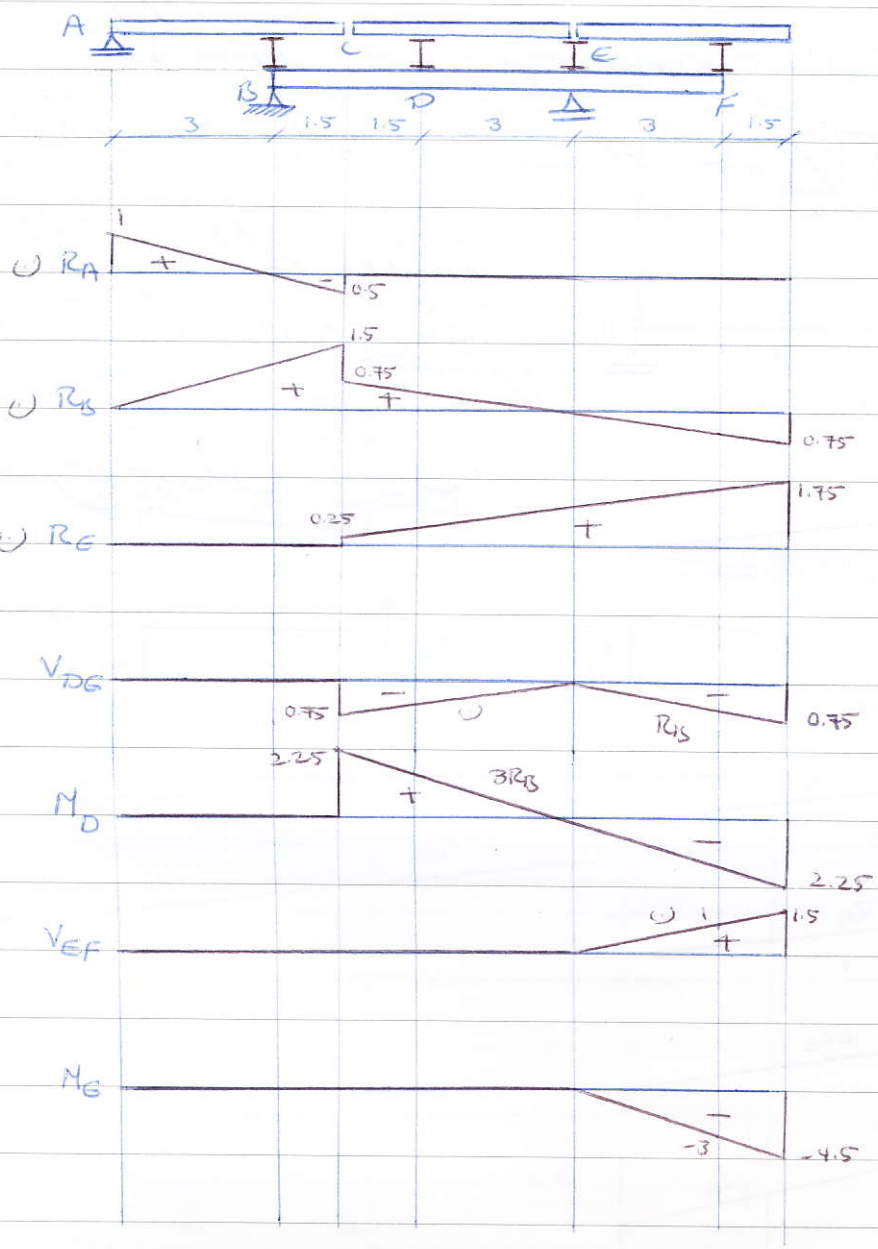
خط تاثیر واکنش یک تکیه‌گاه ساده فرقی با تیر معمولی ندارد. همان طور که در اصل استاتیک در بحث واکنش‌های تکیه‌گاهی به جای عضو نیروی توان آن را در انتهای آن اعمال کردیم.





* در تیرهای اصلی لنگر در حرکت یک عدد ثابت می‌باشد.

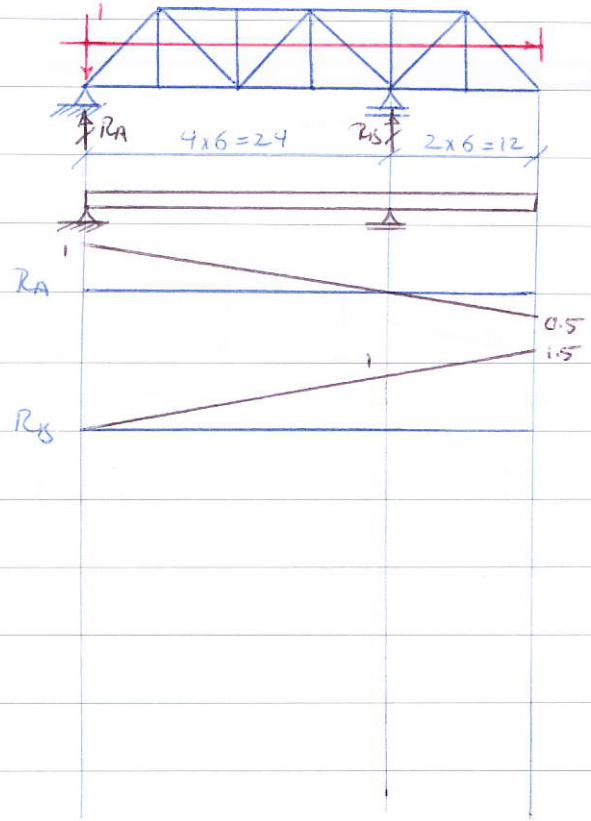
** از خط تاثیر لنگر نقطه‌ای دلخواه می‌خواستند هر طرف که بار واحد بود طرف دیگر را در نظر گرفته و $\sum M$ می‌نویسم. سپس نمودار خط تاثیر را مثلاً برای سمت چپ از ابتدای سمت چپ تیر تا تیر عرضی سمت چپ رسم می‌کنیم و وارد حرکت می‌شویم. برای سمت راست هم همین کار را انجام می‌دهم و سپس دو نقطه در تیر عرضی چپ و راست را به هم وصل می‌نمایم.


A
C
E
B
D
F
3
1.5
1.5
3
3
1.5
R_A
1
0.5
R_B
1.5
0.75
0.75
R_E
0.25
1.75
V_{DG}
0.75
R_B
0.75
M_D
2.25
$3R_B$
2.25
V_{EF}
1
1.5
M_E
-3
-4.5

خط تاثیر خریا

۱) واکنش یکی از تکیه گاهی: خط تاثیر این واکنش همانند خط تاثیر واکنش یکی از تکیه گاهی تیر معادل خریا خواهد بود. بنابراین برای رسم خط تاثیر واکنش های تکیه گاهی خریا می توان به همان مراحل گفته شده برای رسم خط تاثیر واکنش های تیر ساده عمل نمود.

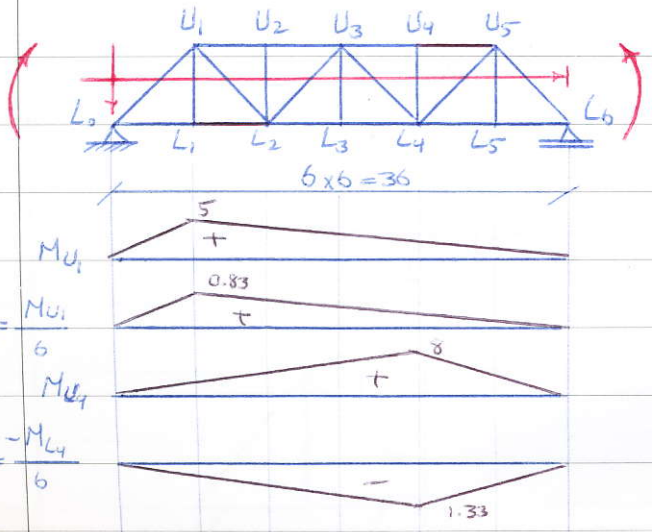
۲) خط تاثیر نیروی یکی از اعضای خریا بالایی یا پایینی:

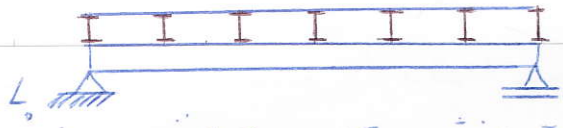


۲) خط تاثیر نیروی یکی از اعضای خریا بالایی یا پایینی:

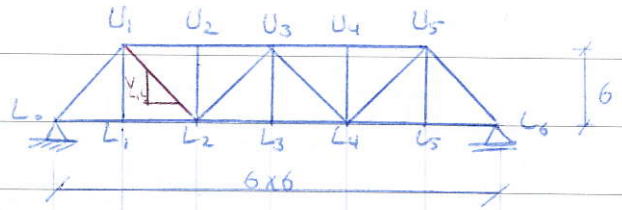
تیر اصلی هم ارز خریا در نظر می گیریم. با رسم خط تاثیر برش در محل U_1 می توان نیروی U_1L_2 را بدست آورد.

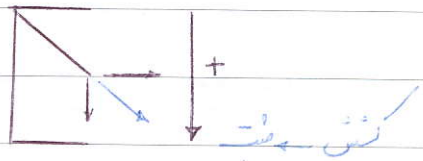
برای رسم خط تاثیر U_1L_2 به این نکته توجه می کنیم که نیروی این عضو برابر است با برش در U_1 تقسیم بر 6 قدر. حال اگر یک تیر اصل معادل خریا در نظر گرفته و برای آن M_{U_1} بدست می آوریم می توانیم خط تاثیر را برای آن رسم کنیم.



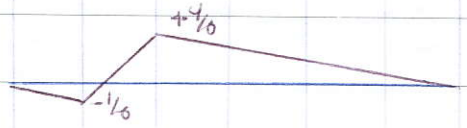


* چون تا زیر لاف در این بین $F_{U_4U_5}$ لفی می باشد.

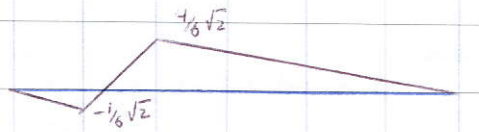




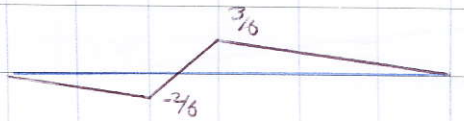
V_{1-2}



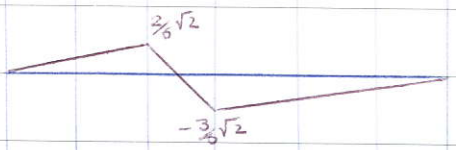
$F_{U_1L_2} = \sqrt{2}\, V_{1-2}$



V_{2-3}



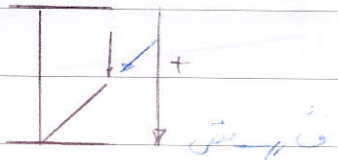
$F_{L_2U_3} = -\sqrt{2}\, V_{2-3}$



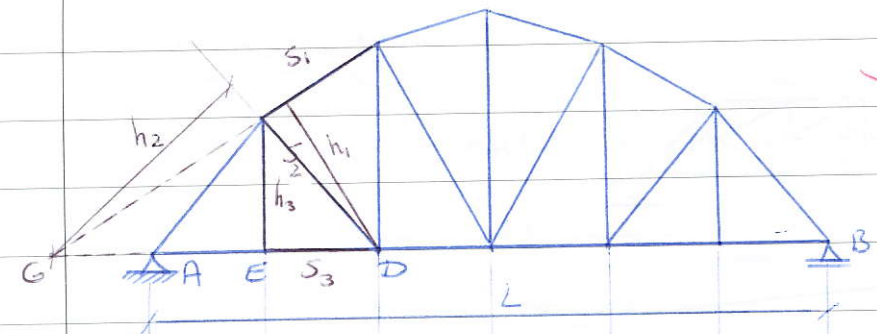
U_2L_2

U_3L_3





محاسبه نیروی خرپا با مقطع کلی عبور موازی



مرز انتخاب $\frac{S}{2}$ ، دلخواه است.

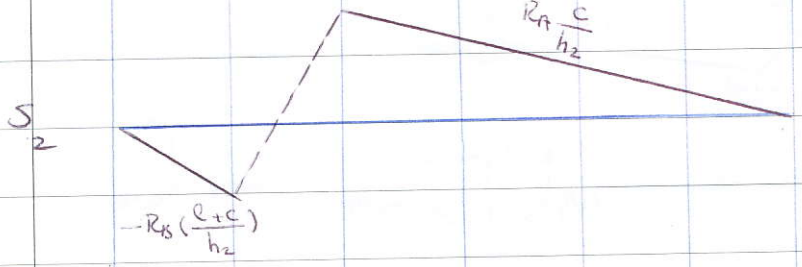
$$S_1 = \frac{-M_D}{h}$$

$$S_3 = \frac{M_E}{h_3}$$

$$S_2 h_2 + R_B(l+c) = 0$$

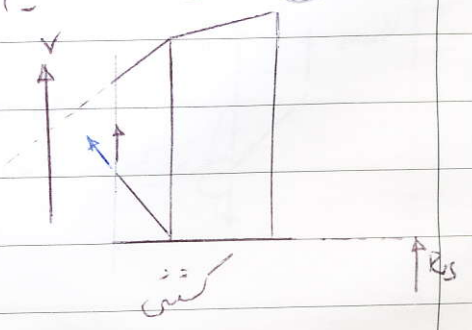
$$S_2 = -R_B \frac{l+c}{h_2}$$

$$R_A c = h_2 S_2 \rightarrow S_2 = R_A \frac{c}{h_2}$$



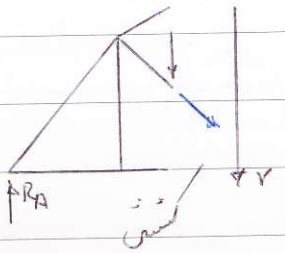
برای S_2 :

برش باید از بین E و A دلخواه



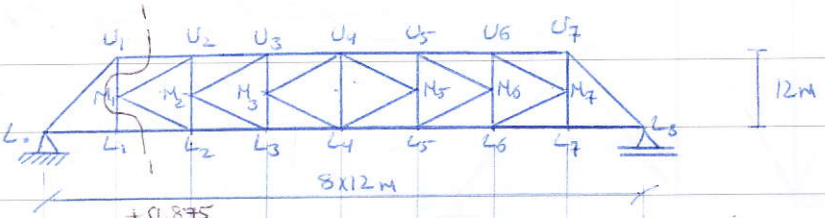
$$+S_2 h_2 + R_B(l+c) = 0$$

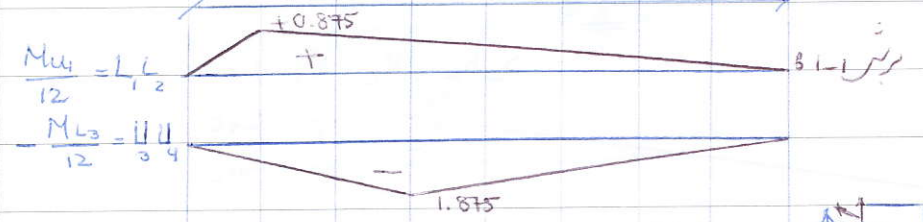
برش باید از بین D و B دلخواه



$$-S_2 h_2 + R_A c = 0$$

مثال ۴-۱: تیر خرپایی زیر را ...

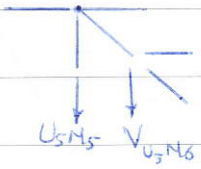


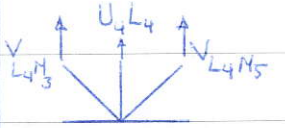


$\frac{M_{L_1}}{12} = L_1 L_2$ — $-\frac{M_{L_3}}{12} = U_3 U_4$ — $\frac{1}{2} V_{56} = V_{U_5 M_6}$ — $V_{U_5 M_6} = U_5 M_5$ — $U_4 L_4$ — $\frac{1}{2} V_{2-3} = V_{M_2 L_3}$ — $\frac{M L}{33}$

برش $1-1$

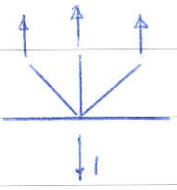
تعادل گره U_5





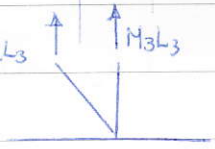
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow U_4 L_4 - (V_{L_4 M_3} + V_{L_4 M_5}) = 0$

اگر بار واحد روی گره L_4 باشد



$U_4 L_4 = -(V_{L_4 M_3} + V_{L_4 M_5}) + 1$

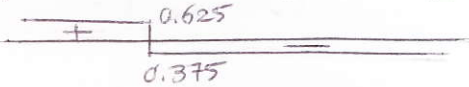
$= -(0.25 + 0.25) + 1 = 0.5$

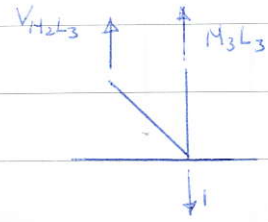


$M_3 L_3 = -V_{M_2 L_3}$

اگر بار واحد روی گره L_3 باشد

$V_{L_4 M_3} = -\frac{0.375}{2}$ $\quad V_{L_4 M_5} = +\frac{0.375}{2}$



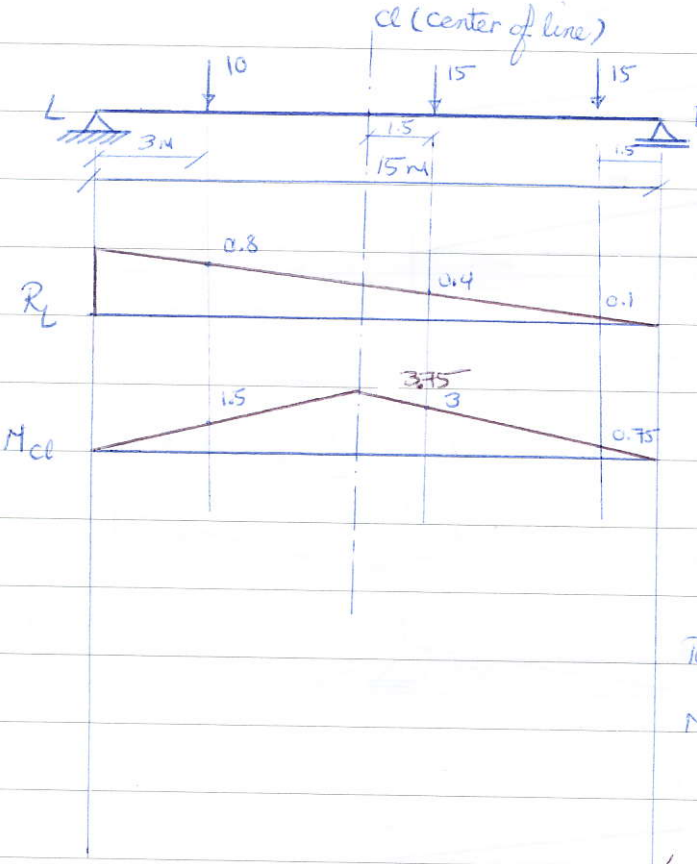


$M_3 L_3 = 1 - V_{M_2 L_3}$

$= 1 - 0.3125 = 0.69$

کاربرد خط تاثیر

۱) کاربرد خط تاثیر برای نیروهایی با موقعیت ثابت



از بار واحد در فاصله 3 متری از چپ شروع شود:

$R_L = 0.8$ $\quad M_{cl} = 1.5$

از بار 10 تن شروع شود:

$R_L = 0.8 \times 10$ $\quad M_{cl} = 1.5 \times 10$

از بار 15 تن بعدی به بعد اضافه کنیم:

$R_L = 0.8 \times 10 + 0.1 \times 15$

$M_{cl} = 1.5 \times 10 + 0.75 \times 15$

از بار آخر 15 تن در 1.5 متری از cl وارد کنیم:

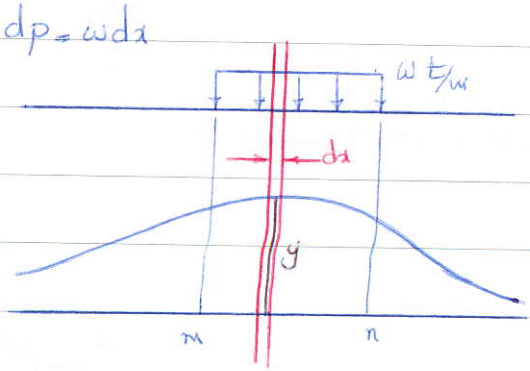
$R_L = 0.8 \times 10 + 0.1 \times 15 + 15 \times 0.9 = 15.5$ ton

$M_{cl} = 1.5 \times 10 + 0.75 \times 15 + 15 \times 3 = 71.25$

y_i = عرض خط تاثیر در زیر بار P_i

مقدار تابع برای بار P_i = $\sum P_i y_i$

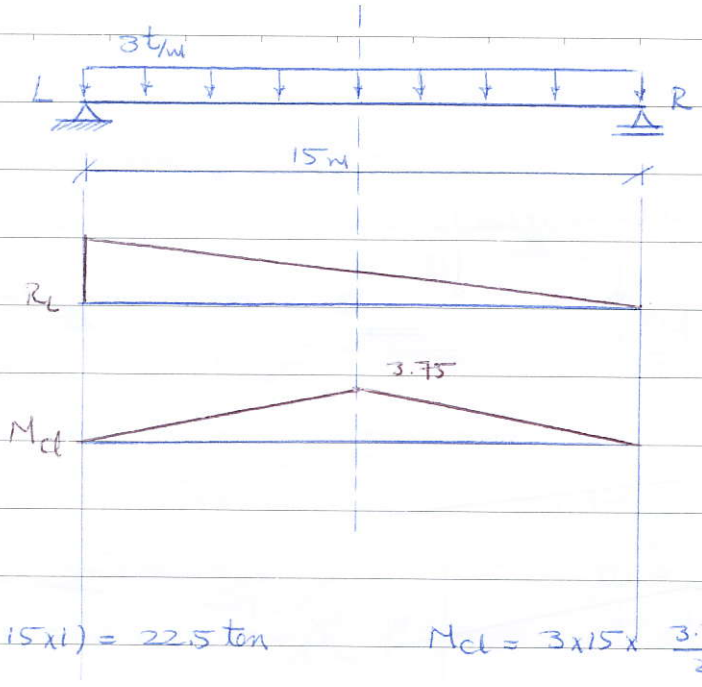
۲) کاربرد خط تاثیر برای بارهای گسترده یکنواخت



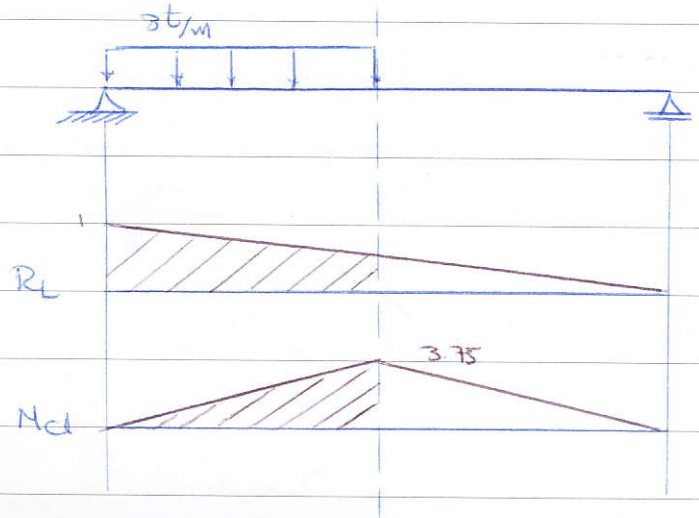
$dF = (w dx) y$

$F = \int_m^n w dx y = w \int_m^n y dx = w$ (سطح زیر خط تاثیر بین m و n)

مقدار تابع برای بار گسترده = شدت بار گسترده × سطح زیر نمودار خط تاثیر محدود به طول بار گسترده



$R_L = 3\left(\frac{1}{2} \times 15 \times 1\right) = 22.5$ ton $\qquad M_{cl} = 3 \times 15 \times \frac{3.75}{2} = 84.4$ ton.m



$R_L = 3 \times \frac{1}{2} \times 7.5\,(1 + 0.5) = 16.9$ ton $\qquad M_{cl} = 3 \times 7.5 \times \frac{3.75}{2} = 42.2$

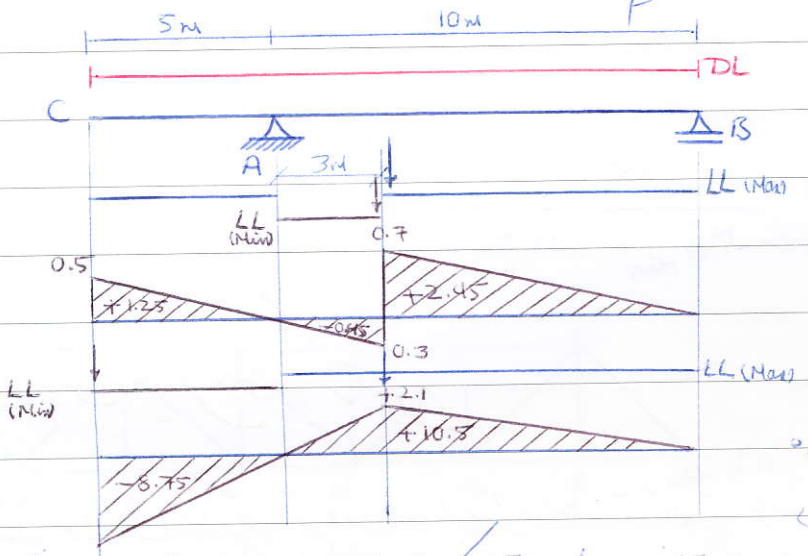
نهال NAHAL

۳) کاربرد خط تاثیر برای بار یکی با موقعیت متغیر:

(همانطور) استفاده از خط تاثیر برای بار یکی با موقعیت متغیر ابتدا باید موقعیت نامساعد بار معلوم گردد، سپس برای این موقعیت نامساعد عمل مقدار تابع می‌شود.

موقعیت نامساعد موقعیتی است که در اثر ایجاد حداکثر یا حداقل تابع گردد. منظور از حداکثر مثبت و منظور از حداقل حداکثر منفی است.

برای نشان دادن موضوع از مثالی استفاده می‌کنیم:



۱) بار مرده گسترده برابر $1 t/m$

۲) بار زنده متمرکز بر تیر ۱۰ تن

۳) بار زنده گسترده بر تیر $5 \frac{ton}{m}$

توضیح: بار مرده همواره در تمام طول تیر قرار دارد. تغییر مکان با حذف صلب از این بار امکان پذیر نیست. اما بار زنده می‌تواند در طول تیر حرکت نموده و در این موقعیت را انتخاب نماید و در نتیجه با گسترده می‌توان آن را حذف نمود. با این حقیقت حالا می‌گردیم بر می‌سر $V_{D\,Max}$.

$V_{D\,Max}$:

اثر بار مرده $= 1(1.25 - 0.43 + 2.45) = 3.25\ t$

بار زنده گسترده $= 5(1.25 + 2.45) = 18.5$

بار زنده متمرکز $= 10 \times 0.7 =$

$$\Rightarrow V_{D\,Max} = 28.75\ t$$

$V_{D\,Min}$:

اثر بار مرده $= 3.25$

بار زنده متمرکز $= 3(-0.45) = -2.25$

بار گسترده متمرکز $= -0.3 \times 10 = -3$

$$\Rightarrow V_{D\,Min} = -2\ ton$$

Live Load (LL) بار زنده گسترده

Dead Load (DL) بار مرده گسترده

نهال NAHAL

$M_{D_{Max}}$:

بار مرده $= 1(-8.75 + 10.5) = 1.75$

بار زنده گسترده $= 5 \times 10.5 = 52.5$

بار زنده متمرکز $= 10 \times 2.1 = 21$

$\Longrightarrow M_{D\,Max} = 75.25\ t.m$

$M_{D_{Min}}$:

بار مرده $= 1.75$

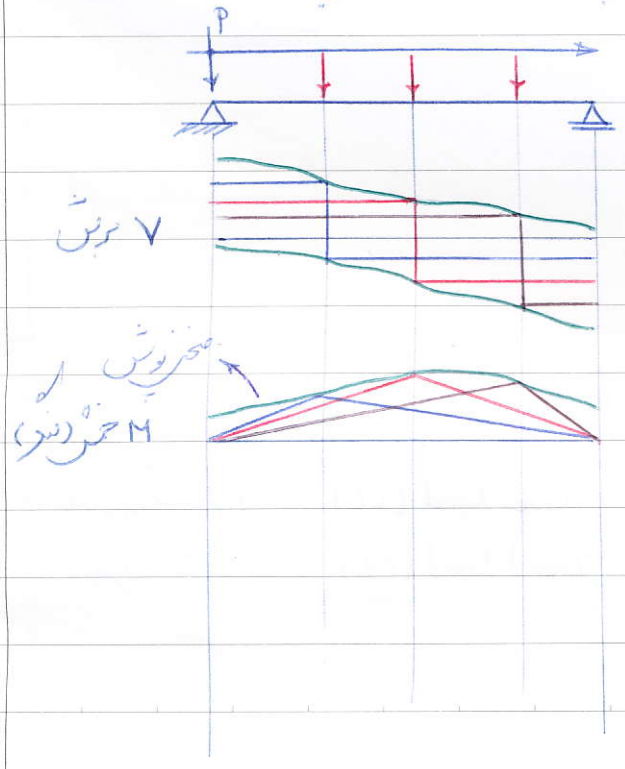
بار زنده گسترده $= -43.75$

بار زنده متمرکز $= -35$

$\Longrightarrow M_{D\,Min} = -77\ ton.m$

محل برش نیروی برشی و لنگر خمشی

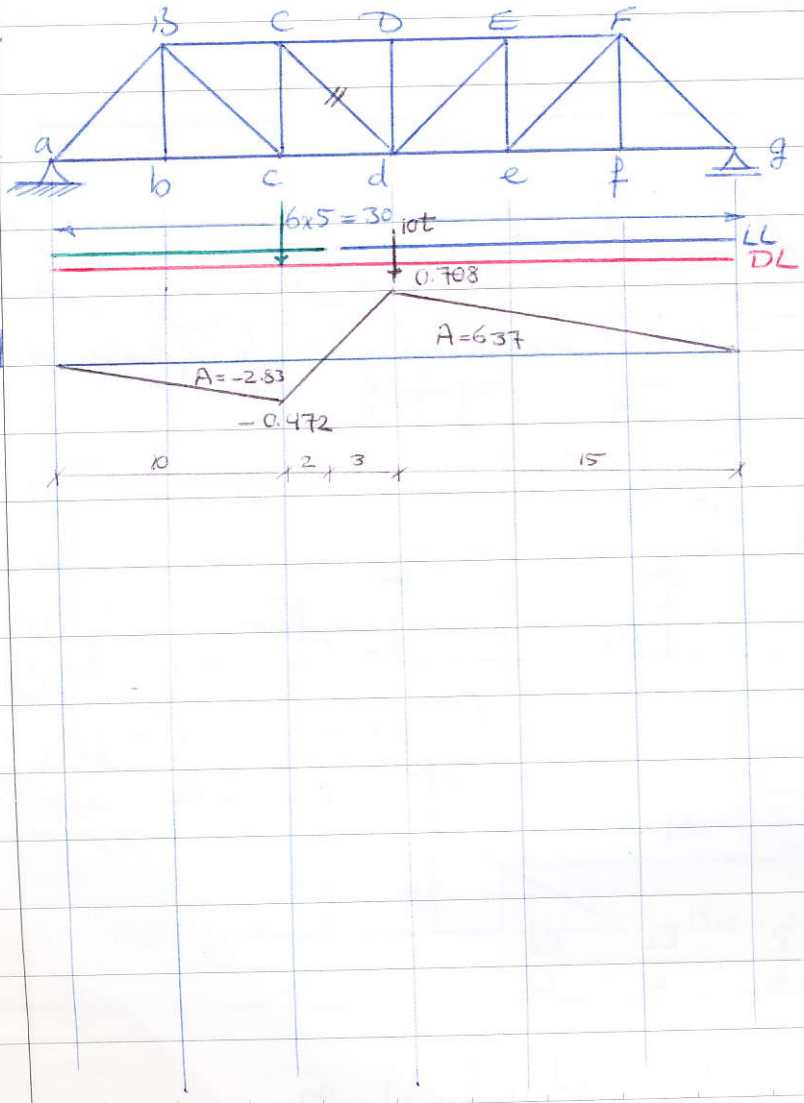
وقتی که بارهای وارد بر یک تیر یا قاب از نظر موقعیت ثابت باشند برای طراحی اعضا نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی استفاده می شود که در فصل گذشته مورد تشریح قرار گرفتند. حال این سؤال پیش می آید که اگر بارهای وارد بر سازه متحرک باشند محل طراحی با چه باید باشد؟ مثال کوچکی برای درک بهتر ارائه می گردد.



روش عملی برای رسم منحنی پوش این است که در یک نقطه منحنی را بر اساس تعداد این نقاط بین چهار نقطه تا هشت نقطه در هر دهانه کفایت می‌کند. برای این نقاط باید خط تاثیر نیروی مورد نظر را رسم کرد. سپس بارهای مرده و زنده را بر این خطوط تاثیر اعمال شده و حداقل و حداکثر هر کدام مشخص می‌گردد. با وصل کردن نقاط حداقل به یکدیگر منحنی پوش حداقل و با وصل کردن نقاط حداکثر منحنی پوش حداکثر بدست می‌آید.

مقادیر حداقل و حداکثر نیرو در خرپا بر علت بارهای متحرک

در یک خرپا نیرو بر علت حرکت بار و همه نیروی داخلی اعضا عوض می‌شود. در این حالت کمترین مقدار نیروی عضو حداقل و حداکثر گردد.



بار مرده گسترده یکنواخت 1.5 t/m

بار زنده گسترده یکنواخت 2 t/m

نیروی متمرکز زنده 10 t

اثر ضربه 22.4٪

اثر ضربه در نتیجه اعمال ناگهانی بار می‌باشد و در اثر اعمال ناگهانی بار، مقدار نیرو و تغییرات استاتیکی بزرگتری می‌شود. این به واسطه اثر ضربه موجود هنگام اعمال بار است.

اثر ضربه فقط به بار زنده اعمال می‌گردد و برای مرده نخواهیم داشت.

$D_L = 1.5(6.37 - 2.83) = 5.31$

$LL = 2 \times 6.37 + 10 \times 0.708 = 19.82$

$I = 0.244 \times 19.82 = +4.84$ $\Rightarrow F_{Cd}^{Max} = 29.97\,t$

$+29.97\,t$ کشش

F

$DL = 5.31$

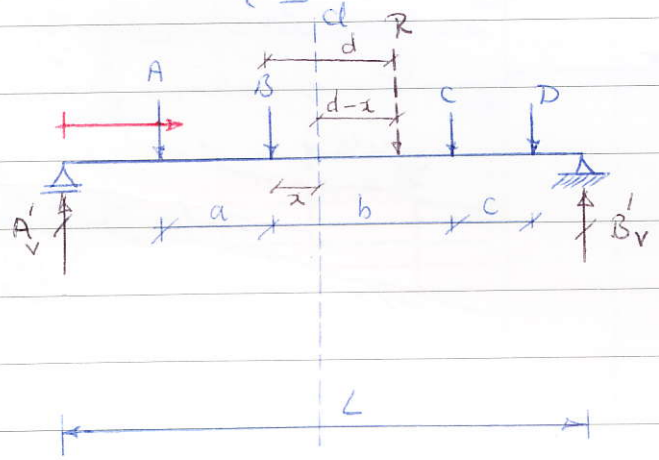
$LL = 2 \times (-2.83) = -5.65$

$+10(-0.472) = -4.72$ $\Rightarrow F_{Cd}^{Min} = -7.6\,t$

$I = 0.244 \times (-5.66 - 4.72) = -2.53$

$-7.6\,t$

نیروی محوری ماکزیمم حاصل در یک میله ساده یک دهانه بر اثر متحرک (واحد یا گروه) ماکزیمم است. این موضوع ارتباط با محل تاثیر بار ندارد و موضوع مستقل است ولی در مورد زمینه مقدار حداکثر تابع می‌باشد.



چون مجموعه با چند بار داریم نیروی محوری حداکثر بدون شک در یکی از میله‌ها رخ می‌دهد. فرض می‌کنیم این حداکثر در کابل cd باشد. برآیند بارها را R در نظر می‌گیریم. x را طوری تعیین می‌کنیم تا نیروی میله cd حداکثر گردد.

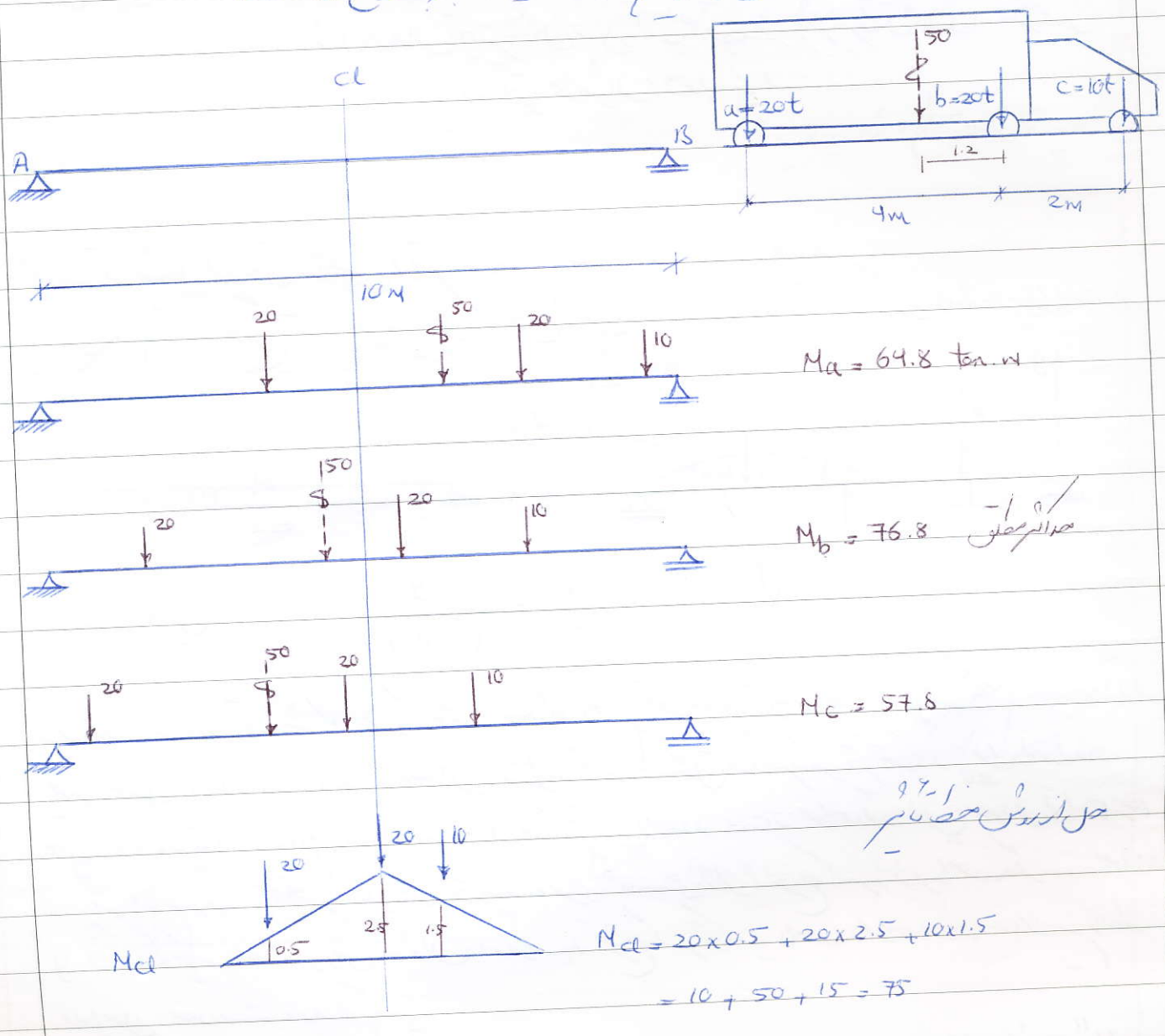
$$A'_V = \frac{1}{L}(R)\left(\frac{l}{2} - (d-x)\right) = \frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L}$$

$$M_B = A_V\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa = \left(\frac{R}{2} + \frac{Rx}{l} - \frac{Rd}{L}\right)\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa$$

نهال NAHAL

$$M_{/S} = \frac{RL}{4} - \frac{Rd}{2} - \frac{Rx^2}{L} + \frac{Rxd}{L} - Aa \rightarrow \frac{dM_{/S}}{dx} = 0 \rightarrow -\frac{2Rx}{L} + \frac{Rd}{L} = 0$$

$$\rightarrow x = d/2$$



$M_a = 64.8$ ton.m

$M_b = 76.8$ صدالرمحلی

$M_c = 57.8$

$$M_{cl} = 20\times0.5 + 20\times2.5 + 10\times1.5$$

$$= 10 + 50 + 15 = 75$$

فصل نهم

تغییر شکل سازه‌ها

حمید کاظم

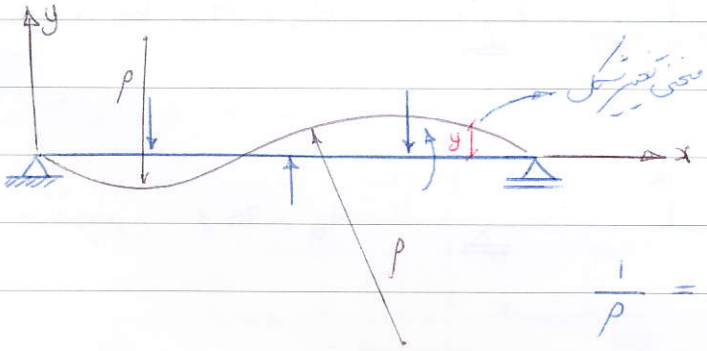
در این فصل تغییر شکل سازه‌های معین مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها دو روش مورد توجه قرار خواهد گرفت:

۱) روش هندسی: در این روش معادلات انتگرال تغییر شکل اعضای خمشی مورد توجه قرار گرفته و از روش‌های ترسیمی برای حل آن استفاده می‌شود.

۲) روش انرژی: ملاحظه می‌گردد روش‌های انرژی دو بسیار روشهای برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها هستند و هر یک روش‌های انرژی می‌توان تغییر شکل سازه‌های معین را از اثر نیروهای محوری، نیروی برشی، لنگر خمشی، نیروهای ناشی از تغییر دما و حتی تغییر شکل‌های ناشی از نشست تکیه‌گاه‌ها محاسبه نمود.

محاسبه تغییر شکل‌های ناشی از خمش در تیرها به کمک انتگرال‌های خمش

از درس مقاومت مصالح می‌دانیم که در تیر خمشی رابطه انحنای تیر و لنگر خمشی آن از رابطه زیر برقرار است:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

از هندسه تحلیلی:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

در تحلیل سازه‌ها تغییر شکل‌های کوچک بسیار کاربرد دارد. تغییر شکل کوچک تغییر شکلی است که در هندسه اولیه تغییر محسوسی ایجاد نمی‌نماید. به عنوان مثال تغییر شکل حداکثر یک تیر به طول ۶ متر که حداکثر $\frac{1}{300}$ دهانه است یعنی اگر دهانه تیر 6m باشد تغییر شکل حداکثر آن حدود 2cm خواهد بود. این عددی نسبتاً کوچک است و تیر را نمی‌توان تغییر شکل بزرگ نامید. در تغییر شکل‌های کوچک با تقریب خوبی می‌توان فرض کرد که اگر تیر واحد گرفت همان y است. به عبارت دیگر وقتی که تیر واحد فرض کنیم که برابر یک است. بنابراین رابطه انتگرال به صورت زیر در می‌آید:

$$y'' = 1/\rho \quad (2)$$

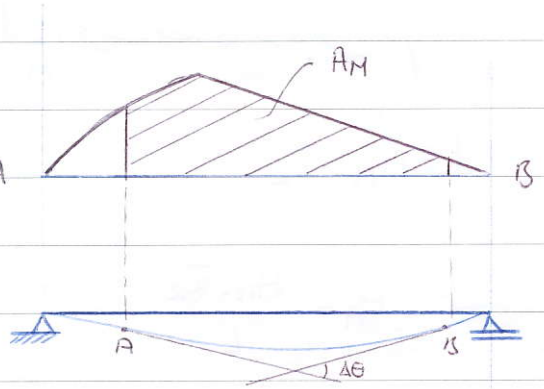
از تلفیق روابط 1 و 2 می توان نوشت :

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

معادله فوق به معادله دیفرانسیل تغییر شکل اعضای خمشی معروف است .

از آنجا که M تابعیت x دارد با دو بار انتگرال گیری از آن می توان معادله y را بدست آورد . در حل مسائل این انتگرال گیری ساده نخواهد بود . در مهندسی نیازی به داشتن معادله خم نیست . از این رو به یک روش می توان تغییر شکل تیر را تنها در چند نقطه خاص مهم آن محاسبه کرد . به همین علت روش های عددی برای حل این معادله دیفرانسیل ابداع شده است .

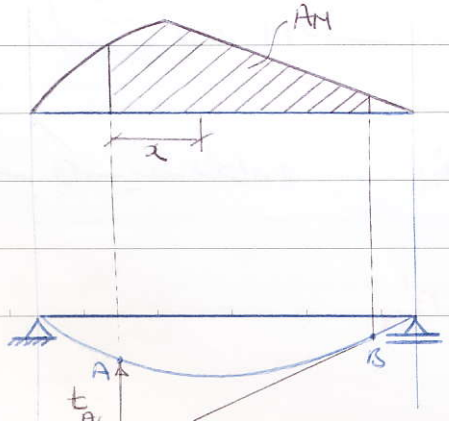
قضیه اول لنگر سطح : زاویه بین هر دو نقطه مماس بر تغییر شکل برابر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ می باشد .



نمودار $\frac{M}{EI}$

$$\Delta\theta = \theta_A - \theta_B = A_M$$

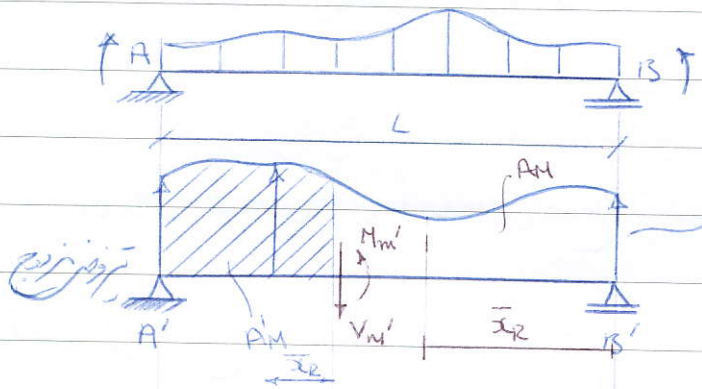
قضیه دوم لنگر سطح : انحراف نقطه A واقع در روی منحنی الاستیک از مماس رسم بر نقطه B واقع در روی منحنی الاستیک مساوی با لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بین این دو نقطه است به نقطه A .



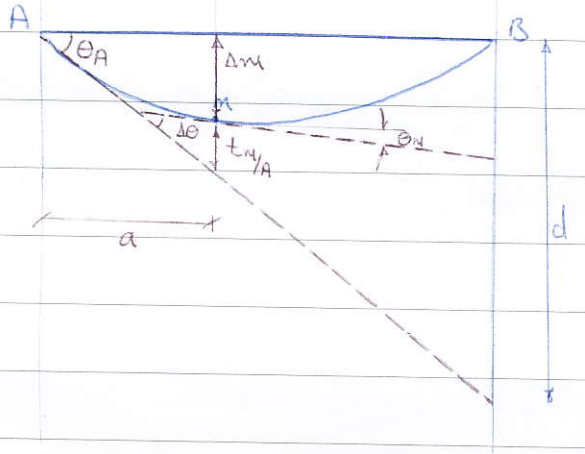
$$t_{A/M} = A_M \cdot x$$

روش بار الاستیک

روشی تر نیز هست. در این روش تیری با بارگذاری الاستیک ساخته می‌شود. بار الاستیک این تیر نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی است. ثابت می‌شود می‌سه θ و Δ در تیر اصلی مثل می‌سه نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر الاستیک یا تیر مزدوج است.



$$\theta_A = \frac{d}{\ell}$$



d = انحراف نقطه B از مماس رسم شده بر A

$$d = A_M \cdot \bar{x}_R$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L}$$

در تیر مزدوج:

$$\Sigma M_{B'} = 0 \Rightarrow R'_{A'} = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L}$$

همانطور که مشاهده می‌شود می‌سه θ_A در تیر اصلی مانند می‌سه $R'_{A'}$ در تیر مزدوج است. تیر مزدوج تیری است هم طول با تیر اصلی که بارگذاری آن نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی است. برای بار الاستیک نوشتیم. در صورتیکه نمودار M مثبت باشد بار الاستیک مثبت بوده، رو به بالاست.

محاسبه θ یک نقطه دلخواه:

$$\Delta\theta = \theta_A - \theta_M \Rightarrow \theta_M = \theta_A - \Delta\theta \qquad \Delta\theta = A'_M$$

$$\Rightarrow \theta_M = \theta_A - A'_M$$

$$\Rightarrow \theta_M = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L} - A'_M$$

نیروی برشی در تیر مرکب:

$$V_{M'} = R_{A'} - A'_M$$

مشاهده می‌شود که نیروی برشی در تیر مرکب همان شیب منحنی تغییر شکل در تیر اصلی است. برای نیروی برشی، نیروی برشی الاستیک گوییم. از حال به قرارداد نیروی برشی برای آن استفاده می‌کنیم. اگر نیروی برشی الاستیک مثبت باشد، شیب مثبت است (شیب رو به بالا). اگر نیروی برشی الاستیک منفی باشد، شیب منفی است (رو به پایین).

می‌خواهیم Δ نقطه M

$$\Delta_M = a\theta_A - t_{M/A}$$

$$\Delta_M = aR_{A'} - A'_M \cdot \bar{x}_R$$

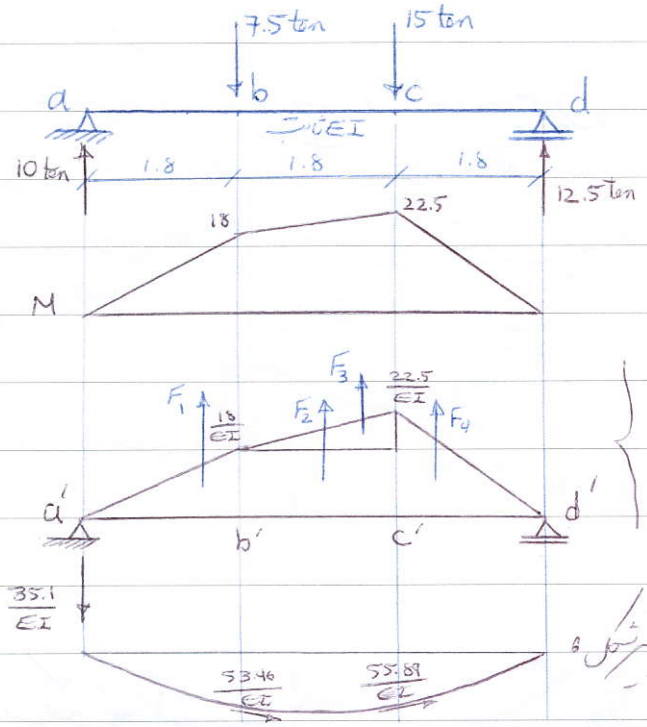
می‌خواهیم لنگر M' در تیر مرکب:

$$\Sigma M_{N'} = 0 \Rightarrow M_{N'} = R_{A'} \cdot a - A'_M \cdot \bar{x}_R$$

مشاهده می‌شود که تغییر مکان نقطه در تیر اصلی همان لنگر خمشی در تیر مرکب است. به آن لنگر، لنگر خمشی الاستیک گوییم. لنگر خمشی الاستیک وقتی مثبت است که در تیر ما را به سمت پایین (همان قرارداد علامت سابق). اگر لنگر خمشی الاستیک مثبت باشد تغییر مکان رو به بالاست. اگر لنگر خمشی الاستیک منفی باشد، تغییر مکان منفی بوده رو به پایین است.

$$\frac{dV}{dx} = q \qquad \frac{dM}{dx} = V \longrightarrow y'' = \frac{M}{EI}$$

مثال: در تیر زیر داده شده تغییر مکان قائم و دوران نقاط A, B, C, D و حداکثر تغییر مکان حداکثر را بدست آورید.



نمودار تغییر شکل

$$F_1 = \frac{1.8}{2} \times \frac{18}{EI} = \frac{16.2}{EI} \qquad F_2 = \frac{32.4}{EI} \qquad F_3 = \frac{4.05}{EI} \qquad F_4 = \frac{20.25}{EI}$$

$$\sum M_{b'} = 0 \Rightarrow R_{a'} = \frac{35.1}{EI}$$

$$\sum M_{a'} = \Rightarrow R_{d'} = \frac{37.8}{EI}$$

$$\theta_a = V_{a'} = -\frac{35.1}{EI} \qquad V_{a'} = \frac{-35.1}{EI}$$



$$\theta_b = V_{b'} = F_1 - R_{a'} = -\frac{18.9}{EI}$$

$$\delta_b = M_{b'} = -1.8\left(\frac{35.1}{EI}\right) + \left(\frac{16.2}{EI}\right)(0.6) = -\frac{53.46}{EI}$$

$$\theta_c = V_{c'} = R_{d'} - F_4 = +\frac{17.55}{EI}$$

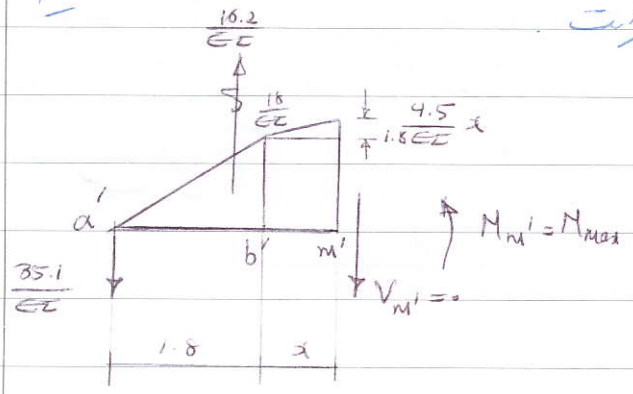
$$\delta_c = M_{c'} = -\frac{55.89}{EI}$$

$$\theta_d = V_{d'} = +\frac{37.8}{EI}$$

$$\delta_d = M_{d'} = 0$$

برای محاسبه مقدار و محل تغییر مکان Max :

با توجه به نتایج بدست آمده و تغییر علامت شیب بین نقاط B و C می‌توان نتیجه گرفت که تغییر مکان حداکثر بین نقاط B و C خواهد بود که در آن $\theta = 0$ است. بنابراین باید جایی قرار دارد که عکس العمل برش الاستیک برابر صفر باشد.

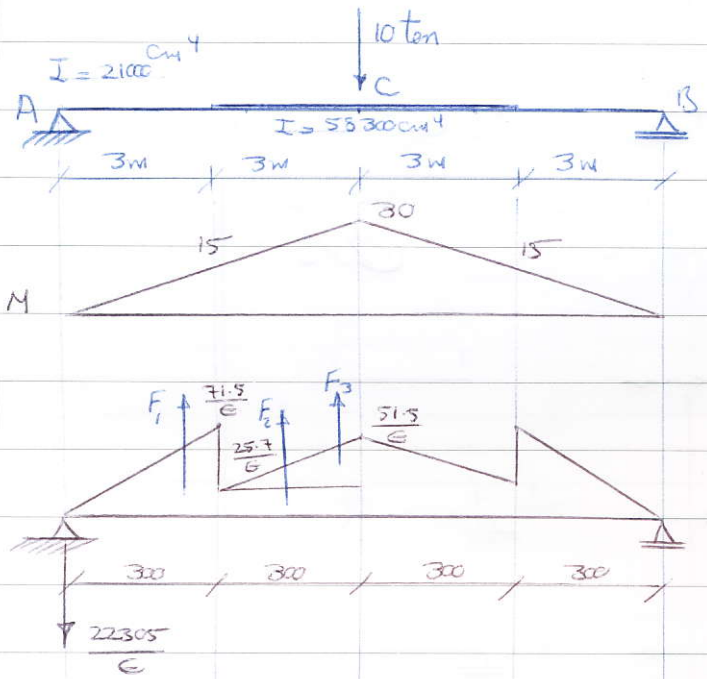


$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{35.1}{EI} + \frac{16.2}{EI} + \frac{18x}{EI} + \frac{4.5}{1.8EI} x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$\rightarrow x = 0.984\,m$$

$$\sum M_{m'} = 0 \Rightarrow EI\,M_{m'} + 35.1(1.8 + 0.984) - 16.2(0.6 + 0.984) - 18 \times 0.98 \times \frac{0.984}{2} - \frac{4.5}{1.8} \times 0.984 \times \frac{0.984^2}{2 \times 3} = 0 \rightarrow \delta_{Max} = M_{m'} = \frac{-62.76}{EI} \downarrow$$

مثال: در شکل زیر داده شده تغییر مکان قائم نقطه C را بدست آورید.



$E = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$

واحد طول = Cm واحد نیرو = kg

$$F_1 = \frac{71.5 \times 300}{2E} = \frac{10725}{E}$$

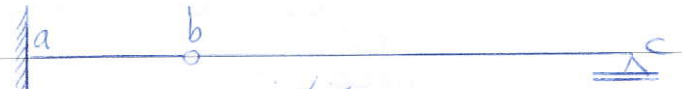
$$F_2 = \frac{7710}{E} \qquad F_3 = \frac{3870}{E}$$

$$R_A' = \frac{22305}{E}$$

$$\delta_C = M_C' = -R_A'(600) + 400F_1 + 150F_2 + 100F_3 = -\frac{7549500}{E} = -3.78\,cm \downarrow$$

تعمیم روش بار الاستیک برای تیرهای با شرایط تکیه گاهی مختلف (روش تیر مزدوج)

تا کنون روش بار الاستیک فقط برای تیرهای ساده مورد توجه قرار گرفته است. می توان ثابت نمود که این روش برای شرایط تکیه گاهی مختلف قابل تعمیم است، مشروط بر اینکه در تیر مزدوج تغییر اتی در شرایط تکیه گاهی وجود دارد. به عنوان مثال تیری مطابق شکل زیر در نظر گرفته شده و شرایط تکیه گاهی را در تیر مزدوج اقناع می کردد. توجه شود در این حالت شرایط هندسی ما به تبدیل به شرایط مزدوج استاتیکی گردد.



شرایط مرزی هندسی تیر واقعی:

$\theta_a = 0$ تغییر شکل θ_b وجود دارد θ_c

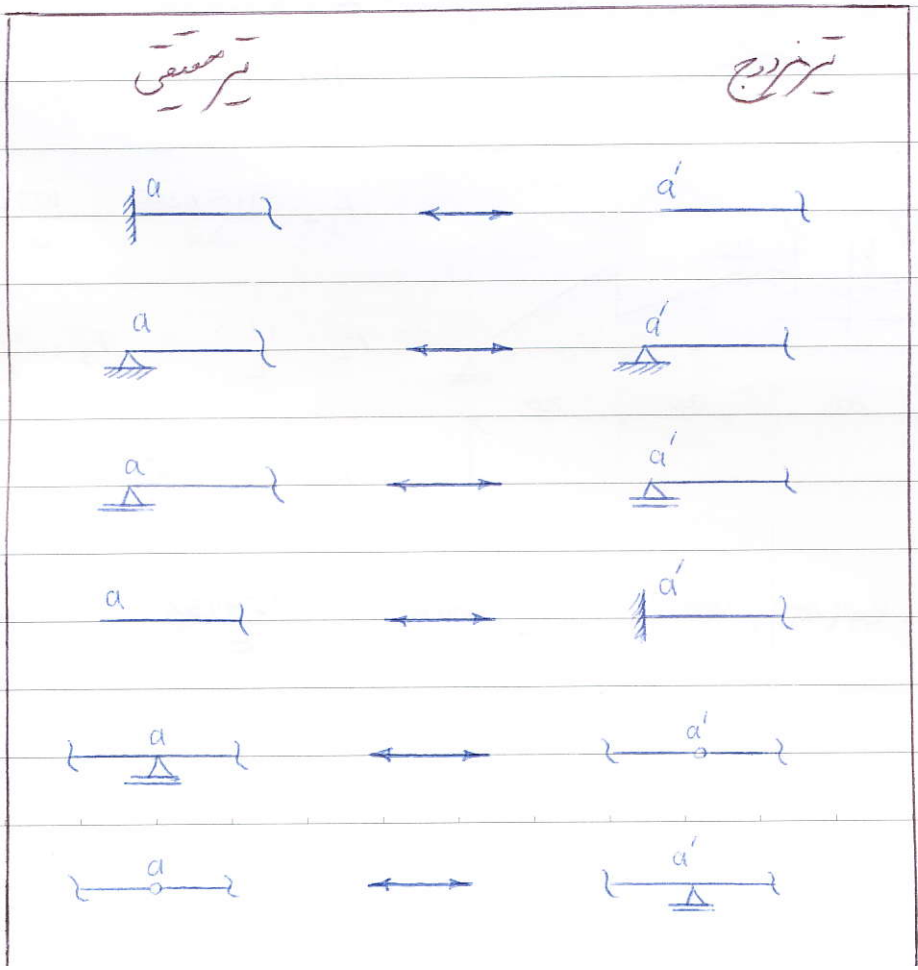
$\delta_a = 0$ وجود دارد δ_b $\delta_c = 0$

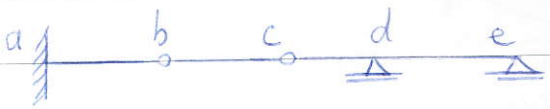
شرایط مرزی استاتیکی تیر مزدوج:

$V_{a'} = 0$ تغییر شکل $V_{b'}$ وجود دارد $V_{c'}$

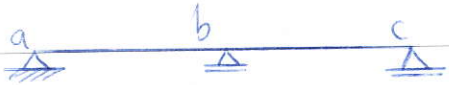
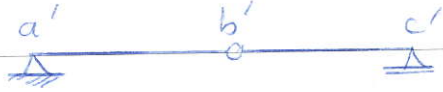
$M_{a'} = 0$ وجود دارد $M_{b'}$ $M_{c'} = 0$

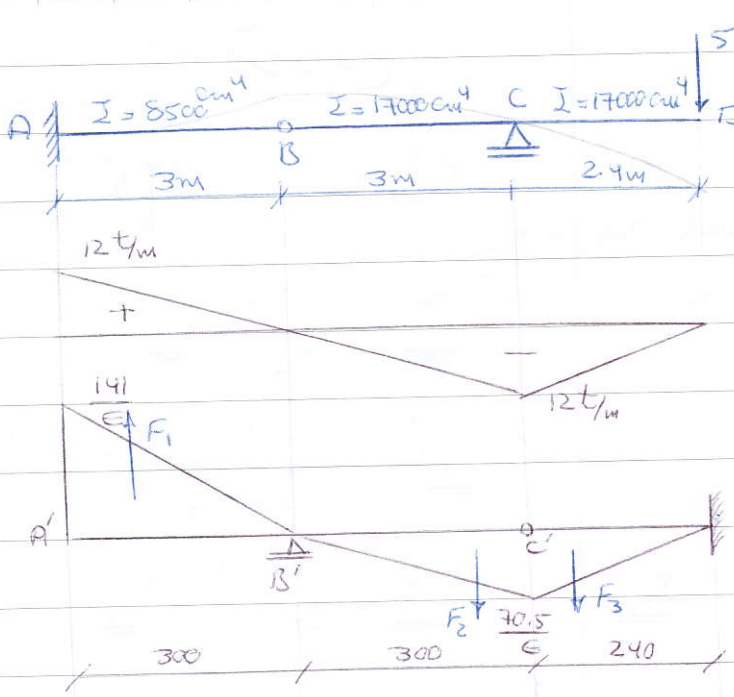




تیر ساده	تیر مزدوج
	
	
	
	

مثال‌هایی انتخاب شده تقریباً ترکیبی هستند بدین گونه که تیر مزدوج مثل هست ولی تیر ساده حل است. حال همین مثال‌ها را ترکیبی ناهمن ارائه می‌کنیم. یادآوری می‌شود که تیر مزدوج ساده‌ای ناهمن نایدار است. شرط پایداری این سازه‌های نایدار ارائه‌ی راه‌کلی ترکیبی ناهمن است کلی را بهتر درک نمایید استفاده کنید.

تیر ساده	تیر مزدوج
	
	
	



Δ_{IS} ، Δ_D ، $\theta_{IS_{left}}$ المطلوب

$E = 2\times10^6$ ... وحدات المسألة

$$F_1 = \frac{21150}{E} \qquad F_2 = \frac{10575}{E}$$

$$F_3 = \frac{8460}{E}$$

$$\Delta_{IS} = M_{IS}' = F_1(200) = \frac{423\times10^4}{2\times10^6}$$

$$= 2.11\ cm \uparrow$$

$$\theta_{ISe} = V_{IS'e}' = F_1 = \frac{21150}{2\times10^6}$$

$$= 0.0105\ rad$$

$$\Delta_D = M_D'$$

$\Sigma M_{C'} = 0 \rightarrow$ ($A'B'C'$ يسار)

$$F_1(200+300) - F_2(100) - R_{IS}'(300) = 0 \rightarrow R_{IS}' = \frac{31725}{E}$$

$$\Delta_D = M_D' = F_1(200+300+240) - R_{IS}'(300+240) - F_2(100+240) - F_3(150)$$

$$\rightarrow \Delta_D = \frac{-642.96\times10^4}{2\times10^6} = -3.21\ cm \downarrow$$

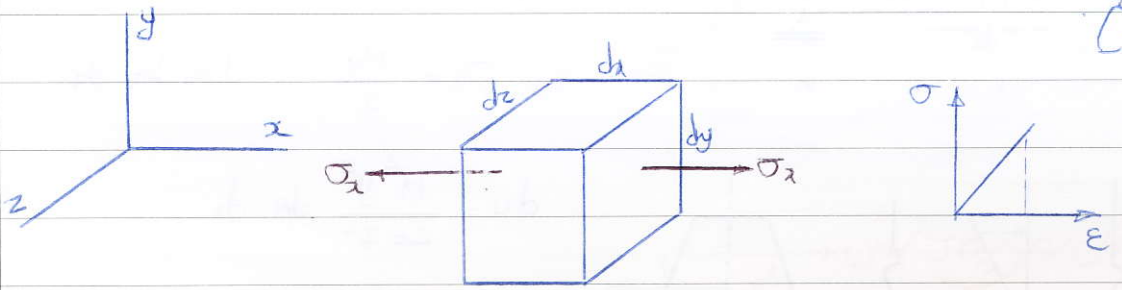
روش کلی انرژی

در مکانیک انرژی به صورت خاصیت ای که کار تعریف می‌شود و کار نیز حاصلضرب نیرو در تغییر مکان در راستای نیرو است. در اجسام صلب مثل سازه‌های الاستیک، حاصلضرب تنش در سطوح مربوطه ای در نیرو می‌نامیم و تغییر شکل یک سازه تشکیل تغییر شکل یک نیروی فوق را می‌دهد. حاصلضرب این دو کمیت کار داخلی انجام شده در داخل جسم الاستیک است انرژی پتانسیل داخلی است. این کار داخلی به صورت انرژی داخلی در داخل جسم الاستیک ذخیره می‌شود. به این انرژی **انرژی کرنش داخلی** گوییم. در اغلب موارد در زبان ساده به آن انرژی داخلی گوییم.

در این فصل ابتدا انرژی داخلی را طرح می‌کنیم، سپس به رابطه انرژی کرنش های مختلف برای حالت تغییر شکل ساده ای ارائه می‌شود. خواهید دید که این رابطه ها فقط تغییر شکل های کشسان هستند و از آن‌ها می‌توان تغییر شکل های کشسان، خمش، پیچش و نیروی محوری و برشی را حل کرد.

انرژی کرنشی داخلی برای تنش تک محوری

یک جزء کوچک از مصالح الاستیک که تحت تاثیر تنش محوری قرار دارد در نظر گرفته و برای آن رابطه انرژی را حاصل می‌نماییم.



انرژی = نیرو × تغییر مکان

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x\, dz\, dy)(\varepsilon_x\, dx) \rightarrow dU = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x\, dx dy dz$$

$$\rightarrow dU = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x\, dv \rightarrow U_0 = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x$$

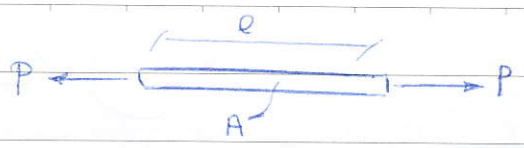
dU/dv انرژی کرنشی ذخیره شده در واحد حجم مصالح و یا احتمالی انرژی کرنشی U_0 نامیده می‌شود.

در اجسام الاستیک:

قانون هوک $\rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

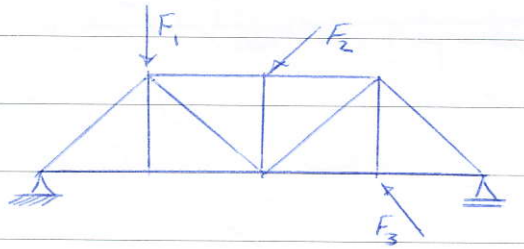
$$\frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_x \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \rightarrow U = \int_v \frac{\sigma_x^2}{2E} dv$$

۱) انرژی ذخیره شده برای اعضای محوری



$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{dv} &= \frac{\sigma_x^2}{2E} \\ \sigma_x &= P/A \\ dv &= A\,dx \end{aligned}\right\} \rightarrow dU = \frac{P^2}{2EA^2} A\,dx \rightarrow U = \int_0^L \frac{P^2}{2EA}\,dx$$

$$U = \frac{P^2 L}{2EA}$$

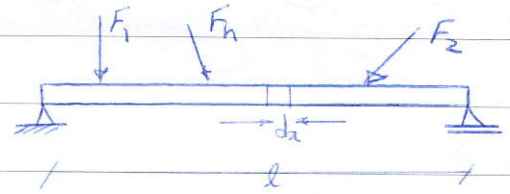


$$U = \sum \frac{P_i^2 L_i}{2EA_i}$$

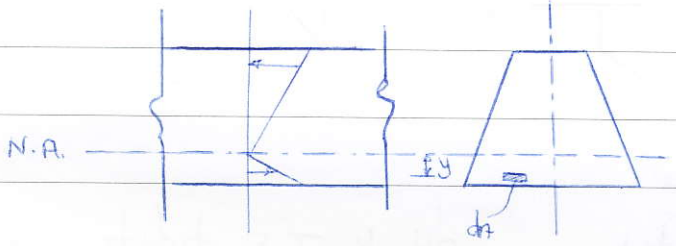
P_i = نیروی داخلی عضو i ام L_i = طول

A_i = سطح مقطع

۲) انرژی ذخیره شده برای اعضای تحت خمش (خمش خالص)



$$\sigma_x = \frac{My}{I} \qquad dv = dA \cdot dx$$



$$dU = \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA \cdot dx$$

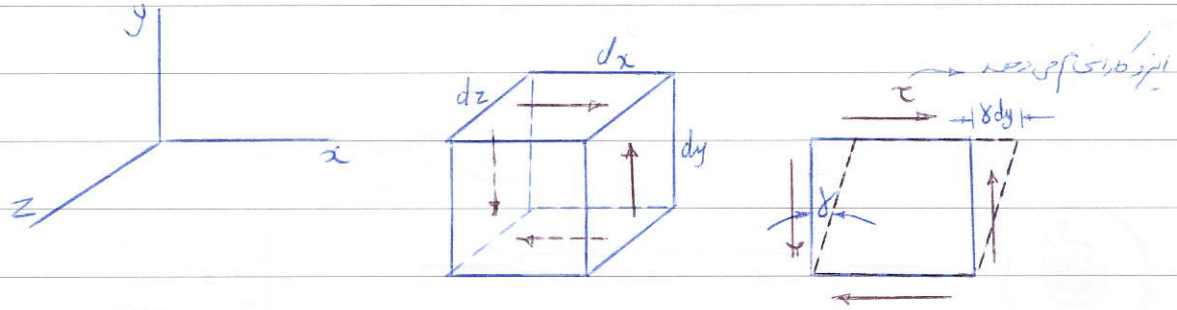
$$U = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA\,dx$$

$$\rightarrow U = \int \frac{M^2}{2EI^2} dx \int y^2 dA \rightarrow U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

M = لنگر خمشی داخلی

انرژی داخلی برای تنش‌های برشی

مجدداً عضو کوچکی از یک جسم الاستیک تحت تأثیر تنش‌های برشی را در نظر گرفته و برای آن رابطه انرژی را استخراج می‌کنیم



انرژی کرنشی تجمعی در حجم

$$dU = \frac{1}{2}\tau\, dz\, dx \times \gamma dy = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dv$$

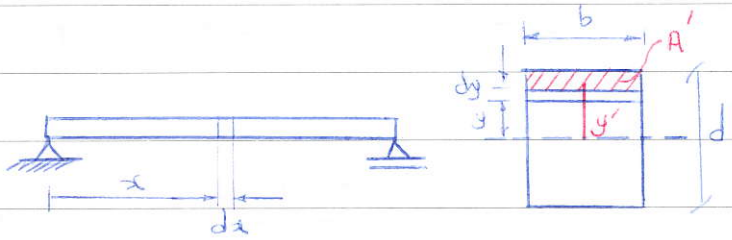
$$\rightarrow \quad \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

برای اجسام الاستیک

$\tau = G\gamma$ G ضریب الاستیسیته برشی

$$\frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\tau\frac{\tau}{G} \rightarrow U_0 = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

۱) انرژی کرنشی داخلی برای تیرهای برشی



V_x نیروی برشی داخلی

$$\frac{dU}{dv} = \frac{\tau^2}{2G} \qquad \tau = \frac{V_x Q}{Ib}, \quad dv = b\, dy\, dx$$

$$Q = A'y' = b(d/2 - y)\left[y + \left(\frac{d/2 - y}{2}\right)\right] = \frac{b}{8}(d^2 - 4y^2)$$

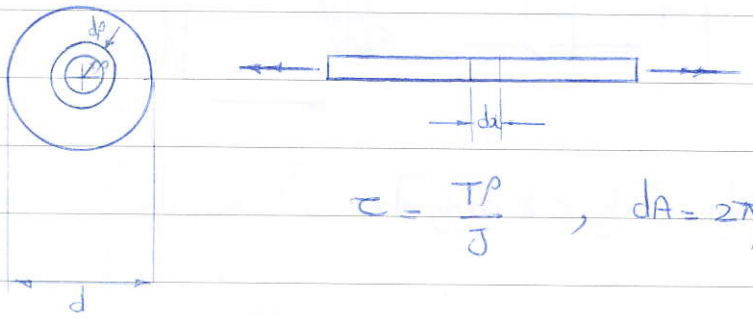
$$\Rightarrow \quad dU = \frac{V_x^2 (d^2 - 4y^2)^2}{128\, I^2 G}\, dv = \frac{V_x^2 (d^2 - 4y^2)^2}{128\, I^2 G}\, b\, dx\, dy$$

نهال NAHAL

$$U = 1.2 \int_0^L \frac{V_x^2\, dx}{2GA} \quad \rightarrow \quad U = k \int_0^L \frac{V_x^2\, dx}{2GA}$$

مقطع مستطیل : $k = 1.2$ ○ : $\frac{10}{6} = 1.667$ I : $k = 1$

۱۲) انرژی کرنشی داخلی برای تیر تحت پیچش



$$\frac{du}{dv} = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad , \quad dA = 2\pi\rho d\rho \rightarrow dv = 2\pi\rho d\rho dx$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{2} \frac{T^2\rho^2}{GJ^2} 2\pi\rho d\rho dx \quad \rightarrow \quad U = \int \frac{1}{2} \frac{T^2\rho^2}{GJ^2} 2\pi\rho d\rho dx$$

$$\rightarrow U = \int \frac{1}{2} \frac{T^2}{GJ^2} dx \int_0^C 2\pi\rho^3 d\rho = \int \frac{1}{2} \frac{T^2}{GJ^2} dx\, 2\pi \frac{C^4}{4} \qquad J = \frac{\pi C^4}{2}$$

$$U = \int \frac{T^2}{2GJ} dx$$

مقطع مستطیل : $J = cb^3h$ ضلع بزرگ h ضلع کوچک b $c = \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right]$

انرژی کرنشی برای تنش‌های چند محوره

$$U_0 = \frac{dU}{dv} = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}$$

با استفاده از قانون عمومی هوک :

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)$$

$$+ \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

تنش صفحه‌ای:

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\sigma_y^2}{2E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

وقتی عضوی تحت ترکیب نیروهای محوری، خمشی، برشی و پیچشی باشد از آنجایی که انرژی تابع اسکالر است، می‌توان انرژی را برای نیروهای داخلی مختلف جمع نمود و آن‌ها را با هم جمع کرد.

$$U = \frac{P^2L}{2EA} + \int \frac{M^2}{2EI}dx + k\int \frac{V_x^2}{2GA}dx + \int \frac{T^2}{2GJ}dx$$

می‌سه تغییر مکان که با استفاده از روش کاری احرالی:

با استفاده از روابط حاصل شده برای انرژی ذخیره شده در اعضای الاستیک روش‌های مختلف ارائه می‌گردد.

۱) روش کار مجازی: از لحاظ تئوری این روش بسیار قابل فهم و اعتماد خوب برای روش‌های دیگر است اما از لحاظ کاربردی بسیار ضعیف و کند است. مبنای این روش بر اساس اصل بقای انرژی است.

انرژی داخلی = کار خارجی

عضو خمشی $U = \int_0^l \frac{M^2dx}{2EI}$	عضو محوری $U = \int_0^l \frac{P^2dx}{2EA}$
عضو پیچشی $U = \int_0^l \frac{T^2dx}{2GJ}$	عضو برشی $U = k\int_0^l \frac{V_x^2dx}{2GA}$

مثال ۱: مقدار تغییر مکان در انتهای تیر یک سر درگیر تحت بار متمرکز P چقدر است؟

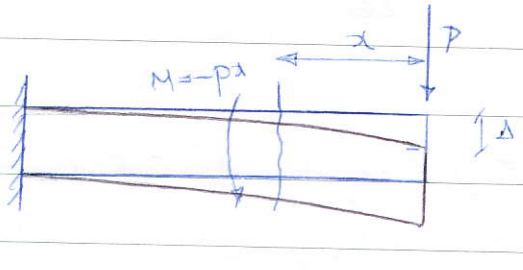


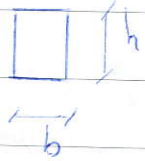
$$We = \frac{1}{2} P\Delta$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2 L}{EA}$$

$$We = U \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{EA}$$

مثال ۲: مقدار تغییر مکان در انتهای تیر تحت بار P در حالت دو بعدی





$We = \frac{1}{2} P\Delta$ $\quad U = U_b + U_s$ $\quad$ انرژی خمشی + انرژی برشی

$$U_b = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$U_s = 1.2 \int_0^L \frac{V_x^2}{2GA} dx = 1.2 \int_0^L \frac{P^2}{2GA} dx = \frac{1.2 P^2 L}{2GA}$$

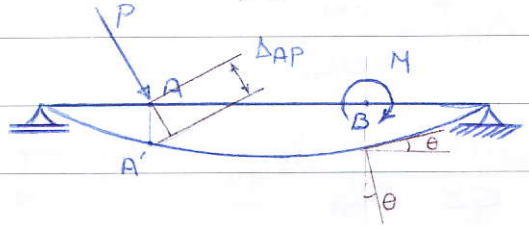
$$\frac{1}{2} P\Delta = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{1.2 P^2 L}{2GA} \Rightarrow \Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{خمشی}} + \underbrace{\frac{1.2 PL}{GA}}_{\text{برشی}}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\frac{h^2}{L^2}\right) = \Delta_b\left(1 + 0.75\frac{h^2}{L^2}\right)$$

$\frac{h}{L} = \frac{1}{10}$ تا $\frac{1}{30}$ $\quad L$ طول تیر $\quad h$ ضخامت تیر

۶ کستیگلیانو (Castigliano)

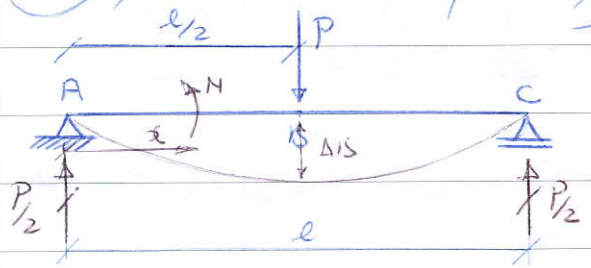
ثابت می‌شود مشتق جزئی تابع انرژی در یک جسم الاستیک نسبت به درجه‌ی آزادی ثابت بوده و برابر با مؤلفه‌ی آن نیرو یا لنگر در امتداد نیرو است، به شرط آنکه تغییر مکان الاستیک نقطه‌ی اثر نیرو در امتداد نیرو باشد.



$$\Delta_{AP} = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M}$$

مثال: در تیر نشان داده شده مطلوبست تعیین تغییر مکان قائم نقطه B فقط در علت اثر برشی.



(EI ثابت)

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\Delta B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

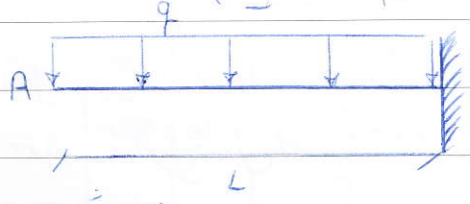
$$\Rightarrow \Delta B = 2\int_0^{l/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \qquad M = \frac{P}{2}x \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = x/2$$

$$\Delta B = 2\int_0^{l/2} \frac{Px}{2EI} \times \frac{x}{2} dx = \frac{P}{2EI}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{P}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

$$\rightarrow \Delta B = \frac{PL^3}{48EI}$$

در روش کار مجازی گفته شد که نیرو در محل مورد نظر برای محاسبه‌ی انرژی باید اضافه شود.

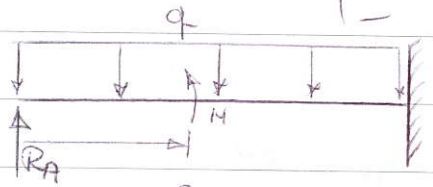
مثال: در تیر نشان داده شده مطلوبست محاسبه‌ی ΔA در امتداد قائم و θ_A (فقط تغییر شکل ناشی از خمش)



(EI ثابت)

(نقطه مورد نظر نباید نیروی متمرکز داشته باشد تا بتوان از نتایج انرژی استفاده کرد. بنابراین نیروی مجازی R_A در امتداد قائم (مورد نظر) به انتهای تیر انرژی‌ساز، قبل از اعمال بار گسترده‌ی q به تیر اعمال شده است.)

فرض اصلی ما این است که مقدار نیروی عددی مجهول ما قبل عدد را طوری تغییر دهیم تا بار کمتر تبدیل می‌کنیم. این تغییر شکل مجدداً با قضیه کاستیگلیانو حل می‌کنیم.



$$\Delta_A \uparrow = \frac{\partial U}{\partial R_A}$$

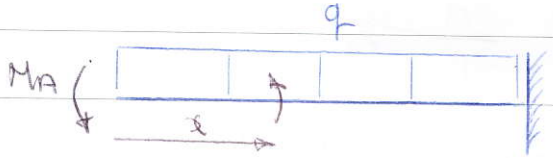
$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI}\,dx \qquad \Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx$$

$$\rightarrow M = R_A x - \frac{qx^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\Rightarrow \Delta_A = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(R_A x - \frac{qx^2}{2}\right) x\,dx = \frac{-q}{EI}\left(\frac{x^4}{8}\right)\Big]_0^l = -\frac{ql^4}{8EI}$$

علامت منفی برای Δ_A بدین است که تغییر مکان در خلاف نیروی پارامتری R_A است.

تعیین θ_A :



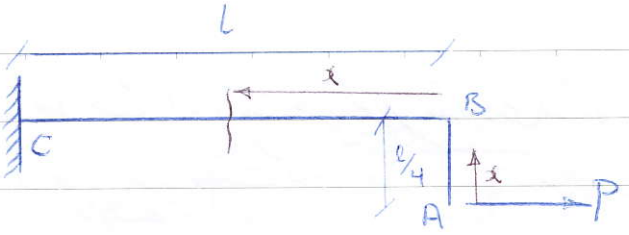
$$U = \int \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A}\,dx \qquad M = -M_A - \frac{qx^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial M_A} = -1$$

$$\theta = \int_0^l \frac{1}{EI}\left(M_A - \frac{qx^2}{2}\right)(-1)\,dx = \frac{q}{EI}\int_0^l x^2\,dx = \frac{q}{EI}\frac{l^3}{6} = \frac{ql^3}{6EI}$$

مثال: در مثال نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را حل نمایید. (تغییر شکل برشی را نیز در نظر گیرید)

صرف نظر این مثال این است که نشان دهیم لازم است انتگرال گیری تابع انرژی برای تمامی اعضا باید حساب شود.



$$U = \int_A^B \frac{N^2}{2EI}\,dx + \int_B^C \frac{N^2}{2EI}\,dx$$

$$\overrightarrow{\Delta_A} = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_A^B \frac{N}{EI}\frac{\partial N}{\partial P}\,dx + \int_B^C \frac{N}{EI}\frac{\partial N}{\partial P}\,dx$$

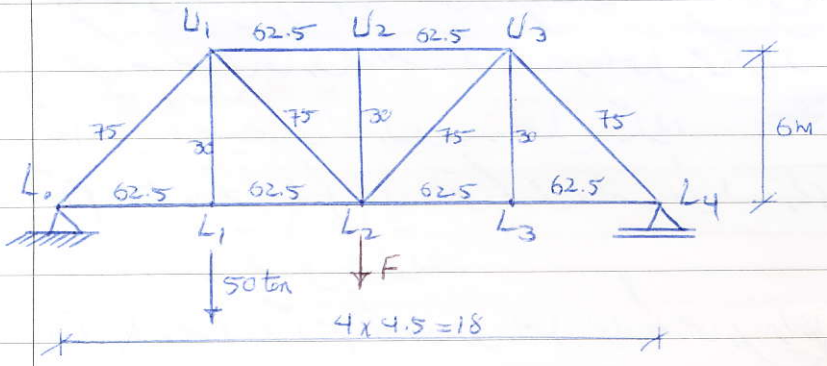
$$N = Px \rightarrow \frac{\partial N}{\partial P} = x \qquad AB \text{ قسمت}$$

$$N = \frac{PL}{4} \rightarrow \frac{\partial N}{\partial P} = L/4 \qquad BC \text{ قسمت}$$

$$\Delta A = \int_0^{L/4} \frac{Px}{EI}\,x\,dx + \int_0^{L} \frac{PL}{4EI}\,\frac{L}{4}\,dx = \frac{13PL^3}{192EI}$$

مثال: مطلوبست تعیین تغییر مکان قائم نقطه L_2 در خرپای زیر داده شده در شکل. اعداد روشه شده روی اعضا سطح مقطع اعضا را حسب cm^2 می باشد.

توجه به اینکه در L_2 نیروی یا بقری وجود ندارد لازم است نیروی مانند F در آنجا قرار داده شود.



$$U = \sum \frac{P^2L}{2EA}$$

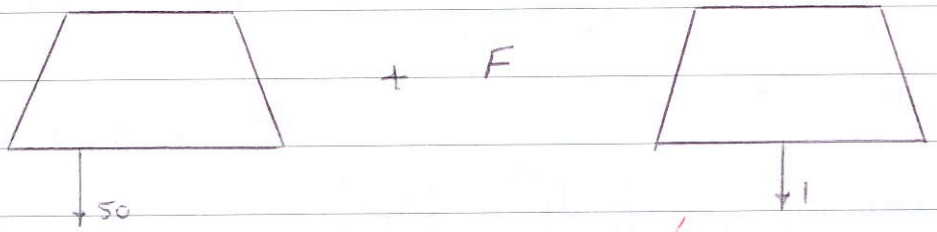
$$\Delta L_2 = \sum \frac{PL}{EA}\frac{\partial P}{\partial F} = \frac{1}{E}\sum \frac{L}{A} P \frac{\partial P}{\partial F}$$

واحد نیرو = kg واحد طول = cm

عضو	L	A	L/A	نیروی داخلی اعضا kg		$\partial P/\partial F$	$P\frac{L}{A}\frac{\partial P}{\partial F}$
واحد	cm	cm^2	$1/cm$	عددی	F	kg/kg	kg/cm
L_0L_1	450	62.5	7.2	28125	0.375F	0.375	75937.5
L_1L_2	450	62.5	7.2	28125	0.375F	0.375	75937.5
L_4U_3	750	750	10	-15625	-0.625F	-0.625	97656.25

برای حل مسئله لازم است خرپا برای بارگذاری که داده شده تکفیک شود. همچون نیروی یا لنگر که وجود دارد تکفیک خرپا دولت گیر خواهد شد. توصیه می‌شود در این حالت خرپا یکبار به تنهایی برای بارهای خارجی معادل و یکبار برای بار یا لنگر مساوی واحد تکفیک شده و نتایج آن تکفیک با هم ترکیب شوند. این کار را در آخر خواهد شد.

$$\frac{\Delta L}{2} = \frac{795625}{2\times10^6} = 0.40\text{cm}\downarrow$$



روش کارمجازی برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها

کارمجازی در مکانیک سازه‌ها در دو حالت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

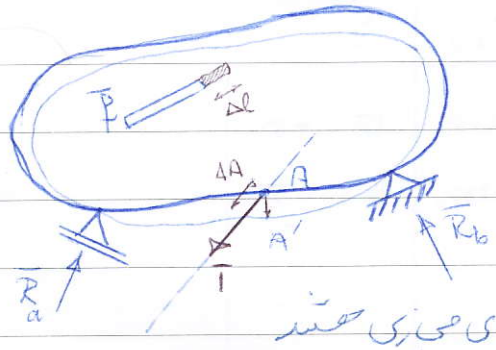
۱) در صورتیکه نیرو یا لنگر تغییر شکل مجازی باشد. از این شیوه در روش استاتیک برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی سرکارمی‌رود.

۲) حالتی که تغییر شکل یا تغییر مکان واقعی است. از این شیوه در محاسبه تغییر شکل یا تغییر مکان استفاده می‌شود بعضی به نیروی مجازی واحد و سازه اعمال می‌گردد.

گام اول: یک نیروی مجازی بر سازه اعمال می‌گردد.

گام دوم: تغییر شکل‌های واقعی که می‌تواند ناشی از بارهای خارجی یا تغییر دما و یا نشست تکیه‌گاهی باشد بر سازه اعمال می‌گردد.

گام سوم: حال می‌توان کارمجازی داخلی برابر کارمجازی خارجی. این رابطه تعادل تغییر شکل نقطه مورد نظر را در اثر اعمال نیروی واحد مجازی به دست می‌دهد.



$\bar{1}$: بار واحد مجازی خارجی

$\bar{f}$: نیروی داخلی مجازی

$\bar{R}_a$ ، $\bar{R}_b$: واکنش‌های مجازی

* در رابطه مورد استفاده بالای تمام علائم که نماینده کمیت‌های مجازی هستند یک خط تیره قرار دارد.

کار مجازی خارجی = کار مجازی داخلی

$$W_R + \bar{T} \times \Delta_A = \sum(\bar{f} \cdot \Delta L)$$

(تغییر شکل حقیقی)

($\bar{T} \times \Delta_A$: کار مجازی)

W_R: کار مجازی واکنش های تکیه گاهی به علت نشست تکیه گاهی

۱) رابطه کار مجازی در خرپا:

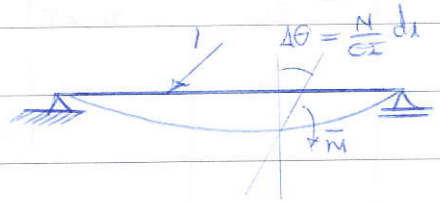
الف) به علت بار خارجی:

$$W_R + \bar{T} \times \Delta_A = \sum(\bar{f} \cdot \frac{PL}{EA})$$

ب) به علت تغییرات دما:

$$W_R + \bar{T} \times \Delta_A = \sum(\bar{f}\,(\alpha \Delta T L))$$

۲) رابطه کار مجازی در تیر به علت لنگر خمشی:



$$W_R + \frac{\bar{T}\Delta A}{\Delta\theta} = \int \bar{m} \cdot \frac{M}{EI} dx$$

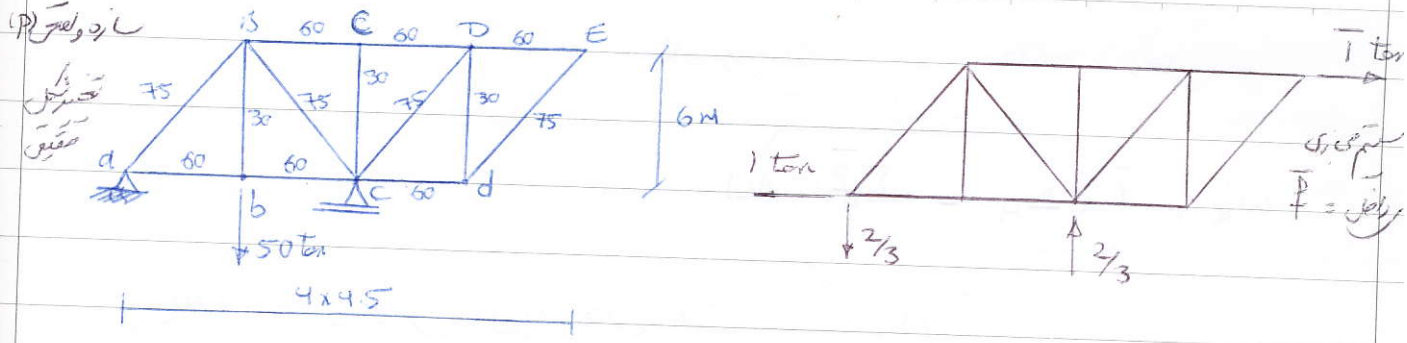
$m \cdot \theta \sim f \cdot l \sim$ انرژی

کاربرد روش کار مجازی

۱) خرپا:

مثال: در خرپای مثال داده شده تغییر مکان نقطه E را بدست آورید. (اعداد داده شده سطح مقطع بر حسب cm^2 می باشد)

$$E = 2 \times 10^6 \, kg/cm^2 = 2 \times 10^3 \, ton/cm^2$$



$$\bar{W}_R + \bar{I} \times \Delta\vec{E} = \sum \bar{f} \cdot \frac{PL}{EA}$$

$\bar{f}\frac{PL}{A}$ ton^2/cm	P ton	$\bar{P}$ ton	$\frac{L}{A}$ $1/cm$	A cm^2	L cm	عضو
70.4	+18.75	+0.5	7.5	60	450	ab
70.4	+18.75	+0.5	7.5	60	450	bC
-260	-31.25	+0.83	10	75	750	aB
+260	-31.25	+0.83	10	75	750	Bc
$\Sigma =$	140.8					

عناصری که یکی از نیروهای P یا $\bar{P}$ برای آن‌ها صفر شده است در جدول نوشته نشده است.

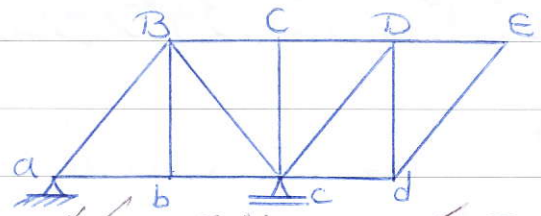
$$\bar{I}\Delta = \frac{1}{2000} \times 140.8 = 0.0704 \Rightarrow \Delta = 0.0704\,cm \rightarrow$$

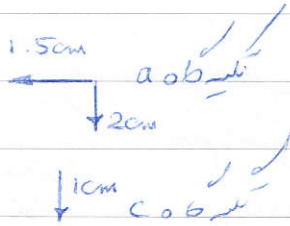
با توجه به اینکه علامت Δ مثبت بدست آمده است یعنی این است در جهت تغییر مکان هم جهت بار واحد جابجا می‌شود.

$$W_R + \bar{I} \times \Delta = \sum \frac{\bar{P}_i \cdot P_i L_i}{E \cdot A_i}$$

این روش خوبیه

مثال: در خرپای مثال قبل تغییر مکان افقی گره E را بعلت نشست کی تکیه گاهی برحسب می یابیم.

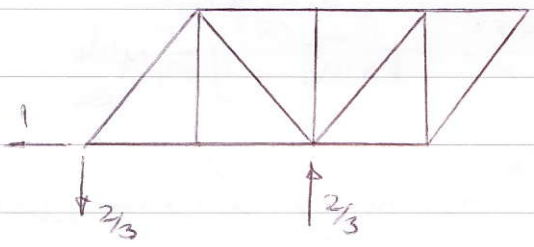




برای محل در نقطه E
با وارد حی یکی راد
اعتبار دلخواه انرژی دهم
تا سیستم حی یکی بدست آید. اکنون تغییر مکان کی واقعی را که حی نشست کی تکیه گاهی باشد
بر سیستم حی یکی اعمال می نماییم. کار کی خارجی موجود ناشی از بار واحد حی یکی 1 ton و کار درونی کی
تکیه گاهی حی یکی است. کار داخلی موجود مانند چون P برای اعضای داخل صورت و بار خارجی نداریم
در اثر نشست کی تکیه گاهی هیچگونه تغییر طولی در اعضا ایجاد نمی شود.

$$\bar{W}_R + \bar{T} \times \bar{\Delta}_E = \sum \bar{f} \frac{PL}{EA} \rightarrow (\tfrac{2}{3})(2) + (1)(1.5) - \tfrac{2}{3}\times 1 + 1 \times \Delta E = 0$$

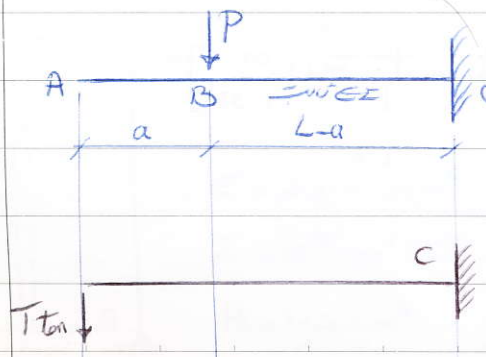
$$\rightarrow 1 \times \Delta E = -2.17 \Rightarrow \Delta_E = 2.17\,cm$$



1 ton در نقطه مورد نظر را عمل مورد نظر اعمال کردیم. → T ton

۲) تیر:

در تیر زیر داده شده تغییر مکان قائم نقطه a را می یابیم. (فقط از برش صرف نظر کرده)



$$1 \times \Delta_A \downarrow = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$$

$\bar{f} \cdot \delta$

$\bar{m} \cdot de$

می سپس با تعادل کار اکی را می نویسیم.

$$1 \times \Delta_A \downarrow = \int_A^{B} + \int_B^{C}$$

در محاسبات انتگرال گیری این مثال به خصوصیات مواد برای سهولت انتگرال نیاز می باشد

به طور مستقل

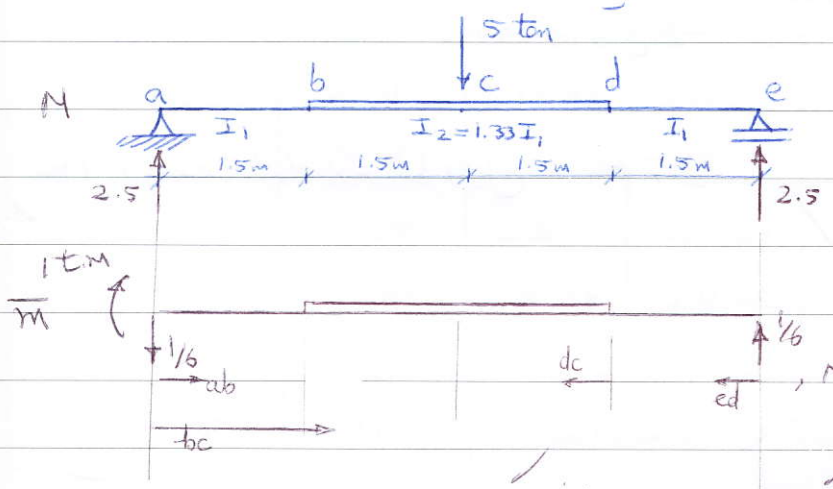
ناحیه AB $\quad M = 0 \quad \bar{m} = x(-1) \quad 0 < x < a$

ناحیه BC $\quad M = -px \quad \bar{m} = -1(a+x) \quad 0 < x < L-a$

$$1 \times \Delta_A \downarrow = 0 + \frac{1}{EI} \int_0^{L-a} [-(a+x)][-px]\, dx$$

$$\rightarrow \Delta_A \downarrow = \frac{P}{6EI} (L-a)^2 (2L+a)$$

مثال: در تیر زیر داده شده دوران نقطه A را محاسبه کنید.



$$E = 2 \times 10^3 \ t/cm^2$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= 6200\ cm^4 \\ I_2 &= 8260\ cm^4 \end{aligned}\right\}$$

$$\bar{1} \times \vec{\alpha_a} = \int \bar{m} M \frac{dx}{EI}$$

در طول نقاط انتگرال گیری توابع $\bar{m}$ ، M ، I دارای شکست و تغییرات می باشند.

بنابراین روش حل لازم است انتگرال گیری در چهار محدوده انجام گردد.

$$\bar{1} \times \vec{\alpha_c} = \int_a^b + \int_b^c + \int_e^d + \int_d^c$$

$$= \frac{1}{EI_1} \left[\int_a^b \bar{m} M dx + \int_b^c \bar{m} M \frac{dx}{1.33} + \int_e^d \bar{m} M dx + \int_d^c \bar{m} M \frac{dx}{1.33} \right]$$

نهال NAHAL

x	I	$\bar{M}$	M	نواحی
$0<x<1.5$	I_1	$1-x/6$	$2.5x$	b ā a
$1.5<x<3$	$1.33I_1$	$1-x/6$	$2.5x$	c ā b
$0<x<1.5$	I_1	$x/6$	$2.5x$	d ā e
$0<x<1.5$	$1.33I_1$	$1/6(1.5+x)$	$2.5(1.5+x)$	c ā d

$$1\times\overrightarrow{\alpha_a}=\frac{1}{EI_1}\left[\int_0^{1.5}(1-x/6)(2.5x)dx+\int_{1.5}^{3}(1-x/6)(2.5x)\frac{dx}{1.33}\right.$$

$$\left.+\int_0^{1.5}(x/6)(2.5)x\,dx+\int_0^{1.5}(1/4+x/6)(3.75+2.5x)\frac{dx}{1.33}\right]$$

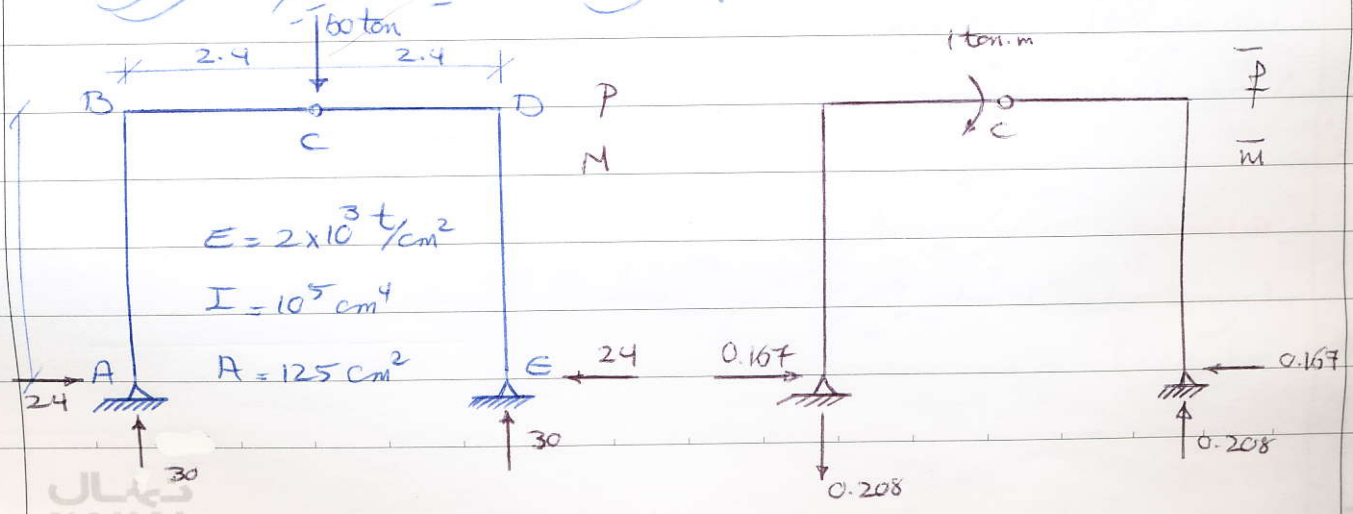
$$=\frac{1}{EI_1}\left[\left(\frac{5.5x^2}{2}-\frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5}+\frac{1}{1.33}\left(\frac{2.5x^2}{2}-\frac{x^3}{7.2}\right)_{1.5}^{3}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5}+\frac{1}{1.33}\left(\frac{3.75}{4}x+\frac{5}{8}x^2+\frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5}\right]=\frac{9.157}{EI_1}$$

$$\Rightarrow \alpha_a=0.0074\ \text{Rad}\ \circlearrowright$$

۳) قابل ۵

(مقاب شکل داده شده دوران نقطه مورد نظر را برای سه عضو تیر (اثر تغییر شکل برشی و محوری منظور نشود))



$$1 \times \vec{\alpha_{cd}} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx + \sum \bar{f} \frac{PL}{EA}$$

$$1 \times \vec{\alpha_{cd}} = \int_{A}^{B} \bar{m} M \frac{dx}{EI} + \int_{B}^{C} + \int_{E}^{D} + \int_{D}^{C} + \sum \bar{f} \frac{PL}{EA}$$

مقادیر $\bar{m}$ ، M ، $\bar{f}$ ، P در نواحی مختلف تعریف می‌شوند.

$L=3$, $0<x<3$ $\begin{cases} \bar{f} = 0.208 \\ P = -30 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.167x$ $M = -24x$ B بین A

$L=2.4$, $0<x<2.4$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.167 \\ P = -24 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.5 - 2.08x$ $M = -72 + 30x$ C بین B

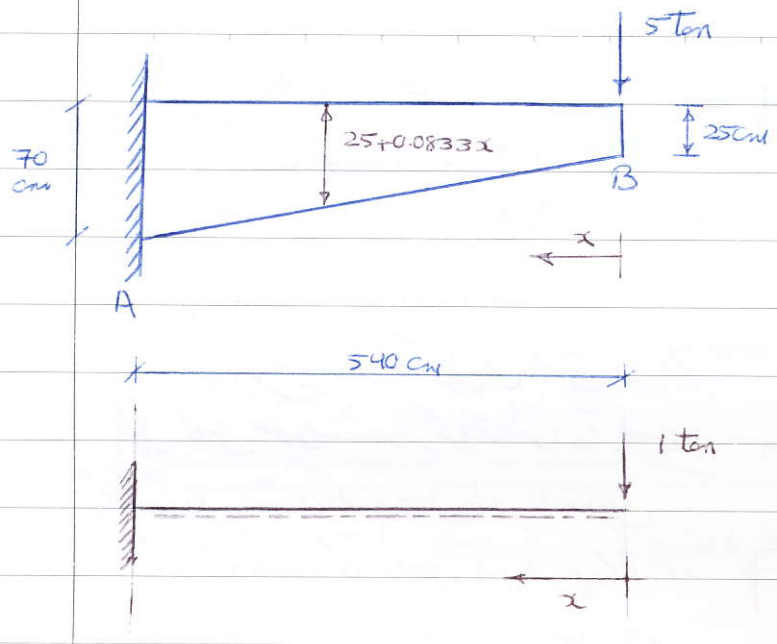
$L=3$ $0<x<3$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.208 \\ P = -30 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.167x$ $M = -24x$ D بین E

$L=2.4$ $0<x<2.4$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.167 \\ P = -24 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.5 + 0.208x$ $M = -72 + 30x$ C بین D

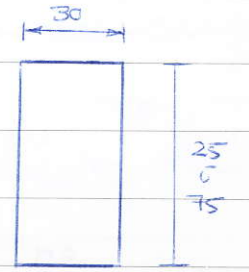
$$1 \times \vec{\alpha_{cd}} = \frac{1}{EI} \left[2 \int_{0}^{3} (-0.176x)(-24x)\,dx + \int_{0}^{2.4} (-0.5 - 0.208x)(-72 + 30x)\,dx \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{2.4} (-0.5 + 0.208x)(-72 + 30x)\,dx \right] + \frac{2}{EA} (0.167)(-24)(2.4)$$

$$= \frac{158.5}{EI} + \frac{19.2}{EA} = 0.00793 + 0.0000768 = 0.008 \text{ Rad.}$$



۴) تیر کنسولی با مقطع متغیر



$E = 20\times10^5 \ kg/cm^2$

$\Delta_B = ?$

$$1\times\Delta_B = \int_0^L \bar{m}\frac{M}{EI}dx$$

$\bar{m} = -x \ ton.cm$, $M = -5x \ ton.cm$, $I = 30(25+0.0833x)^3\times\frac{1}{12}$

$E = 20\times10^2 \ ton/cm^2$

$$\Delta_B = \frac{1}{E}\int \frac{(-5)(-5x)\,dx}{\frac{30(25+0.0833x)^3}{12}} = \frac{2\times10^6}{833^3 E}\int_0^{540}\frac{x^2dx}{(300+x)^3}$$

$y = a+x \quad \leftarrow x = y-a \Rightarrow dx = dy$

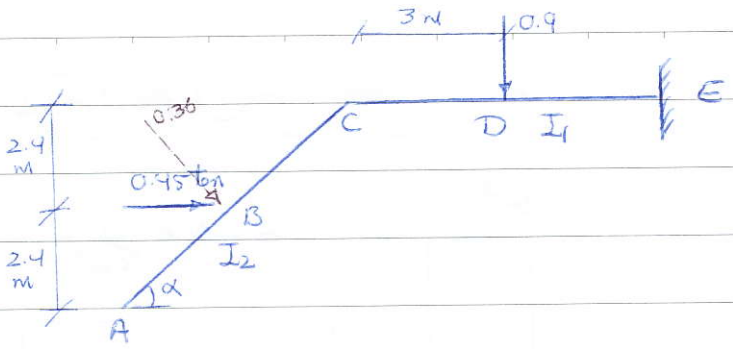
$$\Delta_B = \frac{2\times10^6}{833^3 E}\int_{300}^{840}\frac{(y-300)^2}{y^3}dy = A\left[\int_{300}^{840}\frac{dy}{y} - 600\int_{300}^{840}\frac{dy}{y^2} + 90000\int_{300}^{840}\frac{dy}{y^3}\right]$$

$$= A\left[\ln y + \frac{600}{y} - \frac{90000}{2y^2}\right]_{300}^{840} = 3.11 \ cm$$

- در صورتیکه انتگرال تیر سریع خود نداشته باشد، باید از انتگرال تیر برای عدد گذاشته می‌شود. (در کتاب توضیح داده شده)

۵) سازه با اعضای سه‌پیوند

در سازه نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را محاسبه کنید. (فقط اثر تغییر شکل محوری منظور گردد)



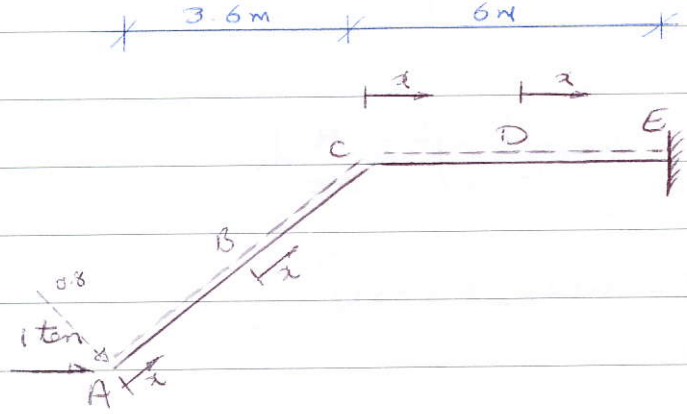
$E = 2100 \ ton/cm^2$

$I_1 = 15625 \ cm^4$

$I_2 = 7810 \ cm^4$

$\sin\alpha = 0.8 \quad \cos\alpha = 0.6$

در اعضای شیبدار انتگرال می بایستی در طول کامل عضو شیبدار گرفته شود و از تصویر عضو بر افق استفاده نکنیم چون این انتگرال نشان دهنده کار داخلی نیروهای عضو داخل است و این کار باید در طول کامل عضو محاسبه گردد.



$$1 \times \delta_A = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$$

B به A : $M = 0 \quad \bar{m} = 0.8x \ ton.m \quad 0 < x < 3$

C به B : $M = 3.6x \quad \bar{m} = 2.4 + 0.8x \ ton.m \quad 0 < x < 3$

D به C : $M = 1.08 \ ton.m \quad \bar{m} = 4.8 \ ton.m \quad 0 < x < 3$

E به D : $M = 1.08 + 0.9x \quad \bar{m} = 4.8 \ ton.m \quad 0 < x < 3$

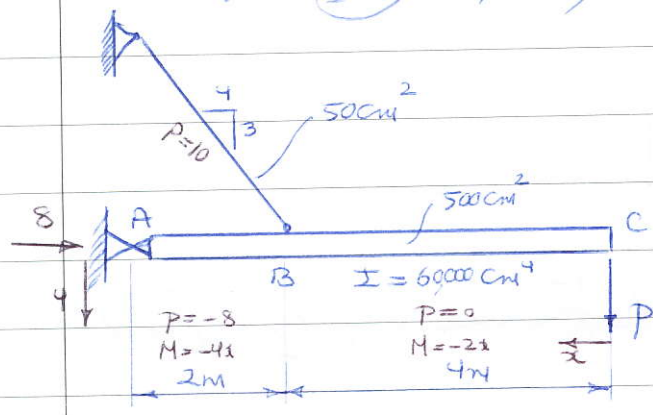
$$E\bar{\delta}_A = \int_0^3 \frac{(2.4+0.8x)(0.36x)}{7810 \times 10^{-8}} dx + \int_0^3 \frac{4.8(1.8)}{15625 \times 10^{-8}} dx + \int_0^3 \frac{4.8(1.08+0.9x)}{15625 \times 10^{-8}} dx$$

$$= \frac{64.156}{15625 \times 10^{-8}} \Rightarrow \delta_A = 1.96 \ cm$$

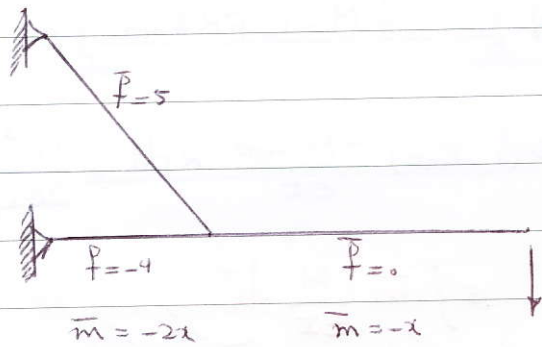
۶) سازه‌های ترکیبی:

سازه‌هایی را گویند که در آن‌ها هم اعضای خمشی و هم اعضای محوری وجود دارد. در این نوع سازه‌ها حتی اگر در صورت مسئله ذکر نشده باشد، انرژی محوری هم‌راه با انرژی خمشی باید منظور گردد.

در سازه‌ی نشان داده شده تغییر مکان قائم نقطه C را پیدا کنید.



$$1 \times \Delta_C = \sum \bar{f} \frac{PL}{EA} + \int_0^L \bar{m} \frac{M}{EI} dx$$



عضو	$\bar{f}$ ton	P ton	L cm	A cm^2	$\bar{f}\frac{PL}{A}$
DIS	+5	+10	250	50	250
AB	-4	-8	200	500	12.8
				$\sum$	262.8 $\frac{ton^2}{cm}$

$$\sum \bar{f} \frac{PL}{EA} = \frac{262.08}{700} = 0.375 \ ton.cm$$

$$\int_0^\ell \frac{\bar{m} M dx}{EI} = \int_0^{200} \frac{(-2x)(-4x)dx}{EI} + \int_0^{400} \frac{(-x)(-2x)dx}{EI} = 1.525 \ ton.m$$

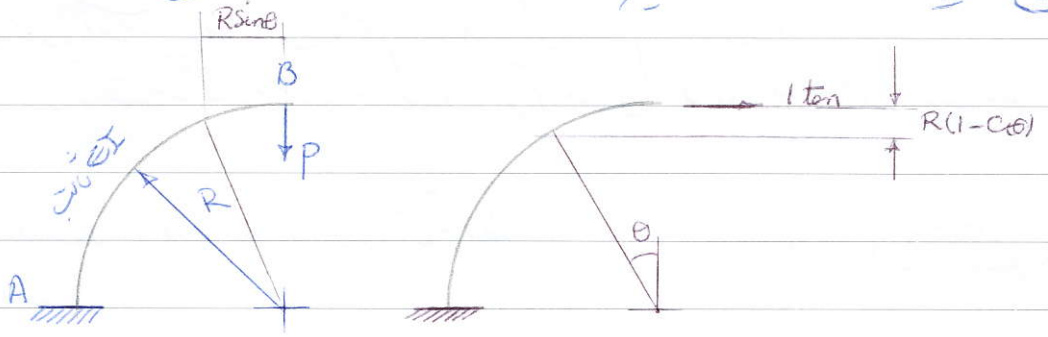
$$1 \times \Delta = 0.375 + 1.525 = 1.9 \ cm$$

۷) سازه‌ی با اعضای منحنی:

در سازه‌ی با اعضای منحنی طور که گفته شد، حل به انتگرال بسته می‌شود که این انتگرال در هر عضو منحنی جداگانه حل می‌شود. در هر عضو منحنی (خمشی) باید دید که انتگرال برحسب کدام طول باید گرفته شود. برای مثال اگر عضو منحنی در ربع اول دایره باشد و مرکز دایره مبدأ مختصات باشد، طول قوس ds برابر $R d\theta$ خواهد بود.

NAHAL

مثال: در قاب زیر دامنه نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را بدست آورید.



روش کار دارای اشتراک از مختصات قطبی استفاده شود.

$$1 \times \Delta_{iB} = \int_0^S \bar{m} \frac{M}{EI} ds$$

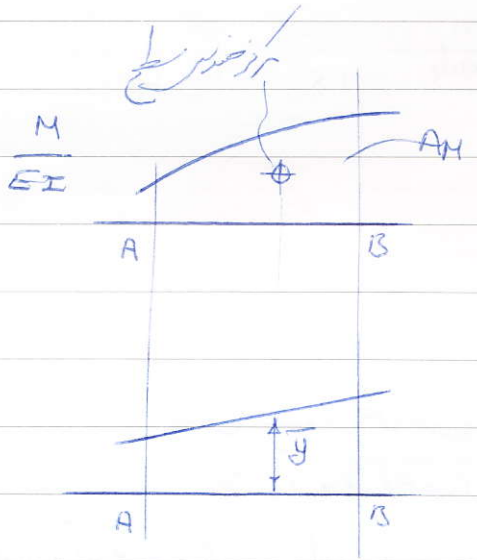
$$ds = R d\theta \qquad \bar{m} = -R(1-\cos\theta) \qquad M = -PR\sin\theta$$

$$1 \times \Delta = \int_0^L \bar{m} \frac{M ds}{EI} \Rightarrow \Delta = \int_0^{\pi/2} -R(1-\cos\theta) \frac{-PR\sin\theta}{EI} R d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

حل عددی $\int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$:

روش کلی که تاکنون حل انتگرال کردیم بعضی برای نوشتن انتگرال خوب بصورت کلی می‌شود. روش‌های کاربردی توان انتگرال بدست آمده از نمودارهای M و $\bar{m}$ نمود و انتگرال را به کمک این نمودارها حل نمود. دو روش زیر این مبنا کار می‌کنند.

۱) روش سطح:



$$\int_A^B \bar{m} \frac{M}{EI} dx = A_M \cdot \bar{y}$$

$\bar{y}$: مقدار $\bar{m}$ در زیر مرکز هندسی سطح $\frac{M}{EI}$

در قسمت AB توابع $\bar{m}$، M، I باید پیوسته و بدون تغییر باشند.

۲) روش ضرب سطح

$$\int \bar{m}\frac{M}{EI}dx = \frac{h}{6EI}[A_0 + 4A_M + A]$$

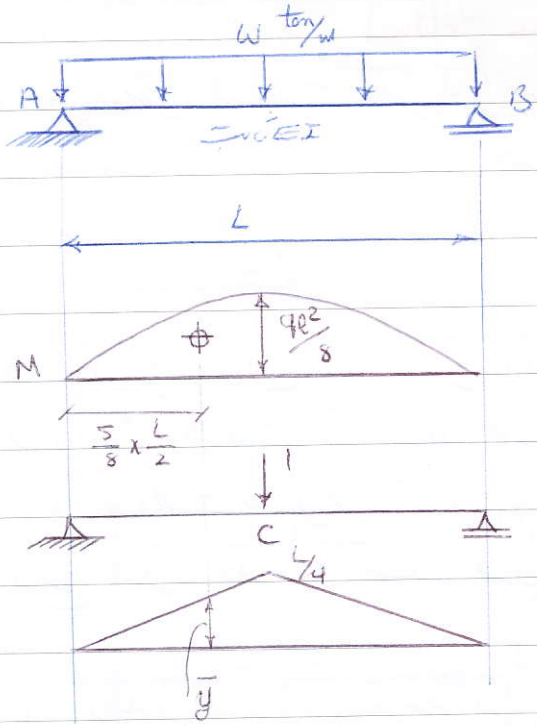
A_0 : مساحت $\bar{m}.M$ در ابتدای قطعه

A_M : " " وسط " "

A : " " انتهای " "

h : طول قطعه

در طول h باید I ثابت باشد، $\bar{m}$ و M باید بصورت خطی باشند.



$$1\times\Delta_C = \int_A^B \bar{m}\frac{M}{EI}dx = 2\int_A^C \bar{m}\frac{M}{EI}dx$$

نصف تیر

$$\bar{y} = \frac{5}{8}\times\frac{L}{4} = \frac{5}{32}L$$

$$A_M = \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{wl^2}{8EI}\right]$$

$$\Delta_C = 2\times\frac{5}{32}L\times\frac{wl^3}{24EI} = \frac{5}{384}\frac{wl^4}{EI}$$

نصف دوم تیر

$$A_0 = 0 \qquad A_M = \frac{L}{8}\times\frac{3}{32}wL^2 \qquad A = \frac{L}{4}\times\frac{wL^2}{8}$$

$$\Delta_C = 2\left(\frac{L}{6\times2}\right)\frac{1}{EI}\left(0 + 4\times\frac{L}{8}\times\frac{3}{3}wL^2 + \frac{wL^2}{8}\times\frac{L}{4}\right) = \frac{5}{384}\frac{wl^4}{EI}$$

فصل ششم

حمید کاظم

تحلیل سازه‌های نامعین

سازه‌های نامعین دسته‌ی بزرگی از سازه‌ها را تشکیل می‌دهند که توجه به خصوصیات مثبت آن‌ها حائز اهمیت است. تحلیل سازه‌های نامعین با استفاده از معادلات تعادل استاتیک و شرط تقابل آسان نمی‌باشد و تعداد مجهولات بسیار بیشتر از تعداد معادلات می‌باشد. برای آن‌ها باید معادلات کمکی در نظر گرفت. برحسب تعریف تعداد مجهولات و معادلات کمکی دو فلسفه‌ی کلی برای تحلیل سازه‌های نامعین وجود دارد.

۱) روش نیرو (زری) Flexibility Method , Force Method

در این روش مجهولات واکنش‌های تکیه‌گاهی یا نیروهای داخلی در نظر گرفته می‌شوند. معادلات اضافی نیز از معادلات سازگاری تغییر شکل‌ها در نظر گرفته می‌شوند. کتی در این فصل ابتدا خواهد شد همین روش می‌باشد.

۲) روش تغییر مکان (روش سختی) Displacement Method , Stiffness Method

در این روش مجهولات تغییر مکان‌ها و دوران‌های تکیه‌گاهی در نظر گرفته می‌شود و معادلات اضافی شامل معادلات تعادل می‌باشد. از این رو این روش معادلات بیشتری دارد که در موضوع درس تحلیل ۲ است. در این روش نرم‌افزارهای زیادی، روش تکرار کانی، روش‌های عددی برای حل معادلات ثبت شده است. در ادامه در تحلیل ماتریسی سازه‌ها مجددا این دو فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرند. ولی تمرکز در تحلیل ماتریسی روش سختی است.

روش نیرو ← روش سازگاری تغییر شکل‌ها ← روش زری

برنامه درس ما برای تحلیل سازه‌های نامعین استفاده از روش نیرو یا سازگاری تغییر شکل‌هاست. در این روش ابتدا درجه نامعینی سازه باید تشخیص داده شود. آنگاه این امر مشکلی وجود آید، در ادامه حل مسئله‌ی فائده خواهد بود.

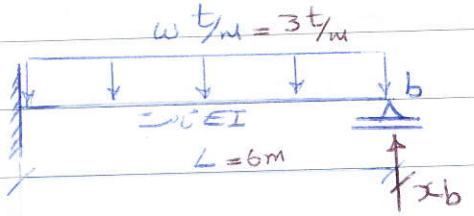
به تعداد درجات نامعینی باید معادلات سازگاری تغییر شکل‌ها را وارد تا سازه قابل تحلیل باشد. حل مثال‌های متعدد روش کار را آموزش کرد. در تحلیل سازه‌های نامعین به چند نکته باید توجه داشت

۱) برای کنترل سازه‌های نامعین از خواص الاستیک اعضا مثل مدول الاستیسیته E و مشخصات هندسی مقطع مثل A و I استفاده می‌کنیم. بنابراین این مقادیر در تحلیل حائز اهمیت هستند.

۲) کنترل در محدوده الاستیک خطی است. یعنی همانگونه که σ و ε نسبت خطی دارند ($\sigma = E\varepsilon$)

۳) کسی که سازه نامعین کنترل می‌کند باید تحرک کامل درمورد تغییر شکل‌ها داشته باشد.

مراحل کنترل سازه نامعین برمبنای سازه‌های تغییر شکل یافته:



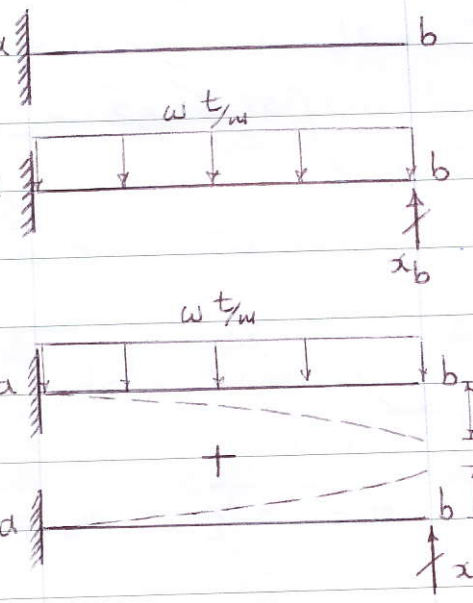
(الف)

f_b ۱: تعیین درجه نامعینی

در این مثال درجه نامعینی $n=1$ می‌باشد.

f_b ۲: انتخاب مجهول اضافه

به تعداد درجات نامعینی می‌باید مجهول اضافه انتخاب می‌کنیم. انتخاب مجهولات اضافی دلخواه است، ولی باید دقت کنیم که سازه‌ای که پس از حذف مجهول اضافه باقی می‌ماند باید پایدار و معین باشد (مجهول اضافه Redundent). در مثال مورد بحث ما انتخاب B_y به عنوان مجهول اضافه انتخاب می‌گردد. البته انتخاب M_a نیز می‌تواند صحیح باشد، ولی به هر حال در انتخاب مجهول اضافه محدودیت‌هایی نیز باید مورد توجه باشد.

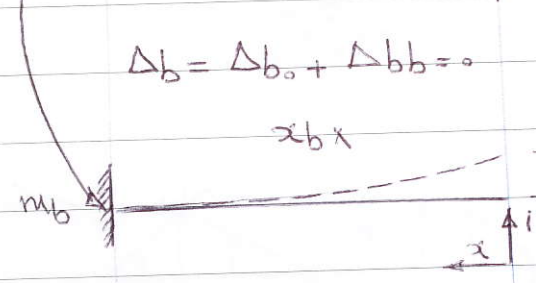


f_b ۳: سازه اولیه (primary structure)

سازه‌ای که بعد از حذف مجهول اضافه و بارهای خارجی باقی می‌ماند سازه اولیه معروف است. این سازه باید پایدار و معین باشد.

f_b ۴: اکنون سازه اولیه تحت بارهای خارجی و مجهول اضافه در نظر گرفته می‌شود. از این مرحله به بعد مجهول اضافی همانند یک بارگذاری خارجی خواهد بود.

f_b ۵: اکنون سازه اولیه تحت بارهای خارجی و مجهول اضافه به دو سازه تجزیه می‌شود. سازه اول، سازه اولیه تحت



$$\Delta_{bb} = x_b\, \delta_{bb}$$

$$\Delta_{b0} + x_b\, \delta_{bb} = 0$$

$$\rightarrow x_b = -\frac{\Delta_{b0}}{\delta_{bb}}$$

بارهای خارجی روی سازه دوم، سازه اولیه یک مجهول اضافی می‌باشد. ترکیب این دو سازه، همدیر سازه واقعی ماست که در یکی از آن‌ها مجهول x_b وجود دارد. برای تعیین مجهول x_b باید از یک شرط سازگاری استفاده نمود.

شکل ۶: توشن معادله سازگاری تغییر شکل

دو سازه تجزیه شده دارای تغییر شکل‌های مشابهی می‌باشند. در سازه اول تغییر مکان قائم نقطه b (که حتماً در امتداد مجهول اضافی است) با حرف Δb_0 نشان داده می‌شود. اندیس اول نشانه نقطه و اندیس دوم نشان دهنده علت است. ($x_b = 0$) و تغییر مکان قائم نقطه b با Δbb نشان داده می‌شود که اندیس اول نشان دهنده نقطه و اندیس دوم نشان دهنده علت است. برای اینکه مجموع این دو سازه برابر سازه اصلی باشد، مجموع این دو تغییر مکان باید برابر صفر باشد. معادله نوشته شده معادله سازگاری تغییر مکان گویند. از این معادله x_b بدست می‌آید و برای اینکه این معادله ساده‌تر حل شود می‌توان یک تجزیه دیگر انجام داد.

شکل ۷: باقی سه تغییر مکان قائم، مقدار مجهول اضافه شده قابل تشخیص است. برای محاسبه این تغییر مکان‌ها از هر روشی می‌توان استفاده نمود.

محاسبه Δb_0: روش کارمجازی

ج = سازه مجازی ت = سازه واقعی

$$1 \times \Delta b_0 \uparrow = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \int_0^6 m_b \frac{M_0}{EI} dx \qquad M_0 = -3\frac{x^2}{2}, \quad m_b = x$$

$$1 \times \Delta b_0 \uparrow = \int_0^6 (x)\left(-\frac{3x^2}{2}\right) dx = \frac{-486}{EI}$$

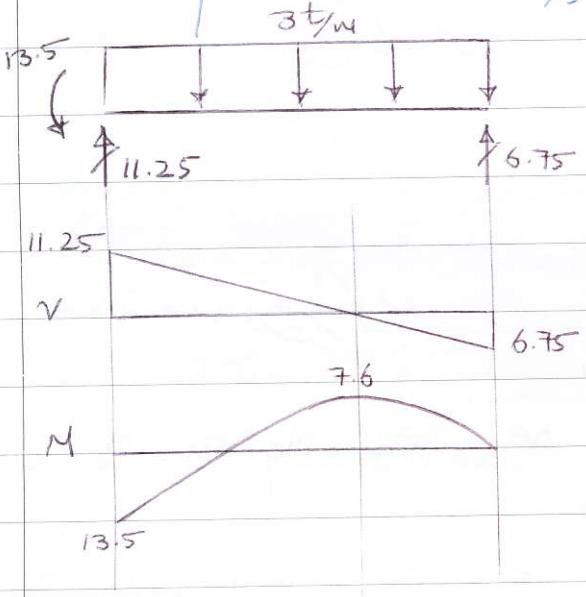
محاسبه δ_{bb}:

ج = سازه مجازی ج = سازه واقعی

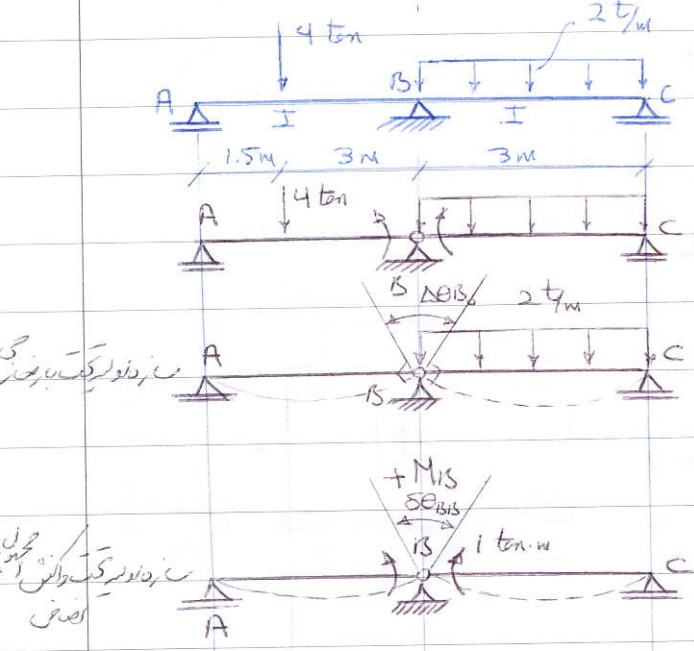
$$1 \times \delta_{bb} \uparrow = \int_0^6 m_b \cdot \frac{m_b}{EI} dx = \int_0^6 x \frac{x}{EI} dx = \frac{72}{EI}$$

$$-\frac{486}{EI} + x_b \frac{72}{EI} = 0 \Rightarrow x_b = 6.75 \Rightarrow R_b = 6.75 \text{ ton} \uparrow$$

اگر R_b مثبت بدست آید یعنی آن است که این واکنش در امتداد بار واقعی باشد.
پس از تعیین R_b سایر واکنش ها تعیین شده، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی رسم می گردد.



یکی از مزایای مثبت بودن مقدار مجهول کاهش نیروهای داخلی آن است. برعنوان مثال اگر این سازه طره دارای لبه واکنش وجود نداشت حال لنگر آن در نقطه B برابر 54 ton.m می شد که با مقدار بدست آمده قابل مقایسه است.

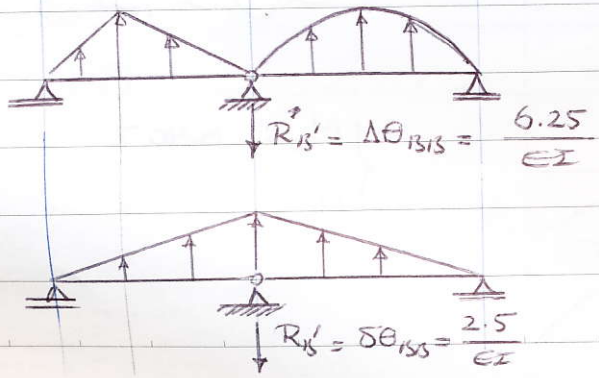


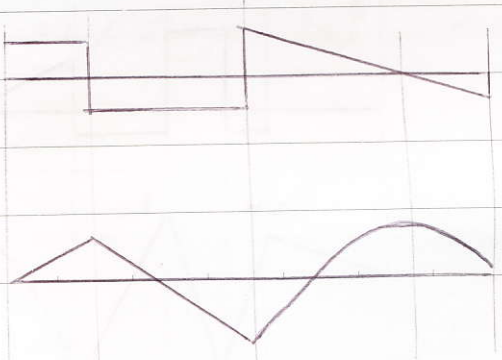
n=1 بار/فنر

M_B لنگر داخل تیر در تکیه گاه B است. تغییر آن داده در ترکیبی سازه ای انتخاب لنگر تکیه گاهی برعنوان مجهول اضافی باعث راحتی کار می شود.

$$\Delta\theta_{BS} = \theta_{BL} - \theta_{BR} = \Delta\theta_{BS_0} + M_{BS}\,\delta\theta_{BSS}$$

$$\frac{6.25}{EI} + M_B \cdot \frac{2.5}{EI} = 0 \rightarrow M_B = -2.5\ \text{ton.m}$$





تیر پیوسته با دو دهانه با لختی متغیر

در تجزیه سازه دوبله برای هر مجهول اضافی به طور جداگانه عمل می‌کنیم

معادلات سازه‌ی تغییر شکل یافته

$$\Delta\theta_{iS} = \Delta\theta_{iS_0} + M_S\,\delta\theta_{iSS} + M_C\,\delta\theta_{iSC} = 0$$

$$\Delta\theta_C = \Delta\theta_{C_0} + M_S\,\delta\theta_{CS} + M_C\,\delta\theta_{CC} = 0$$

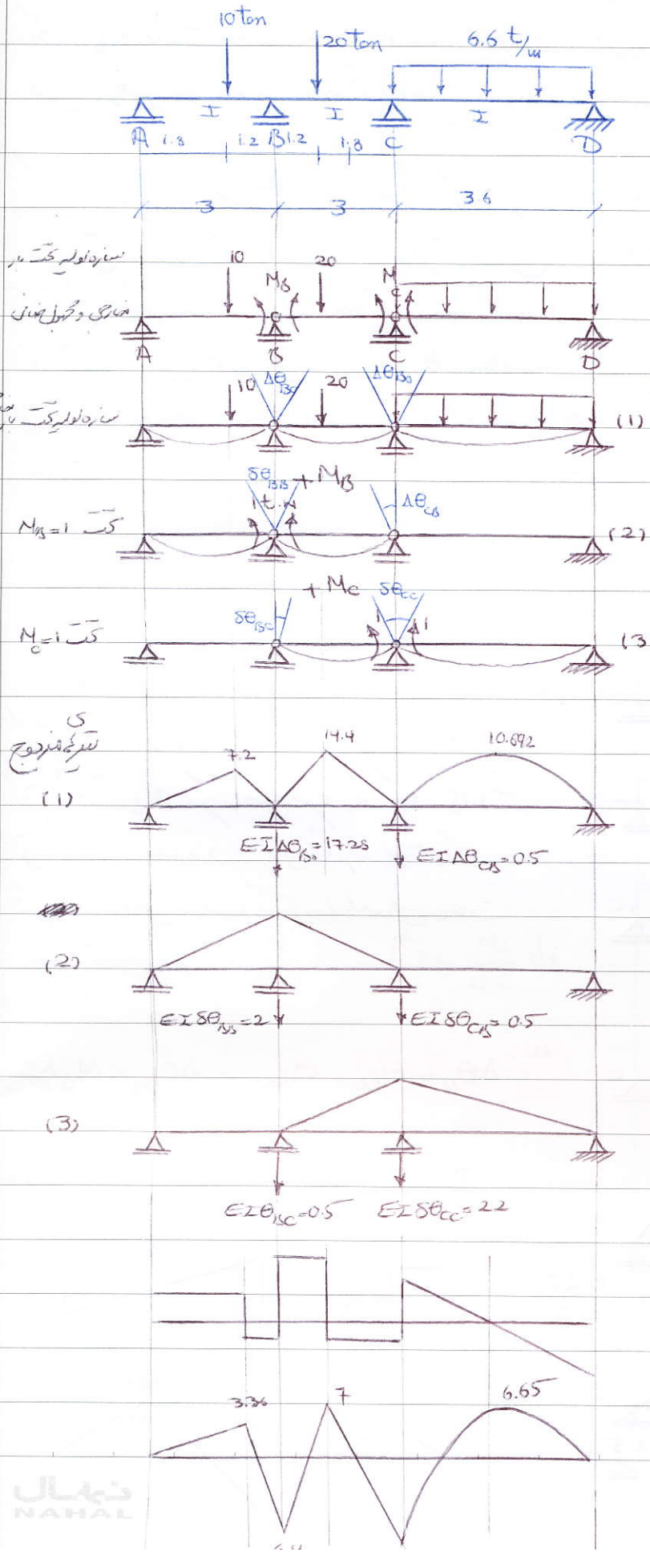
$$\begin{cases} 17.28 + 2M_S + 0.5M_C = 0 \\ 22.91 + 0.5M_S + 2.2M_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 2.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_S \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.28 \\ 22.91 \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمی

ماتریس نرمی همیشه متقارن است.

$$\begin{cases} M_S = -6.40\ \text{ton.m} \\ M_C = -8.96\ \text{ton.m} \end{cases}$$



تحلیل خرپاهای نامعین

خرپا می‌تواند نه یک یا چند درجه نامعین باشد.

۱) نامعین خارجی: در این حالت مجهول اضافه یکی از واکنش‌های تکیه‌گاهی انتخاب می‌گردد.

۲) نامعین داخلی: وقتی است که نامعینی در قسمت نیروهای داخلی اعضاء باشد. در این حالت مجهول اضافه نیروی داخلی عضو انتخاب می‌گردد.

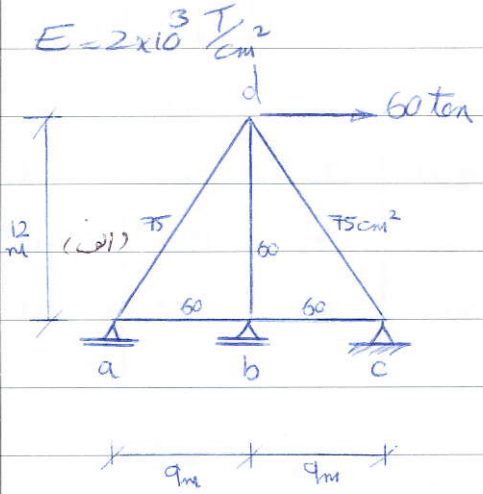
۳) نامعین خارجی و داخلی: در این حالت نامعینی در قسمت واکنش‌های تکیه‌گاهی و هم در قسمت نیروهای داخلی اعضاء می‌باشد و مجهول اضافه ترکیبی از واکنش‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی خواهد بود.

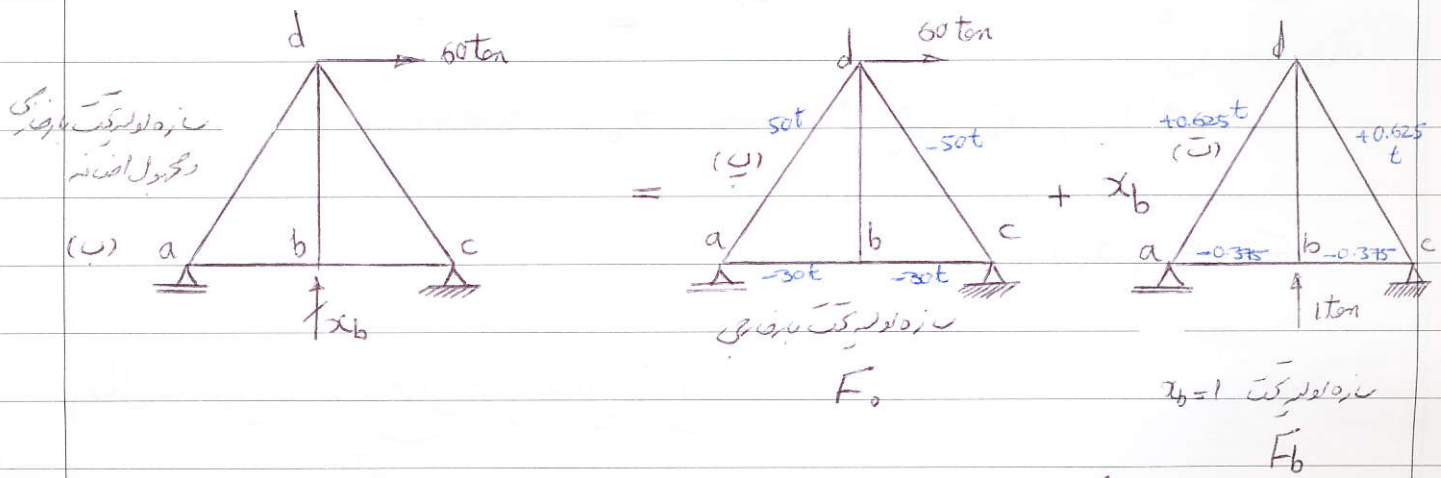
مثال ۱: خرپای نامعین خارجی زیر را تحلیل کنید.

خرپای نشان داده شده یک درجه نامعین خارجی است. واکنش تکیه‌گاهی b به عنوان مجهول اضافه انتخاب می‌گردد.

معادله سازگاری تغییر شکل:

$$\Delta_b^{\uparrow} = \Delta_{b.}^{\uparrow} + X_b\, \delta_{bb}^{\uparrow} = 0$$





۱) محاسبه $\Delta_{b.}^{\uparrow}$ (روش کار مجازی):

ت: سازه حقیقی — ب: سازه مجازی

$$1 \times \Delta_{b.}^{\uparrow} = \sum F_b \frac{F_0 L}{EA} = \frac{1}{E} \sum F_b \frac{F_0 L}{A}$$

۲) محاسبه δ_{bb} (جابجایی) :

تنش ها را محاسبه می‌کنیم.

$$1 \times \delta_{bb} = \sum \frac{F_b^2 L}{EA} = \frac{1}{E} \sum \frac{F_b^2 L}{A}$$

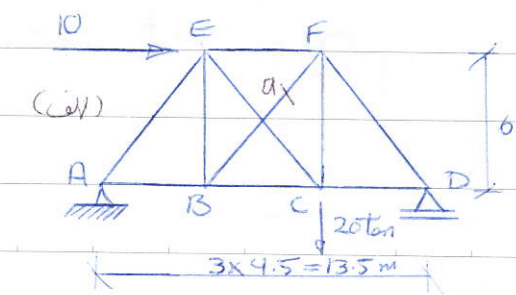
عضو	L cm	A cm^2	$\frac{L}{A}$ $1/cm$	F_0 ton	F_b ton	$F_0 F_b \frac{L}{A}$ ton^2/cm	$F_b^2 \frac{L}{A}$ ton^2/cm	$F = F_0 + x_b F_b$ ton
ab	900	60	15	-30	-0.375	+168.6	+2.11	-26.82
bc	900	60	15	-30	-0.375	+168.6	+2.11	-26.82
ad	1500	75	20	+50	+0.625	+625	+7.81	+44.7
dc	1500	75	20	-50	+0.625	-625	+7.81	-55.3
bd	1200	60	20	0	-1	0	+20	+8.47
						+337.2	+39.84	

$$\Delta b_0 = \frac{337.2}{E} \qquad \delta_{bb} = \frac{39.84}{E}$$

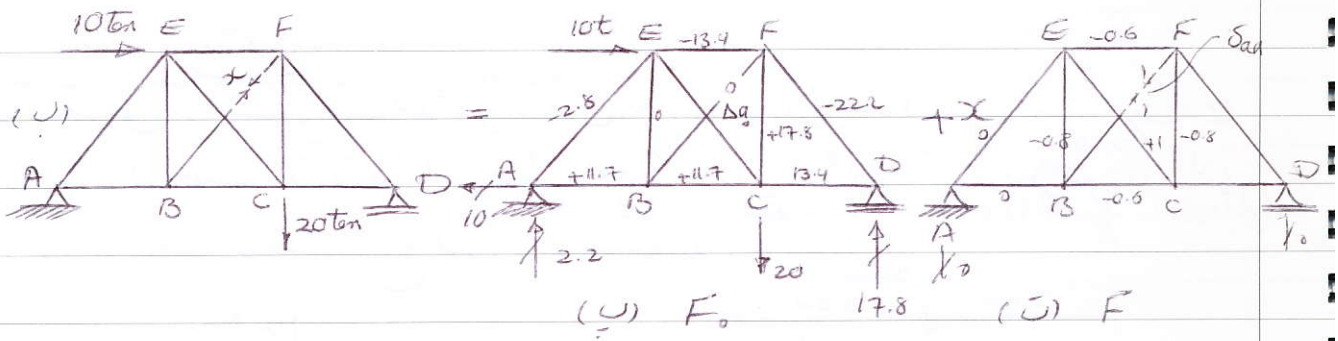
$$\rightarrow \frac{337.2}{E} + x_b \frac{39.84}{E} = 0 \Rightarrow x_b = -8.47 \text{ ton}$$

$$F = F_0 + x_b F_b$$

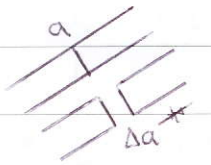
مثال: خریبان‌ها عضو داخلی زیر را تکمیل کنید.



خریبان نشان داده شده نیروی داخلی است.
نیروی داخلی عضو BF به عنوان مجهول اضافی انتخاب می‌شود. سازه اولیه تحت بارهای خارجی و مجهول قرار نیز به صورت شکل زیر داده می‌شود.



(ب) F_0 (ت) F



$$\Delta a^* = \Delta a_0 + x\,\delta_{aa} = 0$$

بار واقعی (ت)

بار مجازی (ب)

Δa می‌شود

(ب) مجازی (ت) واقعی

$$1 \times \Delta a_0^* = \frac{1}{E} \sum F_0 \frac{PQ}{EA}$$

δ_{aa} می‌شود

(ت) مجازی، واقعی

$$1 \times \delta_{aa}^* = \frac{1}{E} \sum \frac{P^2 L}{EA}$$

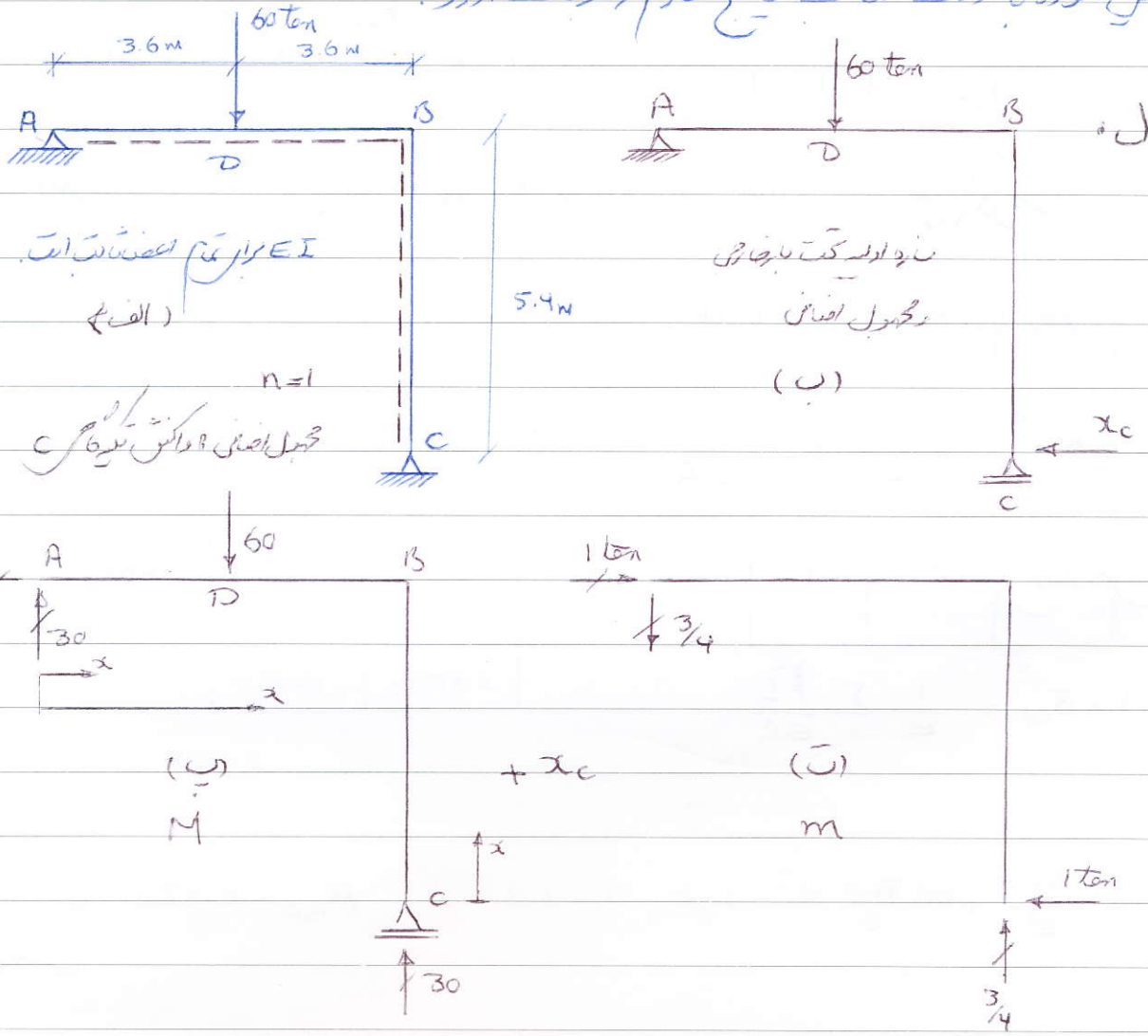
با توجه به جدول در زیر داریم

$$-\frac{119.7}{E} + x\,\frac{51.8}{E} = 0 \longrightarrow x = 2.3 \qquad F_{BF} = 2.3 \text{ ton}$$

تحلیل قاب کمی نامعین

قاب گاهی متشکل از اعضایی است که تنها خمشی و نیروی برشی و بعضی از اعضای آن علاوه بر نیروی خمشی نیز نیروی محوری نیز دارند. در این نوع قاب‌ها می‌توان فقط با منظور کردن اثری ناشی از تغییر شکل آن‌ها را تحلیل نمود و دقت مناسب نتایج لازم را بدست آورد.

مثال:



$$\Delta_c = \Delta_{c0} + x_c \delta_{cc} = 0$$

Δ_{c0}: کار $\bar{M}$ و M — δ_{cc}: کار $\bar{m}$ و m

$$\Delta_{c0} = \int m \frac{M}{EI} dx = \int_A^D + \int_D^B + \int_C^B$$

AD ناحیه: $0 < x < 3.6 \Rightarrow M = 30x \quad m = -\frac{3}{4}x$

DB ناحیه: $3.6 < x < 7.2 \Rightarrow M = 30x - 60(x - 3.6) \quad m = -\frac{3}{4}x$

نهال NAHAL

CS نصر ۰ ۰ < x < 5.4 M = ۰ m = −x

$$\Delta c_{\circ} = \frac{1}{EI}\left(\int_{\circ}^{3.6}(30x)(-0.75x)dx + \int_{3.6}^{7.2}(-30x+216)(0.75x)dx + \int_{\circ}^{5.4}(\quad)(-x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left([-0.75x^3]_{\circ}^{3.6} + [7.5x^3 - 81x^2]_{3.6}^{7.2}\right) = -\frac{1050}{EI}$$

تعیین ضرایب ۰ ت : δ_{cc} کاسه

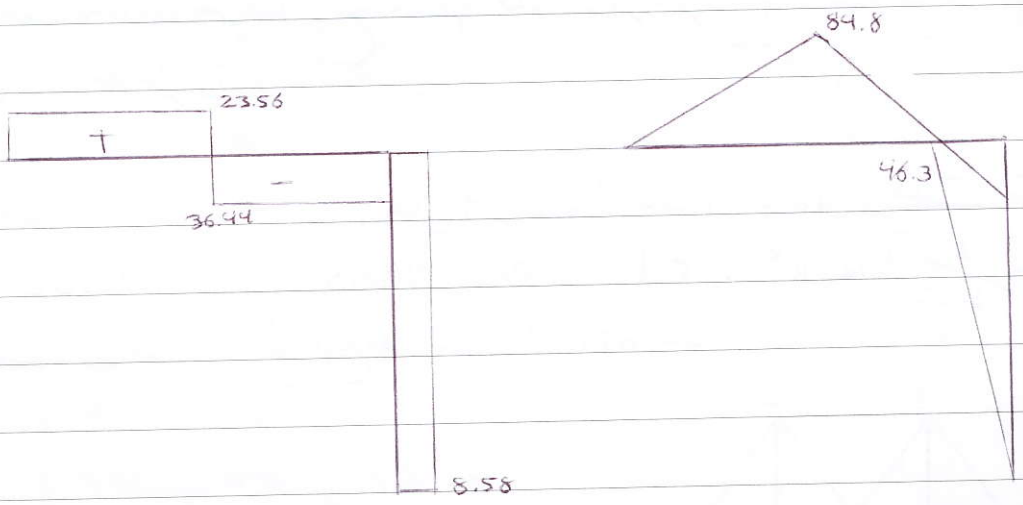
$$\delta_{cc} = \int \frac{m^2}{EI}dx = \int_A^{15} + \int_C^{15}$$

AB نصر ۰ ۰ < x < 7.2 $m = \frac{-3}{4}x$

BC نصر ۰ ۰ < x < 5.4 $m = -x$

$$\rightarrow \delta_{cc} = \frac{1}{EI}\left(\int_{\circ}^{3.6\times 2}(-0.75x)^2dx + \int_{\circ}^{5.4}(-x)^2dx\right) = \frac{122.5}{EI}$$

$$-\frac{1050}{EI} + \frac{122.5}{EI}x_c = 0 \rightarrow x_c = 8.58 \rightarrow R_{cx} = 8.58 \text{ ton} \leftarrow$$



نهال NAHAL

اثر حرارت و نشست تکیه‌گاهی در تیر ریاضی

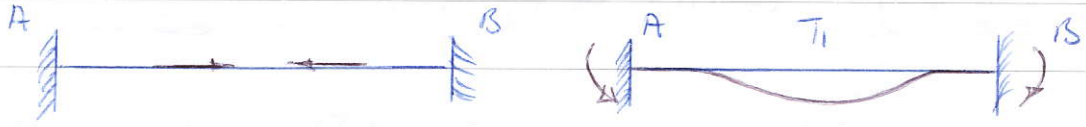
اثر حرارت و نشست تکیه‌گاهی را در فصل نخست در تیر ریاضی بحث کردیم. ملاحظه شد که در تیر ریاضی، در اثر تغییرات دما و نشست تکیه‌گاهی فقط تغییر شکل ایجاد می‌شود و هیچگونه نیروی داخلی وجود نمی‌آید. در این فصل در مقابل تغییر شکل کامل است. موضوع را می‌توانیم با بررسی یک تیر ریاضی که در آن ملاحظه می‌شود در تغییرات دما صحیح تأثیری بر نیروهای داخلی ندارد.



در اول دما (اصلاح دما)

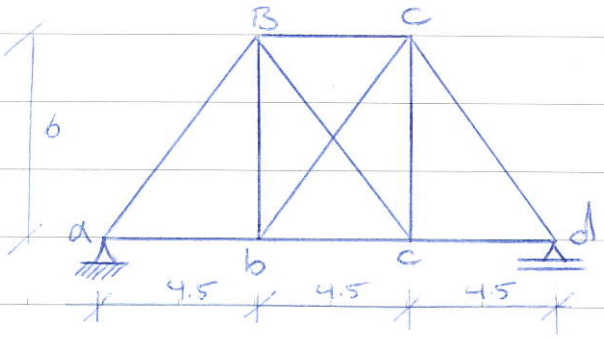
$T_2 > T_1$

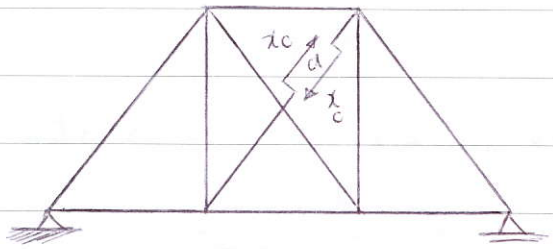
اما در تیر ریاضی نامعین شرایط متفاوت است. علت هم این است که در صورتی که در تیر ریاضی نامعین وجود دارد در اثر تغییرات دما و نشست تکیه‌گاهی، سازه قادر به تغییر شکل مطلوب خود است و برای انطباق با شرایط تغییر شکل، در آن کلیه نیروی داخلی ایجاد می‌گردد. موضوع را می‌توان با حل مثال تیر ساده که آنرا نامعین شده حل نمود.



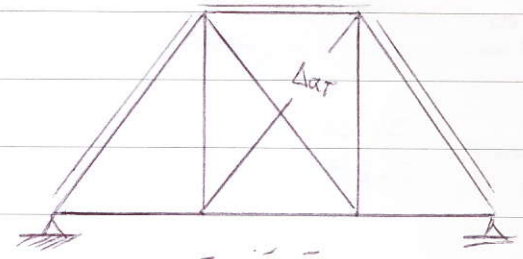
در این مثال با استفاده از اصل جمع آثار، قوا کلیه سازه‌های نامعین در اثر تغییرات دما و حرکت نسبی تکیه‌گاهی مورد توجه قرار می‌گیرد.

مثال: مطلوبست محاسبه نیروهای داخلی بوجود آمده در اعضای خرپای زیر علت اجرای دما در اثر $33^\circ C$ در اعضای AB، BC، Cd. $\alpha_T = \frac{1}{84000} = 12 \times 10^{-6}$ و $E = 2 \times 10^6 \ kg/cm^2$ است. سطح مقطع کلیه اعضا $65 \ cm^2$ است.





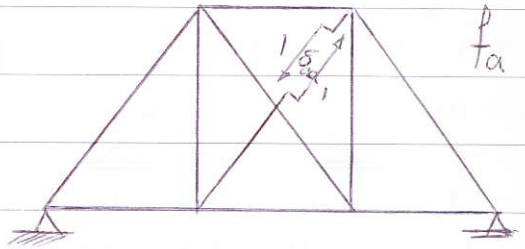
سازه اولیه (ب)



سازه اولیه تحت تغییرات دما (آ)

+

x_c



(ت)

$n=1$ ، تعیین عضو bC به عنوان مجهول اضافی

$$\overset{*}{\Delta a} = \overset{*}{\Delta aT} + x_c \overset{*}{\delta aa} = 0$$

$\overset{*}{\Delta aT}$ عبارتست از: (تغییر شکل در جهت حذف شده)

$$1 \times \overset{*}{\Delta aT} = \Sigma f_a \cdot \Delta L$$

$$\Delta L = \alpha_t L (\Delta T)$$

$$1 \times \Delta aT = \alpha_t \Sigma f_a (\Delta T) L$$

$\overset{*}{\delta aa}$ عبارتست از: (تغییر شکل در جهت حذف شده)

$$1 \times \overset{*}{\delta aa} = \frac{1}{E} \Sigma \frac{f_a^2 L}{A}$$

عضو	L/A	f_a	$f_a^2 \frac{L}{A}$	ΔT	$f_a \Delta T L$	$F = F_0 + x_a f_a$
	$1/cm$	ton		c°	ton.c°.cm	ton
BC	6.92	-0.6	2.49	33	-8910	-3.18
bc	6.92	-0.6	2.49	0	0	-3.18
Bb	9.23	0.8	5.91	0	0	-4.24
Cc	9.23	0.8	5.91	0	0	-4.24
Bc	11.54	1	11.54	0	0	5.3
bC	11.54	1	11.54	0	0	5.3
Σ			39.88		-8910	

f_a اعضای صورت گرفته اند.

$$\Delta_{aa}^{*} = -8910\left(\frac{1}{84000}\right) = -0.106\ cm$$

$$\delta_{aa} = \frac{39.88}{2\times10^{3}} = 0.02 \qquad \rightarrow -1.06 + 0.02x = 0 \rightarrow x = 5.3\ ton$$

نیروی داخلی در اعضای نشست شکست‌پذیر

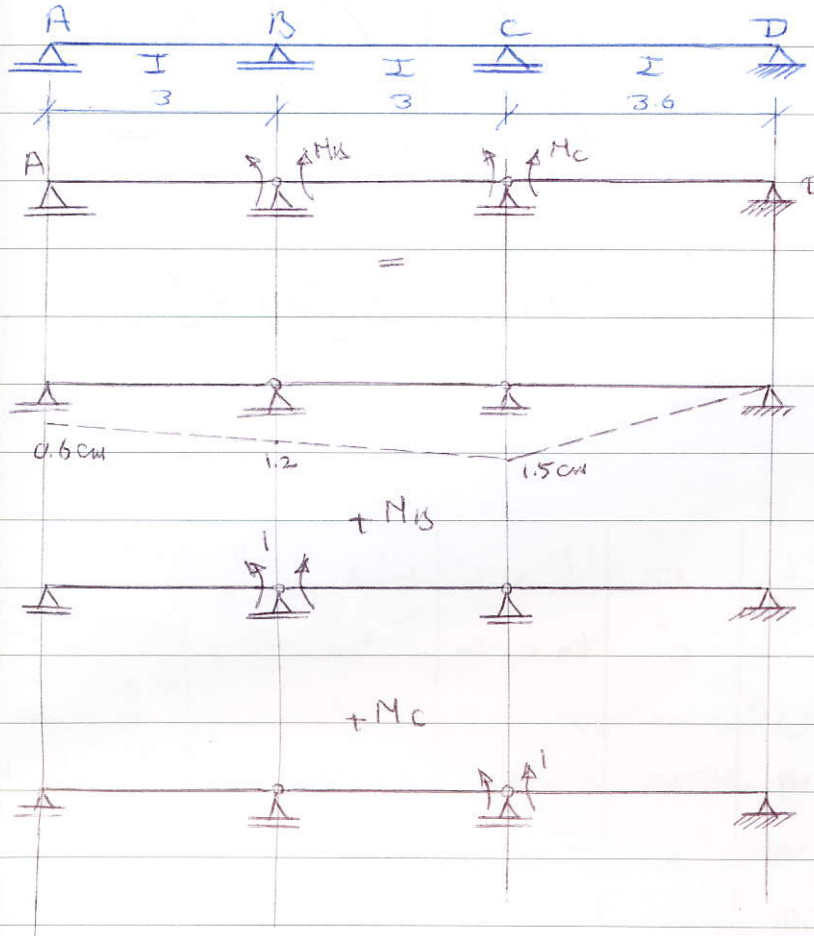
مثال: نیروی داخلی در اعضای نشست شکست‌پذیر

$A = 0.6\ cm \downarrow$

$B = 1.2\ cm \downarrow$

$C = 1.5\ cm \downarrow$

$D = 0$



$$\Delta\theta_B = \Delta\theta_{BS} + M_B\,\delta\theta_{BB} + M_C\,\delta\theta_{BC} = 0$$

$$\Delta\theta_C = \Delta\theta_{CS} + M_B\,\delta\theta_{CB} + M_C\,\delta\theta_{CC} = 0$$

$$\theta_{AB} = -\frac{1.2-0.6}{300} = -0.002$$

$$\theta_{BC} = (-1)\frac{1.5-1.2}{300} = -0.001$$

$$\theta_{CB} = \frac{1.5}{300} = 0.004167$$

$$\Delta\theta_{BC} = \theta_{BL} - \theta_{BR} = -0.001$$

$$\Delta\theta_{CB} = \theta_{CL} - \theta_{CR} = -0.005167$$

$$\begin{cases} -0.001 + \dfrac{2}{EI}M_B + \dfrac{0.5}{EI}M_C = 0 \\ -0.005167 + \dfrac{0.5}{EI}M_B + \dfrac{2.2}{EI}M_C = 0 \end{cases}$$

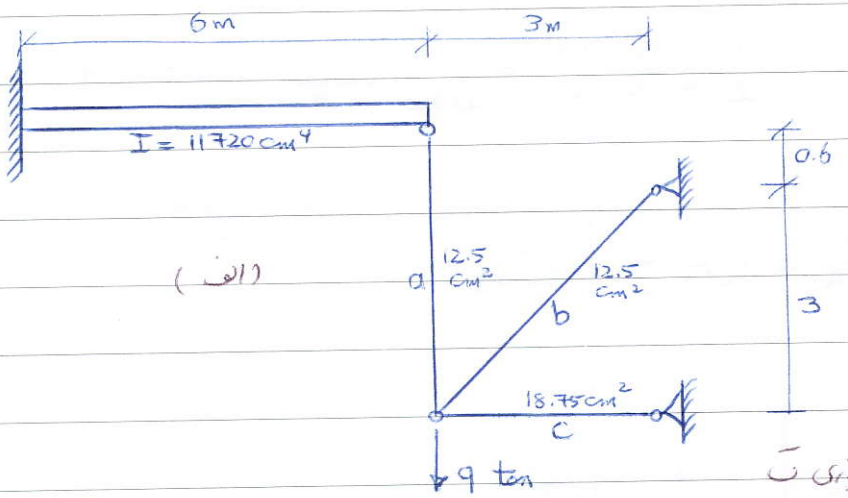
$$M_B = -0.000092\,EI$$

$$M_C = +0.00237\,EI$$

نسازه‌های ترکیبی نامعین

در نسازه‌های ترکیبی نامعین همواره نیروی اضافی کوری نخستین در نظر گرفته شود.

مثال:



(الف)

$D=1$

نیروی عضو a بعنوان مجهول اضافی

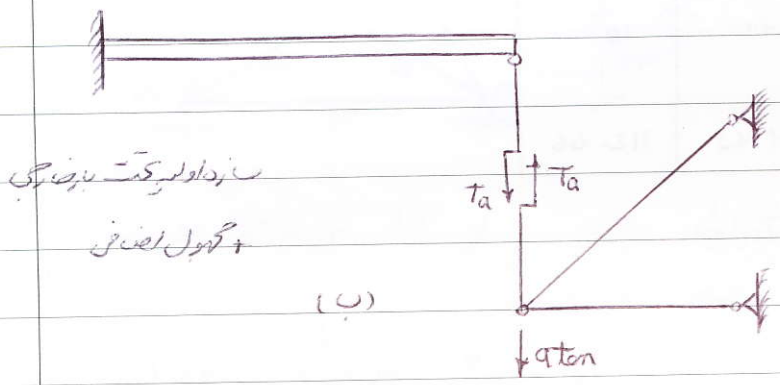
$$\Delta a = \Delta a_0 + T_a \delta_{aa} = 0$$

که در آن Δa_0 واکنش پی متناظر با

$$\Delta a_0 = \int m_a \frac{M_0}{EI} dx + \sum t_a \frac{F_0}{A} L$$

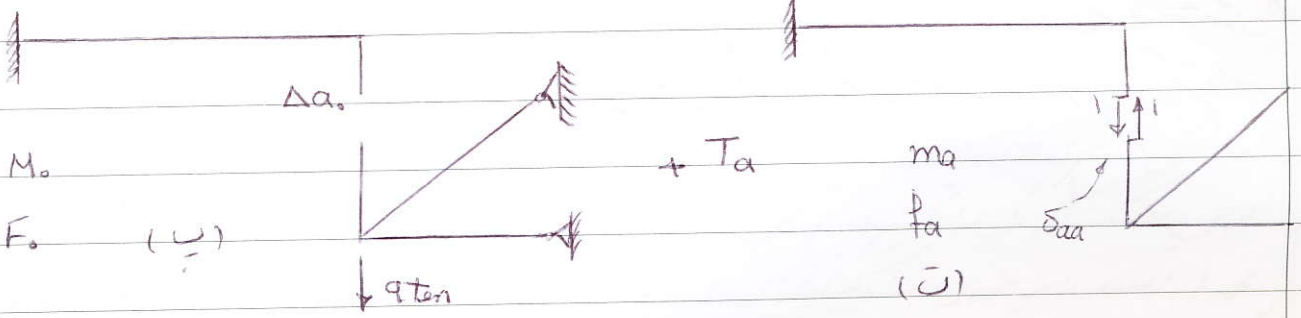
که در آن δ_{aa} واکنش روگذاری

$$\delta_{aa} = \int \frac{m_a^2}{EI} dx + \sum \frac{t_a^2}{A} L$$



(ب)

واحد نیرو تن و طول cm



(ب) (پ)

$M_0 = 0 \qquad m_a = -x$

$\int \frac{M_0}{I} dx = 0$

$\int_0^{600} \frac{m_a^2}{I} dx = \int_0^{600} \frac{x^2}{I} dx = \frac{1}{I}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{600} = \frac{1}{11720} \times \frac{600^3}{3} = 6143.34$

عضو / واحد	L/A	F_0	f_a	$f_a F_0 \frac{L}{A}$	$f_a^2 L/A$
a	28.8	0	1	0	28.8
b	33.94	12.73	-1.414	-610.93	67.86
c	16	-9	1	-144	16
				-754.93	112.66

$-754.93 + (6143.34 + 112.66)\, T_a = 0$

$T_a = 0.12$

$T_b = 12.73 - 1.414 \times 0.12 = 12.56$ ton $\qquad T_c = -9 + 1 \times 0.12 = -8.88$ ton

از نیروی خارجی 9t فقط 0.12 ton به تیر خنثی می‌شود و باقی از توسط b و c تحمل می‌شود. به همین خاطر b این موضوع یکی از دلایل تحمل نیروی خنثی شده‌ی بیشتر است، یعنی عضوی که نزدیک‌تر به نیروی خارجی است نیروی بیشتری را تحمل می‌کند.

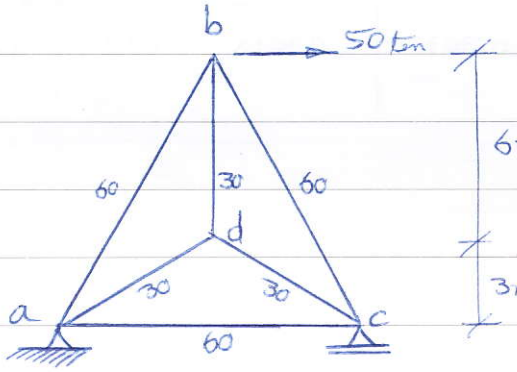
روش کار حداقل

از قضیه تغییر شکل کاستیلیانو می‌توان به طور مستقیم برای تحلیل سازه‌های نامعین استفاده کرد. در این روش نیاز به معادلات سازگاری تغییر شکل نداریم. به همین علت حرکتی است نسبت به روش تغییر شکل‌های سازگار که به تعداد زیادی معادلات ساده‌تر نیاز دارد.

۱) در تحلیل سازه‌های نامعین راحت‌تر از روش تغییر شکل‌های سازگار است.

۲) در کاربردی با ترک نیاز دارد و اگر کوچک باشد به تکنیک‌های عددی متوسل شویم، دقت کمتر از روش سازگاری تغییر شکل‌ها خواهد شد.

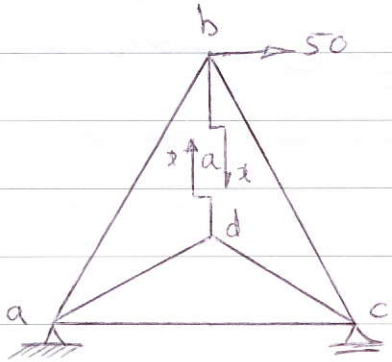
مثال:



$n=1$ نیروی عضو bd به عنوان مجهول اضافه انتخاب می‌شود.



در این مرحله‌های روش رابطه سازگاری تغییر شکل به قضیه کاستیلیانو برای تعیین تغییر مکان مربوط به مجهول اضافه اعمال می‌کنیم که حل رابطه سازگاری است.



$$\Delta_a^{\dagger} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

این شکل ظاهری معادله فوق است که نیروها تابع است، بدین معنا که از آن را تعیین می‌کنیم این معنی را می‌دهد که مقدار مجهول اضافه باید طوری باشد که برای آن نتایج انرژی حداقل گردد. از این نقطه نظر به روش کار حداقل گویند.

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2EA}$$

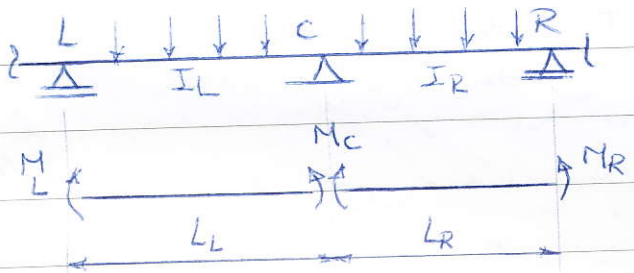
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E} \sum \frac{FL}{A} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

عضو واحد	L/A $1/cm$	F ton	$\partial F/\partial x$ ton/cm	$F\frac{L}{A}\partial F/\partial x$ ton/cm
ab	15.8	$79-0.529x$	-0.529	$-660+4.41x$
bc	15.8	$-79-0.529x$	-0.529	$+660+4.41x$
ca	10	$25-0.333x$	-0.333	$-83.3+1.11x$
ad	14.1	$+0.707x$	$+0.707$	$7.05x$
bd	20	$+x$	$+1$	$+20x$
cd	14.1	$+0.707x$	$+0.707$	$+7.05x$
				$-83.3+44.03x$

$$\Rightarrow x=\frac{53.3}{44.03}=1.89\ ton$$

روش سه لنگر

در سال ۱۹ میلادی یک مهندس فرانسوی به نام کلاپیرون روشی برای حل تیرهای نامعین ارائه کرد که تیر سه لنگری نیز خوانده می‌شود. با گذشت زمان این روش برای حل تیرهای نامعین استفاده می‌شد. با گذشت زمان روش توزیع لنگر جای این روش را گرفت.



$$M_L\frac{L_L}{I_L}+2M_C\left(\frac{L_L}{I_L}+\frac{L_R}{I_R}\right)+M_R\frac{L_R}{I_R}=-\frac{L_0}{I_L}-\frac{R_0}{I_R}+6E\left[\frac{\delta_L}{L_L}-\delta_C\left(\frac{1}{L_L}+\frac{1}{L_R}\right)+\frac{\delta_R}{L_R}\right]$$

نهال NAHAL

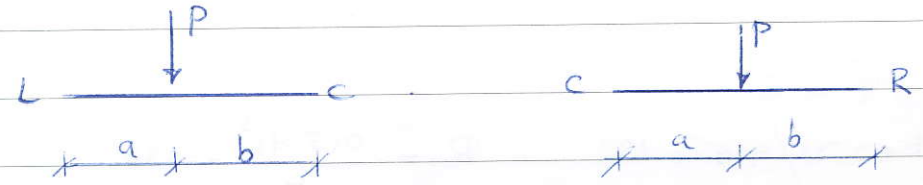
δ_L = نشست تکیه‌گاه چپ ↑ +

δ_C = نشست تکیه‌گاه وسط ↑ +

δ_R = نشست تکیه‌گاه راست ↑ +

نزدیکی تکیه‌گاه خرپایی نشست اندک در تیر پیوسته ای دگشش می‌یابد

واکنش تکیه‌گاهی R_0 ، L_0 :



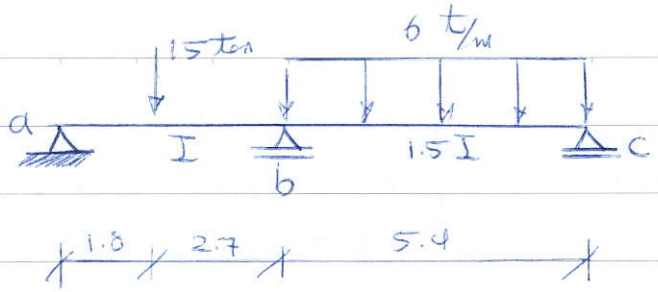
$$L_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L} \qquad R_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$$



$$L_0 = \frac{\omega_L L_L^3}{4} \qquad R_0 = \frac{\omega_R L_R^3}{4}$$

$$I_L = I_R \Rightarrow M_L L_L + 2M_C(L_L + L_R) + M_R L_R = -L_0 - R_0 + 6EI\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_C\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{R_L}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right]$$

نهال NAHAL

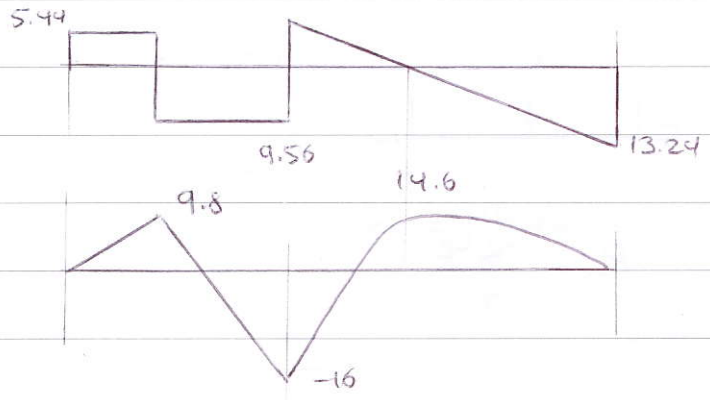


$M_a = 0 \qquad M_b = ? \qquad M_c = 0$

$\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$

$L_0 = (15 \times 1.8 \times 2.7 \times 6.3)/4.5 = 102 \qquad R_0 = \dfrac{6(5.4)^3}{4} = 236$

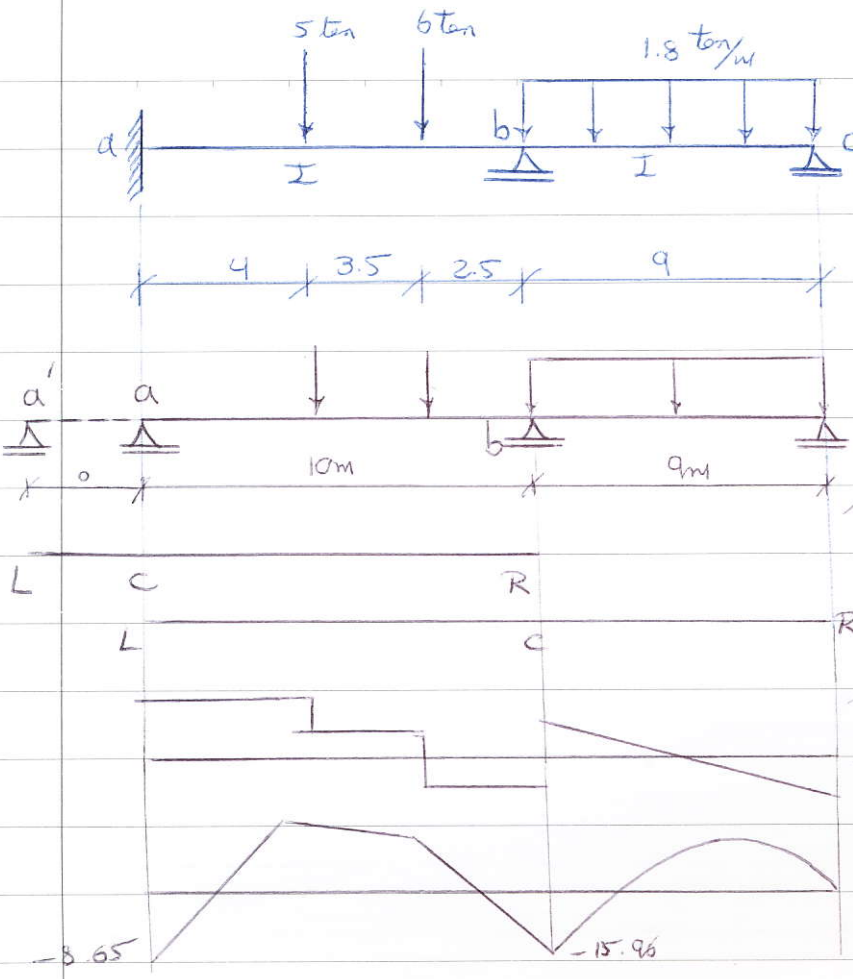
$$0 + 2M_b\left(\frac{4.5}{I} + \frac{4.5}{1.5I}\right) + 0 = -\frac{102}{I} - \frac{236}{1.5I} \rightarrow M_b = -16 \text{ ton.m}$$



6.1 / 6.2 / 6.13 / 6.17 / 6.19

6.22 / 6.23 / 6.26 / 6.28 / 6.30 / 6.29 / 6.32 / 6.33 / 6.48 ← شش ضرب

سه تایی → 6.50 / 6.51 / 6.53 /



تیر اسوی نشان داده شده برای تیرهای قائم از نظر المان دوم محاسبه می باشد. با انتخاب M_a و M_b به عنوان مجهولات اضافه نیاز به معادله داریم. یکی از روشهای معادله سازی استفاده از تکنیک حل تیرهای سراسری با تکیه گاه انتهایی گیردار است. در این تیر تکیه گاه گیردار تبدیل به تکیه گاه ساده و دهانه ای به طول صفر به آن اضافه می شود تا تیر سراسری با تکیه گاه های ساده ای شود.

$$\delta_{a'} = \delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$$

a' a b (1

L c R

$$L_0 = 0 \qquad R_0 = \frac{5\times4\times6\times16}{10} + \frac{6\times7.5\times2.5\times12.5}{10} = 332.6$$

$$M_{a'} = 0 \qquad 20M_a + 10M_b = -332.6$$

a b c (2

L c R

$$L_0 = \frac{5\times4\times6\times14}{10} + \frac{6\times7.5\times2.5\times17.5}{10} = 364.9$$

$$R_0 = \frac{1.8\times9^3}{4} = 328$$

$$10M_a + 38M_b = -693 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} M_a = -8.65 \\ M_b = -15.96 \end{cases}$$

به نام خدا

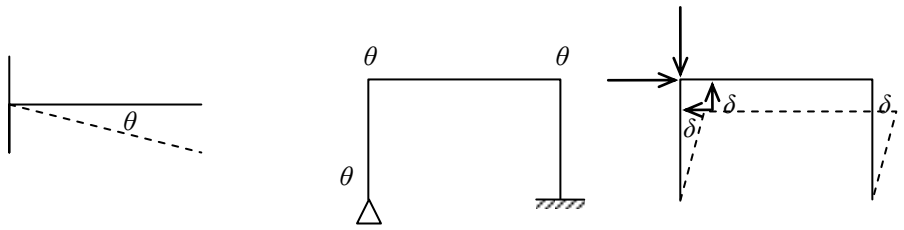
تحلیل سازه ۲

برای تحلیل سازه‌های نامعین، روش شیب ـ افت و روش های دیگر نیاز است. باید تعداد درجات آزادی در یک سازه تعیین گردد. تعداد مجهولات در این سازه های نامعین همان تعداد درجات آزادی است.

درجات آزادی:

دورانی θ: به تعداد θهای مستقل سازه تعداد درجات آزاد دورانی

انتقالی δ: به تعداد δهای مستقل سازه تعدا درجات آزادی انتقالی



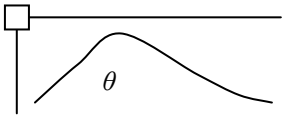
در بدست آوردن درجات آزادی دورانی و انتقالی نیاز است گره‌ها در یک سازه تعیین گردد.

گره: به نقاطی اطلاق می‌شود که محل طلاقی دو عضو یا تکیه‌گاه خارجی یا تغییر مقطع آن باشد.

۱. در گره های صلب $\theta=1$ می‌باشد زاویه تغییر نمی‌کند.



۲. در گروه های مفصل θ به تعداد اعضای وارد شده بر مفصل می‌باشد.



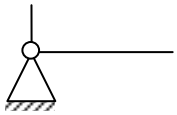
۳. در تکیه‌گاه گیردار چون دورانی ندارد ($\theta=0$).



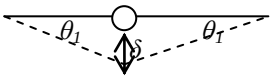
٤. در تکیه‌گاه غلطکی برشی ($\theta=1$).



۵. اگر دو عضو روی یک مفصل باشند ($\theta=1$) و اگر دو عضو به یک مفصل متصل باشند ($\theta=2$).

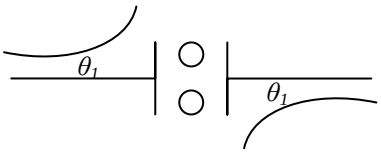


مثال: $\theta=2,\quad \theta_1\neq\theta_2$



مثال:

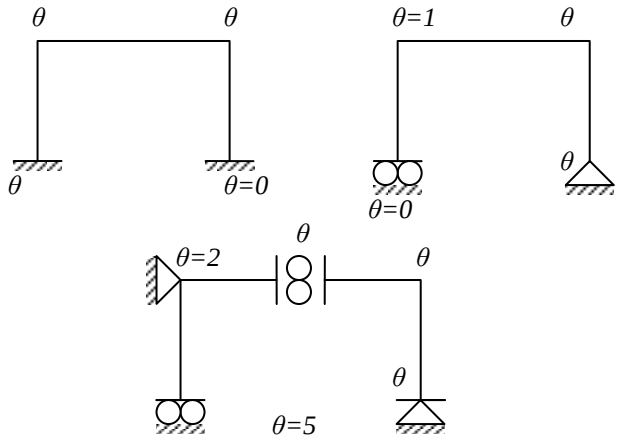
مفصل برشی $\theta=1$.



$\theta_1=\theta_2 \qquad \theta=1$

$\delta_1\neq\delta_2, \qquad \delta=2$

در مفصل به تعداد اعضا وارده



$$\begin{cases}\theta = 2 & \rightarrow \quad k = \infty \\ \theta = 3 & \rightarrow \quad k \neq \infty \end{cases}$$

$$if \qquad k = \infty \quad \rightarrow \qquad \theta = 0, \quad \theta = \frac{m}{k} = 0$$

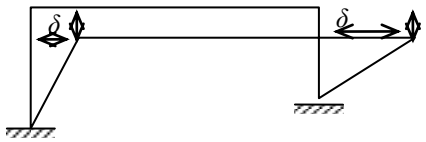
$$if \qquad k \neq \infty \quad \rightarrow \qquad \theta = \frac{m}{k}$$

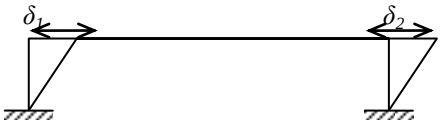
درجه آزادی انتقالی

برای تعیین درجه آزادی انتقالی فرض می‌شود سختی محوری بی نهایت باشد. یعی تغییر شکل محوری صفر باشد، ولی نیروی محوری موجود باشد.

L=cte

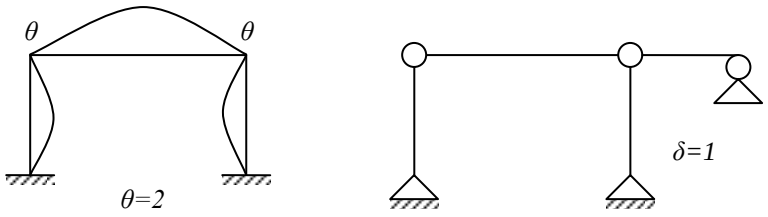
در صورت تغییر شکل محوری: $\delta = 4$



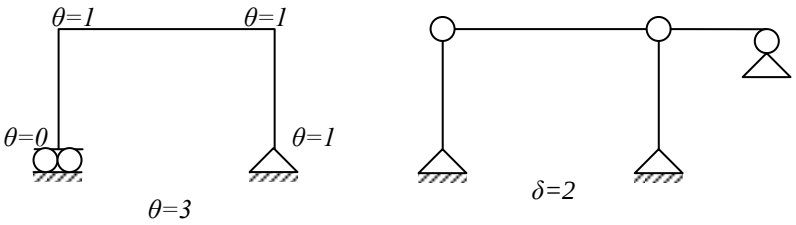


(از تغییر شکل محوری صرف‌نظر نشود).

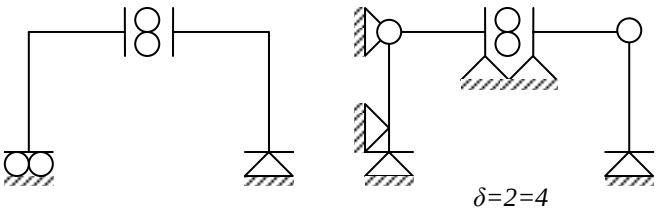
برای تغییر درجات آزادی انتقالی ابتدا گره‌ها را مشخص می‌کنند. سپس کلیه لنگرهای خمشی موجود در گره‌ها را صفر می‌کنیم (گره‌ها را تبدیل به مفصل کرده) شکل های حاصل خرپای می‌شود که تعداد میله های موردنظر برای پایداری این خرپا تعدادی ===== یا همان تعداد درجات آزادی انتقالی می‌باشد.



۳=۱+۲= درجات آزادی

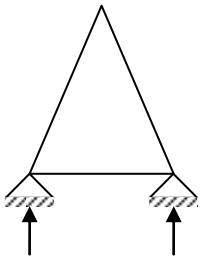


٤=٢+٢= درجه آزادی



درجه آزادی خرپا

در خرپاهای معین درجه آزادی برابر با تعداد اعضای خرپا می‌باشد.



$\delta + \theta = m$

$m - 2n + r$

$3 - 6 + 3 = 0$

در خرپاهای نامعین، تعداد درجات آزادی برابر است با:

$m - I_L$

$m - (m - 2n + r)$

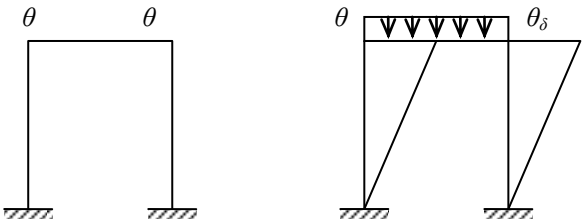
$2n - r$

$2*3 - 4 = 2$

$3 - 2*3 + 4 = 1 > 0$

$m - I_L = 3 - 1 = 2$

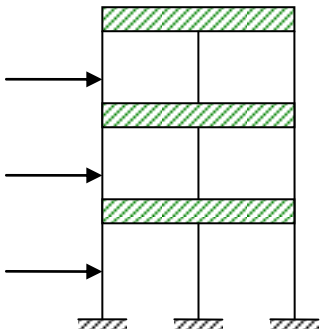
اگر در قابی که از تغییر شکل محوری صرف نظر شود به جای یک عضو از آن قاب عضو صلب جایگزین شود، درجه آزادی کاهش می‌یابد.



درجه آزادی = ۱

$\delta \infty \tan\theta$

$\delta_1 = \delta_2$
$\delta_3 = \delta_4$
$\delta_6 = \delta_7$
δ_8

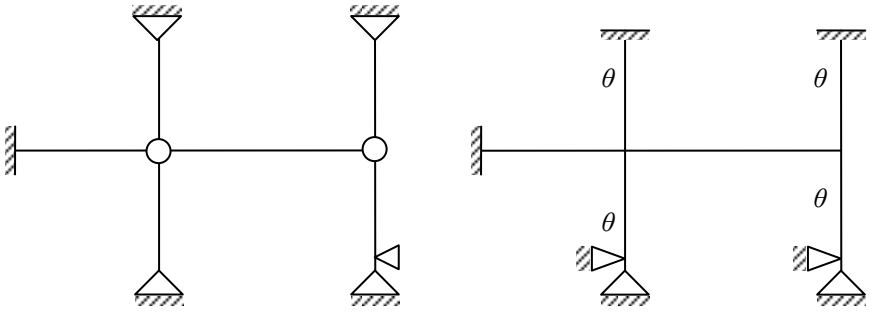


اول:

$\theta = 4 \quad \leftarrow \quad \theta$

دوم:

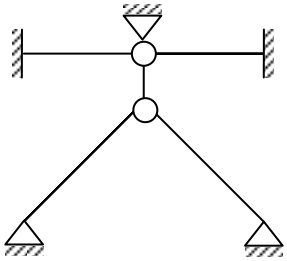
$\delta = 4 \quad \leftarrow \quad \delta$

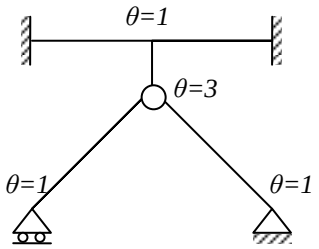


در صورتی از تغییر حول محوری صرف نظر نشود.

برای انتقال تمامی گره‌ها تبدیل به مفصل شدند.

$\theta = 4 + \delta = 2 = 6$





شیب ـ افت

یکی از روش های تحلیل سازه های نامعین، حل شیب ـ افت توسط درجات آزادی انتقالی و دورانی صورت می‌گیرد و فرض بر این است که تغییر طول محوری نداشته.

$EA = \infty \rightarrow \qquad \delta = 0$

ولی $F \neq 0$ نیروی محوری داشته باشیم.

هرچه تعداد نامعینی بیشتر درجات آزادی کمتری داریم و حل به روش شیب ـ افت راحت تر است.

درجه آزادی:

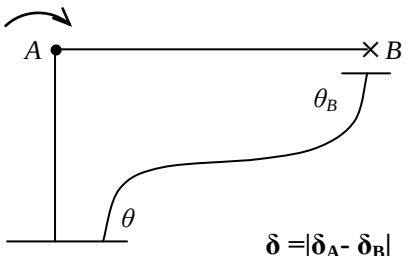
$m\text{-}I_L$

فرمول شیب ـ افت:

$$M_{HB} = \frac{2(EI)_{AB}}{L_{AB}}\left(2\theta A + \theta_B - \frac{3\delta}{L_{AD}}\right)$$

با فرض اینکه روی اعضاء باربری نداشته باشیم.

در حل به روش شیب ـ افت هرگاه سازه‌ای درجه آزادی انتقالی نداشته و همچنین نیروهای موجود فقط از نوع منفرد باشند و فقط به گره داخلی اعمال شود، اثبات می‌شود تمامی δها و θها صفرند و کلیه لنگرهای صفر و در نتیجه نیروهای برشی صفراند سازه‌ها تبدیل به خرپا می‌شود.



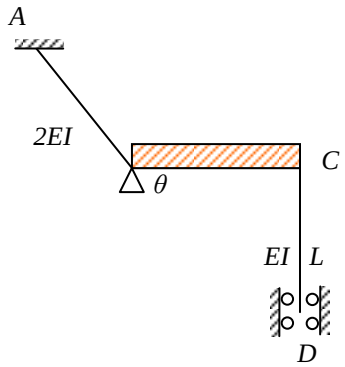
اگر نیرو به مفصل وارد شود، تغییری در θ, δ نداریم:

$\delta = 0$
$\theta = 0$

اگر خرپا معین باشد، نیروی محوری را بدست می‌آوریم.

اگر خرپا نامعین باشد، نیروی محوری را نمی‌توان بدست آورد.

شیب ـ افت لنگر و برش را می‌دهد، ولی نیروی محوری را نمی‌توان با شیب ـ افت بدست آورد.



مثال:

در سازه فوق اگر قسمت صلب (BC) به اندازه θ دوران کند حول نقطه D مطلوب است:

$$\frac{M_A}{M_D} = ?$$

$$M_A = M_{A/B} = \frac{2(2EI)}{\sqrt{2}L}\left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\delta}{L}\right)$$

$$M_A = \frac{2EI}{\sqrt{2}L}\theta B$$

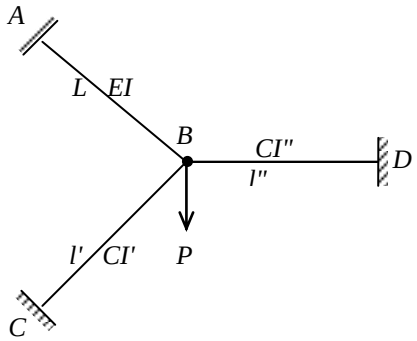
$$M_B = \frac{2EI}{\sqrt{2}L}\left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\delta}{L}\right)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_D + \theta_3 - \frac{3\delta}{L}\right)$$

$$M_D = \frac{2EI}{L}\theta_B$$

$$\frac{M_A}{M_D} = \frac{\frac{4EI}{\sqrt{2}L}\theta_B}{\frac{2EI}{e}\theta_B} = \frac{2EI}{\sqrt{2}}$$

مثال: برای تعادل در نقطه θ_B چقدر است؟



حل. برای تعادل در گره: $\sum M_B = 0$

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$$

$$\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\delta}{L}\right) + \frac{2(EI)'}{l'}\left(2\theta_B + \theta_C - \frac{3\delta'}{L'}\right) + \frac{3EI''}{L}\left(2\theta_B + \theta_D - \frac{3\delta''}{L''}\right)$$

$$4\theta_B\left(\left(\frac{EI}{L}\right) + \left(\frac{EI}{L}\right)' + \left(\frac{EI}{L}\right)''\right) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_B = 0$$

روش شیب ـ افت بدون بارگذاری روی اعضاء:

۱. دو سر جوش

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\delta}{l}\right)$$

۲. یک سر جوش ـ یک سر مفصل

$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}\left(\theta_A - \frac{\delta}{L}\right)$$

روش شیب ـ افت با بارگذاری روی اعضاء

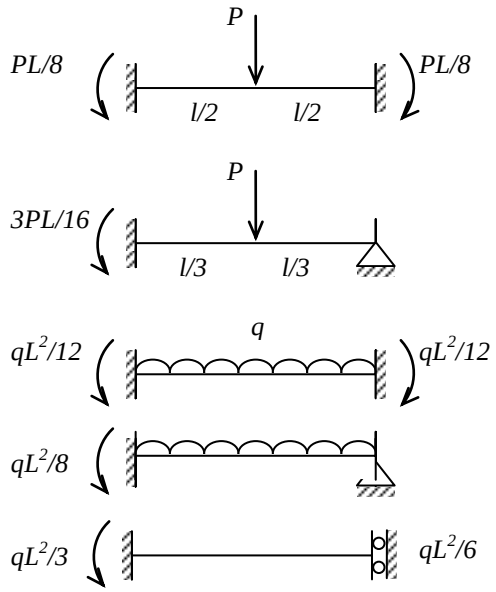
۱. دو سر جوش

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\delta}{l}\right) + FeM_{AB}$$

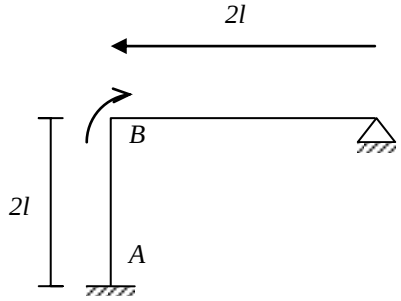
۲. یک سر جوش ـ یک سر مفصل

$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}\left(\theta_A - \frac{\delta}{L}\right) + FeM_{AB} - \frac{1}{\mu}FeM_{BA}$$

مقادیر F_{em}:



مطلوب است لنگر نقطه B؟



(یک سر مفصل ـ یک سر جوش)

$$M_{BC}=\frac{3EI}{l}\left(\theta_B-\frac{\delta}{L}\right)=\frac{3EI}{2l}\theta_B$$

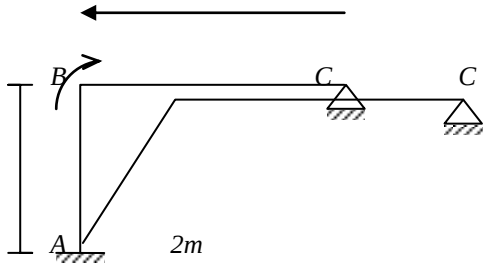
حال تعادل در BA با فرمول اصلی

$$M_{BA}=\frac{2EI}{2l}\left(2\theta_B+0+0\right)=\frac{4EI}{2l}\theta_B$$

لنگر خارجی

$$M_{BA}+M_{BC}=M$$
$$\frac{3EI}{2l}\theta_B+\frac{2EI}{l}\theta_B=M$$
$$\frac{2EI}{2l}\theta_B=M$$
$$\theta_B=\frac{2}{r}\frac{ML}{EI}$$
$$M_{BC}=\frac{3}{7}M$$

در قاب شکل روبرو اگر تغییر مکان نقطه B برابر ۰/۰٤ متر باشد، مطلوب است میزان M_{BC}.



$$\sum M_B = 0 \qquad M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{4}\left(2\theta_B + 0 + \frac{3\delta}{l}\right)$$

$$M_{BC} = \frac{3EI}{l}\left(\theta_B - 0\right)$$

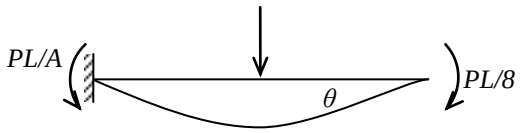
$$\sum M_B = 0 \qquad EI\theta_B = \frac{0.12}{8}EI + \frac{3GI}{2}\theta_B = 0$$

$$\theta_B = 0.006$$

$$M_{BC} = \frac{3GI}{2}\left(0.006\right)$$

$$M_{BC} = 0.009EI$$

مثال: در تیر شکل زیر مطلوب است ممان فنر پیچشی.



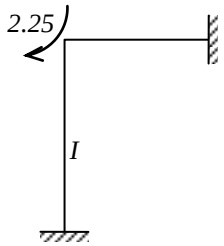
$$K = \frac{m'}{\theta} \rightarrow m' = K\theta$$

$$M_{BA} = M' = \frac{2EI}{l}\left(-2\theta_B\right) + Fe_m$$

$$M_{BH} = \frac{-4EI}{e}\theta_B + \frac{PL}{8} = K\theta_B = -\frac{2EI}{e}\theta_B$$

$$M' = K\theta_B = \frac{2EI}{e} * \frac{2EI}{48EI} = \frac{PL}{24}$$

مثال: مطلوب است تحلیل قاب داده شده به روش شیب ـ افت.



حل. در روش شیب ـ افت اگر سازه‌ای دارای کنسول باشد، می‌توان کنسول را حذف نموده، لنگر آن را به تکیه‌گاه مجاور اعمال نمود.

$$2*1.5*\frac{1.5}{2}=2.25$$

$$\frac{qL^2}{12}=\frac{2*6^2}{12}=6$$

$$M_{ab}=\frac{2EI}{4}(\theta_b)=\frac{EI\theta_b}{2}=0.94$$

$$M_{ba}=\frac{2EI}{4}(2\theta_b)=EI\theta_b=1.875$$

$$M_{bc}=\frac{2E(1.5I)}{6}(2\theta_b)-6=EI\theta_b-6=-4.125$$

$$M_{cb}=\frac{3EI}{6}(\theta_b)+6=\frac{EI\theta_b}{2}+6=6.94$$

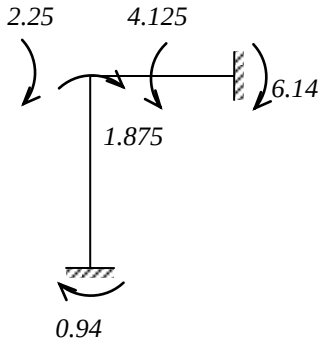
حال برای بدست آوردن θ_b تعادل را در گره b می‌نویسیم.

$$M_{ba}+M_{bc}+2.25=0$$

$$EI\theta_b+EI\theta_b-6+2.25=0$$

$$\theta_b=\frac{1.875}{EI}$$

حال جایگذاری θ_b برای بدست آوردن Mها.



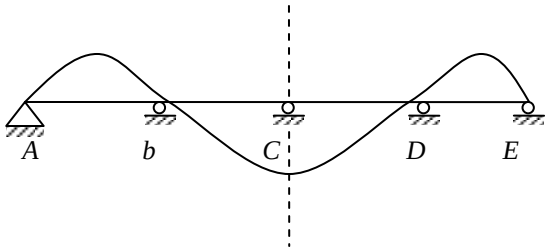
از شیب افت نیروی ممان و نیروی برشی را بدست می‌آوریم.

$$\sum M_b=0$$

$$M_{ba}+M_{ab}+R_x*4=0$$

$$R_x=\frac{M_{ba}+M_{ab}}{4}$$

مطلوب است تحلیل تیر سرتاسری داده شده در صورتی که تکیه‌گاه C به اندازه ۲ سانتیمتر به طرف پایین نشست کرده باشد.



$$EI = cte$$
$$\delta = | \delta_A - \delta_B |$$

تیر متقارن می‌باشد. برش می‌زنیم.

$$-EI\theta_A + \frac{EI\theta_b}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_H = \frac{\theta_b}{2}$$

لنگر در تکیه A برابر صفر است، زیرا مفصل وجود دارد.

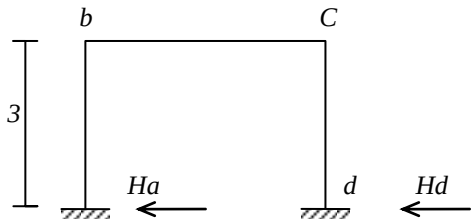
$$M_{AB} = \frac{2EI}{4}\left(-2\theta_A + \theta_b\right) = 0$$
$$M_{BA} = \frac{2EI}{4}\left(2\theta_b - \theta_A\right) - EI\theta_b - \frac{EI\theta_A}{2} = 0.003EI$$
$$M_{BC} = \frac{2EI}{4}\left(2\theta_b + \theta_c - \frac{3\delta}{4}\right) = 0.0035EI$$
$$M_{CB} = \frac{2EI}{4}\left(2\theta_c + \theta_b - \frac{3*0.02}{4}\right) = -0.0055EI$$

معادل تعادل در گره b

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$
$$\frac{Et}{2}\left(2\theta_b - \frac{\theta_b}{2}\right) + \frac{EI}{2}\left(2\theta_b - 0.015\right) = 0$$
$$\frac{3}{2}\theta_b + 2\theta_b - 0.015 = 0$$
$$\frac{7}{2}\theta_b = 0.015 \qquad \theta_b = \frac{0.03}{7}$$
$$\theta_b = 4.28*10^{-3} = 0.004$$
$$\theta_H = \frac{\theta_b}{2} = \frac{4.28*10^{-3}}{2} = 2.14*10^{-3} = 0.003$$

مثال:

در صورتی که تکیه‌گاه A، ۲ سانتیمتر به طرف پایین نشست کرده و 0.016rad در جهت عقربه های ساعت دوران کرده باشد، قاب داده شده را به روش شیب افت تحلیل نمایید.



همیشه δ عمود بر عضو حساب می‌شود. θ مثبت و منفی را حساب کنید.

$$EI = 4000T.m^2$$

$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\delta}{e}\right)$$

$$M_{ab} = \frac{2*4000}{3}\left(2*0.016 + \theta_b - \frac{3\delta}{3}\right)$$

$$M_{ba} = \frac{2*4000}{3}\left(2\theta_b + 0.016 - \frac{3\delta}{3}\right)$$

$$M_{bc} = \frac{2*4000}{4}\left(2\theta_c + \theta_b - \frac{3*0.02}{4}\right)$$

$$M_{cd} = \frac{2*4000}{3}\left(2\theta_3 + \theta_d - \frac{3*\delta}{3}\right)$$

$$M_{dc} = \frac{3*4000}{3}\left(2\theta_d + \theta_c - \frac{3*\delta}{3}\right)$$

$$\sum M_b = 0$$

$$M_{ab} + M_{ba}*3 = 0$$

$$H_a = -\frac{1}{3}\left(M_{ab} + M_{ba}\right)$$

$$\sum M_c = 0$$

$$H_d = -\frac{1}{3}\left(M_{cd} + M_{dc}\right)$$

$$F_x = 0 \quad H_a + H_d = 0 \quad -\frac{1}{3}\left(M_{ab} + M_{ba}\right) - \frac{1}{3}\left(M_{dc} + M_{ad}\right)$$

۳ مجهول ۳ معادله پیدا کنیم.

۱. تعادل در c

۲. تعادل در b

۳. بعد برش ba و cd

$$\begin{cases} 1. & M_{ab}+M_{bc}=0 \\ 2. & M_{cd}+M_{cd}=0 \\ 3. & M_{ab}+M_{ba}+M_{cd}+M_{dc}=0 \end{cases}$$

1) $8\theta_b+0.064-4\delta+6\theta_b+3\theta_c-0.045=0$

$14\theta_b+3\theta_c-4\delta+0.019=-$

2) $6\theta_c+3\theta_b-0.045*8\theta_c-4\delta=0$

$14\theta_c+3\theta_b-4\delta-0.045=0$

3) $0.128+4\theta_b-4\delta+8\theta_b+0.64-4\delta+8\theta_c-4\delta+4\theta_c-4\delta=0$

$12\theta_b+12\theta_b-16\delta+0.192=0$

$3\theta_b+3\theta_c-4\delta+0.048=0$

$$\begin{cases} 14\theta_b+3\theta_c-4\delta=0.019 & \theta_c=0.0084 \\ 3\theta_b+14\theta_c-4\delta=0.045 & \theta_b=0.0026 \\ 3\theta_b+3\theta_c-4\delta=-0.048 & \delta=23 \end{cases}$$

$\delta-\theta_c=3\theta_b+3\theta_c-4\delta+0.048-14\theta_b-3\theta_c+4\delta-0.019-11\theta_b=-0.029$

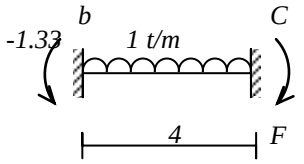
$\theta_b=\frac{0.029}{11}$

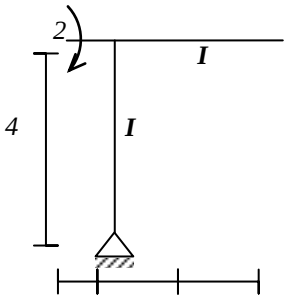
$\theta_b-\delta=3\theta_b+14\theta_c-4\delta-0.045-3\theta_b-3\theta_b-3\theta_c+4\delta+0.048=0$

$11\theta_c=0.093$

$\theta_c=\frac{0.093}{11}$

لنگرهای تمامی نقاط را بدست آورید.





$M=1*2*\frac{2}{2}=2$

$$\frac{ql^2}{12}=\frac{1*4^2}{12}=1.33$$

$$\delta'=\delta\tan\alpha$$
$$\delta''=\sqrt{2}\delta'$$
$$\delta=\delta''\cos\alpha$$
$$\delta''=\frac{\delta}{\cos\alpha}$$

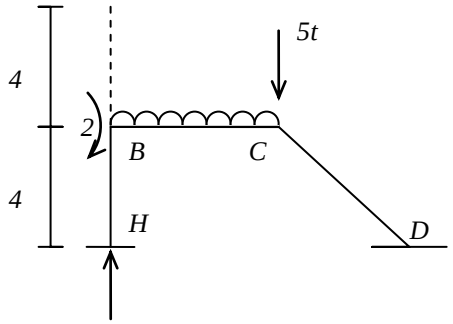
$$M_{ab}=0$$
$$M_{ba}=\frac{3EI}{4}\left(\theta_B-\frac{\delta}{4}\right)$$
$$M_{BC}=\frac{2EI}{4}\left(2\theta_B+\theta_C-\frac{3\delta}{4}\right)-1.33$$
$$M_{CB}=\frac{2EI}{4}\left(2\theta_C+\theta_B-3\frac{3\delta}{4}\right)+1.33$$
$$M_{CD}=\frac{2E(1.2I)}{4\sqrt{2}}\left(2\theta_C+\theta_D-\frac{3\delta}{4\sqrt{2}}\right)$$
$$M_{CD}=\frac{2.4EI}{4\sqrt{2}}\left(\theta_C-\frac{3\left(\sqrt{2}\delta\right)}{4\sqrt{2}}\right)$$

(چون بار روی گره است، هیچ تاثیری در لنگر ندارد. اگر بار روی عضو باشد، تاثیر دارد).

تعادل

$$\begin{cases}M_{BH}+M_{BC}+2=0\\M_{CB}+M_{CD}=0\end{cases}$$

برای معادله بعدی، نسبت به یک نقطه فرضی لنگر می‌گیریم.



$$\sum M_E=0 \qquad -H_H*8-H_D*8\sqrt{2}+M_{DC}+5*4+4*(-2)=0$$

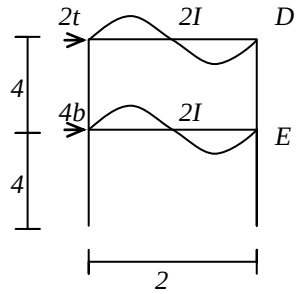
H_A و H_B را نداریم. بدست می‌آوریم:

$$\sum M_B = 0$$
$$-H_A * 4 + M_{HB} + M_{BA} = 0$$

$$\sum M_C = 0$$
$$M_{CD} + M_{DC} - H_D * 4\sqrt{2} = 0$$
$$H_D = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{4\sqrt{2}}$$
$$\begin{cases} M_{CD} + M_{CB} = 0 \\ M_{BA} + M_{BC} = -2 \\ M_{DC} + 2M_{BH} + 2M_{CD} - 26 = 0 \end{cases}$$
$$1.75EI\theta_B + 0.5EI\theta_C + 0.19EI\delta = -0.67$$
$$-3*1.85EI\theta_C + 0.5EI\theta_B + 0.057EI\delta = -1.33$$
$$3.12EI\theta_C + 1.5EI\theta_B - 0.585EI\delta = 26$$

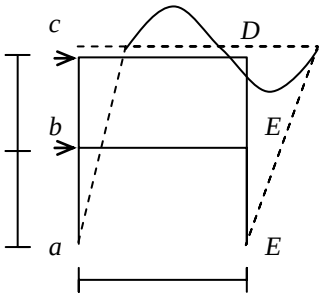
$$EI\theta_B = 3.79 \qquad EI\theta_C = -0.61$$
$$EI\delta = -36.91$$
$$M_{ab} = 0$$
$$M_{ba} = 9.78$$
$$M_{bc} = -11.69$$
$$M_{cb} = -11.22$$
$$M_{CD} = 11.22$$
$$M_{DC} = 11.48$$

مثال: ضرب



$$\theta_C = -\theta_d$$
$$\theta_d = \theta_e$$

سازه متقارن معکوس ← زاویه برابر معکوس



$$\Delta_1 = \delta_{ab} = \theta_{ef}$$

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \delta_{bc} = \delta_{ed}$$

$$M_{AB} = M_{eF} = \frac{2EI}{4}\left(\theta_b - \frac{3\delta_{ab}}{4}\right)$$

$$M_{ba} = M_{Fe} = \frac{2EI}{4}$$

$$M_{bc} = M_{ed}$$

$$M_{cb} = M_{de}$$

$$M_{be} = M_{ed}$$

$$M_{cd} = M_{dc}$$

٤ مجهول

$$\theta_B = ? \qquad \Delta_1 = ?$$

$$\theta_C = ? \qquad \Delta_2 = ?$$

$$\begin{cases} 1) & M_{ba} + M_{be} + M_{bc} = 0 \\ 2) & M_{cd} + M_{cd} = 0 \end{cases}$$

$$H_a = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{4} =$$

$$H_F = \frac{M_{eF} + M_{Fe}}{4}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$H_A + H_F + 6 = 0$$

برای معادله ٤ برش از طبقه دوم

$$H_{bc} = \frac{M_{bc} + M_{cb}}{4}$$

$$H_{ed} = \frac{M_{ed} + M_{de}}{4}$$

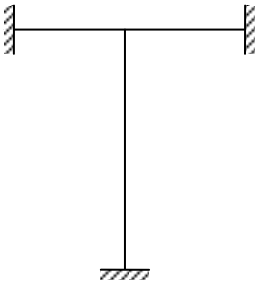
$$\sum F_X = 0$$

$$H_{bc} + H_{ed} + 2 = 0$$

$$\begin{cases} 16\theta_b + \theta_C - \frac{3}{4}\delta_{ab} - \frac{3}{4}\delta_{bc} = 0 \\ \theta_b + 14\theta_c - \frac{3}{4}\delta_{bc} = 0 \\ \theta_b - \frac{1}{2}\delta_{ab} + 8 = 0 \\ \theta_b + \theta_C - \frac{1}{2}\delta_{bc} + \frac{8}{3} = 0 \end{cases}$$

روش توزیع لنگر (پخش لنگر یا کراس) سختی

الف) اگر به گره صلبی چند عضو متصل باشد و بار روی اعضاء اعمال نگردد،----- یا جابجایی یا انتقال جانبی در سازه برابر صفر باشد و لنگر خارجی به اندازه M بر گره اعمال گردد، این لنگر به نسبت سختی اعضاء بین اعضاء تقسیم می‌شود.



$$M_{ea} = \frac{2EI}{l_{ea}}(2\theta) = 4E\frac{I_{ea}}{l_{ea}}$$

$$M_{eb} = \sum E\frac{I_{eb}}{l_{eb}}$$

$$M_{ec} = 4EKec\theta$$

تعادل در گره C

$$\sum M_e = m$$

$$M_{ea} + M_{eb} + M_{ec} = m$$

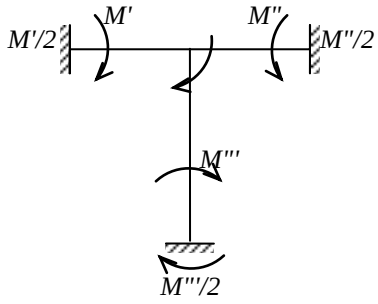
$$4EK_{ea}\theta + 4EK_{eb}\theta + 4EK_{ec}\theta = m$$

$$\theta = \frac{M}{4E(K_{ea} + K_{eb} + K_{ec})}$$

$$M_{ec} = \frac{4EK_{ec}(M)}{4E\sum K} \Rightarrow M_{ec} = m\frac{K_{ec}}{\sum K}$$

$$D_{ea} + D_{eb} + D_{ec} = 1$$

نکته: در صورتی که انتهای عضو تکیه‌گاه گیردار یا گره صلب باشد، نصف سهم لنگر عضو به انتهای دیگر عضو منتقل می‌شود. بدون آنکه از سهم خودش کم شود. اگر انتهای دیگر عضو مفصلی باشد، چیزی منتقل نمی‌شود. اگر تکیه‌گاه ۲ غلطکی باشد، برابر M– به تکیه‌گاه منتقل می‌شود.



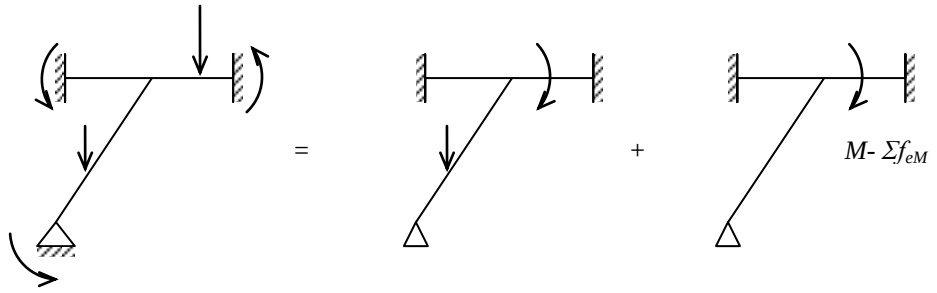
$$M_{ea} = \varepsilon E L_{ea} \theta$$
$$M_{ea} = 2EK_{ea}\theta = \frac{1}{2}M_{ea}$$
$$C_{ae} = C_{ea} = \frac{1}{2}$$

تکیه‌گاه را برعکس کنیم.

مثال:

$$K_{ab} = \frac{EI}{5} \to 1$$
$$K_{bc} = \frac{3EI}{5} \to 3$$
$$D_{bc} = \frac{3}{1+3} = 0.75$$
$$D_{ab} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} = 0.35$$
$$M_{ba} = M * D_{ba} = -60 * \frac{1}{4} = -15$$
$$M_{ab} = M_{ab} * C_{ab} = -15 * \frac{1}{2} = -7.5$$
$$M_{bc} = M * D_{dc} = -60 * \frac{3}{4} = -45$$
$$M_{cb} = M_{bc} * C_{bc} = -45 * \frac{1}{2} = 22.5$$

اگر روی اعضا بار باشد، در این صورت تحلیل مشابه با جمع جبری حالات زیر.



$$\frac{K_{ij}}{\sum K}\left(M-\sum F_{eM}\right)$$

ضریب پخش تکیه‌گاه گیردار صفر است.

ضریب پخش تکیه‌گاه مفصلی یک است.

گیردار

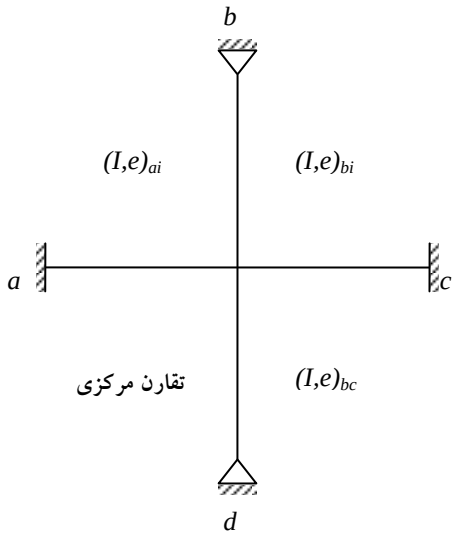
D=0 D=0

مفصلی

D=1 D=1

سختی تعدیل یافته:

می‌توان با توجه به شرایطی مشخص تعدیل‌هایی که بکار برد که عملیات پخش لنگر ساده‌تر شود.



$$\begin{cases} M_b = 0 \\ \theta_a = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \sum_i = 0 \qquad M_{iu} + M_{ib} + M_{ic} + M_{id} = 0$$

$$M_{ia} = 4EK_{ia}\theta$$

$$M_{ib} = 2EK_{ib}\left(2\theta + \theta_b\right)$$

$$M_{bi} = 2EKb_i\left(2\theta_b + \theta\right) = 0$$

$$2\theta_b + \theta = 0 \qquad \theta_b = -\frac{\theta}{2}$$

$$M_{ib} = 2EK_{ib}\left(2\theta - \frac{\theta}{2}\right) = 2EK_{ib}\left(\frac{C}{2}\theta\right)$$

$$M_{ib} = 4E\left(\frac{3}{4}K_{ib}\right)\theta$$

$$K'_{ib} = \frac{3}{4}K_{ib}$$

برای تقارن محوری

$$M_{ic} = 2EK_{ic}\left(2\theta + \theta_C\right)$$

$$\theta_C = -\theta$$

$$M_{ic} = 2EK_{ic}\theta = 4E\left(\frac{K_{ic}}{2}\right)\theta$$

برای تقارن محوری

$$K'_{ic} = \frac{1}{2}K_{ic}$$

$$M_{ib} = 2EK_{ib}\left(2\theta + \theta_d\right)$$

$$\theta_d = \theta$$

$$M_{ib} = 2EK_{ib}\left(3\theta\right)$$

$$K'_{id} = \frac{3}{4}K_{id}$$

برای تقارن مرکزی

برای انتهای دو غلطکی

$$K' = \frac{1}{4}K$$

در کل

$$K' = \alpha K$$

تقارن مرکزی $\alpha = \frac{3}{4}$ تقارن محوری $\alpha = \frac{1}{2}$

مثال: لنگر تکیه‌گاه a را بدست آورید.

$$K_{BC} = \frac{C}{4}\frac{EI}{l/2} = \frac{6}{4}\frac{EI}{l} = 1.5\frac{EI}{l} \to 1.5$$

$$K_{AB} = \frac{EI}{l} \to 1$$

$$D_{BC} = \frac{1.5}{1+1.5} = \frac{1.5}{3.5} = \frac{3}{5} \qquad D_{BA} = \frac{1}{2.5}$$

$$M_{BA} = \frac{-ql^2}{8} * \frac{1}{2.5} = \frac{-ql^2}{20}$$

$$M_{HB} = \frac{ql^2}{2} = -\frac{ql^2}{40}$$

از روش شیب افت

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(\theta_B)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B)$$

$$M_{BC} = \frac{3EI}{l/2}(\theta_B) = \frac{6EI}{l}\theta_B$$

$$M_{BA} + M_{BC} = \frac{-qL^2}{8}$$

$$\frac{10EI}{l}\theta_B + \frac{6EI}{l}\theta_B = \frac{-qL^2}{8}$$

$$\frac{10EI}{l}\theta_B = \frac{-qL^2}{8} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{80}EI$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l} * \frac{-qL^3}{80EI} = \frac{-qL^2}{40}$$

مراحل روش پخش لنگر

۱. ابتدا اتصالات بسته می‌شود (گیردار فرض شود). به این ترتیب که کلیه اعضاء به صورت دو سرگیدار و گشتاورهای گیرداری را برای تمام اعضاء می‌نویسیم.

۲. اتصالات را باز کرده یعنی هر بار یک اتصال باز می‌شود و فرض می‌شود از دوران سایر اتصالات جلوگیری شده باشد. گشتاور باز کننده در این اتصال را باز کرده و گشتاورهای توزیع شده به انتهای نزدیک عضو متلاقی در این اتصال را می‌نویسیم (توزیع با پخش لنگر).

۳. گشتاورهای انتقالی با توجه به ضریب انتقال به انتهای دور این عضوها را بدست می‌آوریم. گشتاورهای انتقالی به انتهای دور به منزله گشتاور گیرداری جدید برای انتهای دور عضو خواهد بود.

٤. اتصال را دوباره می‌بندیم. اتصال بعدی را جهت باز کردن انتخاب می‌کنیم. گام های دو و سه را برای گره باز شده جدید انجام می‌دهیم.

۵. اتصالات به نوبت باز و بسته می‌شود. بنابراین گاه دو و سه چندین بار تکرار خواهد شد. عملیات هنگامی متوقف می‌شود که گشتاورهای انتقالی به حدی کوچک شوند که بتوان از آنها صرف نظر کرد.

٦. از جمع گشتاورها نتایج نهایی را بدست می‌آوریم.

مثال

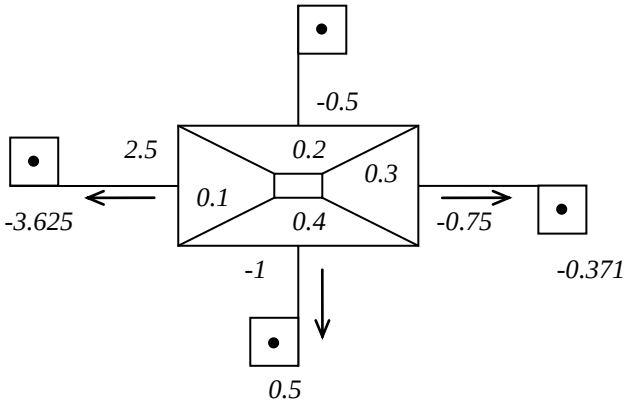
$$K_{ae}=\frac{EI}{l}=\frac{EI}{5}=1 \qquad D_{ea}=\frac{1}{10}=0.1$$
$$K_{be}=\frac{2EI}{l}=\frac{2}{5}EI=2 \qquad D_{eb}=\frac{3}{10}=0.3$$
$$K_{ce}=\frac{2EI}{l}=\frac{3}{5}EI=3 \qquad D_{ec}=\frac{3}{10}=0.3$$
$$K_{de}=\frac{4EI}{l}=\frac{4}{5}EI=4 \qquad D_{de}=\frac{4}{10}=0.4$$
$$\sum K=(1+2+3+4)=10$$
$$M_{\in a}=M*D_{ea}=-3.5*0.1=-0.35$$
$$M_{eb}=-2.5*0.2=-0.5$$
$$M_{ec}=-2.5*0.3=-0.75$$
$$M_{ed}=-2.5*0.4=-1$$

گشتاور انتهایی عضور

گام	ردیف	a_e		b_e		c_e		d_e	
		M_{a}	M_{e}	M_{b}	M_{e}	M_{c}	M_{c}	M_{d}	M_{e}
1	F_{em}	-3.5	3.5	0	0	0	0	0	0

2	D.M	0	-0.25	0	-0.5	0	-0.75	0	-1
3	C.O.M	-0.125	0	-0.35	0	-0.375	0	-0.5	0
	Σ	-2.625	2.25	-0.25	-0.5	-0.375	-0.75	-0.5	-1

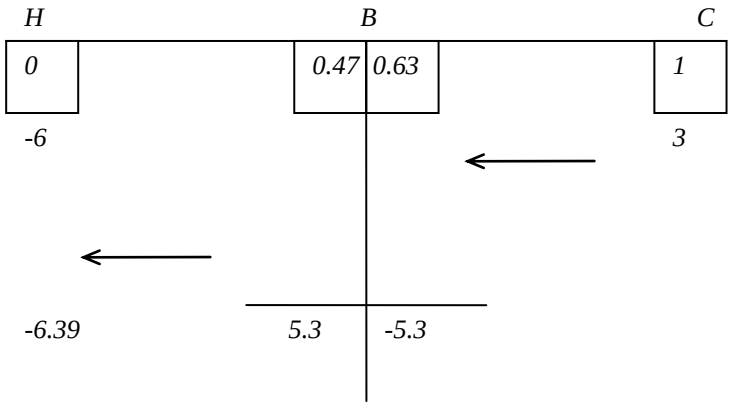
مثال: تمام اتصالات را گیردار فرض می‌کنیم.



$$M_{BA} = -M_{AB}^{F} = 6$$
$$M_{CB}^{F} = -M_{BC}^{F} = 3$$

از سختی کاهش یافته استفاده کردیم.

$$K_{AB} = \frac{I}{6}$$
$$K_{BC} = \frac{I}{4} * \frac{3}{4} = \frac{3I}{16} = 0.187I$$
$$D_{BA} = \frac{I/6}{I/6 + 3I/16} = 0.47$$
$$D_{BC} = \frac{\frac{3T}{16}}{\frac{I}{16} + \frac{3I}{16}} = 0.53$$



حال لنگر گیرداری و بعد باز کردن گره C

ضریب انتقال از گیردار با مفصل ۰/۵ و دو مفصلی

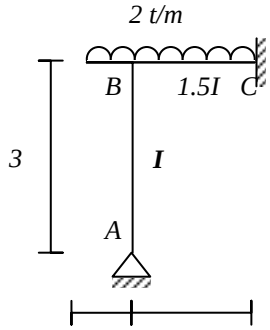
در گره B لنگر ۱/۵- می‌خواهیم تا لنگر ٦ را صفر کنیم.

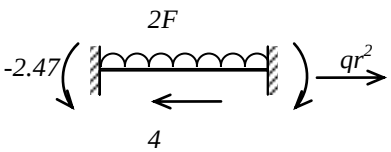
$$-1.5*0.47=-0.7$$
$$-1.5*0.53=-0.8$$

حال در گره B لنگر را به سمت A انتقال می‌دهیم.

$$M_{AB}=-6.35 \qquad M_{BA}=5.3$$
$$M_{BC}=-5.3 \qquad M_{CB}=0$$

$$M_{CB}^{F}=-M_{BC}^{F}=2.67$$
$$K_{BC}=\frac{1.52}{4}=1.5$$
$$K_{BA}=\frac{I}{3}*\frac{3}{4}=\frac{3I}{12}=\frac{I}{4}$$
$$D_{BC}=\frac{1.5}{1.5+1}=\frac{1.5}{2.5}=0.6$$
$$D_{BC}=\frac{1}{1+1.5}=\frac{1}{2.5}=0.4$$





دارای تقارن محوری از وسط نصف می‌کنیم.

$$M_{CB}^{F} = -M_{BC}^{F} = \frac{12*5^2}{12} = 25$$

$$K_{BC} = \frac{I}{l} = \frac{I}{5} = 1$$

$$K_{BA} = \frac{I}{l} = \frac{I}{5} = 1$$

$$D_{BC} = \frac{1}{1+1} = 0.5$$

$$D_{BA} = \frac{1}{1+1} = 0.5$$

$$M_{HB} = 6.25 \qquad M_{BA} = 12.5 \qquad M_{BC} = -12.5 \qquad M_{CB} = 31.25$$

مثال: تحلیل کنید.

$$\sum M_D = 0 \qquad M + 2.5*4 = 0 \qquad M = -10$$

$$\frac{ql^2}{12} = \frac{2.5*8^2}{12} = 13.33$$

$$\frac{P_a b^2}{l^2} = \frac{5*4*2^2}{6^3} = 2.22$$

$$\frac{P_a b^2}{l^2} = \frac{5*2*4^2}{6^2} = -4.44$$

سختی

$$K_{AB} = \frac{I}{8} = 1 = 0.125I$$

$$K_{BC} = \frac{3I}{6} = \frac{I}{2} = 4 = 0.5I \qquad \frac{I}{8} = 1$$

$$K_{BD} = \frac{2I}{8} * \frac{3}{4} = \frac{3I}{16} = 1.5$$

$$K = 6.5$$

$$D_{ab} = 0$$

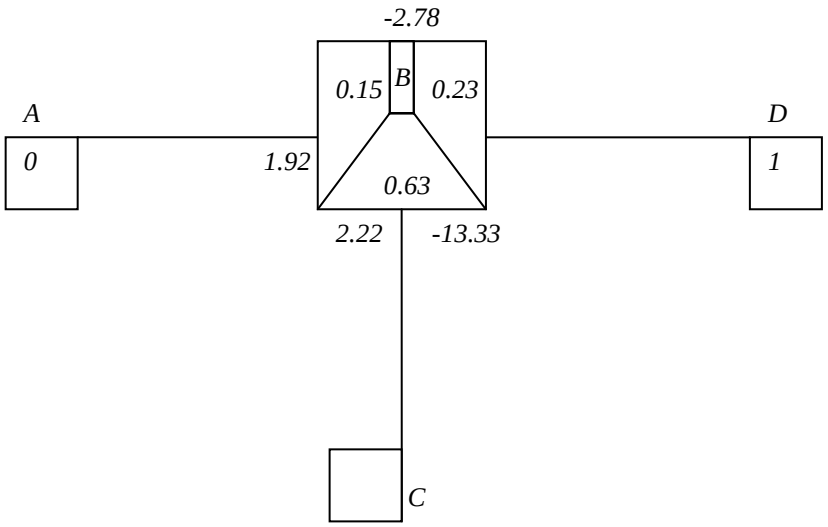
$$D_{ba} = \frac{1}{1+4+1.5} = \frac{1}{6.5} = 15\%$$

$$D_{ba} = \frac{4}{6.5} = 0.63$$

$$D_{cn} = 0$$

$$D_{bd} = \frac{1.5}{6.5} = 0.23$$

$$D_{Db} = 1$$



۱. داخل مربع ضریب پخش

$$-13.33-1.67+2.226-13.78$$

۲. لنگر گیرداری F_{em}

$$BA = 12.78*85 = 1.92$$

۳. در D لنگر باید صفر مفصلی

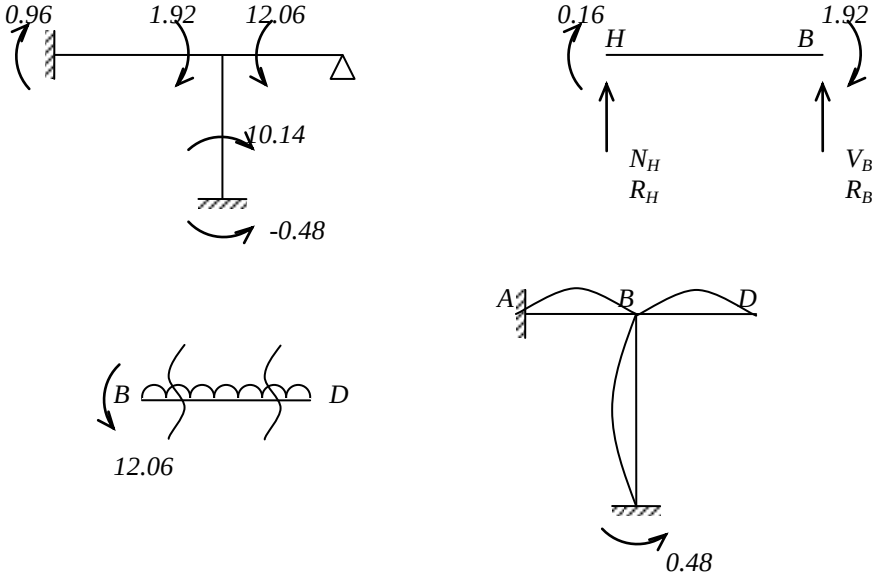
$$BC = 12.78*0.63 = 7.92$$

٤. حال گره B جمعش باید صفر شود.

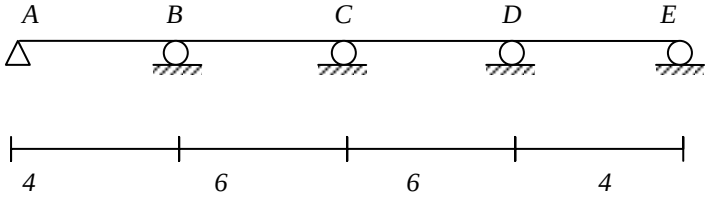
$$BD = -12.78*0.23 = 2.94$$

حال انتقال: سمت D نمی‌توان مفصلی حال تعادل در B باید برقرار شود.

$$1.92+10.14 = -12.06$$



در صورتی که تکیه‌گاه C به اندازه ۲ سانتیمتر نشت داشته باشد مطلوب است تحلیل سازه زیر.



در صورتی که δ را داشته و تغییر مکان در جهت عقربه ساعت باشد:

$$M_{BC}^{F} = M_{CB}^{F} = \frac{-6EI\delta}{l^2}$$

در صورتی که δ را داشته و تغییر مکان در خلاف عقربه ساعت باشد:

$$M_{BC}^{F} = M_{CB}^{F} = \frac{+EI\delta}{l^2}$$

در صورتی که δ و جهت عقربه ساعت و یک سر مفصل یک سر جوش باشد:

$$M_{BC}^{F} = M_{CB}^{F} = \frac{-3EI\delta}{l^2}$$

در صورتی که δ و جهت خلاف عقربه ساعت و یک سر مفصل یک سر جوش باشد:

$$M_{BC}^{F} = M_{CB}^{F} = \frac{+3EI\delta}{l^2}$$

$$M_{BC}^{F} = M_{BC}^{F} = \frac{-6EI\delta}{l^2} \qquad M_{AB} = \frac{2EI}{l}\left(-\frac{3\delta}{l}\right)$$

اگر چرخش در جهت عقربه های ساعت باشد مقدار لنگر منفی است.

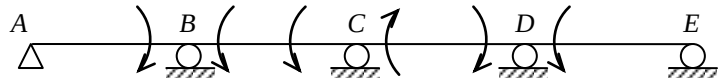
اگر چرخش در خلاف جهت عقربه های ساعت باشد مقدار لنگر مثبت است.

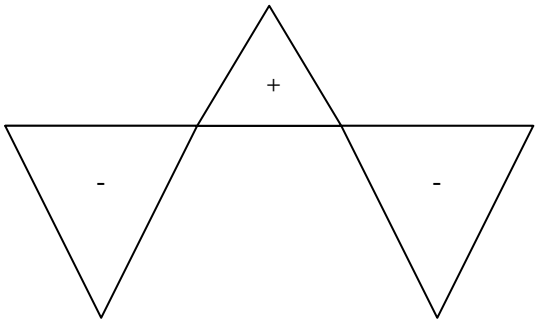
$$M_{BC}^{F} = M_{CB}^{F} = -\frac{6*4000*0.02}{6^2} = 13.33 \sim 20ton$$

$$K_{AB} = \frac{I}{4} * \frac{3}{4} = \frac{3I}{16} \to 3$$

$$K_{BC} = \frac{1.5I}{6} = \frac{I}{4} \to 4$$

$$D_{BC} = 1D_{BA} = \frac{3}{7} \qquad D_{BC} = \frac{4}{7} \qquad D_{CB} = 0$$





تحلیل قاب با یک درجه آزادی به روش پخش لنگر

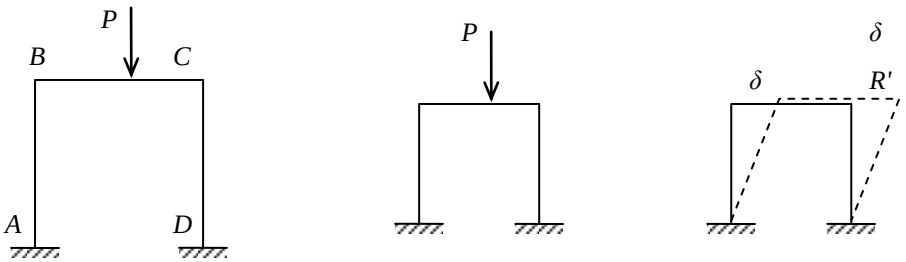
برای تحلیل قابی با یک درجه آزادی ابتدا قاب را با گذاشتن تکیه گاهی که تغییر مکان جانبی یا δ داریم، از حرکت جانبی آن جلوگیری می‌نماییم. سپس قاب را به روش پخش لنگر تحلیل می‌کنیم. لنگرهای بدست آمده را با تغییر مکان δ' برای نیروی فرضی R' تحلیل می‌نماییم.

لذا لنگرهای گیرداری ناشی از تغییر مکان عضو به صورت زیر بدست می‌آید:

$$-\frac{6EI\delta}{l^2} = M^F$$

$$-\frac{3EI\delta}{l^2} = M^F$$

سپس با لنگرهای بدست آمده قاب را برای بار دوم با تغییر مکان بوجود آمده تحلیل می‌کنیم. لنگرهای بدست آمده برای قاب حالت دوم را M' می‌نامیم. سپس با نوشتن معادلات تعادل نیروی تکیه گاهی (تکیه گاهی قرار دادن) را بدست می‌آوریم. در نهایت لنگر نهایی اعضاء برابر خواهد بود.

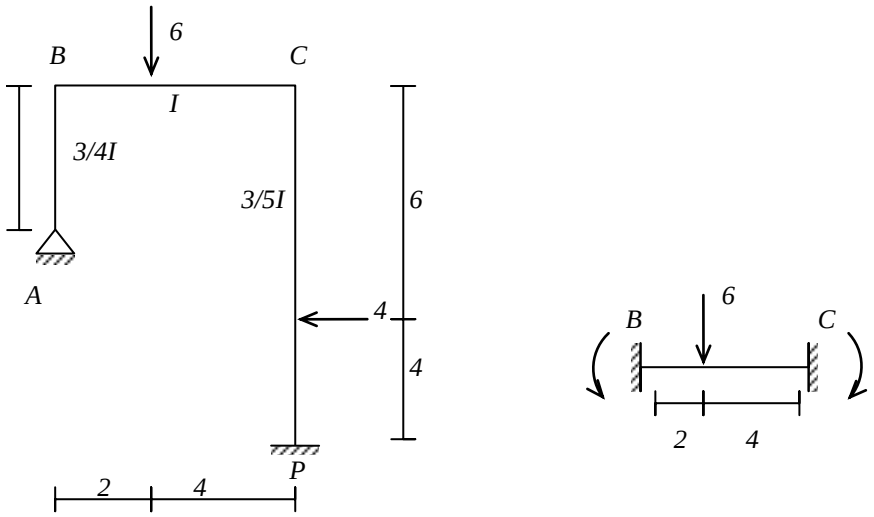


$$M = M_o + \delta M'$$

$$\delta = \frac{R_o}{R}$$

$$M = M_o + \delta \times M$$

مثال:



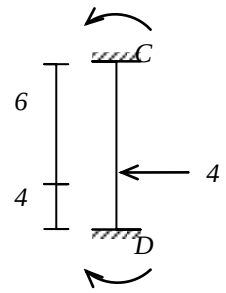
ابتدا لنگر گیرداری

$$M_{BC} = -\frac{6*2*4^2}{6^2} = -5.33$$

$$M_{CB} = \frac{6*4*2^2}{6^2} = 2.67$$

$$M_{CD} = -\frac{4*6*4^2}{10^2} = -3.84$$

$$M_{DC} = \frac{4*4*6^2}{10^2} = 5.76$$



سختی:

$$K_{AB} = \frac{2.3I}{4} * \frac{3}{4} = \frac{I}{8} \rightarrow 3$$

$$K_{BC} = \frac{I}{6} = \rightarrow 4$$

$$K_{CD} = \frac{2.5I}{10} = \frac{I}{4} = \rightarrow 6$$

سوم پخش

$$D_{AB} = 1$$

$$D_{BA} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7} = 0.43$$

$$D_{BC} = \frac{4}{3+4} = 0.57$$

$$D_{CB} = \frac{4}{4+6} = 0.4$$

$$D_{CD} = \frac{6}{4+6} = 0.6$$

$$D_{DC} = 0$$

$$\begin{cases} M_{AB} = 0 \\ M_{BA} = 2.33 \\ M_{BC} = -3.33 \\ M_{CD} = 4.01 \\ M_{CD} = -4.01 \\ M_{DC} = 5.68 \end{cases}$$

حال باید نیروی تکیه گاهی که سازه را پایدار می‌کند بدست آورد.

حل: برش در ستون ها.

$$R_o + 0.58 - 1.43 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_o = 0.85$$

$$\sum M_A = 0 \qquad H_1 * 4 + M_{BA} = 0$$

$$H_1 = \frac{M_{BH}}{4} = \frac{2.33}{4} = 0.58$$

علامت در علامت عدد دیگر تاثیری ندارد.

$$\sum M_D = 0 \qquad M_{CD} - H_2 * 10 + 4 * 4 * -M_{DC} = 0$$

$$H_2 = -\frac{M_{DC} + M_{CD} + 16}{10} = 1.43 = -1.43$$

$$M_{BA}^F = \frac{3E\left(\frac{2}{3}I\right)}{4^2} = \frac{EI\delta}{8} = 0.125EI\delta$$

$$M_{CD}^F = \frac{6E(2.5I)}{10^2} = 0.15EI\delta$$

یک عدد فرضی نسبت به این دو معادله برای بدست آوردن δ.

$$\frac{M_{CD}^F}{M_{BA}^F} = \frac{0.15EI\delta}{0.125EI\delta} \qquad \frac{1.5}{12.5} = 1.2$$

با فرض هر مقداری برای Mها با نسبت

$$M_{CD}^F = 12$$

$$M_{BH}^F = 10$$

$$M'_{AB} = 0 \qquad M'_{BH} = 6.48 \qquad M'_{BC} = -6.48$$

$$M'_{CB} = -6.1 \qquad M'_{CD} = 6.1 \qquad M'_{DC} = 9.08$$

$$H'_1 = \frac{M'_{AB} + M'_{BH}}{4} = 1.61$$

$$H'_2 = \frac{M'_{CD} + M'_{DC}}{10} = 1.53$$

$$\sum F_X = 0 \qquad R' = 1.61 + 1.53 = 3.14$$

$$\delta = \frac{R_o}{R'} = \frac{0.85}{3.14} = 0.27$$

$$M = M + \delta M'$$

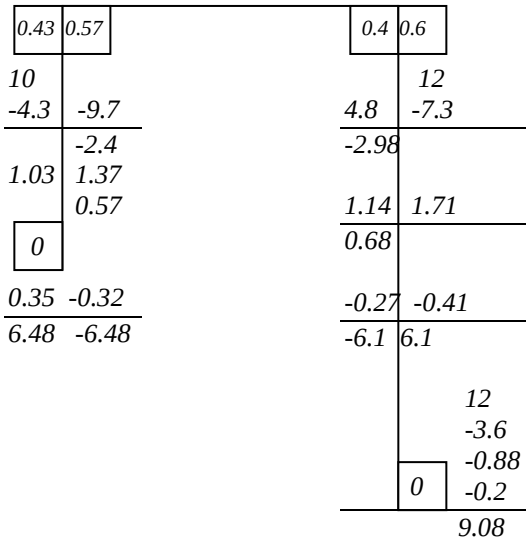
$$M_{HB} = 0$$

$$M_{BH} = 2.33 + (0.27 * 6.48) = 4.08$$

$$M_{BC} = -2.33 + (0.27 * -6.48) = -4.08$$

$$M_{CB} = 4.01 + (0.27 * -6.1) = -4.08$$

$$M_{DC} = 5.68 * (0.27 * 9.08) = -4.08$$



روش کانی

مزایای روش کانی نسبت به لنگر

۱. برای سازه های بدون انتقال جانبی حل مساله فقط شامل تکرار یک عمل ساد می‌باشد.

۲. برای سازه‌هایی با انتقال جانبی برای قاب های مستطیلی (منظم) (بدون ---- و شیب) مستقیماً و بدون استفاده از جمع آثار قوا صورت می‌گیرد.

۳. دارای مزیت حذف خود به خود خطاها می‌باشد. خطاهای محاسباتی در ادامه محاسبات خود به خود سرشکن می‌شود.

٤. اگر تغییراتی در ابعاد اعضاء و بارگذاری داشته باشیم نیازی به تجدید عملیات انجام شده نیست.

مراحل روش کانی برای تیرهای سرتاسری

۱. به دست آوردن لنگر گیرداری و سپس لنگر مقاوم که از جمع جبری لنگرهای گیرداری مربوط به آن بدست می‌آید.

$$\widehat{M}_i = \sum M_{ij}^F$$

۲. بدست آوردن ضریب دوران

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{L_{ij}}{\sum K_{ij}}$$

۳. بدست آوردن لنگر سوم دوران

$$M'_{ij} = R_{ij}\left[\widehat{M}_i + \sum M_{ij}\right]$$

نکته: در دور اول (سیکل اول) مقدار M'_{ij} مساوی صفر فرض می‌شود و در سیکل های بعدی مقادیر محاسبه شده لنگر معلوم دوران در رابطه قرار داده می‌شود و آنقدر این سیکل‌ها تکرار می‌شود تا اختلاف M'_{ij} در حد تقریب مطلوب باشد.

٤. بدست آوردن لنگر انتهایی اعضاء

$$M_{ij} = M_{ij}^{F} + 2M'_{ij} + M'_{ji}$$

مثال: تحلیل تیر به روش کانی

اگر لنگر خارجی و لنگر کنسول در جهت عقربه ساعت مقدارش منفی و بالعکس است.

۱. لنگر گیرداری

$$\frac{5*2*3^2}{5^2} = 3.6$$
$$M_{AB}^{F} = -2.4$$
$$M_{BH}^{F} = 3.6$$

$$\frac{2*4^3}{12} = 2.67$$
$$M_{CB}^{F} = -M_{BC}^{F} = 2.67$$

$$M_{CD}^{F} = 5.33*1.5 = -8$$
$$M_{DC}^{F} = 0$$

مفصل را می‌توان حذف و ۱/۵ را برابر آن را به گیردار اضافه نمود.

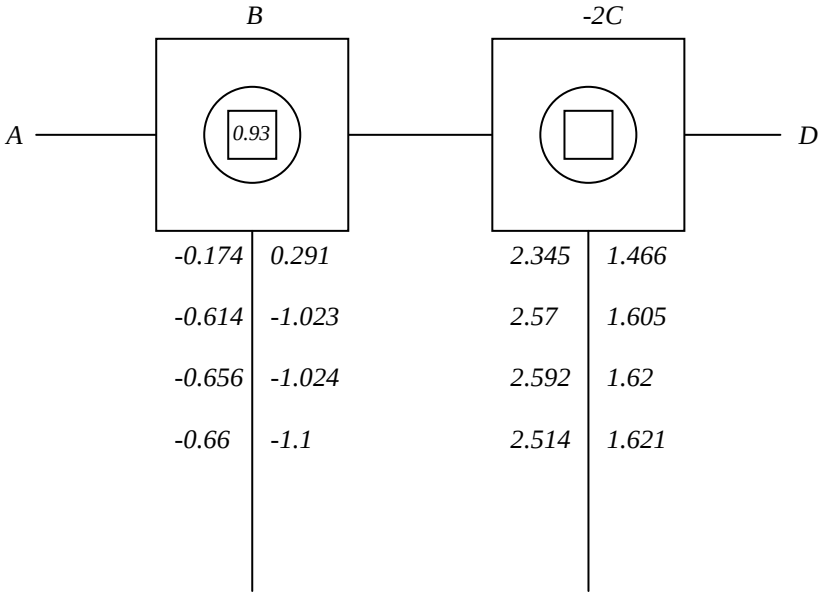
تکیه‌گاه مفصلی داخلی گیردار می‌شود و فقط آخری و اولی را می‌توان ۱/۵ برابر نمود.

۲. سختی

$$K_{AB} = \frac{1.2I}{5} = 0.24I$$
$$K_{BC} = \frac{1.6I}{4} = 0.4I$$
$$K_{CB} = \frac{2I}{6} * \frac{3}{4} = \frac{I}{4} = 0.25I$$

۳. ضرایب دوران

$$R_{BA} = \frac{-1}{2}\left(\frac{0.24}{0.24+0.4}\right) = -0.1875$$
$$R_{BC} = \frac{-1}{2}\left(\frac{0.4}{0.24+0.4}\right) = -0.3125$$
$$R_{CB} = \frac{-1}{2}\left(\frac{0.25}{0.24+0.4}\right) = -0.1923$$
$$D_{BA} = \frac{0.24}{0.24+0.4+0.25}$$



۱. $\widehat{M}_{ij}$: جمع کل لنگرهای یک گره

۲. لنگر مقاوم را در ----- می‌نویسیم (منهای دو لنگر اطراف) R_{ij} را بنویسیم.

سیکل اول

گره B

$$\begin{cases} M'_{BA} = 0.1875(0.93+0) = -0.174 \\ M'_{BC} = 0.3125(0.93+0) = -0.291 \end{cases}$$

گره C

$$\begin{cases} M'_{CB} = -0.3077(-7.33+0.291) = 2.345 \\ M'_{CD} = -0.1923(-7.33-0.291) = 1.466 \end{cases}$$

سیکل دوم

گره B

$$\begin{cases} M'_{BA} = 0.1875(0.93+2.345) = -0.614 \\ M'_{BC} = -0.3125(0.93+2.345) = -1.023 \end{cases}$$

گره C

$$\begin{cases} M'_{CB} = -0.3077(-7.33+1.023) = 2.57 \\ M'_{CD} = -0.1923(-7.33-1.023) = 1.605` \end{cases}$$

سیکل سوم

گره B

$$\begin{cases} M'_{BA} = -0.1875(0.93+2.57) = -0.656 \\ M'_{BC} = 0.2625(0.93+2.54) = -1.094 \end{cases}$$

گره C

$$\begin{cases} M'_{CB} = -0.3077(-7.33-1.094) = 2.52 \\ M'_{CD} = 0.1922(-7.33-1.094) = 1.62 \end{cases}$$

سیکل چهارم

گره B

$$\begin{cases} M'_{BA} = -0.1875(0.93*2.52) = -6.6 \\ M'_{BC} = -0.3125(0.93*2.52) = -1.1 \end{cases}$$

گره C

$$\begin{cases} M'_{CB} = -0.377(-7.33-1.1) = 2.594 \\ M'_{CD} = -0.1923(-7.33-1.1) = 1.621 \end{cases}$$

بدست آوردن خود لنگر

$$M_{AB} = 2*0 + (-0.66) - 2.4 = -3.06$$
$$M_{BA} = (2*-0.66) + 0 + 3.6 = 2.28$$
$$M_{BC} = (2*-1.1) + 2.2594 + (-2.67) = -2.28$$
$$M_{CB} = (2.59*2) + (-1.1) + 2.67 = 6.76$$
$$M_{CD} = (2*1.621) - 0 - 8 = -4.76$$
$$M_{DC} = 0$$

کنسول حذف و برای B صفر: ۲ تا را صفر می‌دهیم به C البته با ۱/۲ انتقال می‌دهیم.

$$M_{BC} = 0$$
$$M_{CB} = 7$$

لنگر گیرداری

$$M_{FE} = 0$$
$$M_{EF} = -8.55$$

$$\frac{8*5*3^2}{8^2} = 5.63$$

سختی

$$K_{BC} = \frac{I}{6} * \frac{3}{4} = 12$$
$$K_{CD} = \frac{I}{6} = 16$$
$$K_{DE} = \frac{1.5I}{8} = 18$$
$$K_{EF} = \frac{1.5I}{8} * \frac{3}{4} = 13.5$$

ضرایب دوران

$$R_{BC}=0$$
$$R_{CB}=\left(\frac{12}{12+16}\right)*-\frac{1}{2}=-0.214$$
$$R_{CD}=\left(\frac{16}{12+16}\right)*-\frac{1}{2}=-0.286$$
$$R_{DC}=\left(\frac{16}{16+18}\right)*-\frac{1}{2}=-0.235$$
$$R_{DE}=\left(\frac{18}{16+18}\right)*-\frac{1}{2}=-0.265$$
$$R_{ED}=\left(\frac{18}{13.5+18}\right)*-\frac{1}{2}=-0.286$$
$$R_{EF}=\left(\frac{13.5}{18+13.5}\right)*-\frac{1}{2}=-0.214$$

قسمت آخر مساله

$$M_{BC}=4$$
$$\left.\begin{aligned}M_{CB}&=(2*-2.11)+0+7=2.78\\M_{CD}&=(2*-2.83)+2.89+0=-2.78\end{aligned}\right\}=0$$
$$\left.\begin{aligned}M_{DC}&=(2*2.89)+(-2.83)+0=2.95\\M_{DE}&=(2*3.26)+(-0.1)+(-9.38)=-2.95\end{aligned}\right\}=0$$
$$\left.\begin{aligned}M_{ED}&=(2*-0.1)+3.24+5.63=8.69\\M_{EF}&=(2*-0.07)+0+(-8.55)=-8.69\end{aligned}\right\}=0$$
$$M_{FE}=-15$$

سیکل اول

گره C

$$\begin{cases}M'_{CB}=-0.214*(7+0)=-1.5\\M'_{CD}=-0.286*7=-2\end{cases}$$

گره B

$$\begin{cases}M'_{DC}=-0.235*(-9.38-2)=2.67\\M'_{DE}=-0.265*(-9.38-2)=3.02\end{cases}$$

گره E

$$\begin{cases}M'_{ED}=-0.286*(-2.92+3.02)=-0.03\\M'_{EF}=-0.214*(-2.92+3.02)=-0.02\end{cases}$$

سیکل دوم

گره C

$$\begin{cases} M'_{CB} = -0.214 * (7 + 2.67) = -2.07 \\ M'_{CD} = -0.286 * (7 + 2.47) = -2.77 \end{cases}$$

گره B

$$\begin{cases} M'_{DC} = -0.235 * (-9.38 + (-2.77 + 0.03)) = 2.67 \\ M'_{DE} = -0.265 * (-9.38 - (-2.77 - 0.03)) = 3.23 \end{cases}$$

گره E

$$\begin{cases} M'_{ED} = -0.286 * (-2.92 + 3.23) = 0.09 \\ M'_{EF} = -0.214 * (-2.92 + 3.23) = 0.07 \end{cases}$$

روش کانی برای قاب

این روش برای قاب های مستطیل و منظم می‌باشد و منظور از منظم بودن قاب این است که قاب دارای شرایط زیر باشد:

۱. قاب دارای عضو شیب دار نباشد.

۲. به غیر طبقه اول ارتفاع ستون های طبقات دیگر برابر باشد.

۳. تمام اتصالات قاب گیردار بوده و فاقد هرگونه لولای داخلی باشد (لولا = مفصل)

مراحل روش کانی برای قاب ها

۱. گیردار نمودن تمامی گره‌ها در مقابل دوران و انتقال

۲. بدست آوردن لنگرهای گیرداری و سپس لنگر مقاوم در هر گره

۳. بدست آوردن نیروی برشی طبقه در حالت گیرداری

گره ها:

$$Q_r = \sum p + \sum Fes$$

نکات مرحله ۳:

الف) وقتی بار جانبی در سازه وارد نشود: $Q_r = 0$

ب) وقتی بار جانبی فقط به گره قاب وارد شود: $Q_r = \sum p$

ج) وقتی بار جانبی به صورت بار گسترده یکنواخت باشد. با توجه به برابر شدن لنگر گیرداری در ابتدا و انتهای ستون؛

در نتیجه: $\sum Fes = 0$

و می‌توان Q_r را برابر سهم افقی آن گره از بار گسترده وارد شده به آن ستون درنظر گرفت.

$$V = Q_r$$

٤. بدست آوردن ضرایب ارتفاع یا r_{ij} و لنگر طبقه M_r.

- بدست آوردن r_{ij}: برای بدست آوردن ضرایب ارتفاع برای قاب‌هایی که ستون های نامساوی دارند ارتفاع یک ستون به عنوان ارتفاع ستون مبنا قرار دارد.

$$r_{ij} = \frac{h_o}{h_r}$$

و چون باید به مفصل h_r در ۱/۵ ضرب می‌شود.

- در تعیین ضریب ارتفاع: ارتفاع ستون با پایه مفصلی ۱/۵ برابر ارتفاع خودش درنظر می‌گیریم.

$$r_{ij} = \frac{h_o}{h_r}$$

- و لنگر طبقه نیز از روابط زیر بدست می‌آید:

ستون با ارتفاع مساوی $M_r = \frac{Q_r h_r}{3}$

ستون با ارتفاع نامساوی $M_r = \frac{Q_r h_o}{3}$

۵. ضرایب دوران

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}$$

٦. بدست آوردن ضرایب انتقالی

$$D_{ij} = -1.5\frac{r_{ij} * k_{ij}}{\sum\left(\underset{\sim}{M}\, r_{ij}{}^{2}.k_i\right)}$$

٧. بدست آوردن لنگر سهم دوران

$$M'_{ij} = R_{ij} * \left[\widehat{M}_i + \sum\left(M'_{ij} + M''_{ij}\right)\right]$$
$$M''_{ij} = D_{ij}\left[M_r + \prod r_{ij}\left(M'_{ij} + M'_{ji}\right)\right]$$

٨. بدست آوردن لنگر انتهایی اعضاء

$$M_{ij} = M'_i + 2M'_{ij} + M'_{ji} + M'_{ji} + M''_{ji}$$

مثال

سختی

$$K_{AD} = \frac{I}{2} = 30$$
$$K_{DF} = \frac{2I}{5} = 16$$
$$K_{FG} = \frac{2I}{5} = 16$$
$$K_{FG} = \frac{3I}{4} = 30$$
$$K_{CG} = \frac{I}{2} * \frac{3}{4} = 15$$

ضریب شکل

گیردار

$$M_H = 1$$

گیردار

$$M_B = 1$$

مفصلی

$$M_C = 075$$

ضریب دوران

$$R_{ij} = -0.5\frac{K_{ij}}{\sum k_{ij}}$$

$$R_{DA} = -0.5\frac{20}{16+20} = 0.278$$

$$R_{DF} = -0.5\frac{16}{36} = -0.222$$

$$R_{FA} = -0.5\frac{16}{16+16+30} = -0.129$$

$$R_{FB} = -0.5\frac{30}{16+16+30} = -0.242$$

$$R_{FG} = -0.5\frac{16}{16+16+30} = -0.129$$

$$R_{GF} = -0.5\frac{16}{16+15} = -0.258$$

$$R_{GA} = -0.5\frac{15}{16+15} = -0.242$$

ضریب ارتفاع

$$r_{ij} = \frac{h_o}{h_r}$$

$$h_o = 2$$

$$r_{AD} = \frac{2}{3} = 1$$

$$r_{BF} = \frac{3}{4} = 0.5$$

$$r_{CG} = \frac{2}{2*1.5} = 0.67$$

ضریب انتقال

$$D_{ij} = -1.5\frac{r_{ij}k_{ij}}{\sum\left(M_i * {r_{ij}}^2 * k_{ij}\right)}$$

$$D_{AD} = -1.5\frac{1*20}{\left(1*1^2*20\right)+\left(1*(0.5)^2*30\right)+\left(0.75+0.67*15\right)} = -0.92$$

$$D_{BF} = -1.5\frac{0.5*30}{32.55} = -0.68$$

$$D_{CG} = -1.5\frac{0.67*15}{32.55} = -0.46$$

نیروی برشی طبقه

Q_r که برای بدست آوردن M_r لنگر طبقه است.

$$\sum_r = Q_r$$
$$Q_r = 5t$$
$$M_r = \frac{Q_r h_o}{3} = \frac{5*2}{2} = 3.33$$

سیکل اول، دوم، سوم و چهارم و سیکل انتقال وجود دارد.

سیکل اول انتقال

$$M''_{ij} = D_{ij}\left(M_r + \sum r_{ij}\left(M'_{ij} + M'_{ij}\right)\right)$$
$$M''_{AD} = -0.92\left(3.33 + \sum 0\right) = -3.06$$
$$M''_{BF} = -0.68\left(3.33 + 0\right) = -2.3$$
$$M''_{CG} = -0.46\left(3.33 + 0\right) = -1.53$$

سیکل اول دوران

$$M''_{ij} = R_{ij}\left(\widehat{M}_i + \sum\left(M'_{ji} + M''_{ij}\right)\right)$$

گره D:

$$\begin{cases} M'_{DA} = -0.278\left(0 + \sum 0 + \left(-3.06\right)\right) = 0.85 \\ M'_{DF} = 0.222\left(0 + 0 + \left(-3.06\right)\right) = 0.68 \end{cases}$$

گره F:

$$\begin{cases} M'_{FD} = -0.129\left(0 + 0.68 + \left(-2.3\right)\right) = 0.21 \\ M'_{FD} = -0.242\left(0.068 - 2.3\right) = 0.39 \\ M'_{FG} = -0.129\left(0 + 0.68 - 2.3\right) = 0.21 \end{cases}$$

گره G:

$$\begin{cases} M'_{GF} = -0.258\left(0 + 0.21 - 1.5\right) = 0.34 \\ M'_{GC} = -0.242\left(0 + 0.21 - 1.5\right) = 0.32 \end{cases}$$

خلاصه نکات روش‌های تحلیل سازه‌ها

گردآوری، ترجمه و تالیف: بهزاد شیرانی

)

فهرست موضوعات

موضوع	شماره صفحه
مبحث معینی و نامعینی	۳
مبحث پایداری و ناپایداری	۴
نکاتی درباره‌ی به دست آوردن نیروهای داخلی اعضا	۵
اعضای صفر نیرویی در خرپاها	۶
نکات ترسیم دیاگرام‌های خمش و برش	۷
روش کار مجازی برای خرپاها (اعضای محوری)	۸
روش کار مجازی در قاب‌ها (اعضای چند نیرویی)	۱۰
روش تیر مزدوج	۱۳
روش لنگر سطح	۱۷
موضوعات خاص و تکنیک‌های تحلیل سازه	۲۱
محاسبه انرژی ذخیره شده	۲۲
قضیه کاستلیانو	۲۳
حل سازه‌های نامعین با روش شیب- افت	۲۴
مدل‌سازی با فنر	۲۷
خواص تقارن در سازه‌ها	۲۸
روش پخش لنگر	۳۸
خط تاثیر	۵۳
خلاصه‌ای از روش کانی	۶۲
پیوست: مقادیر و توابع خیز و شیب برای تعدادی از تیرهای متداول	۶۹

مبحث معینی و نامعینی

- به تفاضل تعداد مجهولات و معادلات در یک سازه درجه نامعینی گفته می‌شود.
- درجه نامعینی در سازه‌های دو بعدی (قاب‌ها) $DI=(r+3k)-(C+3)$
- درجه نامعینی یک خرپا $DI=(m+r)-2n$
- درجه نامعینی قاب فضایی $DI=(6m+r)-(6n+C)$

کلیه فنرهای انتقالی تکیه‌گاهی و فنرهای دورانی را حذف نموده و در انتها به تعداد درجات نامعینی می‌افزاییم.

فنر انتقالی داخلی را به یک عضو دو سر مفصل جایگزین می‌کنیم.

با کابل‌ها مانند فنر انتقالی برخورد می‌کنیم.

جهت شمارش کادر بسته اعضایی که در یک نقطه از روی یکدیگر عبور کرده‌اند $N_F-(N_m-1)$

K تعداد کادر بسته در سازه (کادر بسته شده با زمین حساب نیست)

C تعداد واکنش‌های آزاده شده ناشی از مفاصل داخلی

N_F تعداد کادرهای بسته　　m تعداد اعضا　　n تعداد مفاصل

N_m تعداد اعضایی که از روی هم عبور کرده‌اند　　r تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی

J تعداد گره‌های قاب (گره‌ی تکیه‌گاه‌ها هم مورد شمارش قرار گیرد

نکات اضافی:

تعداد معادلات شرط مفصل داخلی سه‌بعدی ۳ × (۱- تعداد اعضای متصل به مفصل)

فرمول دیگر درجه نامعینی قاب فضایی $(r+6k)-(6+C)$

فرمول دیگر برای درجه نامعینی قاب‌ها $(r+3m)-(3j+C)$

مبحث پایداری و ناپایداری

- اگر نامعینی سازه‌ای منفی شد آن سازه ناپایدار است.
- برای اتصال صحیح عضوی که خود پایدار و پیوسته است به حداقل سه عکس‌العمل به صورت سه عکس‌العمل نیرویی غیرموازی و غیرهمرس یا دو عکس‌العمل ناموازی و یک لنگر نیازمندیم.
- جهت حساب کردن درجه نامعینی داخلی از رابطه $3k - C$ استفاده می‌کنیم، اگر منفی شد این سازه ناپایدار است، در چنین حالتی این سازه به بیش‌از ۳ عکس‌العمل تکیه‌گاهی نیاز دارد.
- اگر سه مفصل در یک راستا داشته باشیم که مفصل سوم هیچ نوع قیدی نداشته باشد، این سازه ناپایدار است.
- گسترش و توسعه یک سازه پایدار و پیوسته یا سه جسم صلب می‌تواند به وسیله‌ی دو میله‌ی دو سر مفصل غیر همراستا و یک مفصل انجام گیرد.
- برای بررسی پایداری، قسمتی از سازه که خود پایدار است و به گونه‌ای مناسب به زمین متصل است را جدا می‌کنیم و فرض می‌کنیم بقیه‌ی سازه به زمین متصل است (با همان اتصالی که به قسمت جدا شده داشته است).
- اگر دو قسمت از یک سازه از طریق جسم صلب دو سر مفصل (خرپا یا میله‌ی خم شده) به هم متصل شده باشند، این جسم صلب را می‌توان به صورت یک میله‌ی دو سر مفصل در امتدادی که از دو انتهای جسم صلب بگذرد در نظر گرفت.
- دو جسم صلب برای اتصال پایدار به یکدیگر احتیاج به حداقل سه مولفه نیرویی به صورت: اتصال دو جسم به صورت گیردار، اتصال دو جسم از طریق یک مفصل و یک میله که از مفصل عبور نکند، اتصال دو جسم از طریق سه میله غیر موازی و غیر همرس، دارد. (یعنی اتصال دو جسم صلب با یک مفصل، دو میله، سه میله موازی، سه میله همرس، ناپایداری ایجاد می‌کند)
- جهت اتصال سه جسم صلب احتیاج به شش مولفه به صورت: سه مفصل غیر همراستا، دو مفصل به همراه دو میله که نقطه برخورد امتداد دو میله با دو مفصل دیگر در یک امتداد نباشد، یک مفصل و چهار میله، شش میله که دو به دو غیر موازی و غیر همرس باشند، داریم (در کل در محل برخورد امتداد هر دو میله یک مفصل مجازی تشکیل می‌شود و از آن‌جایی که نباید سه مفصل در یک راستا قرار گیرند پس مفاصل مجازی تشکیل شده نباید در یک راستا قرار گیرند.) بدین ترتیب ۴ میله موازی و یک مفصل، دو میله موازی به همراه دو مفصل که خطی که از دو مفصل می‌گذرد با دو میله دیگر موازی باشد و شش میله موازی ناپایدار هستند.

نکاتی درباره‌ی به دست آوردن نیروهای داخلی اعضا

- در صورت اعمال یک نیروی متمرکز بر روی یک مفصل خمشی، پس از جداسازی سازه از قسمت مفصل خمشی می‌توان نیروی متمرکز را به دلخواه در سمت چپ یا راست مفصل قرار داد اما اگر لنگر متمرکز در یک سمت از مفصل خمشی داشتیم نمی‌توانیم آن را جابه‌جا کنیم.
- در صورت اعمال یک لنگر متمرکز بر روی یک مفصل برشی، پس از جداسازی سازه از قسمت مفصل برشی می‌توان لنگر متمرکز را به دلخواه در سمت چپ یا راست مفصل قرار داد اما اگر نیروی متمرکز در یک سمت از مفصل برشی داشتیم نمی‌توانیم آن را جابه‌جا کنیم.
- اعضای پیوسته‌ی دو سر مفصلی که هیچ نیرویی در طول خود تحمل نمی‌کنند را می‌توان با یک نیرو در امتدادی که از دو انتهای عضو گذر کند مدلسازی کرد (نیرو در محل مفصل اشکال ندارد).
- در صورت بارگذاری نیروی گسترده خارجی عمود بر کمان یک قوس، می‌توان آن را با نیروی متمرکزی به اندازه‌ی $2qr\sin\frac{\alpha}{2}$ جایگزین نمود، α زاویه کمان قوس است.
- هنگامی که به گره‌ای سه عضو متصل باشد می‌توان نیروی این سه عضو را به صورت مثلث ترسیم کرد و می‌توان از نسبت نیروها به سینوس زوایا برای پیدا کردن نیروها استفاده نمود.

اعضای صفر نیرویی در خرپاها

- در صورت وجود فقط دو عضو غیر همراستا با هر زاویه‌ای در یک گره (به شرط اعمال نشدن هیچ نیروی خارجی به گره) هر دو عضو صفر نیرویی هستند.
- وجود فقط دو عضو غیر همراستا در یک گره و اعمال یک نیروی خارجی در راستای یکی از اعضا، عضو دیگر صفر نیرویی است (چنانچه دو نیروی خارجی اعمال شود که هر نیرو در راستای یکی از اعضا باشد، نیروی هر عضو برابر نیروی خارجی است که در آن راستا اعمال شده است).
- در صورت وجود سه عضو در یک گره، اگر دو عضو در یک راستا باشند، عضو سوم با هر زاویه‌ای صفر نیرویی است (به شرط اعمال نشدن هیچ نیروی خارجی به گره).
- اگر سازه‌ای متقارن باشد، روی محور تقارن مفصل وجود داشته باشد، بر مفصل بارگذاری خارجی وجود نداشته باشد، به مفصل چهار عضو متصل باشد که دو عضو عمود بر محور تقارن و آن دو عضو دیگر در یک راستا با هر زاویه‌ای باشند، این دو عضو دیگر صفر نیرویی هستند.

نکات ترسیم دیاگرام

- لنگر خمشی ایجاد شده درعضو زمانی مثبت است که تار پایین مقطع عضو را به کشش بیندازد.
- در انتهای آزاد اعضا در صورتی که لنگر خمشی متمرکزی وجود نداشته باشد، خمش داخلی صفر است (در صورت وجود لنگر متمرکز در انتهای آزاد عضو مقدار لنگر داخلی برابر همان لنگر متمرکز است)
- در انتهای آزاد اعضا در صورتی که نیروی متمرکزی وجود نداشته باشد، برش داخلی صفر است (در صورت وجود نیروی متمرکز در انتهای آزاد عضو مقدار برش داخلی برابر همان نیروی متمرکز است)
- در محل مفاصل و غلتک‌های داخلی در صورتی که لنگر متمرکز اثر نکند خمش داخلی صفر است و در صورتی که لنگر متمرکز داشته باشیم مقدار خمش داخلی برابر لنگر متمرکز است.
- در محل اتصال دو عضو به یکدیگر به صورت صلب (گیردار) با هر زاویه‌ای در صورتی که لنگر متمرکز اثر نکند، مقدار لنگر در دو طرف گره برابر است.
- مقدار خمش داخلی در دو طرف یک لنگر متمرکز یکسان نیست (اختلاف خمش دو طرف برابر با لنگر متمرکز است)
- برای ترسیم دیاگرام‌های خمش و برش در سازه‌های معین می‌توان فنرهای تکیه‌گاهی را به عنون تکیه‌گاه در نظر گرفت (در سازه‌های معین نیروی داخلی اعضا از سختی آن‌ها مستقل است)

روش کار مجازی برای خرپاها (اعضای محوری)

رابطه کلی برای تعیین تغییرشکل‌ها به روش کار مجازی در خرپاهای معین (نکات و تعریف پارامترها در صفحه بعد):

$$\Delta_i + W_R = \sum \frac{PL}{AE}\bar{P} + \sum \bar{P}.\alpha.L.\Delta T + \sum \bar{N}.\delta + \sum \frac{P}{k_\Delta}\bar{P}$$

Δ_i تغییرمکان در نقطه‌ی i

برای محاسبه **جابه‌جایی نسبی دو نقطه دلخواه** از یک خرپای معین، **دو بار واحد را همزمان به سمت یکدیگر یا به خلاف جهت یکدیگر به دو نقطه‌ی مربوطه در راستایی که از این دو نقطه می‌گذرد** اعمال کرده و روند کلی ذکر شده را طی می‌کنیم، Δ_i به‌دست آمده جابه‌جایی نسبی دو نقطه خواهد بود.

برای محاسبه **جابه‌جایی** یک گره از خرپا در یک راستای دلخواه، **یک بار واحد** در نقطه‌ی i **در راستایی که تغییرمکان نقطه‌ی i را در آن راستا می‌خواهیم** اعمال می‌کنیم، Δ_i به دست آمده جابه‌جایی گره مورد نظر در راستای مورد نظر

برای محاسبه **مقدار چرخش یک عضو از خرپا**، یک **زوج نیرو** عمود بر محور طولی عضو در دو انتهای آن به گونه‌ای اعمال می‌کنیم که **لنگر حاصل از این زوج نیرو واحد باشد**، Δ_i به‌دست آمده میزان چرخش عضو است.

روند حل مسئله به روش کار مجازی برای خرپاها:

۱- خرپا را تحت بارگذاری واقعی موجود حل کرده و نیروی کلیه‌ی اعضا را به‌دست می‌آوریم، نیروی اعضا را با P نمایش می‌دهیم.

۲- بارهای واقعی موجود را از روی سازه حذف کرده، بار یا بارهای واحد در نقاط مورد نظر در راستاهای مورد نظر اعمال می‌کنیم (مطابق صفحه قبل بسته به این که تغییرمکان، تغییرمکان نسبی یا دوران یک عضو از خرپا را بخواهیم تعداد، نوع و راستای بار واحد فرق می‌کند)، خرپا را تحت این نیرو یا نیروهای واحد حل کرده و نیروی اعضا در این حالت را با $\bar{P}$ یا $\bar{N}$ نمایش می‌دهیم.

۳- پارامترها در روابط مربوطه جایگذاری می‌کنیم و مقدار Δ_i را به دست می‌آوریم.

W_R مربوط به نشست‌های تکیه‌گاهی (اگر جهت نشست تکیه‌گاه هم‌جهت با عکس‌العمل تکیه‌گاه باشد، عبارت مربوطه مثبت است).

$\sum \frac{PL}{AE}\bar{P}$ مربوط به نیروی محوری در اعضای اعضا (نیروهای $P, \bar{P}$ هنگامی مثبت است که در عضو کشش ایجاد کند).

$\sum \bar{P}.\alpha.L.\Delta T$ مربوط به تغییر دمای اعضا (تغییر دما (ΔT) هنگامی مثبت است که دما افزایش داشته باشد و نیروی $\bar{P}$ هنگامی مثبت است که در عضو کشش ایجاد کند).

$\sum \bar{N}.\delta$ مربوط به نقص عضو اعضای اعضا (نقص عضو δ هنگامی مثبت است که عضو افزایش طول داشته باشد و نیروی $\bar{N}$ هنگامی مثبت است که در عضو کشش ایجاد کند).

$\sum \frac{P}{k_\Delta}\bar{P}$ مربوط به فنرهای انتقالی (اگر نیروی واقعی و مجازی در فنرها هم‌جهت بودند ضرب آن‌ها دارای علامت مثبت است).

عبارت $\sum \frac{PL}{AE}\bar{P}$ برای **عضو صفر نیرویی**، **عضو صلب** $(EA = \infty)$ و در **خرپاهای معین هنگامی که نیروی خارجی بر آن اثر نکند و فقط تحت بارگذاری‌های غیر مستقیم مانند تغییر دما، نشست یا نقص عضو باشند**، **صفر** به‌دست می‌آید (مورد آخر یعنی بارگذاری‌های غیر مستقیم برای عبارت $\sum \frac{P}{k_\Delta}\bar{P}$ نیز صادق است).

روش کار مجازی در قاب‌ها (اعضای چند نیرویی)

رابطه‌ی کلی محاسبه تغییرشکل‌ها در یک قاب معین :

$$\Delta_i + W_R = \int_0^L \frac{M\bar{M}}{EI}dx + \int_0^L \frac{V\bar{V}}{GA_s}dx + \int_0^L \frac{N\bar{N}}{AE}dx + \int_0^L \frac{T\bar{T}}{GJ}dx + \sum \frac{P\bar{P}}{k_\Delta} + \sum \frac{m\bar{m}}{k_\theta} + \sum \bar{N}\,\delta + \int_0^L \bar{N}\,.\alpha.\Delta T\,.dx$$

Δ_i تغییرمکان در نقطه‌ی i

- برای یافتن **اختلاف خیز دو طرف یک مفصل برشی** دو نیروی واحد مختلف‌الجهت دو طرف مفصل برشی وارد می‌کنیم. Δ_i به دست آمده اختلاف خیز دو طرف مفصل برشی است.
- برای یافتن **اختلاف شیب دو طرف مفصل خمشی** دو لنگر واحد مختلف‌الجهت دو طرف مفصل خمشی اعمال می‌کنیم، Δ_i به دست آمده اختلاف شیب دو طرف مفصل خمشی است.
- برای یافتن **تغییرمکان در یک نقطه**، یک بار واحد در راستای مورد نظر در آن نقطه اعمال می‌کنیم، Δ_i به دست آمده جابه‌جایی گره مورد نظر در راستای مورد نظر است.
- برای یافتن **دوران در یک نقطه** یک لنگر واحد در آن نقطه اعمال می‌کنیم، Δ_i به‌دست آمده میزان چرخش گره است.

روند حل مسئله به روش کار مجازی برای قاب‌ها:

۱- قاب را تحت بارگذاری واقعی موجود حل کرده و دیاگرام تلاش‌های داخلی (نیروی محوری، لنگر خمشی، لنگر پیچشی و نیروی برشی) کلیه‌ی اعضا را ترسیم می‌کنیم

۲- بارهای واقعی موجود را از روی قاب حذف کرده، بار یا بارهای واحد در نقاط مورد نظر در راستاهای مورد نظر اعمال می‌کنیم (مطابق بالا بسته به این که تغییرمکان، دوران، یا اختلاف شیب یا اختلاف خیز را بخواهیم تعداد، نوع و راستای بار واحد فرق می‌کند)، قاب را تحت این نیرو یا نیروهای واحد حل کرده و دیاگرام تلاش‌های داخلی را ترسیم می‌کنیم.

۳- هر کدام از عبارات موجود در رابطه‌ی کلی را که در مساله موجود بود حساب می‌کنیم.

W_R مربوط به نشست‌های تکیه‌گاهی (اگر جهت نشست تکیه‌گاه هم‌جهت با عکس‌العمل تکیه‌گاه باشد، عبارت مربوطه مثبت است).

$\int_0^L \frac{N\bar{N}}{AE}dx$ مربوط به نیروی محوری در اعضا (ضرب دیاگرام نیروی محوری واقعی در نیروی محوری مجازی تقسیم بر AE).

$\int_0^L \frac{M\bar{M}}{EI}dx$ مربوط به لنگر خمشی در اعضا (ضرب دیاگرام لنگر خمشی واقعی در لنگر خمشی مجازی تقسیم بر EI).

$\int_0^L \frac{V\bar{V}}{GA_s}dx$ مربوط به نیروی برشی در اعضا، برای مقطع مستطیل $A_s = \frac{5}{6}bh$ و برای مقطع دایره. $A_s = 0.9\pi r^2$ (ضرب دیاگرام نیروی برشی واقعی در نیروی برشی مجازی تقسیم بر GA_S).

$\int_0^L \frac{T\bar{T}}{GJ}dx$ مربوط به لنگر پیچشی در اعضا (ضرب دیاگرام لنگر پیچشی واقعی در لنگر پیچشی مجازی تقسیم بر GJ).

$\sum \bar{N}.\delta$ مربوط به نقص عضو اعضای اعضا (نقص عضو δ هنگامی مثبت است که عضو افزایش طول داشته باشد و نیروی $\bar{N}$ هنگامی مثبت است که در عضو کشش ایجاد کند).

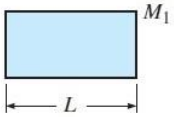
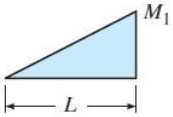
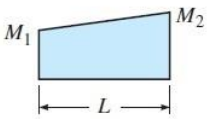
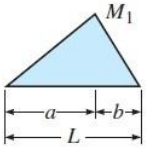
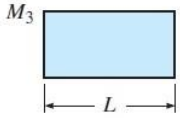
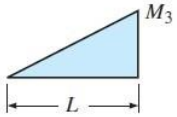
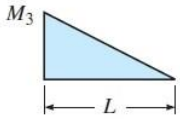
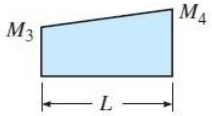
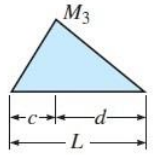
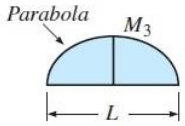
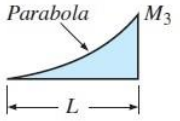
در عبارات $\sum \frac{P\bar{P}}{k_\Delta} + \sum \frac{m\bar{m}}{k_\theta}$ اگر نیروها و لنگرهای واقعی و مجازی در فنرها هم‌جهت بودند ضرب آن‌ها دارای علامت مثبت است.

اثر گرادیان حرارتی $\int_0^L \bar{M}.\alpha \frac{T_b - T_t}{h}dx + \int_0^L \bar{N}.\alpha.(T_{N.A} - T_0)\,dx$

نشست‌های تکیه‌گاهی، اثر تغییر حرارت، گرادیان حرارتی و نقص عضو در دسته بارگذاری‌های غیرمستقیم قرار می‌گیرند.

در قوس‌ها پس از به دست آوردن معادلات، برای انتگرال‌گیری dx تبدیل به $R.d\theta$ می‌شود.

Table A.2: Values of Product Integrals $\int_{x=0}^{x=L} M_Q M_P dx$

M_Q / M_P				
	M_1M_3L	$\frac{1}{2}M_1M_3L$	$\frac{1}{2}(M_1+M_2)M_3L$	$\frac{1}{2}M_1M_3L$
	$\frac{1}{2}M_1M_3L$	$\frac{1}{3}M_1M_3L$	$\frac{1}{6}(M_1+2M_2)M_3L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+a)$
	$\frac{1}{2}M_1M_3L$	$\frac{1}{6}M_1M_3L$	$\frac{1}{6}(2M_1+M_2)M_3L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+b)$
	$\frac{1}{2}M_1(M_3+M_4)L$	$\frac{1}{6}M_1(M_3+2M_4)L$	$\frac{1}{6}M_1(2M_3+M_4)L$ $+\frac{1}{6}M_2(M_3+2M_4)L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+b)$ $+\frac{1}{6}M_1M_4(L+a)$
	$\frac{1}{2}M_1M_3L$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+c)$	$\frac{1}{6}M_1M_3(L+d)$ $+\frac{1}{6}M_2M_3(L+c)$	for $c \le a$: $\left(\frac{1}{3}-\frac{(a-c)^2}{6ad}\right)M_1M_3L$
	$\frac{2}{3}M_1M_3L$	$\frac{1}{3}M_1M_3L$	$\frac{1}{3}(M_1+M_2)M_3L$	$\frac{1}{3}M_1M_3\left(L+\frac{ab}{L}\right)$
	$\frac{1}{3}M_1M_3L$	$\frac{1}{4}M_1M_3L$	$\frac{1}{12}(M_1+3M_2)M_3L$	$\frac{1}{12}M_1M_3\left(3a+\frac{a^2}{L}\right)$

روش تیر مزدوج

جهت ترسیم تیر مزدوج ابتدا چهار ویژگی یک نقطه را مشخص می‌کنیم (Δ, θ, M, V) سپس آن‌ها را طبق الگوی زیر به ویژگی‌های متناظر تغییر می‌دهیم و نقطه‌ای را رسم می‌کنیم که مشخصات تغییریافته متناظر را داشته باشد (بارگذاری روی تیر تاثیری در ترسیم تیر مزدوج ندارد)

ویژگی‌های متناظر در تیر اصلی و تیر مزدوج
خمش در تیر اصلی ⟵ تغییرمکان در تیر مزدوج
برش در تیر اصلی ⟵ دوران در تیر مزدوج
دوران در تیر اصلی ⟵ برش در تیر مزدوج
تغییرمکان در تیر اصلی ⟵ خمش در تیر مزدوج

روند حل مسئله به روش تیر مزدوج:

۱- جهت محاسبه تغییرشکل‌های خمشی ابتدا تیر مزدوج را ترسیم می‌کنیم، سپس دیاگرام خمش تقسیم بر EI را به عنوان بارگذاری روی تیر مزدوج قرار می‌دهیم.

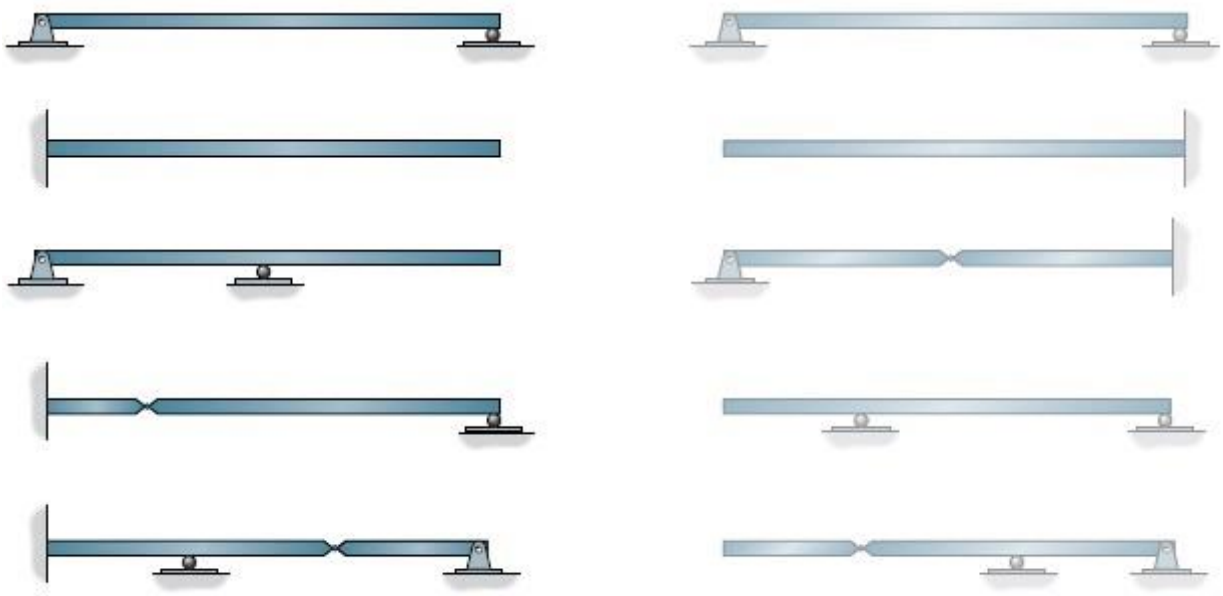
۲- هنگام بارگذاری دیاگرام $\frac{M}{EI}$ بر تیر مزدوج، نواحی مثبت دیاگرام با نیروی رو به بالا و نواحی منفی دیاگرام با نیروی رو به پایین نمایش داده می‌شود.

۳- تیر مزدوج را تحلیل می‌کنیم، خمش و برش در تیر مزدوج به ترتیب برابر است با تغییرمکان و شیب در تیر اصلی.

نکات روش تیر مزدوج

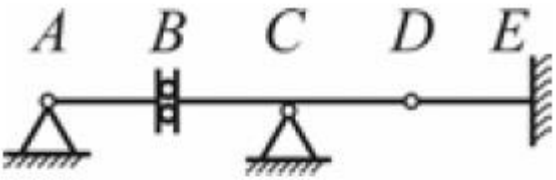
- در تیر مزدوج **لنگر مثبت یعنی تغییرمکان تیر اصلی رو به بالا** و لنگر منفی تغییرمکان رو به پایین. **برش مثبت (که تیر را ساعتگرد بچرخاند) برابر با شیب پادساعتگرد** در تیر اصلی می‌باشد.
- **اختلاف برش** در دو طرف یک نقطه در تیر مزدوج برابر **اختلاف شیب** در همان نقطه در تیر اصلی است.
- **اختلاف لنگر** در دو طرف یک نقطه در تیر مزدوج برابر با **اختلاف خیز** در دو طرف همان نقطه در تیر اصلی است.
- برای یافتن محل تغییرمکان حداکثر در تیر اصلی، معادله برش در تیر مزدوج را برابر با صفر قرار می‌دهیم.
- **نشست تکیه‌گاهی** در تیر اصلی را با **لنگر متمرکز** در تیر مزدوج نشان می‌دهیم (خیز رو به پایین در تیر اصلی باعث لنگر متمرکز منفی در تیر مزدوج می‌شود) دقت شود که در فنرهای سازه‌های معین در صورت بارگذاری غیر مستقیم مثل نشست تکیه‌گاهی نیرویی ایجاد نمی‌شود پس تغییرشکلی ندارند.

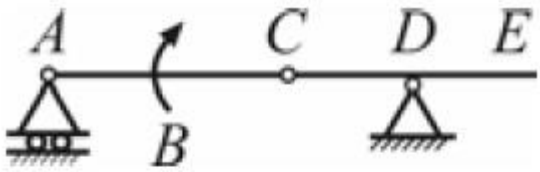
	Real Beam		Conjugate Beam	
1)	θ $\Delta = 0$	pin	V $M = 0$	pin
2)	θ $\Delta = 0$	roller	V $M = 0$	roller
3)	$\theta = 0$ $\Delta = 0$	fixed	$V = 0$ $M = 0$	free
4)	θ Δ	free	V M	fixed
5)	θ $\Delta = 0$	internal pin	V $M = 0$	hinge
6)	θ $\Delta = 0$	internal roller	V $M = 0$	hinge
7)	θ Δ	hinge	V M	internal roller

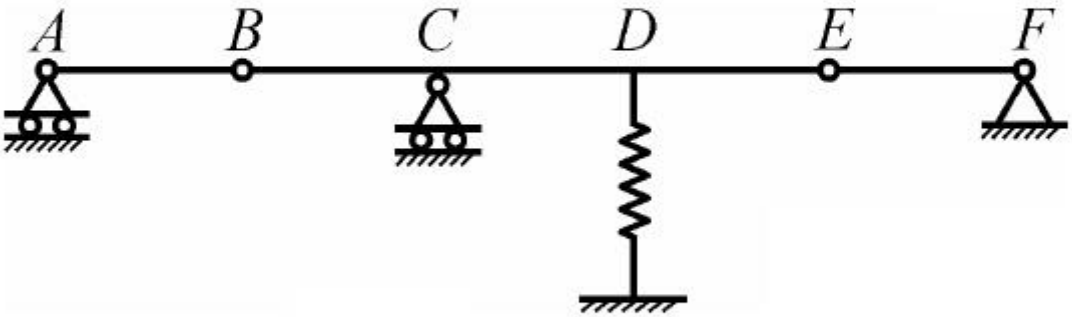


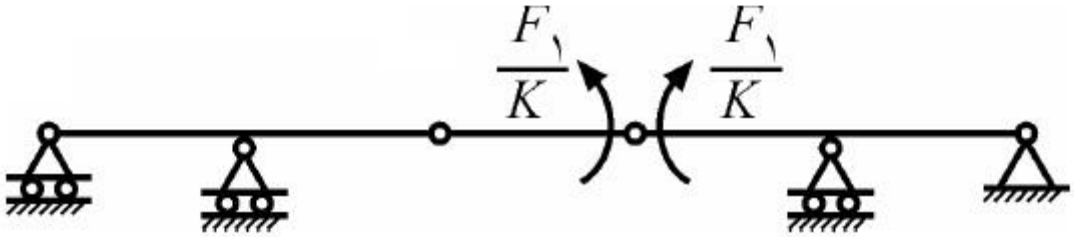
real beam

conjugate beam

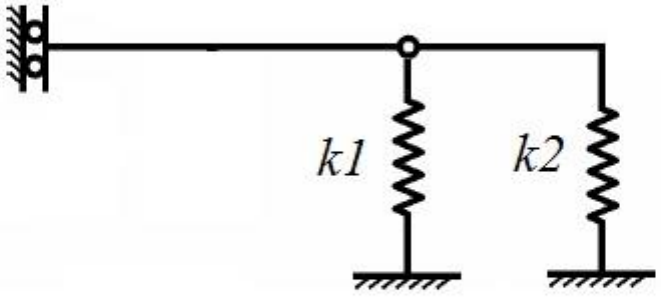


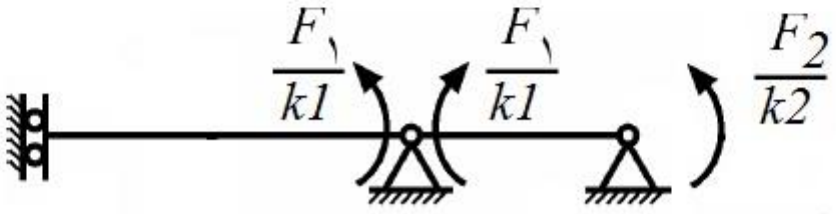


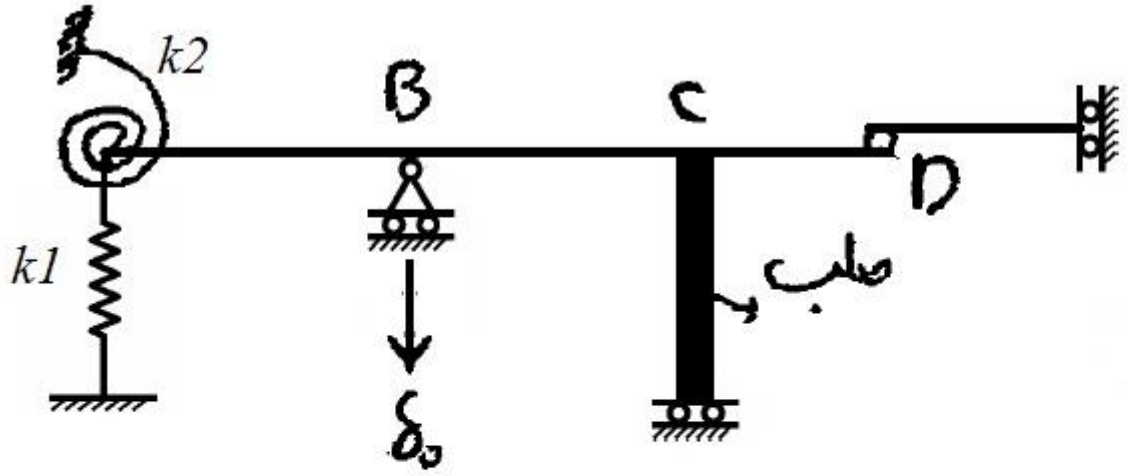


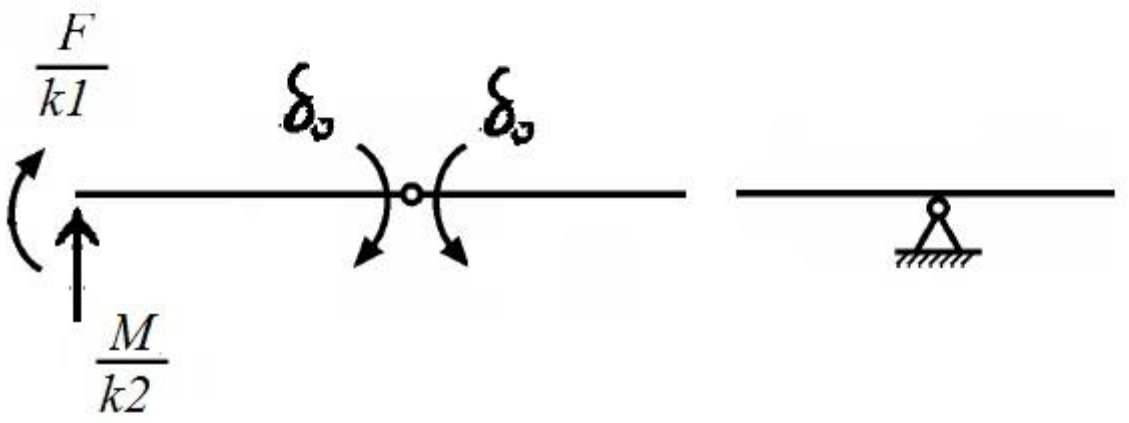


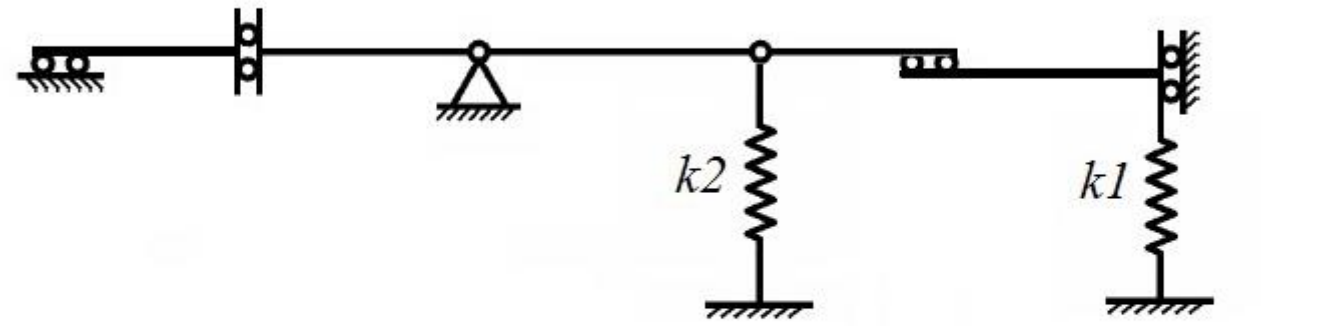
F_1 نیروی فنر است.

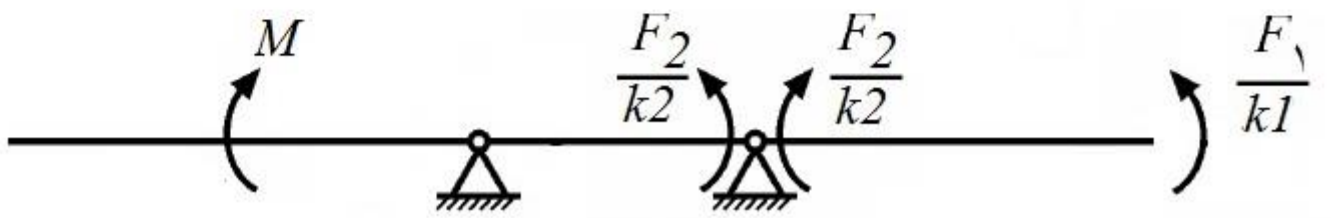





k2
B
C
D
k1
طلب
δ_B


$\frac{F}{k1}$
δ_B
δ_B
$\frac{M}{k2}$


k2
k1


M
$\frac{F_2}{k2}$
$\frac{F_2}{k2}$
$\frac{F_1}{k1}$

روش لنگر سطح

- کاربرد اصلی لنگر سطح برای تعیین معادله خیز و شیب در طول تیر می‌باشد. در این روش شیب منحنی تغییرشکل در جهت مثلثاتی (پادساعتگرد) مثبت و خیز رو به بالا مثبت فرض می‌شود.
- قضایای لنگر سطح در تیرهای پیوسته به کار می‌رود (در صورت وجود مفصل برشی یا خمشی کاربرد ندارد).

مشتق دوم تغییرمکان $y'' = \frac{M_{(x)}}{EI}$

مشتق اول تغییرمکان $y' = \theta_{(x)} = \int \frac{M_{(x)}}{EI} dx$

تغییرمکان $y_{(x)} = \int \theta_x dx = \int \left(\int \frac{M_{(x)}}{EI} dx \right) dx$

قضیه اول لنگر سطح: اخلاف شیب بین دو نقطه A و B در یک تیر پیوسته برابر سطح زیر دیاگرام لنگر تقسیم بر صلبیت خمشی $(\frac{M}{EI})$ بین این دو نقطه است.:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

اگر حاصل معادله بالا مثبت باشد، باید از روی مماس A در جهت مثلثاتی به میزان $\theta_{B/A}$ دوران کنیم تا به نقطه B (مماس نقطه B) برسیم.

قضیه دوم لنگر سطح: فاصله نقطه A روی منحنی تغییرشکل از مماس کشیده شده روی منحنی تغییرشکل در نقطه B معادل با لنگر اول سطح زیر دیاگرام $(\frac{M}{EI})$ بین این دو نقطه است.

$$t_{A/B} = \int_A^B \frac{M}{EI} x dx = A_m \bar{x}_A$$

اگر این مقدار مثبت باشد مماس ترسیمی زیر نقطه واقع شده و اگر منفی باشد مماس ترسیمی بالای نقطه واقع شده است.

$\bar{x}$ فاصله مرکز سطح دیاگرام $(\frac{M}{EI})$ تا نقطه‌ایست که فاصله‌اش را می‌خواهیم.

- مقادیر $t_{A/B}$ و $t_{B/A}$ برابر نیستند اما رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$t_{A/B}+t_{B/A}=A_m\bar{x}_A+A_m\bar{x}_B=A_m(\bar{x}_A+\bar{x}_B)=A_mL_{AB}$$

- **<u>در تیرهای کنسول</u>** از آن‌جایی که θ_A صفر و مماس A صفر درجه است می‌توان با کمک این قضایا تغییرمکان و شیب هر نقطه از تیر کنسول را حساب کرد:

$$\theta_{B/A}=\theta_B-\theta_A=\int_A^B\frac{M}{EI}dx\Rightarrow\theta_B=\int_A^B\frac{M}{EI}dx=A_m$$

$$t_{B/A}=y_B=\int_A^B\frac{M}{EI}\bar{x}_Bdx=A_m\bar{x}_B$$

شیب تکیه‌گاه A: $\theta_A=\frac{t_{B/A}}{L_{AB}}$

شیب تکیه‌گاه B: $\theta_B=\frac{t_{A/B}}{L_{AB}}$

خیز انتهای طره‌ی تیر نقطه‌ی C: $y_C=\theta_BL_{BC}+t_{C/B}=\frac{L_{BC}}{L_{AB}}t_{A/B}+t_{C/B}$

شیب انتهای طره‌ی تیر نقطه‌ی C: $\theta_C=\theta_B+\theta_{C/B}=\frac{t_{A/B}}{L_{AB}}+\theta_{C/B}$

- **<u>در تیرهای یک دهانه‌ی متقارن با بارگذاری متقارن:</u>** تغییرمکان ماکزیمم در وسط تیر اتفاق می‌افتد، در این نقطه‌ی مماس منحنی تغییرشکل افقی است بر همین اساس می‌توان گفت:

تغییرمکان ماکزیمم (نقطه‌ی C در وسط دهانه):

$$t_{A/C}=\int_A^C\frac{M}{EI}xdx=A_m\bar{x}_A$$

شیب مفصل A:

$$\theta_{A/C}=\theta_A-\theta_C=\int_A^C\frac{M}{EI}dx$$

- محاسبه‌ی شیب و خیز در هر نقطه از تیر **یک دهانه در وضعیت کلی:**

تغییرمکان نقطه‌ی C:

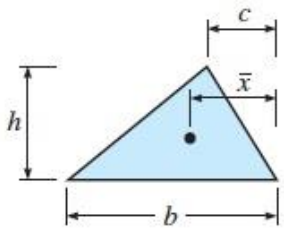
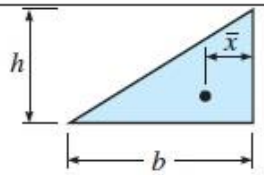
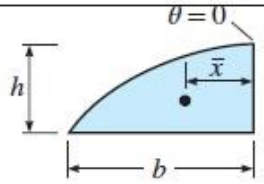
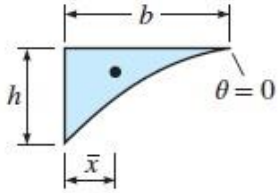
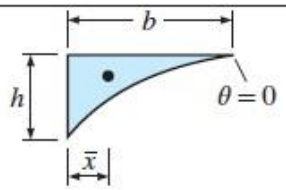
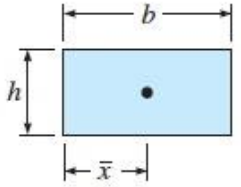
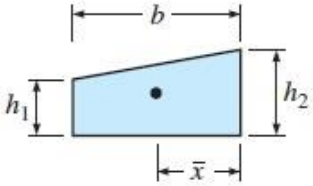
$$y_C = t_{B/A}\frac{x_C}{L_{AB}} - t_{C/A}$$

شیب نقطه‌ی C:

$$\theta_C = \frac{t_{B/A}}{L_{AB}} - \theta_{C/A}$$

- یافتن محل **تغییرمکان ماکزیمم** به صورت معادله‌ی زیر رفتار می‌کنیم:

$$\theta_{M/A} = \theta_A \Rightarrow \int_A^M \frac{M}{EI}dx - \frac{t_{B/A}}{L_{AB}} = 0$$

Shape	Figure	Area	Centroidal Distance $\bar{x}$
(*a*) Triangle		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b+c}{3}$
(*b*) Right triangle		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$
(*c*) Parabola		$\frac{2bh}{3}$	$\frac{3b}{8}$
(*d*) Parabola		$\frac{bh}{3}$	$\frac{b}{4}$
(*e*) Third-degree parabola		$\frac{bh}{4}$	$0.2b$
(*f*) Rectangle		bh	$\frac{b}{2}$
(*g*) Trapezoid		$\frac{b}{2}(h_1+h_2)$	$\frac{b(2h_1+h_2)}{3(h_1+h_2)}$

برخی از موضوعات خاص و تکنیک‌های تحلیل سازه

- در سازه‌هایی که چند قسمت به تنهایی پایدار به هم متصل شده‌اند می‌توان این قسمت‌های به تنهایی پایدار را از بقیه سازه جدا کرد و به تنهایی تحلیل کرد منتها عکس‌العمل بقیه سازه باید روی این قسمت اعمال شود.
- در تیرهای طره‌ای که بار متمرکز در انتهای آن وارد نشده (جایی در میانه‌ی تیر بار متمرکز داریم)، از آن‌جایی که قسمت بدون بار انتهای آزاد تیر دارای خمش صفر است انحنا نداشته و مستقیم می‌ماند بنابراین شیب انتهای تیر برابر شیب نقطه‌ی زیر بار است و تغییرمکان آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta_{end} = \Delta_B + (\theta_B \times x)$$

x فاصله‌ی نقطه‌ی B (که زیر بار متمرکز قرار دارد) تا انتهای تیر طره است.

- برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی می‌توان نیروهای گسترده را با نیروهای متمرکز معادل آن‌ها جایگزین کرد یا نیروی متمرکز را به جای دیگری به همراه لنگر آن منتقل کرد ولی برای محاسبه تغییرشکل‌ها نمی‌توانیم این چنین عمل کنیم و جنس و محل نیرو رو نمی‌توان تغییر داد.
- چنانچه سازه‌ای از چند قسمت به تنهایی پایدار تشکیل شده باشد و سازه معین باشد، با نشست تکیه‌گاه‌های یکی از قسمت‌ها، دیگر قسمت‌های به تنهایی پایدار بدون تغییرشکل باقی می‌مانند.

- با استفاده از **قانون جمع آثار** می‌توان به روش‌های زیر عمل کرد:

۱- تبدیل یک بارگذاری به جمع دو یا چند بارگذاری

۲- تبدیل یک بارگذاری به تفریق چند بارگذاری

۳- تبدیل یک بارگذاری با تحلیل مشکل به یک بارگذاری با تحلیل آسان که نتایج آن α برابر می‌شود. (سازه‌های متقارن که بارگذاری نصفه دارند).

۴- تبدیل یک سازه به چندسازه (در سازه‌هایی که از چند قسمت غیر صلب تشکیل شده است، در هر مرحله به غیر از یکی از قسمت‌ها بقیه را صلب می‌کنیم، سازه را تحلیل می‌کنیم و در انتها پاسخ‌های به دست آمده را جمع جبری می‌کنیم)

۵- در سازه‌های غیر صلبی که نشست تکیه‌گاهی نیز دارند، می‌توان میزان تغییر شکل کل تیر را یکبار با فرض صلب بودن سازه و تحت نشست و یکبار با فرض صلب نبودن سازه و بدون نشست محاسبه و سپس با هم جمع جبری کرد.

محاسبه انرژی ذخیره شده

- کار انجام شده توسط نیروهای داخلی را کار داخلی یا انرژی کرنشی ذخیره شده می‌نامند.
- رابطه محاسبه انرژی کرنشی:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx + \int_0^L \frac{V^2}{2GA_s}dx + \int_0^L \frac{N^2}{2AE}dx + \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}dx + \sum \frac{P^2}{2k_\Delta} + \sum \frac{m^2}{2k_\theta}$$

- استفاده از اصل جمع آثار قوا در محاسبه انرژی کرنشی مجاز نیست (مثلا نمی‌توان برای یک سازه با چند بارگذاری، انرژی کرنشی هر بارگذاری را جدا محاسبه و سپس با هم جمع کرد)
- در خرپاها رابطه کار مجازی به این صورت ساده می‌شود: $U = \sum \frac{P^2 L}{2AE} + \sum \frac{P^2}{2k_\Delta}$
- در سازه‌هایی که تنها یک نیروی متمرکز یا لنگر متمرکز به آن‌ها اعمال شده و تغییرمکان در راستای بارگذاری و دقیقا زیر نقطه بارگذاری معلوم است، انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد:

برای نیروی متمرکز $U = \frac{P \times \Delta}{2}$

برای لنگر متمرکز $U = \frac{M \times \theta}{2}$

- در سازه‌هایی که چندین نیرو یا لنگر متمرکز به سازه وارد می‌شود که تغییرشکل زیر آن نیرو یا لنگر معلوم است (در صورتی که تغییرشکل زیر بار نیرو یا لنگر متمرکز هم‌جهت بود کار انجام شده مثبت است):

$$U = \sum \frac{P_i \times \Delta_i}{2} + \sum \frac{M_i \times \theta_i}{2}$$

- اگر انرژی کرنشی در یک سازه را به صورت تابعی از تغییرشکل‌ها بنویسیم، آن‌گاه مشتق جزئی آن در یک نقطه از سازه در یک راستا برابر مقدار نیروی وارد بر آن نقطه در آن راستا می‌باشد **(قضیه اول کاستلیانو):**

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_i} = M_i$$

- اگر انرژی کرنشی در یک سازه را به صورت تابعی از نیروها بنویسیم، آن‌گاه مشتق جزئی آن در یک نقطه از سازه نسبت به نیرو برابر با تغییرمکان در آن نقطه در همان راستا می‌شود.

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \Delta_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i$$

- چگالی انرژی کرنش:

$$U = \frac{1}{2}[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}]$$

قضیه کاستلیانو

- اگر دو سازه‌ی کاملا یکسان با دو بارگذاری متفاوت داشته باشیم، در حالت الاستیک کار انجام شده توسط بارگذاری سازه‌ی اول و تغییرشکل‌های سازه‌ی دوم برابر است با بارگذاری سازه دوم و تغییرشکل‌های سازه اول. اگر بر دو سازه چندین نیروی متمرکز اثر کند خواهیم داشت:

$$\sum P_1 \Delta_2 + \sum M_1 \theta_2 = \sum P_2 \Delta_1 + \sum M_2 \theta_1$$

- اگر صلبیت خمشی (EI) دو سازه فرق کند باید صلبیت یکی از سازه‌ها را به عنوان صلبیت پایه در نظر گرفت و دیگری را به آن تبدیل کرد ، اما تغییرشکل‌ها را نیز باید به همین مقدار تقسیم کرد یعنی $\frac{\Delta}{EI} \& \frac{\theta}{EI}$

حل سازه‌های نامعین با روش شیب- افت

- به مجموع تعداد دوران‌ها و تغییرمکان‌های مستقل یک سازه تعداد درجات آزادی آن سازه می‌گوییم.
- برای یافتن درجات آزادی انتقالی، ابتدا و انتهای همه‌ی اعضا را مفصلی می‌کنیم و سپس پایداری خرپای به دست آمده را بررسی می‌کنیم، چنانچه پایدار بود درجه آزادی انتقالی صفر است ولی چنانچه ناپایدار بود به تعداد قیدهایی که نیاز دارد تا پایدار شود درجات آزادی انتقالی داریم (تکیه‌گاه گیردار به تکیه‌گاه مفصلی، تکیه‌گاه مفصلی و برشی به تکیه‌گاه غلتکی تغییر می‌یابد).
- در محل تکیه‌گاه‌هایی که دوران صفر دارند درجه آزادی انتقالی نداریم.
- در محل اتصال پیوسته چند عضو به یکدیگر تنها یک درجه آزادی دورانی داریم.
- در محل اتصال چند عضو به یکدیگر به صورت مفصلی به تعداد اعضا درجه آزادی دورانی داریم.
- در محل مفصل برشی داخلی یک درجه آزادی دروانی خواهیم داشت.
- فنرهای انتقالی و دورانی در محاسبه درجه آزادی نقشی ندارند و می‌توان آن‌ها را برای محاسبه درجه آزادی حذف نمود.

- اگر در سازه‌ای درجه آزادی انتقالی صفر باشد و سازه تنها تحت اثر نیروهای متمرکز اعمال شده بر گره‌ها قرار داشته باشد، اعضا سازه مستقیم باقی مانده و برش و خمش در اعضا ایجاد نمی‌شود (یعنی اعضا خرپایی عمل می‌کنند).

روابط شیب- افت

رابطه اصلی $$M_{AB}=\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B-3\frac{\Delta}{L}\right)+MF_{AB}$$

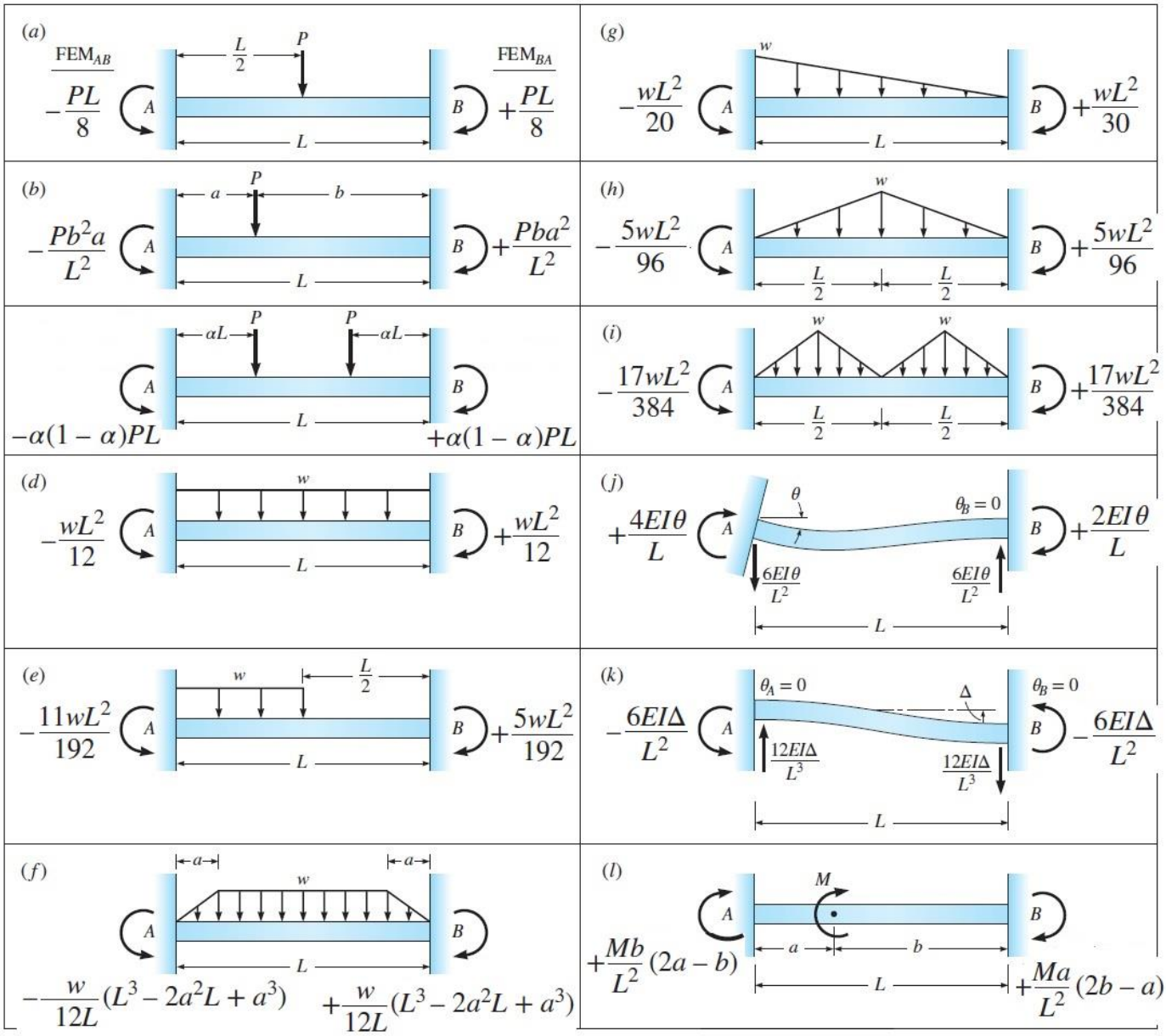
رابطه اصلاح شده برای تکیه‌گاه مفصلی در B $$M_{AB}=\frac{3EI}{L}\left(\theta_A-\frac{\Delta}{L}\right)+MF'_{AB}$$

رابطه اصلاح شده برای تکیه‌گاه برشی در B $$M_{AB}=\frac{EI}{L}\left(\theta_A-\theta_B\right)+MF''_{AB}$$

مقدار MF' برای رابطه انتها مفصل خمشی $MF_{AB}-\frac{1}{2}MF_{BA}$

مقدار MF'' برای رابطه انتها مفصل برشی $4\times MF_{AB}$

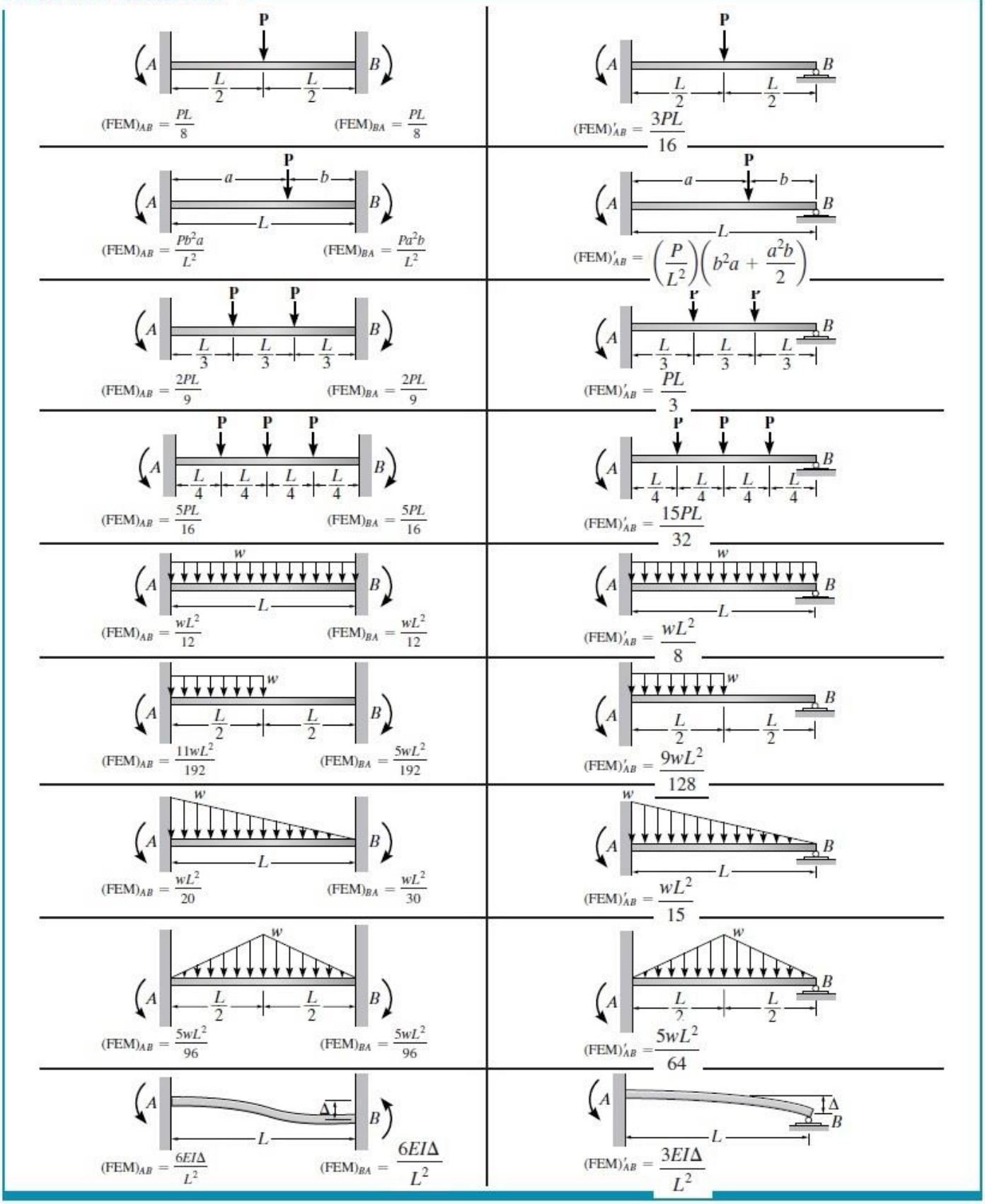
Table A.4: Fixed-End Moments



مقدار MF برای رابطه انتها مفصل خمشی $MF_{AB} - \frac{1}{2}MF_{BA}$

مقدار MF برای رابطه انتها مفصل برشی $4 \times MF_{AB}$

Fixed End Moments



ستون سمت راست مقدار MF برای رابطه انتها مفصل خمشی است.

مدل‌سازی با فنر

سیستم‌های موازی

اگر تغییرطول کلیه فنرها یکسان باشد سیستم فنرهای موازی برقرار است. در این سیستم نیروی وارد شده بر سازه به نسبت سختی بین اعضا تقسیم می‌شود و اگر بخواهیم یک سختی معادل برای سازه در نظر بگیریم باید سختی همه اعضا را با هم جمع کنیم: $k_e = \sum k_i$

سیستم‌های سری

اگر نیروی همه فنرها یکسان باشد ولی تغییرشکل فنرها یکسان نباشد، سیستم‌های سری برقرار است. در این سیستم تغییرمکان نقطه‌ی اعمال بار برابر با جمع تغییرمکان‌های تک تک فنرها است. سختی معادل در این سیستم از جمع معکوس سختی همه‌ی اعضا به دست می‌آید: $\frac{1}{k_e} = \sum \frac{1}{k_i}$

در قاب‌های برشی (قاب‌های با تیرهای صلب):

- کلیه‌ی ستون‌های متصل به یک سقف صلب در یک تراز، با هم تشکیل فنرهای موازی می‌دهند
- کلیه‌ی ستون‌های روی هم بین چند سقف صلب با هم تشکیل فنرهای سری می‌دهند

چند نکته‌ی عمومی در مدل‌سازی با فنر:

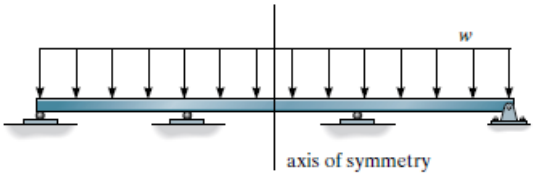
- برای مدل‌سازی سازه‌های پیچیده، ابتدا فنرهای سری را تبدیل به یک فنر معادل کرده و سپس آن را با بقیه‌ی فنرهای موازی به صورت یک فنر موازی معادل مدل می‌کنیم.
- سختی میله‌های مورب برای تبدیل به سختی در یک راستا باید در $\cos^2\theta$ ضرب شود که θ زاویه بین میله مورب و راستای مورد نظر است.

تقارن در سازه‌ها

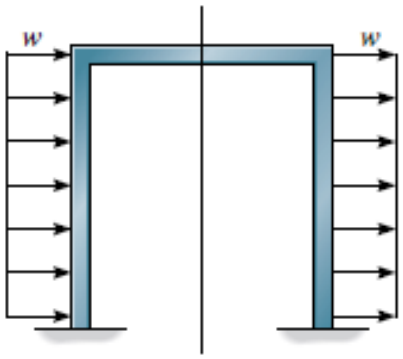
تقارن در سازه‌ها نسبت به سه ویژگی سنجیده می‌شود: ۱- اعضای سازه ۲- تکیه‌گاه‌های سازه ۳- مشخصات مصالح سازه

انواع بارگذاری وارد بر سازه:

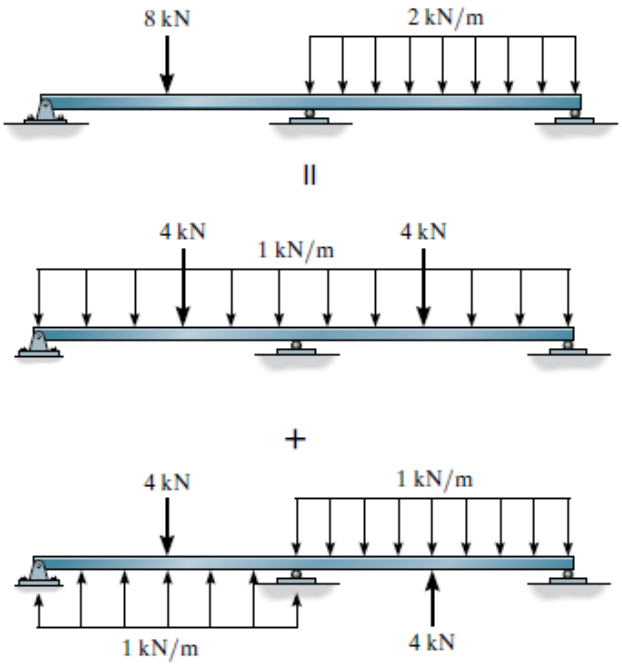
۱- **بارگذاری متقارن:** اگر کاغذ را از روی محور تقارن تا کنیم نیروهای دو طرف هم‌جهت با یکدیگر هستند.



۲- **بارگذاری پادمتقارن:** اگر کاغذ را از روی محور تقارن تا کنیم، نیروهای دو طرف خلاف جهت یکدیگر هستند.



۳- **بارگذاری کلی:** که نه متقارن است و نه پاد متقارن، این نوع بارگذاری را می‌توان به صورت جمع دو بارگذاری متقارن و پادمتقارن تبدیل کرد (شدت بارهای متقارن و پادمتقارن باید نصف شود).



در سازه‌های متقارن با بارگذاری متقارن شرایط زیر برقرار است:

- در زیر محور تقارن θ ,V ,Δ_x صفر هستند
- در سمت چپ و راست محور تقارن θ ,V ,Δ_x قرینه یکدیگر هستند.
- در سمت چپ و راست محور تقارن N ,M ,Δ_y برابر هم هستند.
- در یک سازه‌ی متقارن با بارگذاری متقارن تمامی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی متقارن‌اند، چنانچه عکس‌العملی باعث به هم خوردن تقارن بشود صفر می‌باشد. مانند لنگر و عکس‌العمل افقی تکیه‌گاهی که دقیقا زیر محور تقارن است

در این سازه‌ها می‌توان نیمه‌ای از سازه را تحلیل کرد، برای یافتن سازه‌ی نیمه:

۱- محور تقارن از یک المان افقی بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه لغزنده گیردار

۲- محور تقارن از یک المان افقی پیوسته و یک تکیه‌گاه مفصلی بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه گیردار

۳- محور تقارن از یک المان افقی دارای مفصل خمشی در زیر محور تقارن بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه غلتکی که عکس‌العملش در راستای محور طولی عضو افقی باشد

۴- محور تقارن از یک المان افقی ناپیوسته و تکیه‌گاه مفصلی درست در زیر محور تقارن بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه مفصلی

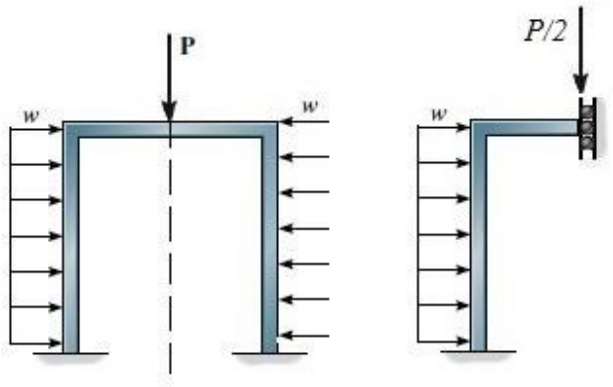
۵- نیروی متمرکز روی محور تقارن $\Longleftarrow$ نصف نیرو نگه داشته می‌شود

۶- محور تقارن از یک المان افقی و یک المان قائم با صلبیت محوری بینهایت $(EA=\infty)$ بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه گیردار

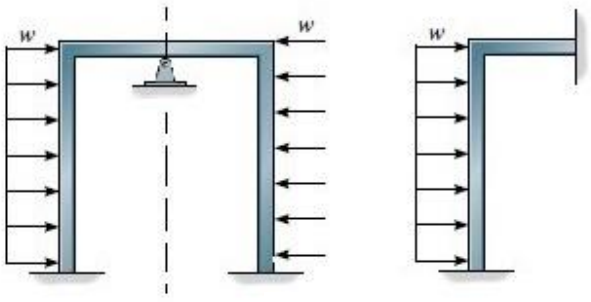
۷- محور تقارن از یک المان افقی و یک المان قائم منعطف (دارای EA) بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه لغزنده گیردار + عضو قائم با نصف سختی محوری خود

۸- محور تقارن از یک المان افقی و یک فنر دورانی بگذرد $\Longleftarrow$ فنر دورانی با سختی دو برابر + غلتک محوری

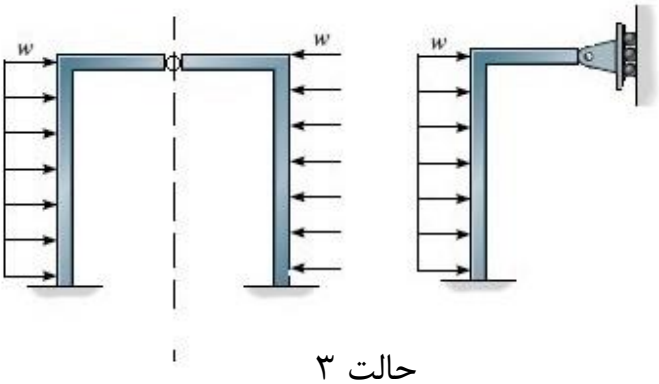
۹- محور تقارن از یک فنر انتقالی افقی بگذرد $\Longleftarrow$ فنر انتقالی که در انتها به تکیه‌گاه گیردار متصل است با سختی دو برابر



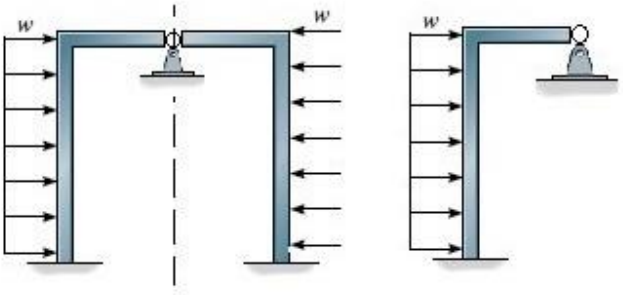
حالت ۱ و ۵



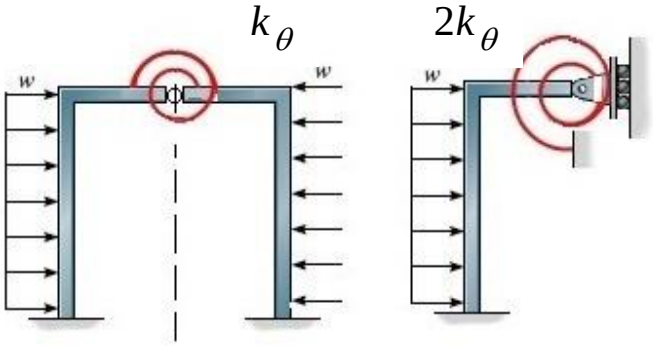
حالت ۲



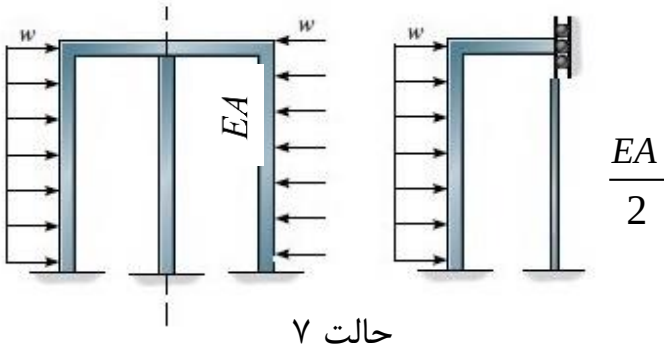
حالت ۳



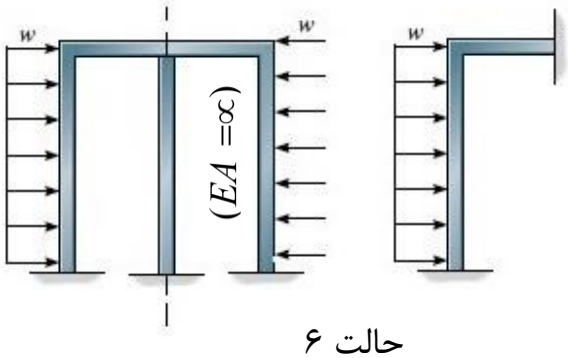
حالت ۴



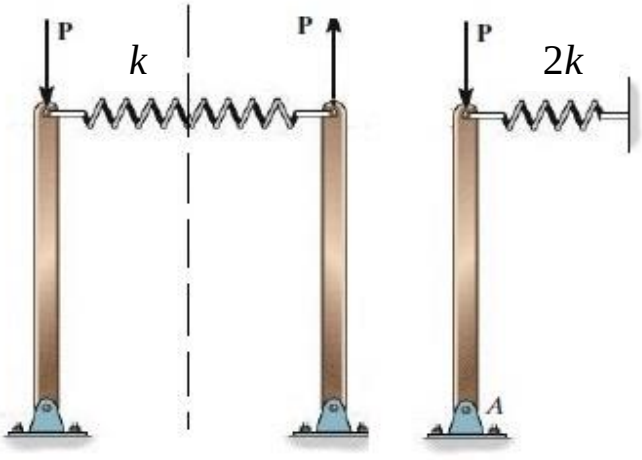
حالت ۸



حالت ۷



حالت ۶



حالت ۹

در سازه‌های متقارن با بارگذاری پادمتقارن شرایط زیر برقرار است:

- در زیر محور تقارن $N\ ,M\ ,\Delta_y$ صفر هستند
- در سمت چپ و راست محور تقارن $N\ ,M\ ,\Delta_y$ قرینه یکدیگر هستند.
- در سمت چپ و راست محور تقارن $\theta ,V\ ,\Delta_x$ برابر هم هستند.
- در یک سازه‌ی متقارن با بارگذاری پاد متقارن در صورتی که عکس‌العمل تکیه‌گاهی باعث تقارن سازه شود، صفر می‌باشد، مانند عکس‌العمل عمودی تکیه‌گاهی زیر محور تقارن.

در این سازه‌ها می‌توان نیمه‌ای از سازه‌ها را تحلیل کرد، برای یافتن سازه‌ی نیمه:

۱- محور تقارن از یک المان افقی بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه غلتکی

۲- محور تقارن از یک المان افقی پیوسته و یک تکیه‌گاه مفصلی بگذرد $\Longleftarrow$ تکیه‌گاه مفصلی

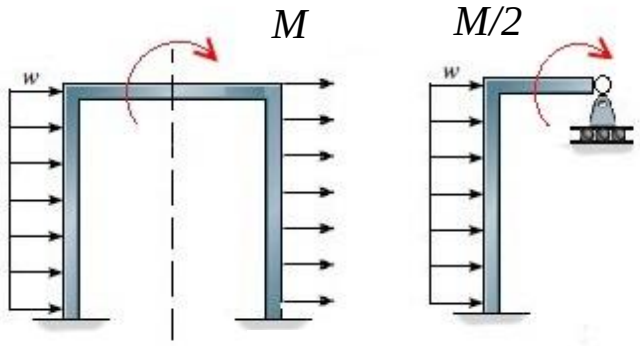
۳- محور تقارن از یک المان افقی دارای مفصل برشی در زیر محور تقارن بگذرد $\Longleftarrow$ تیر سر آزاد

۴- لنگر متمرکز روی محور تقارن $\Longleftarrow$ نصف لنگر نگه داشته می‌شود

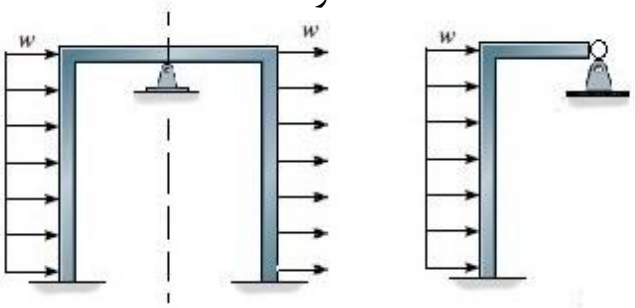
۵- محور تقارن از یک المان افقی و یک المان قائم (دارای EI) بگذرد $\Longleftarrow$ عضو قائم با نصف سختی خمشی خود

۶- محور تقارن از یک المان افقی و یک فنر دورانی بگذرد $\Longleftarrow$ فنر دورانی حذف می‌شود و تکیه‌گاه غلتکی اضافه می‌شود

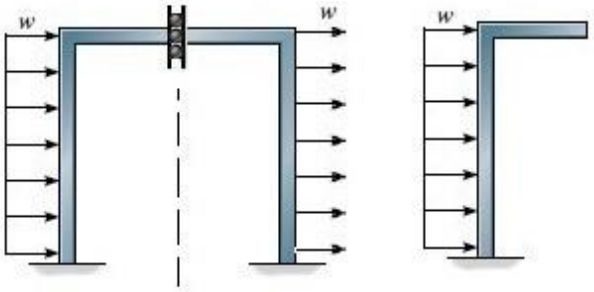
۷- محور تقارن از یک فنر انتقالی عمودی بگذرد $\Longleftarrow$ فنر حذف می‌شود و تکیه‌گاه غلتکی اضافه می‌شود



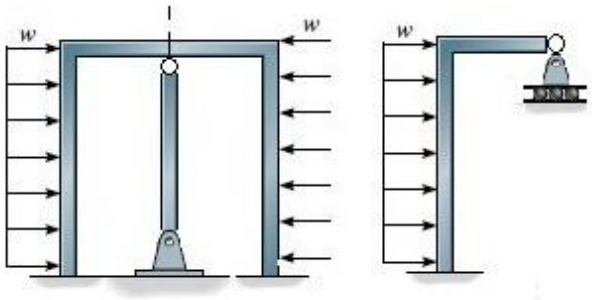
حالت ۱ و ۴

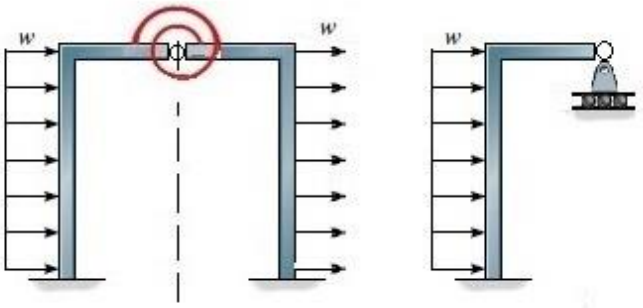


حالت ۲

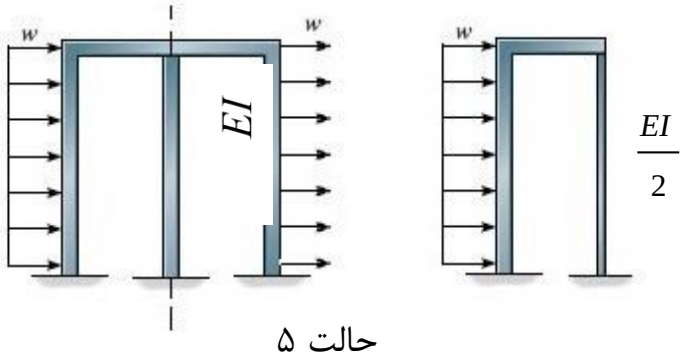


حالت ۳

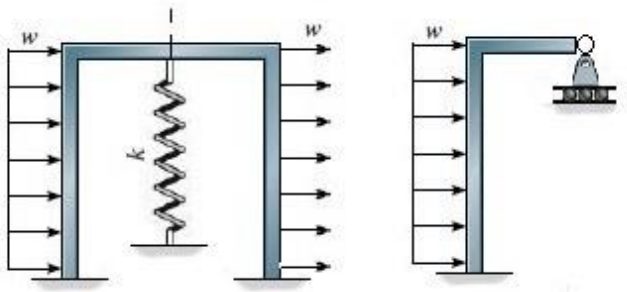




حالت ۶

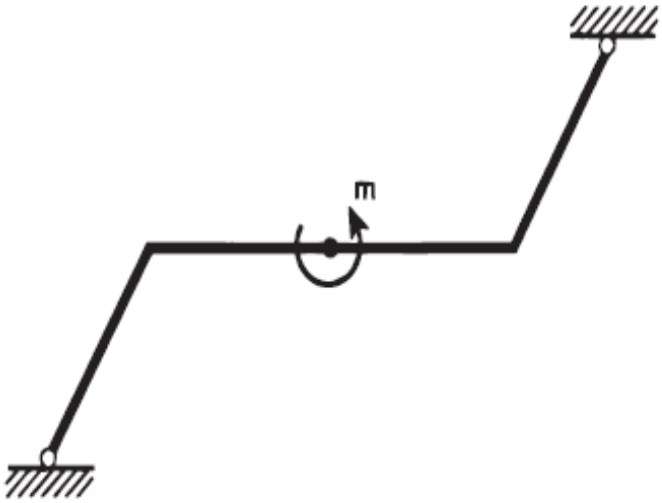


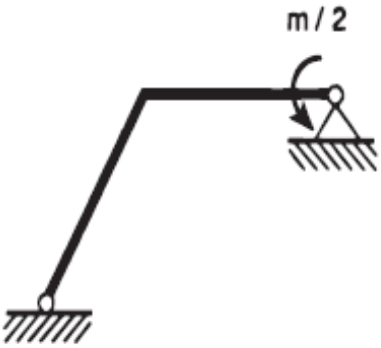
حالت ۵

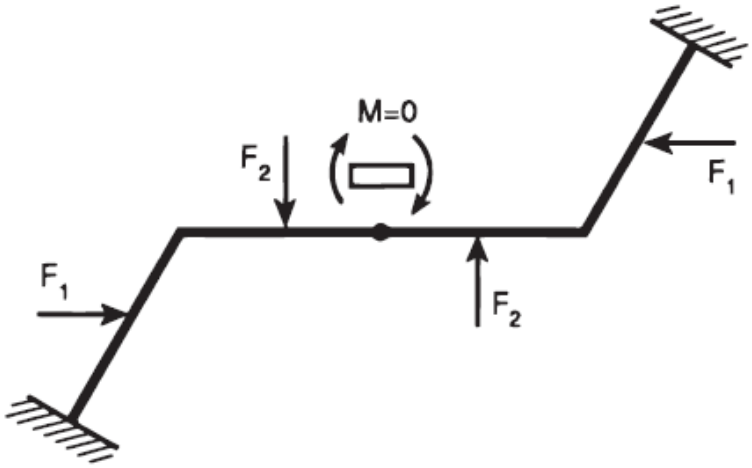


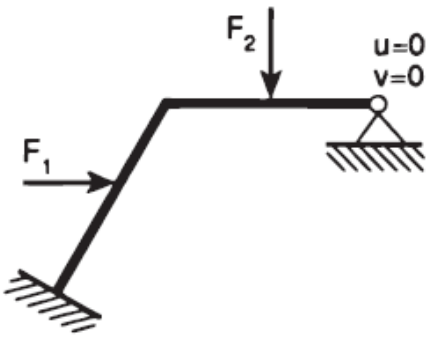
حالت ۷

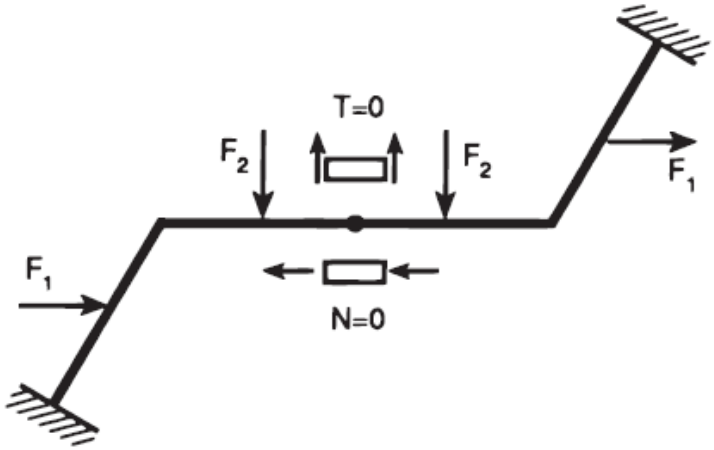
تقارن قطبی

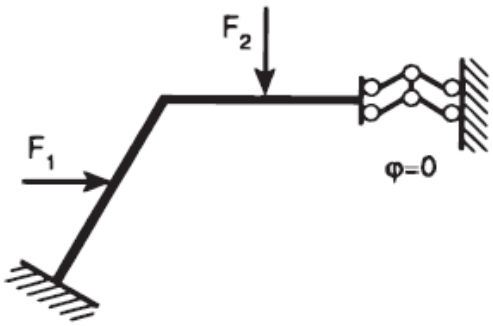


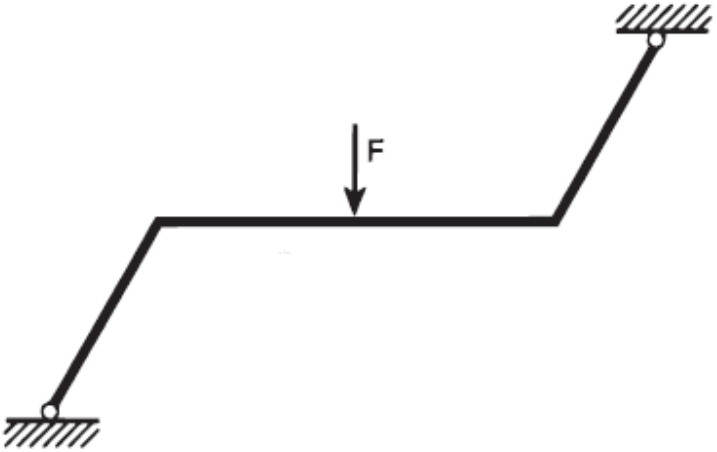


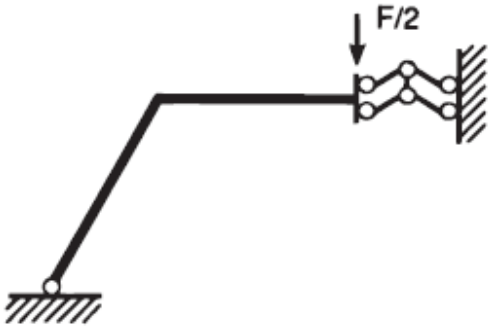


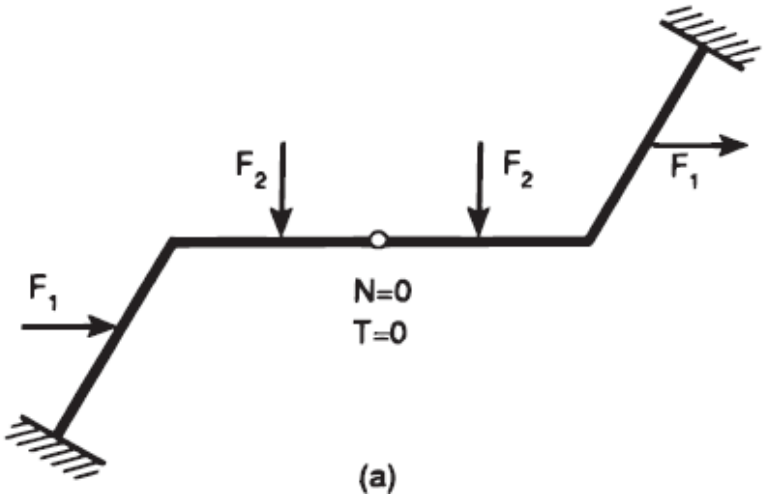




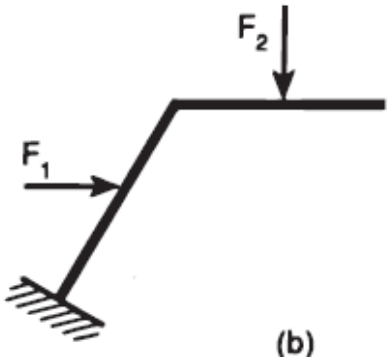








(a)

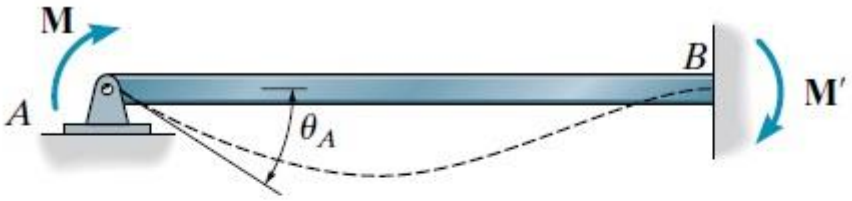


(b)

روش پخش لنگر

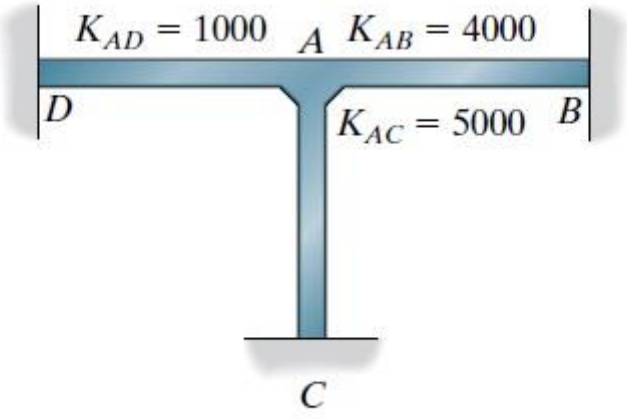
قراردادهای علامتی همانند روش شیب افت است (لنگر و چرخش ساعتگرد مثبت است).

ضریب سختی عضو A: مقدار لنگر مورد نیاز در انتهای A برای آنکه دوران $\theta = 1$ را ایجاد کند.



$$K = \frac{4EI}{L}$$
Far End Fixed

ضریب سختی گره: اگر تعدادی عضو در یک نقطه به هم به صورت گیردار متصل شده باشند و انتهای دور هر عضو نیز گیردار باشد، ضریب سختی در گره‌ی مربوطه برابر جمع ضرایب سختی انتهای نزدیک تک تک اعضایی است که به گره متصل هستند. این مقداری سختی، نشان دهنده‌ی مقدار لنگر مورد نیاز برای ایجاد $\theta = 1$ در آن گره است.



$$K_T = \Sigma K = 4000 + 5000 + 1000 = 10\,000.$$

ضریب توزیع DF: کسری از لنگر مقاوم کل که توسط یک عضو در یک گره تامین می‌شود را ضریب توزیع یا ضریب پخش می‌گویند. بدین ترتیب میزان لنگر در انتهای نزدیک عضو متصل به گره برابر است با $M_{AB} = DF_{AB} \times M_u$

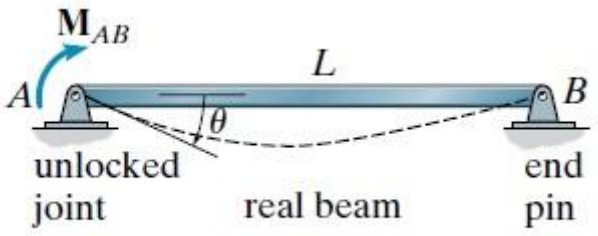
$$\mathrm{DF} = \frac{K}{\Sigma K}$$

ضریب سختی نسبی عضو K_R: اگر تمامی سازه از یک نوع مصالح ساخته شده باشد، یعنی کل اعضا دارای E یکسان باشند، مقدار 4E از صورت ضریب سختی عضو حذف می‌شود و ضریب سختی نسبی عضو به صورت $K_R = \frac{I_i}{L_i}$ تعریف می‌شود و از این ضریب برای محاسبه‌ی DF اعضا استفاده می‌کنیم.

$$K_R = \frac{I}{L}$$
Far End Fixed

ضریب حمل بار: کسری از لنگر اعمال شده بر تکیه‌گاه نزدیک A که به تکیه‌گاه دور B می‌رسد (حمل می‌شود) که در حالت کلی برابر با ۰/۵ است.

سختی اصلاح شده انتها مفصلی: اگر انتهای دور عضو مفصلی باشد می‌توان از سختی کاهش یافته استفاده کرد و ضریب انتقال به آن را به جای ۰/۵، صفر درنظر گرفت.



$$K = \frac{3EI}{L}$$
Far End Pinned or Roller Supported

اصلاح سختی سازه‌های متقارن با بارگذاری متقارن:

$$K = \frac{2EI}{L}$$
Symmetric Beam and Loading

اصلاح سختی سازه‌های متقارن با بارگذاری پادمتقارن:

$$K = \frac{6EI}{L}$$

Symmetric Beam with Antisymmetric Loading

گام‌های روش پخش لنگر برای تیرها:

۱- تعیین ضرایب توزیع برای هر دو انتهای هر دهانه از تیر (ضرایب توزیع برای تکیه‌گاه‌های مفصلی ۱ و گیردار صفر است و جمع DF ها به جز در تکیه‌گاه‌ها برابر یک می‌باشد)

۲- تعیین M^{FX} یا لنگرهای گیرداری دو انتهای هر دهانه

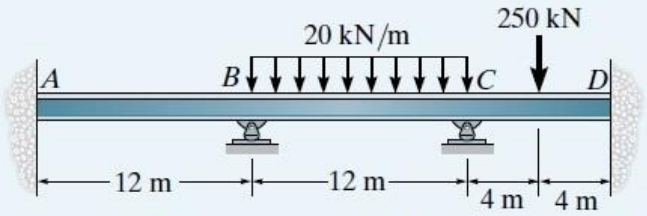
۳- جمع لنگرهای هر گره

۴- توزیع منفی جمع لنگرهای هر گره به نسبت DF انتهای هر عضو

۵- انتقال لنگر به انتهای دور هر عضو با ضریب ۰/۵

۶- تکرار مراحل از مرحله ۳ تا ۵

مثال ۱



$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \qquad K_{BC} = \frac{4EI}{12} \qquad K_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

$$\mathrm{DF}_{AB} = \mathrm{DF}_{DC} = 0 \qquad \mathrm{DF}_{BA} = \mathrm{DF}_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0.5$$

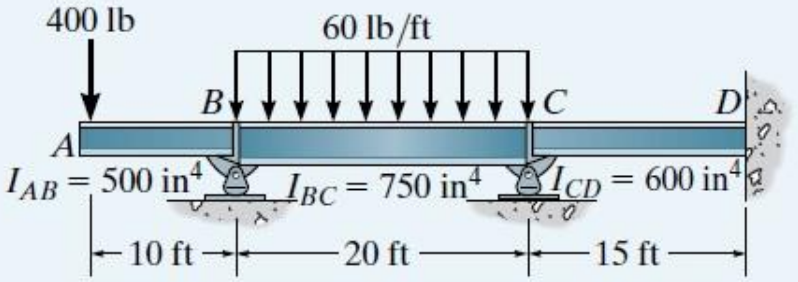
$$\mathrm{DF}_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.4 \qquad \mathrm{DF}_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.6$$

$$(\mathrm{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-20(12)^2}{12} = -240\ \mathrm{kN \cdot m} \qquad (\mathrm{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240\ \mathrm{kN \cdot m}$$

$$(\mathrm{FEM})_{CD} = -\frac{PL}{8} = \frac{-250(8)}{8} = -250\ \mathrm{kN \cdot m} \qquad (\mathrm{FEM})_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250\ \mathrm{kN \cdot m}$$

گره	A			B			C			D		
انتهاهای متصل به گره	تکیه‌گاه	AB		BA	BC		CB	CD		DC	تکیه‌گاه	
DF	**1**	**0**		**0.5**	**0.5**		**0.4**	**0.6**		**0**	**1**	
M^{FX}	0	0		0	-240		240	-250		250	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0	0	0	120	240	120	4	10	6	0	-250	-250
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	60		0	2		60	0		3	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	-60	-60	0	-1	-2	-1	-24	-60	-36	0	-3	-3
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	-0.5		0	-12		-0.5	0		-18	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0.5	0.5	0	6	12	6	0.2	0.5	0.3	0	18	18
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	3		0	0.1		3	0		0.15	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	-3	-3	0	-0.05	-0.1	-0.05	-1.2	-3	-1.8	0	-0.15	-0.15
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	-0.025		0	-0.6		-0.025	0		-0.9	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0.025	0.025	0	0.3	0.6	0.3	0.01	0.025	0.015	0	0.9	0.9
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	0.15		0	0.005		0.15	0		0.0075	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	-0.15	-0.15	0	-0.0025	-0.005	-0.0025	-0.06	-0.15	-0.09	0	-0.0075	-0.0075
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	-0.00125		0	-0.03		-0.00125	0		-.045	0	
جمع لنگر	-62.625	62.625		125.25	-125.25		281.5	-281.5		234.3	-234.3	

مثال ۲:



$$K_{BC} = \frac{4E(750)}{20} = 150E \qquad K_{CD} = \frac{4E(600)}{15} = 160E$$

$$\text{DF}_{BC} = 1 - (\text{DF})_{BA} = 1 - 0 = 1$$

$$\text{DF}_{CB} = \frac{150E}{150E + 160E} = 0.484$$

$$\text{DF}_{CD} = \frac{160E}{150E + 160E} = 0.516$$

$$\text{DF}_{DC} = \frac{160E}{\infty + 160E} = 0$$

$$(\text{FEM})_{BA} = 400\ \text{lb}(10\ \text{ft}) = 4000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

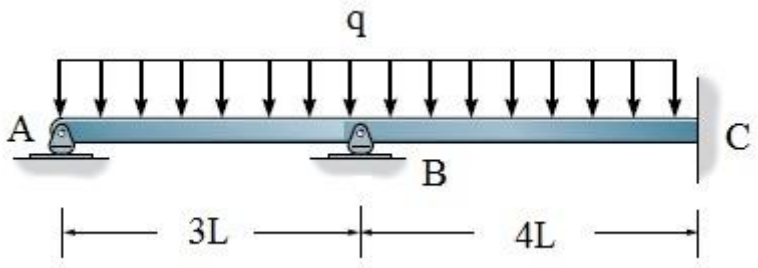
$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{60(20)^2}{12} = -2000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{60(20)^2}{12} = 2000\ \text{lb} \cdot \text{ft}$$

گره	A		B		C		D	
انتهاهای متصل به گره	تکیه‌گاه	AB	BA	BC	CB	CD	DC	تکیه‌گاه
DF			**0**	**1**	**0.484**	**0.516**	**0**	**1**
M^{FX}			4000	-2000	2000	0	0	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			0	-2000	-2000	-968	-2000	-1032	0	0	0
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	-484	-1000	0	516	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			0	484	484	484	1000	516	0	-516	-516
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	242	242	0	258	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			0	-242	-242	-117.128	-242	-124.872	0	-258	-258
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	-58.564	-121	0	-62.436	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			0	58.564	58.564	58.564	121	62.436	0	62.436	62.436
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	29.282	29.282	0	31.218	0
جمع لنگر			4000	-3970.7	608.25	-578.4	742.8	-711.6

.

مثال ۳:



$$k_{BA}=\frac{3EI}{3L}\Rightarrow DF_{BA}=0.5 \qquad k_A=0\Rightarrow DF_A=0$$

گره B:

$$k_{BC}=\frac{4EI}{4L}\Rightarrow DF_{BC}=0.5$$

گره A :

$$k_{AB}=\frac{4EI}{3L}\Rightarrow DF_A=1$$

$$k_C=\infty\Rightarrow DF_{BA}=1$$

گره C:

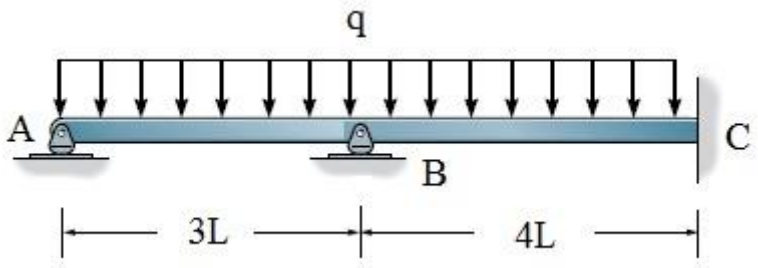
$$k_{CB}=\frac{4EI}{4L}\Rightarrow DF_{BC}=0$$

$$M^{F}_{AB}=-\frac{q(3L)^2}{12}=-0.75qL^2 \quad\therefore\quad M^{F}_{BA}=\frac{q(3L)^2}{12}=0.75qL^2$$

$$M^{F}_{BC}=-\frac{q(4L)^2}{12}=-1.33qL^2 \quad\therefore\quad M^{F}_{BA}=\frac{q(4L)^2}{12}=1.33qL^2$$

گره	A		B		C			
انتهاهای متصل به گره	تکیه‌گاه	AB	BA	BC	CB	تکیه‌گاه		
DF	**0**	**1**	**0.5**	**0.5**	**0**	**1**		
M^{FX}	0	-0.75	0.75	-1.33	1.33			
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0	0.75	0.75	0.29	0.58	0.29	0	-1.33	-1.33		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	0		0.375	0		0.145	0		
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0	0	0	-0.1875	-0.375	-0.1875	0	-0.145	-0145		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	0		0	0		-0.0937	0		
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0	0	0	0	0	0	0	0.0937	-0.0937		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0		0	0		0	0		
جمع لنگر	0	0		1.22	-1.22		1.38	-1.38		

مثال ۴



$$k_{BA}=\frac{3EI}{3L}\Rightarrow DF_{BA}=0.5 \qquad k_{A}=0\Rightarrow DF_{A}=0$$

گره B:

$$k_{BC}=\frac{4EI}{4L}\Rightarrow DF_{BC}=0.5 \qquad k_{AB}=\frac{4EI}{3L}\Rightarrow DF_{A}=1$$

گره A :

$$k_{C}=\infty\Rightarrow DF_{BA}=1$$

گره C:

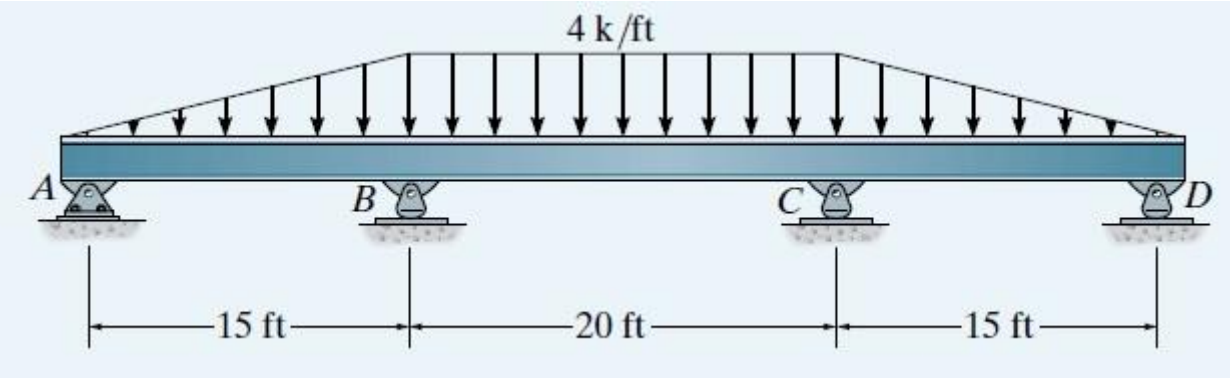
$$k_{CB}=\frac{4EI}{4L}\Rightarrow DF_{BC}=0$$

$$M^{F}_{AB}=-\frac{q(3L)^2}{12}=-0.75qL^2 \quad\therefore\quad M^{F}_{BA}=0.75qL^2-(\frac{-0.75qL^2}{2})=1.125qL^2$$

$$M^{F}_{BC}=-\frac{q(4L)^2}{12}=-1.33qL^2 \quad\therefore\quad M^{F}_{BA}=\frac{q(4L)^2}{12}=1.33qL^2$$

گره		B		C		
انتهاهای متصل به گره		BA	BC	CB	تکیه‌گاه	
DF		**0.5**	**0.5**	**0**	**1**	
M^{FX}		1.125	-1.33	1.33	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0.1025	0.205	0.1025	0	-1.33	-1.33
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	0	0.0512	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0	0	0	0	-0.0512	-0.0512
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	0	0	0	
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره						
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر						
جمع لنگر		1.2275	-1.2275	1.3812	-1.3812	

مثال۵



$$k_A = 0 \quad \Rightarrow \quad DF_A = 0$$

گره A:

$$k_{AB} = \frac{4EI}{15} \quad \Rightarrow \quad DF_{AB} = 1$$

$$k_{BA} = \frac{3EI}{15} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{BA} = 0.5$$

گره B:

$$k_{BC} = \frac{4EI}{20} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{BC} = 0.5$$

$$k_{CB} = \frac{4EI}{20} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{CB} = 0.5$$

گره C:

$$k_{CD} = \frac{3EI}{15} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{CD} = 0.5$$

$$k_D = 0 \quad \Rightarrow \quad DF_D = 0$$

گره D:

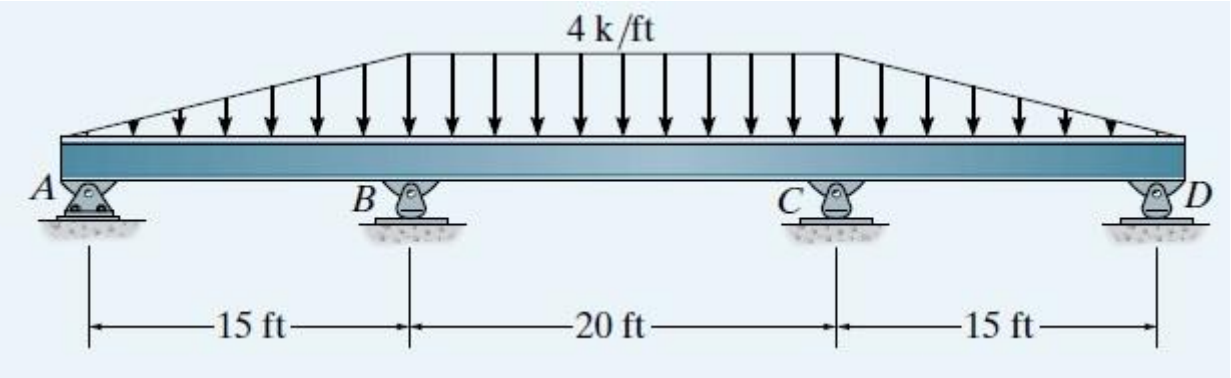
$$k_{DC} = \frac{3EI}{15} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{DC} = 1$$

$$M^F_{AB} = -\frac{4(15)^2}{30} = -30 \qquad \therefore \quad M^F_{BA} = \frac{4(15)^2}{20} = 45$$

$$M^F_{BC} = -\frac{4(20)^2}{12} = -133.333 \quad \therefore \quad M^F_{CB} = \frac{4(20)^2}{12} = 133.333$$

$$M^F_{CD} = -\frac{4(15)^2}{20} = -45 \qquad \therefore \quad M^F_{DC} = \frac{4(15)^2}{30} = 30$$

مثال۶



$$M_{AB}^{F} = -\frac{4(15)^2}{30} = -30 \qquad \therefore \quad M_{BA}^{F} = \frac{4(15)^2}{20} + \frac{4(15)^2}{2\times 30} = 60$$

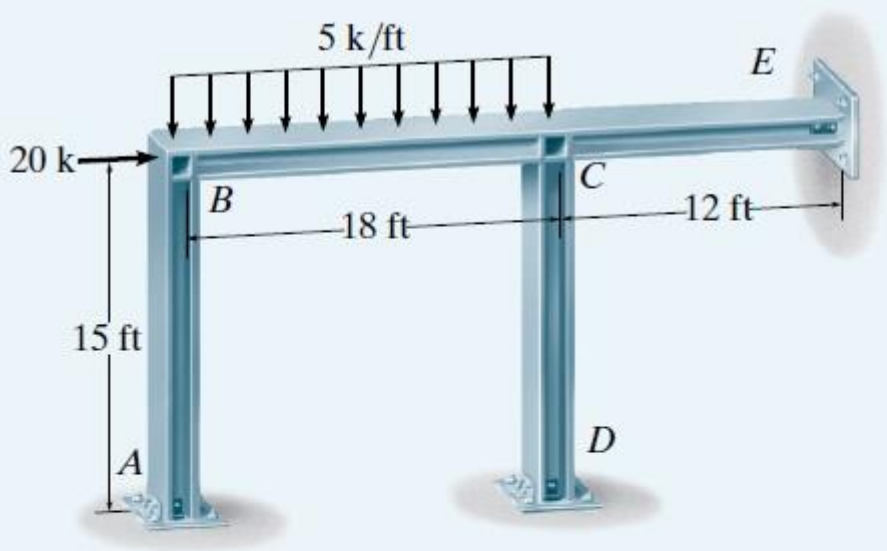
$$M_{BC}^{F} = -\frac{4(20)^2}{12} = -133.333 \quad \therefore \quad M_{CB}^{F} = \frac{4(20)^2}{12} = 133.333$$

$$M_{CD}^{F} = -\frac{4(15)^2}{20} - \frac{4(15)^2}{2\times 30} = -60 \qquad \therefore \quad M_{DC}^{F} = \frac{4(15)^2}{30} = 30$$

..

گره		B		C	
انتهاهای متصل به گره		BA	BC	CB	CD
DF		**0.5**	**0.5**	**0.5**	**0.5**
M^{FX}		60	-133.333	133.33	-60
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		36.66	73.33	36.66	-36.66	-73.33	-36.66
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-18.33	18.33	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		9.16	18.33	9.16	-9.16	-18.33	-9.16
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-4.58	4.58	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		2.29	4.58	2.29	-2.29	-4.58	-2.29
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-1.14	1.14	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0.57	1.14	0.57	-0.57	-1.14	-0.57
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-0.28	0.28	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0.14	0.28	0.14	-0.14	-.28	-0.14
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-0.07	0.07	0
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره		0.035	0.07	0.035	-0.035	-0.07	-.035
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر		0	-0.017	0.017	0
جمع لنگر		108.8	-108.8	108.8	-108.8

مثال۶: تکیه‌گاه‌های E و D را مفصلی و تکیه‌گاه A را گیردار فرض کنید.



$$K_{AB} = \frac{4EI}{15} \qquad K_{BC} = \frac{4EI}{18} \qquad K_{CD} = \frac{3EI}{15} \qquad K_{CE} = \frac{3EI}{12}$$

$$\mathrm{DF}_{AB} = 0$$

$$\mathrm{DF}_{BA} = \frac{4EI/15}{4EI/15 + 4EI/18} = 0.545$$

$$\mathrm{DF}_{BC} = 1 - 0.545 = 0.455$$

$$\mathrm{DF}_{CB} = \frac{4EI/18}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.330$$

$$\mathrm{DF}_{CD} = \frac{3EI/15}{4EI/18 + 3EI/15 + 3EI/12} = 0.298$$

$$\mathrm{DF}_{CE} = 1 - 0.330 - 0.298 = 0.372$$

$$\mathrm{DF}_{DC} = 1 \qquad \mathrm{DF}_{EC} = 1$$

$$(\mathrm{FEM})_{BC} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-5(18)^2}{12} = -135 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

$$(\mathrm{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{5(18)^2}{12} = 135 \text{ k} \cdot \text{ft}$$

گره	A		B		C			E	D
اعضا	تکیه‌گاه	AB	BA	BC	CB	CD	CE	EC	DC
DF	1	0	0.545	0.455	0.33	0.298	0.372	1	1
MF	0	0	0	-135	135	0	0	0	0
منفی مجموع لنگر	0		135		-135			0	0
توزیع لنگر اعضا	0	0	73.575	61.425	-44.55	-40.25	-50.22	0	0
انتقال به انتهای دور	0	36.7875	0	-22.275	30.7125	0	0	0	0
منفی مجموع لنگر	-36.7875		22.275		-30.7125			0	0
توزیع لنگر اعضا	-36.7875	0	12.1398	10.1351	-10.1351	-9.1523	-11425	0	0
انتقال به انتهای دور	0	6.0699	0	-5.0675	5.0675	0	0	0	0
منفی مجموع لنگر	6.0699		5.0675		-5.0675			0	0
توزیع لنگر اعضا	-6.0699	0	2.7617	2.3057	-1.6722	-1.5101	-1.8851	0	0
انتقال به انتهای دور	0	1.3808	0	-0.8361	1.1528	0	0	0	0
منفی مجموع لنگر	-1.3808		0.8361		-1.1528			0	0
توزیع لنگر اعضا	-1.3808	0	0.4556	0.3804	-0.3804	-0.3435	-0.4288	0	0
انتقال به انتهای دور	0	0.2278	0	-0.1902	0.1902	0	0	0	0
جمع لنگر	-42.23	44.46	89	-89	115	-51	-64		

مثال۷: مثال قبل را با فرض اینکه همه‌ی تکیه‌گاه‌ها گیردار باشند حل کنید.

$$k_{AB} = k_{BA} = \frac{4EI}{15} = 0.267EI$$

$$k_{BC} = k_{CB} = \frac{4EI}{18} = 0.222EI$$

$$k_{CD} = k_{DC} = \frac{4EI}{15} = 0.267EI$$

$$k_{CE} = k_{EC} = \frac{4EI}{12} = 0.333EI$$

$$DF_{AB} = DF_{DC} = DF_{EC} = 0 \quad \therefore \quad DF_A = DF_D = DF_E = 1$$

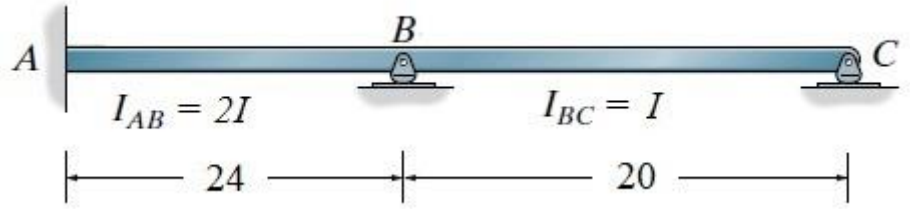
$$DF_{BA} = \frac{0.267}{0.267 + 0.222} = 0.545 \quad \therefore \quad DF_{BC} = \frac{0.222}{0.267 + 0.222} = 0.455$$

$$DF_{CB} = \frac{0.222}{0.267 + 0.222 + 0.333} = 0.27 \quad \therefore \quad DF_{CD} = 0.325 \quad \therefore \quad DF_{CE} = 0.405$$

گره	A		B		C			D		E	
اعضا	A	AB	BA	BC	CB	CD	CE	DC	D	EC	E
DF	1	0	0.545	0.455	0.27	0.325	0.405	0	1	0	1
MF	0	0	0	-135	135	0	0	0	0	0	0
مجموع لنگر	-43	43	86.15	-86.15	124.8	-55.5	-69.3	-27.7	27.7	-34.6	34.6

صفحه۵۰

مثال ۸: اگر تکیه‌گاه B به اندازه‌ی 2.65 cm به طرف پایین نشست کند و تکیه‌گاه A به اندازه‌ی 9.94×10^{-4} Rad به صورت ساعتگرد دوران داشته باشد، تیر را با استفاده از روش پخش لنگر تحلیل کنید.



$$k_C = 0 \quad \Rightarrow \quad DF_{BA} = 0 \qquad\qquad k_A = \infty \quad \Rightarrow \quad DF_A = 1$$

گره C:

$$k_{CB} = \frac{4EI}{20} \quad \Rightarrow \quad DF_{BC} = 1$$

گره A:

$$k_{AB} = \frac{8EI}{24} \quad \Rightarrow \quad DF_A = 0$$

گره B:

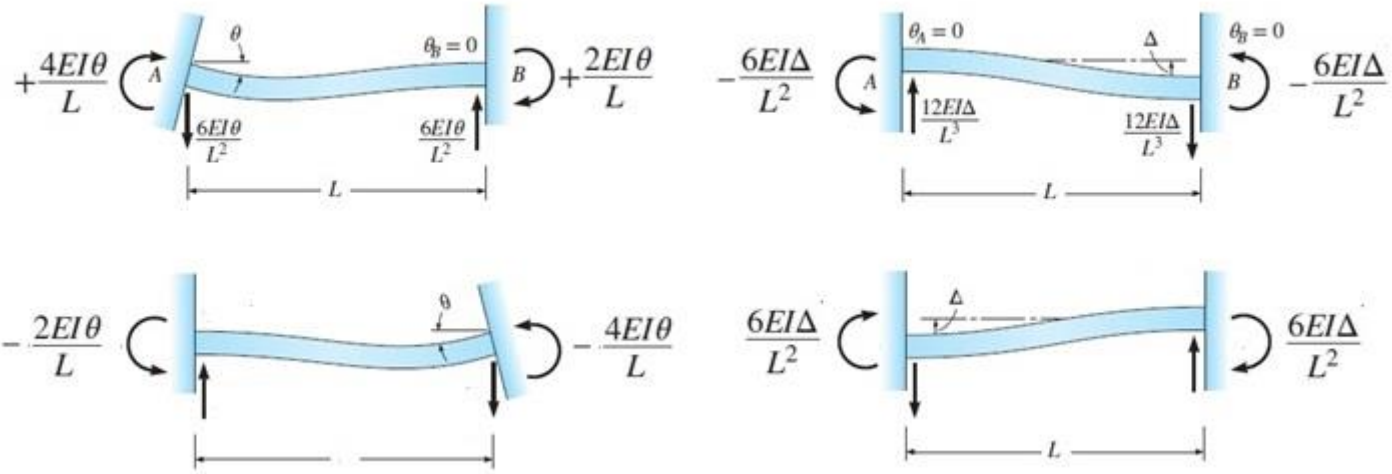
$$k_{BA} = \frac{8EI}{24L} = 0.333EI \quad \Rightarrow \quad DF_{BA} = 0.625$$

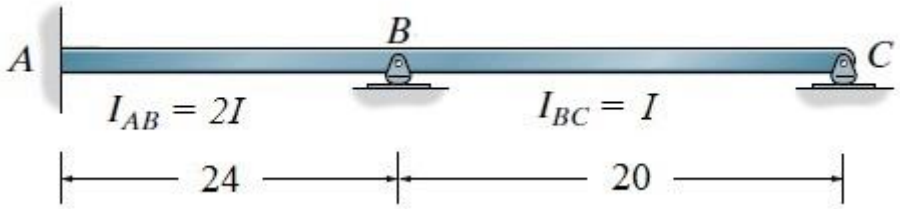
$$k_{BC} = \frac{4EI}{20} = 0.2EI \quad \Rightarrow \quad DF_{BC} = 0.375$$

$$M^{F}_{AB} = \frac{4E(2I)\theta}{24} - \frac{6E(2I)\Delta}{24^2} = \frac{2.1\times10^6(2\times599000)}{2400}\left(\frac{4\times9.94}{10^4} - \frac{6\times2.65}{2400}\right) = -27.77t.m$$

$$M^{F}_{BA} = \frac{2E(2I)\theta}{24} - \frac{6E(2I)\Delta}{24^2} = \frac{2.1\times10^6(2\times599000)}{2400}\left(\frac{2\times9.94}{10^4} - \frac{6\times2.65}{2400}\right) = -48.6t.m$$

$$M^{F}_{BC} = M^{F}_{CB} = \frac{6EI\Delta}{20^2} = \frac{6\times2.1\times10^6\times599000\times2.65}{2000^2} = 50t.m$$





گره A :

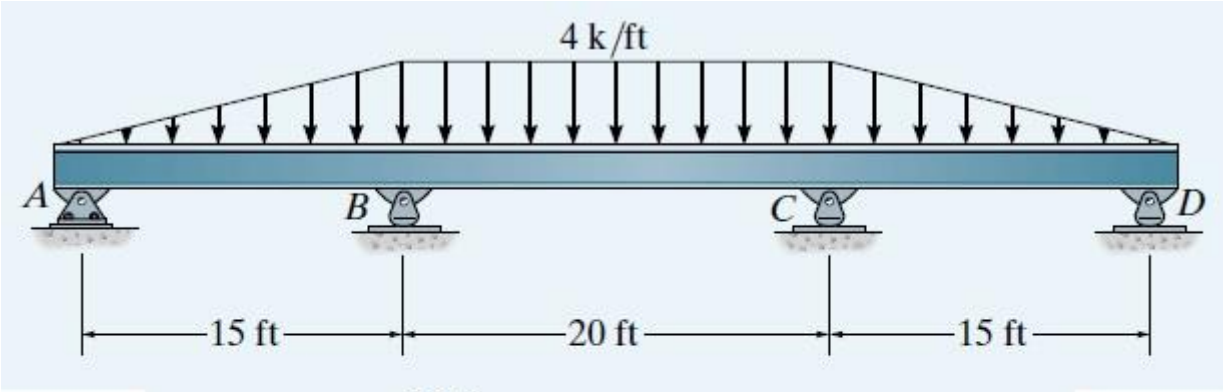
$$M^{F}_{AB} = \frac{4E(2I)\theta}{24} - \frac{6E(2I)\Delta}{24^2} = \frac{2.1\times10^6(2\times599000)}{2400}\left(\frac{4\times9.94}{10^4} - \frac{6\times2.65}{2400}\right) = -27.77t.m$$

$$M^{F}_{BA} = \frac{2E(2I)\theta}{24} - \frac{6E(2I)\Delta}{24^2} = \frac{2.1\times10^6(2\times599000)}{2400}\left(\frac{2\times9.94}{10^4} - \frac{6\times2.65}{2400}\right) = -48.6t.m$$

$$M^{F}_{BC} = M^{F}_{CB} = \frac{6EI\Delta}{20^2} = \frac{6\times2.1\times10^6\times599000\times2.65}{2000^2} = 50t.m$$

گره	A			B			C				
انتهاهای متصل به گره	گیردار A	AB		BA	BC		CB	مفصل C			
DF	**1**	**0**		**0.625**	**0.375**		**1**	**0**			
M^{FX}	0	-27.77		-48.6	50		50	0			
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	27.77	27.77	0	-0.875	-1.4	-0.525	-50	-50	0		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	-0.4375		0	-25		-0.2625	0			
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره	0.4375	0.4375	0	15.625	25	9.375	0.2625	0.2625	0		
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر	0	7.8125		0	0.1312		4.6875	0			
جمع لنگر	19.63	-19.63		-32.3	32.3		0	0			

مثال۹: با سختی اصلاح شده سازه متقارن و بارگذاری متقارن حل شود



$$K_{AB} = \frac{3EI}{15}$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{20}$$

$$\mathrm{DF}_{AB} = \frac{3EI/15}{3EI/15} = 1$$

$$\mathrm{DF}_{BA} = \frac{3EI/15}{3EI/15 + 2EI/20} = 0.667$$

$$\mathrm{DF}_{BC} = \frac{2EI/20}{3EI/15 + 2EI/20} = 0.333$$

$$(\mathrm{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{15} = \frac{4(15)^2}{15} = 60\ \mathrm{k \cdot ft}$$

$$(\mathrm{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{4(20)^2}{12} = -133.3\ \mathrm{k \cdot ft}$$

گره			B					
انتهاهای متصل به گره			BA	BC				
DF			**0.667**	**0.333**				
M^{FX}			60	-133.33				
توزیع منفی مجموع لنگر هر گره			48.91	73.33	24.42			
حمل یا انتقال لنگر به انتهای دیگر			0	0				
جمع لنگر			108.9	-108.9				

خط تاثیر

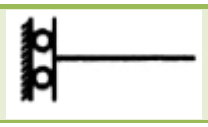
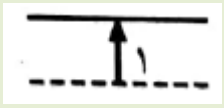
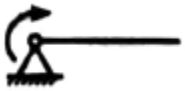
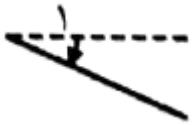
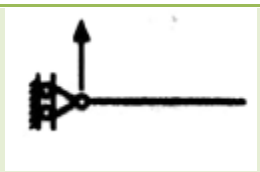
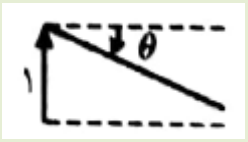
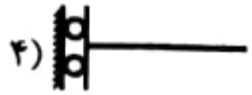
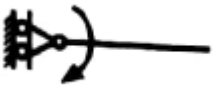
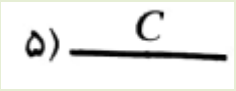
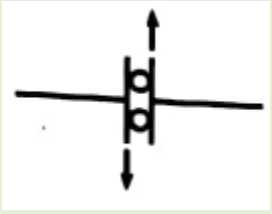
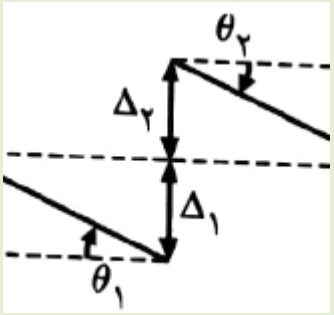
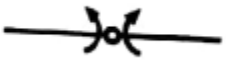
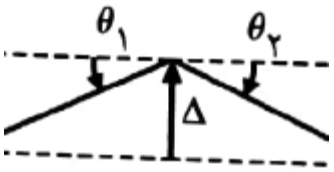
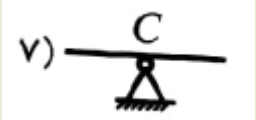
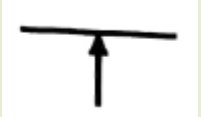
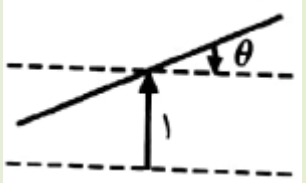
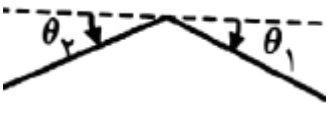
- تعریف خط تاثیر: خط تاثیر یک عکس‌العمل، مقدار نیرویی است که در اثر عبور بار واحد متحرک از روی سازه در آن عکس‌العمل ایجاد می‌شود.

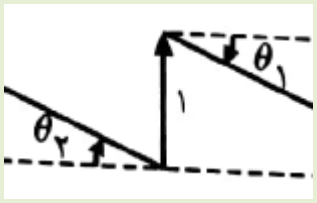
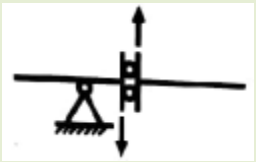
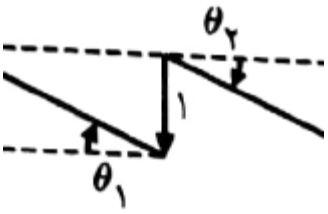
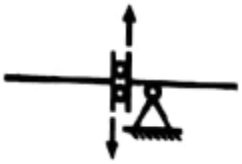
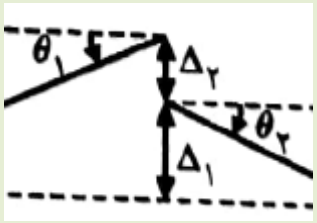
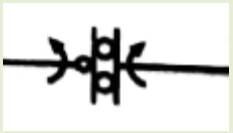
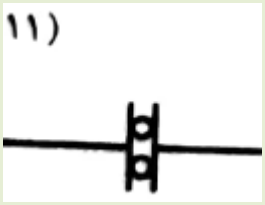
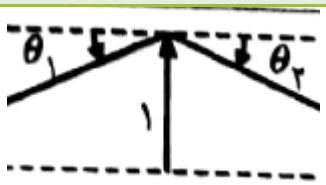
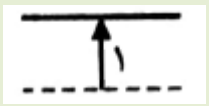
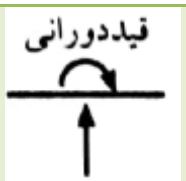
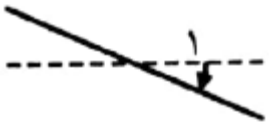
گام ۱: قید یا عاملی که قصد ترسیم خط ترسیم آن را داریم از سازه حذف می‌کنیم.

گام ۲: تغییرمکان واحد در محل قید مورد نظر بر سازه اعمال می‌کنیم.

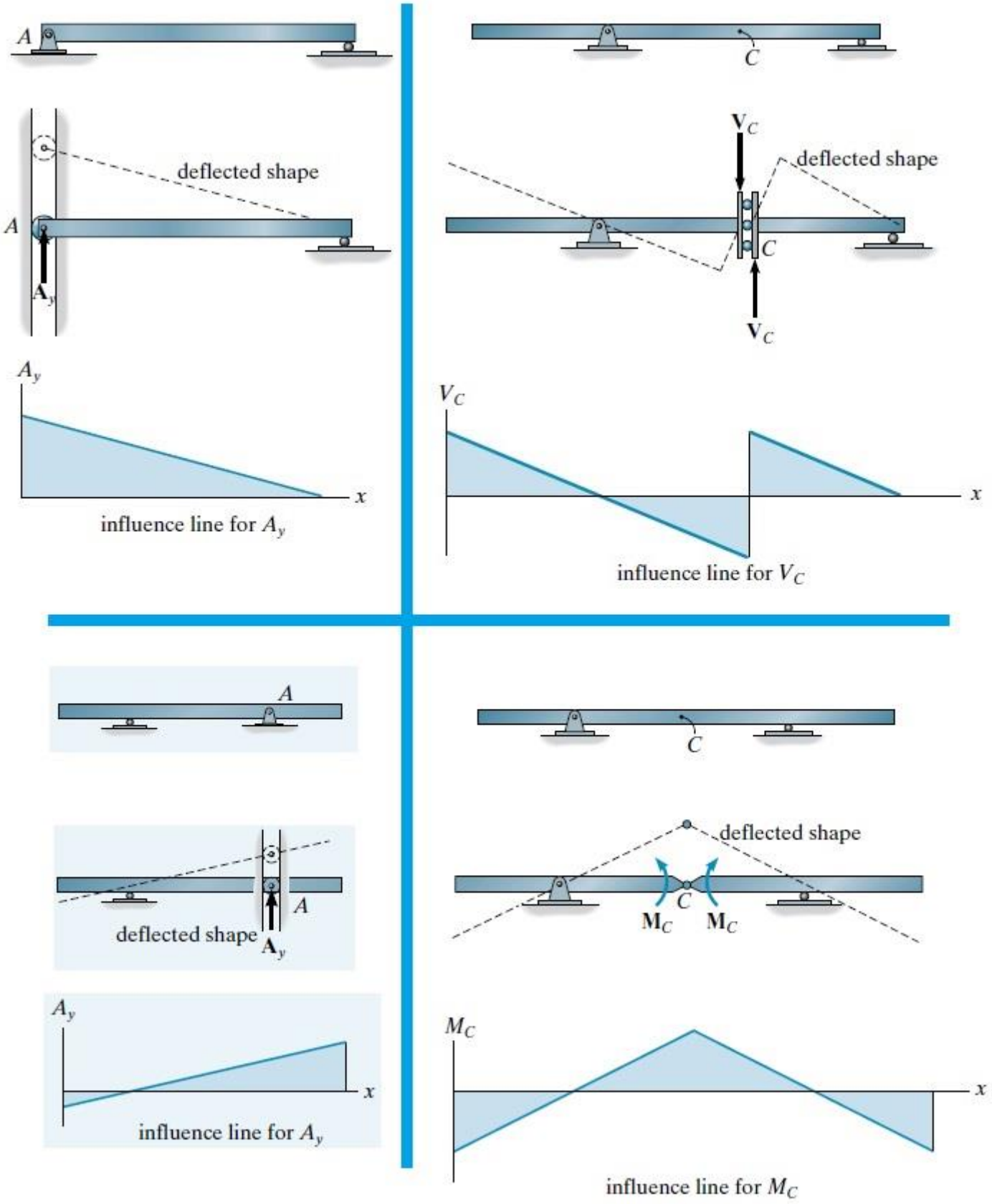
گام ۳: وضعیت تغییرشکل یافته‌ی سازه در این حالت، همان خط تاثیر قید یا عامل مورد نظر می‌باشد.

- اگر پس از حذف قید مورد نظر، قسمت‌هایی از سازه کماکان با تعداد قیدهای مناسب به زمین متصل شده باشند (پایدار باشند) تغییرشکلی در این قسمت‌ها ایجاد نشده و ارتفاع خط تاثیر در آن‌ها صفر است.
- خط تاثیر در سازه‌های معین همواره از خطوط راست تشکیل می‌شود (اعضا صلب در نظر گرفته می‌شوند).
- در مفاصل برشی، دوران دو طرف یک اندازه است، بنابراین تقسیم مقدار تغییرمکان واحد بین قسمت چپ و راست به نسبت طول چپ و راست انجام می‌گیرد (طرف راست رو به بالا و طرف چپ را رو به پایین میکشیم).
- در سازه‌های معین، سختی فنرهای انتقالی و پیچشی را به سمت بی‌نهایت میل می‌دهیم سپس سازه جایگزین را می‌کشیم و خط تاثیر آن سازه‌ی جایگزین را ترسیم می‌کنیم (بر اساس این تئوری که در سازه‌های معین سختی فنرها تاثیری در نیروهای داخلی اعضا ندارد).

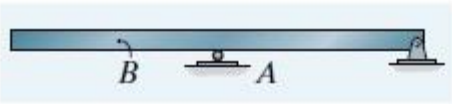
تکیه‌گاه یا اتصال	قید مورد نظر	شکل تکیه‌گاه بعد از آزادسازی قید مورد نظر	شکل تغییرشکل یافته‌ی عضو	توضیحات
۱) 	نیروی برشی در تکیه‌گاه			**شیب عضو صفر باقی می‌ماند**
۲) 	لنگر خمشی در تکیه‌گاه			-
۳) 	عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه			**θ با توجه به هندسه بقیه اعضا به دست می‌آید.**
۴) 	لنگر خمشی در تکیه‌گاه			**Δ با توجه به هندسه بقیه اجزای تیر به دست می‌آید.**
۵) 	نیروی برشی در نقطه C			$\Delta_1+\Delta_2=1$ $\theta_1=\theta_2$ **شیب دو طرف مفصل برشی با هم برابر است و با توجه به بقیه‌ی اعضا مشخص می‌شود**
۶) 	لنگر خمشی در نقطه‌ی C			$\theta_1+\theta_2=1$ **Δ با توجه به هندسه بقیه اعضا مشخص می‌شود**
۷) 	عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه			**θ با توجه به هندسه بقیه اعضا به دست می‌آید.**
۸) 	لنگر خمشی در نقطه C			$\theta_1+\theta_2=1$ **شیب دو طرف با توجه به هندسه بقیه اعضا مشخص می‌شود**

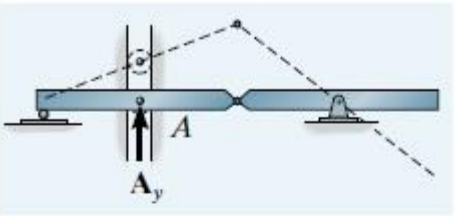
$\theta_1 = \theta_2$ و با توجه به بقیه اعضا مشخص می‌شود			برش سمت راست تکیه‌گاه C	۹) 
$\theta_1 = \theta_2$ و با توجه به بقیه اعضا مشخص می‌شود			برش سمت چپ تکیه‌گاه C	۱۰) 
$\theta_1 + \theta_2 = 1$ با $\theta_1, \theta_2, \Delta_1, \Delta_2$ توجه به هندسه بقیه اعضا مشخص می‌شود.			لنگر خمشی در مفصل برشی	۱۱) 
θ_1, θ_2 با توجه به هندسه بقیه اعضا مشخص می‌شود.			عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه	۱۲) 
به علت قید دورانی موجود، تیر افقی باقی می‌ماند.			عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه	۱۳) 
-			لنگر خمشی تکیه‌گاه	۱۴) 

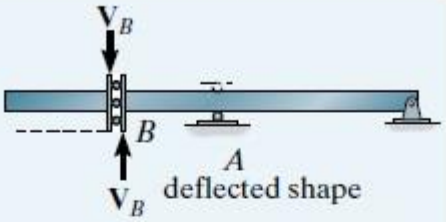
...


A
C
deflected shape
A
A_y
V_C
deflected shape
C
V_C
A_y
x
influence line for A_y
V_C
x
influence line for V_C
A
C
deflected shape
A
deflected shape
A_y
C
M_C
M_C
A_y
x
influence line for A_y
M_C
x
influence line for M_C

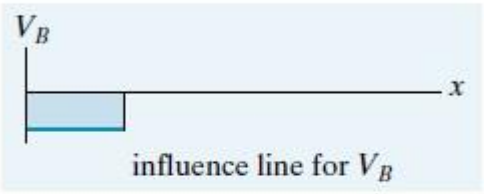

A

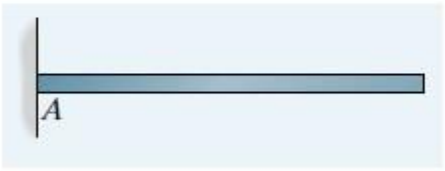

B
A


A
$\mathbf{A}_y$

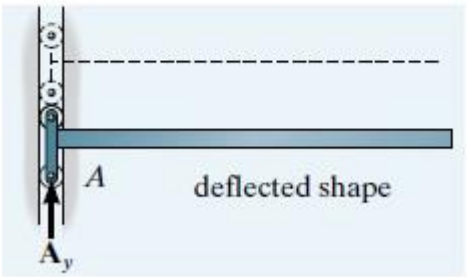

$\mathbf{V}_B$
B
A
$\mathbf{V}_B$
deflected shape

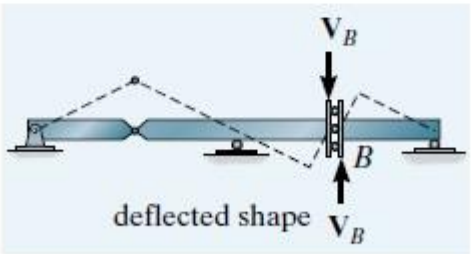

A_y
x
influence line for A_y

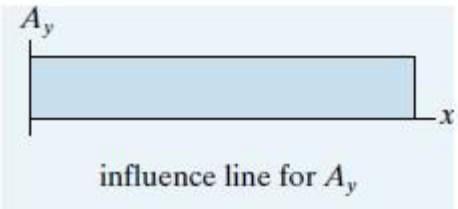

V_B
x
influence line for V_B

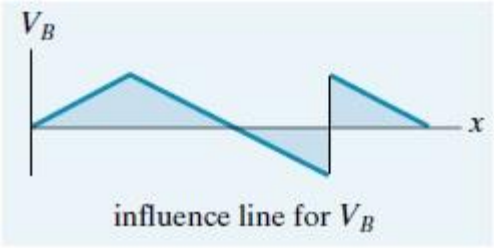

A

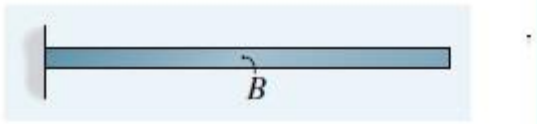

B

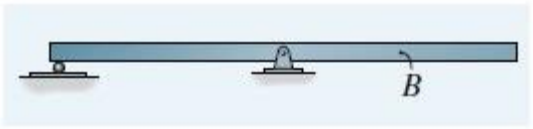

A
deflected shape
$\mathbf{A}_y$

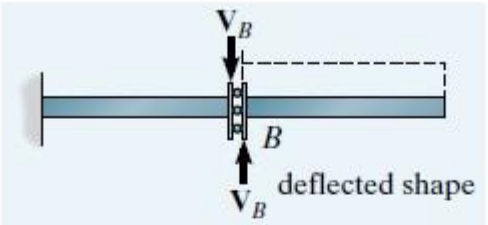

$\mathbf{V}_B$
B
deflected shape
$\mathbf{V}_B$

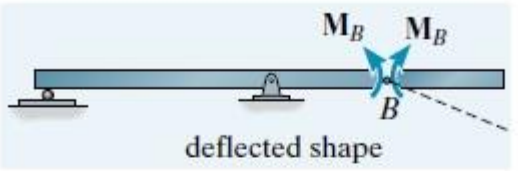

A_y
x
influence line for A_y

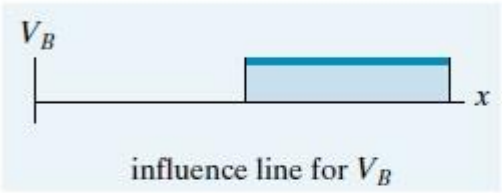

V_B
x
influence line for V_B

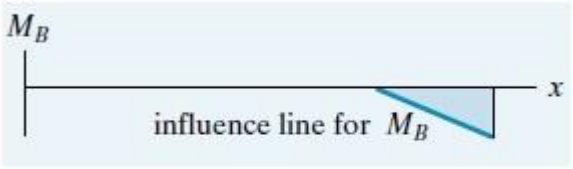

B

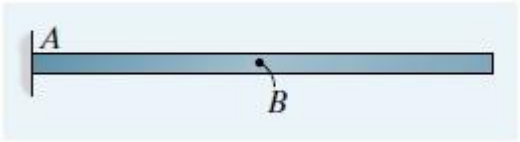

B

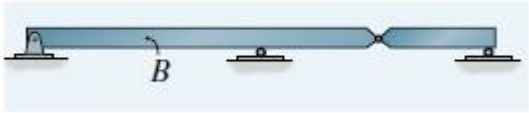

V_B
B
V_B
deflected shape

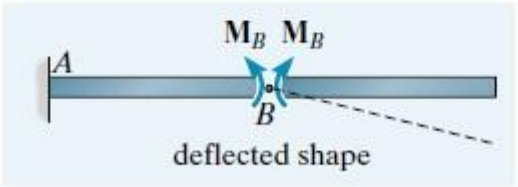

M_B
M_B
B
deflected shape

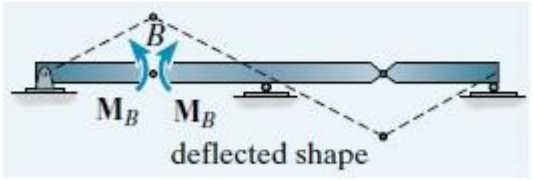

V_B
x
influence line for V_B

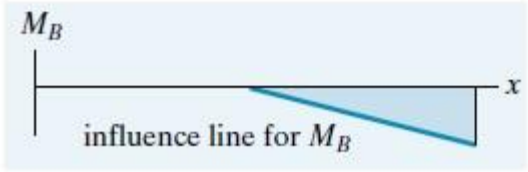

M_B
x
influence line for M_B

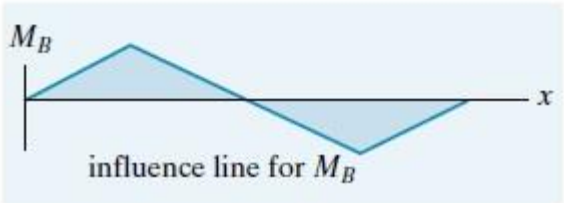

A
B

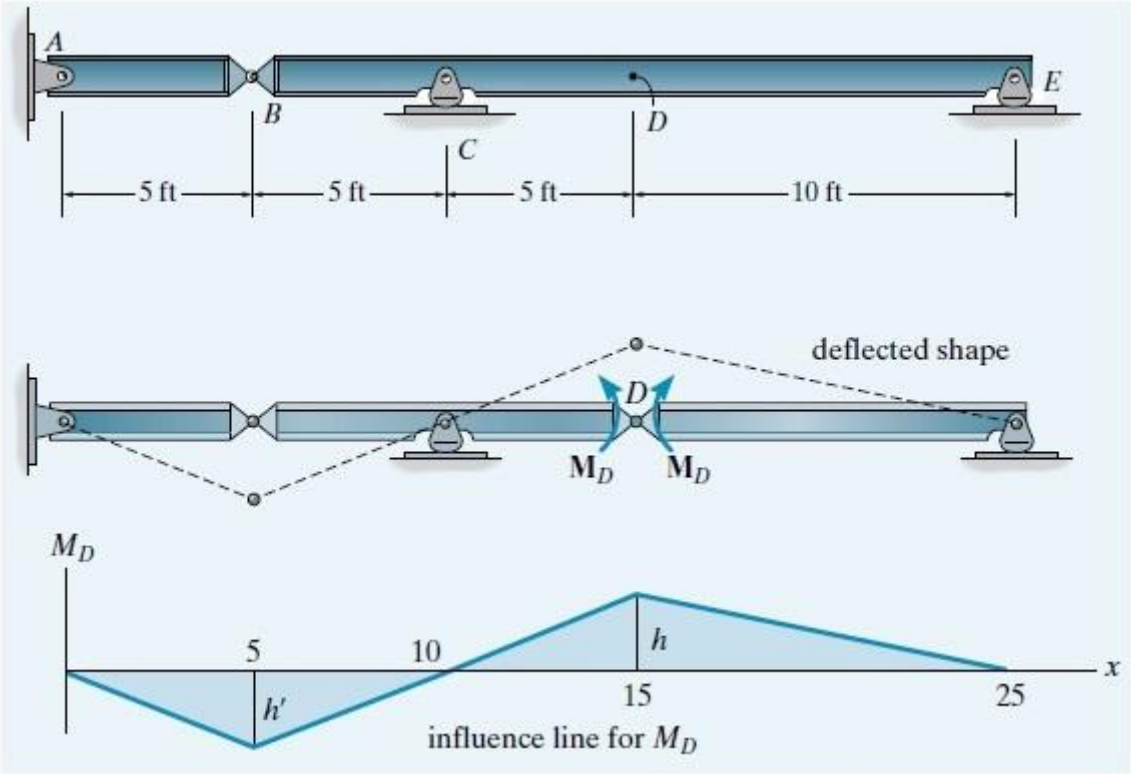

B


M_B
M_B
A
B
deflected shape


B
M_B
M_B
deflected shape

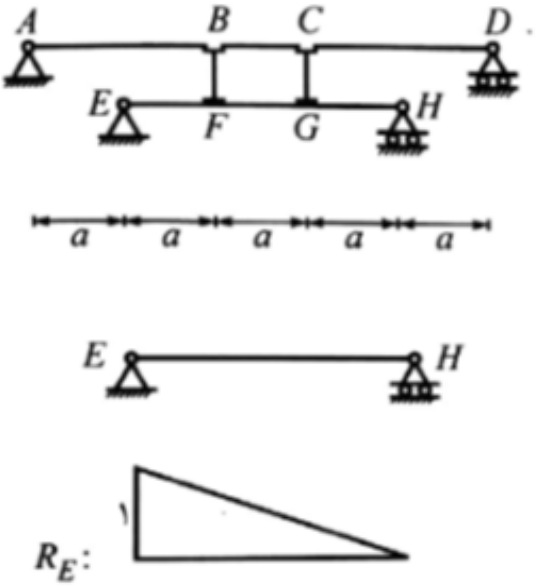

M_B
x
influence line for M_B


M_B
x
influence line for M_B

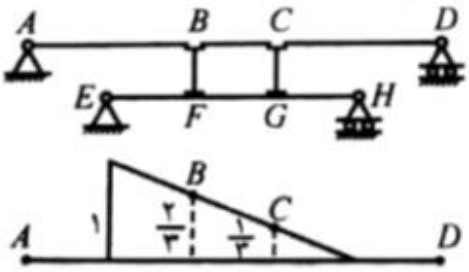

A
B
C
D
E
5 ft
5 ft
5 ft
10 ft
deflected shape
D
$\mathbf{M}_D$
$\mathbf{M}_D$
M_D
5
10
h
x
h′
15
25
influence line for M_D

خط تاثیر در تیرهای پانل دار

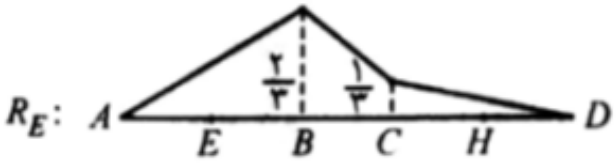
در تیر زیر بار از مسیر ABCD گذر می‌کند و از طریق دو تیر فرعی بر نقاط F و G انتقال داده می‌شوند. برای ترسیم خط تاثیر چنین تیرهایی در گام اول در تیر اصلی EH خط تاثیر کنش مورد نظر را (فرض کنیم عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه E) بدون توجه به وجود تیرهای فرعی و پانل‌ها ترسیم می‌کنیم.



در گام دوم، نقاط زیر ابتدا و انتهای هر پانل را روی خط تاثیر رسم شده در مرحله‌ی قبل را مشخص می‌کنیم.



در گام سوم با متصل کردن نقاطی که در مرحله‌ی قبل مشخص شده‌اند خط تاثیر تیر پانل‌دار به دست می‌آید.



خط تاثیر خرپاها

برای رسم خط تاثیر یک عضو خرپایی، نیروی محوری ایجاد شده در آن عضو خرپایی هنگامی که بار واحد از روی قسمت‌های پایینی یا بالایی خرپا عبور می‌کند را به دست می‌آوریم. برای این منظور دو روش کلی وجود دارد:

روش اول: بار واحد را روی گره‌های خرپا قرار داده و با تحلیل خرپا نیروی داخلی در عضو مورد نظر را به دست می‌آوریم.

روش دوم: با توجه به روش مولر برسلاو، عضو مورد نظر را از خرپا حذف کرده و با اعمال دو نیرو در راستای عضو دو گره را به اندازه‌ی واحد به یک‌دیگر نزدیک کرده و سپس تغییرشکل سازه را ترسیم می‌کنیم، تغییرشکل قسمتی که بار واحد روی آن حرکت می‌کند معادل خط تاثیر عضو مورد نظر است. در این روش پس از حذف عضو مورد نظر، تمامی چشمه‌های خرپا که صلب باشند (تشکیل مثلث دهند) و به هم متصل باقی بمانند مثل یک جسم صلب یکپارچه تغییرشکل می‌دهند و خط تاثیر در این قسمت‌ها دچار شکستگی نخواهد بود. اگر جسم صلبی با قیدی مانند یک تکیه‌گاه مفصلی به زمین متصل شود برای رسم تغییرشکل این جسم در مجموعه، آن را حول نقطه اتصال به زمین دوران می‌دهیم.

- در رسم خط تاثیر نیروی داخلی هر عضو خرپایی با روش مولر برسلاو، شناسایی قسمت‌های صلب تشکیل شده از مثلث‌های مبنا بسیار مفید است. باید دقت شود که هر یک از این قسمت‌ها در رسم تغییرشکل خرپا به صورت یکپارچه تغییرشکل می‌دهند.
- در خرپاهای معین و نامعین، منحنی خط تاثیر لزوما از خطوط راست تشکیل می‌شود.
- با استفاده از مولربرسلاو معمولا شکل کیفی خط تاثیر خرپاها به دست می‌آید. برای به دست آوردن مقادیر دقیق نمودار باید روش محاسباتی دنبال شود.
- اگر نیروی عضو فشاری باشد، ارتفاع خط تاثیر منفی و در حالت کششی ارتفاع خط تاثیر مثبت فرض می‌شود.

کاربرد خط تاثیر در به دست آوردن حداکثر یک کنش تحت بارگذاری متحرک

برای بارهای متمرکز متحرک: خط تاثیر قید مربوطه را رسم کرده و بار متمرکز را در محل حداکثر ارتفاع خط تاثیر قرار می‌دهیم، از حاصل‌ضرب حداکثر مقدار خط تاثیر در مقدار نیرو، حداکثر مقدار قید مورد نظر به دست می‌آید.

برای بارهای گسترده یکنواخت: در صورت عبور بار گسترده و ثابت q از روی سازه، ابتدا ناحیه‌ای که مساحت زیر منحنی خط تاثیر بیشینه است را به دست می‌آوریم، اگر بار گسترده در این ناحیه قرار گیرد قید مورد نظر بیش‌ترین مقدار را دارد (مقدار آن برابر ضرب شدت بار گسترده در مساحت زیر منحنی خط تاثیر است)

خلاصه‌ای از روش کانی

معادلات شیب افت با قرارداد علامت کانی:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + \frac{1}{C_{ik}} M'_{ik} + M'_{ik} + B_{ik} M''_{ik}$$

$$M_{ki} = \bar{M}_{ki} + \frac{1}{C_{ki}} M'_{ki} + M'_{ki} + B_{ki} M''_{ki}$$

جزء دوران $$M'_{ik} = \mu_{ik} \left(\bar{M}_i + \sum_k M'_{ki} + \sum_k B_{ik} M''_{ik} \right)$$

ضریب دوران $$\mu_{ik} = -C_{ik} \times \frac{k'_{ik}}{\sum_k k'_{ik}}$$

لنگر مقاوم گره $$\bar{M}_i = \sum_k \bar{M}_{ik}$$

ثابت جزء انتقال $$B_{ik} = \frac{1}{3} \times \frac{1 + C_{ik}}{C_{ik}}$$

جزء انتقال $$M''_{ik} = \nu_{ik} \left(\bar{M}_r + \sum_r B_{ik} M'_{ik} \sum_r B_{ki} M'_{ki} \right)$$

ضریب انتقال $$\nu_{ik} = -\frac{3 C_{ik} K'_{ik}}{\sum_r (B_{ik} + B_{ki}) C_{ik} K'_{ik}}$$

لنگر طبقه $$\bar{M}_r = \frac{h_r}{3} \left(\sum P + \sum_r FES_{ik} \right) = \frac{Q_r h_r}{3}$$

برش طبقه $$Q_r = \sum P + \sum_r FES_{ik}$$

نیروی برش گیرداری $$FES_{ik} = R_{ik} + \frac{\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}}{h_r}$$

روش کانی برای تیرهای سراسری

۱- تعیین لنگرهای گیرداری $\bar{M}_{ik}$ و لنگرهای مقاوم در هر گره، لنگرهای گیرداری به علت بارهای خارجی و نشست‌های تکیه‌گاهی می‌باشند. لنگرهای مقاوم در هر گره نیز از جمع جبری لنگرهای گیرداری مربوط به آن گره به دست می‌آیند:

$$\bar{M}_i = \sum_k \bar{M}_{ik}$$

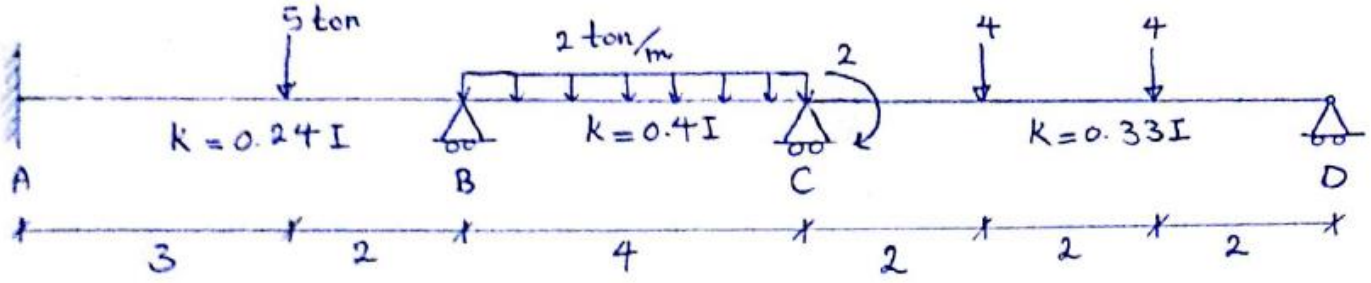
۲- تعیین ضرائب دوران با استفاده از رابطه‌ی $\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \times \frac{k_{ik}}{\sum_k k_{ik}}$

۳- مقدار اجزای دوران M'_{ik} از تکرار عمل زیر و پیشرفت از یک گره به گره‌ی دیگر در مسیر دلخواه تا رسیدن به دقت کافی به دست می‌آید: $M'_{ik} = \mu_{ik} \left(\bar{M}_i + \sum_k M'_{ki} \right)$

در سیکل اول، مقادیر اجزای دوران M'_{ki} مساوی صفر فرض می‌شود و در سیکل‌های بعدی، مقادیر محاسبه شده‌ی اجزای دوران در رابطه قرار داده می‌شود و آن‌قدر ادامه می‌یابد تا این اختلاف M'_{ik} سیکل‌های متوالی در حد تقریب مطلوب باشد.

۴- تعیین لنگرهای انتهایی اعضا به کمک رابطه‌ی $M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki}$

مثال یک تیر سراسری از روش کانی



گام اول: محاسبه لنگرهای گیرداری اعضا

$$\bar{M}_{AB} = -\frac{5\times 3\times 2^2}{5^2} = -2.4\,ton.m$$

عضو AB

$$\bar{M}_{BA} = -\frac{5\times 3^3\times 2}{5^2} = 3.6\,ton.m$$

$$\bar{M}_{BC} = -\frac{2\times 4^2}{12} = -2.67\,ton.m$$

عضو BC

$$\bar{M}_{CB} = \frac{2\times 4^2}{12} = 2.67\,ton.m$$

برای دهانه‌ی CD به دلیل انتهای مفصلی D، باید از سختی کاهش‌یافته استفاده نمود. لنگرهای گیرداری دهانه‌ی CD نیز از جدول مربوطه به تیرهای یک سرگیردار یک سر ساده محاسبه می‌شود. با این دو اصلاح، تکیه‌گاه مفصلی D تبدیل به تکیه‌گاه گیردار می‌شود که جزء دوران آن همواره مساوی صفر است.

$$\bar{M}_{ij} = -\frac{3Pa}{2L}\left(L-a\right)$$

$$\bar{M}_{CD} = -\frac{3\times 4\times 2}{2\times 6}\left(6-2\right) = -8\,ton.m$$

عضو CD

$$\bar{M}_{DC} = 0$$

گام دوم: محاسبه لنگر مقاوم گره‌ها

$$\bar{M}_B = \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} = 3.6 - 2.67 = 0.93\,ton.m$$

$$\bar{M}_C = \bar{M}_{CB} + \bar{M}_{CD} + M_{ex} = 2.67 - 8 - 2 = -7.33\,ton.m$$

$$\bar{M}_D = \bar{M}_{DC} = 0$$

گام سوم: تعیین ضرائب دوران

$$\sum k = k_{BA} + k_{BC} = 0.24I + 0.4I = 0.64I$$

گره B

$$\mu_{BA} = -\frac{1}{2} \times \frac{k_{BA}}{\sum k} = -\frac{1}{2} \times \frac{0.24I}{0.64I} = -0.1875$$

$$\mu_{BC} = -\frac{1}{2} \times \frac{0.4I}{0.64I} = -0.3125$$

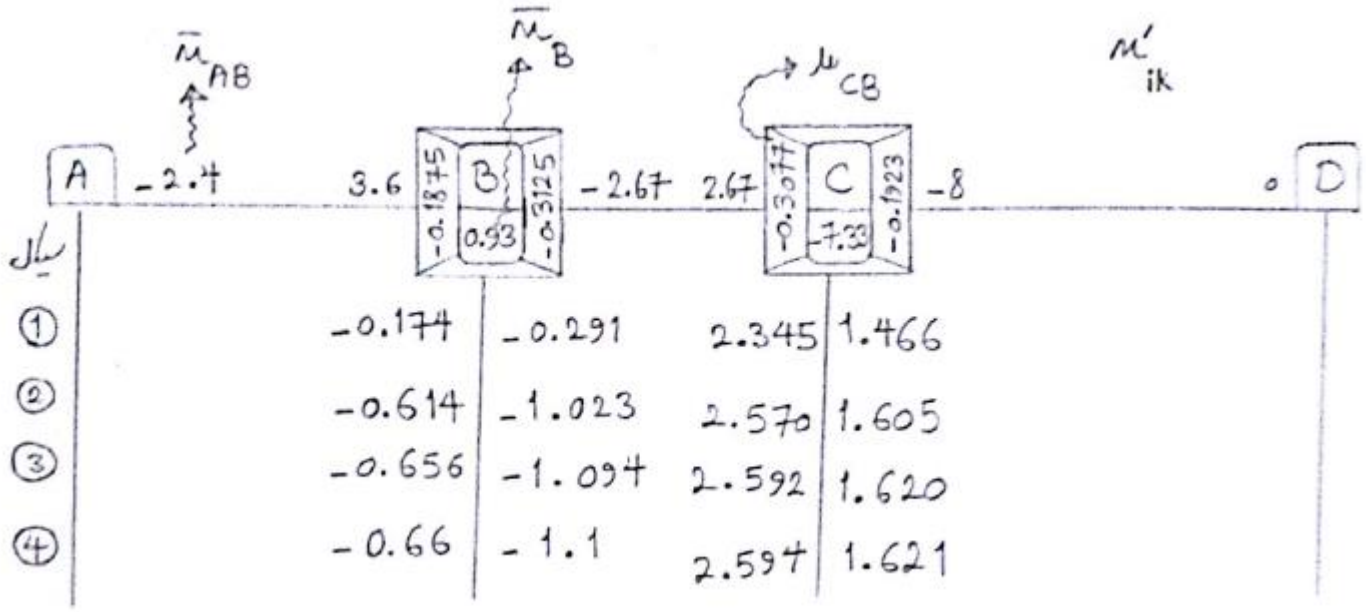
$$\sum k = k_{CB} + k_{CD}^{R} = 0.4I + \left(0.75 \times 0.33I\right) = 0.65I$$

گره C

$$\mu_{CB} = -\frac{1}{2} \times \frac{0.4I}{0.65I} = -0.3077$$

$$\mu_{CD} = -\frac{1}{2} \times \frac{0.2475I}{0.65I} = -0.1923$$

گام چهارم: تعیین مقادیر اجزای دوران



محاسبات مربوط به سیکل اول $M'_{ik} = \mu_{ik}\left(\bar{M}_i + \sum_k M'_{ki}\right)$

$$M'_{BA} = \mu_{BA}\left(\bar{M}_B + M'_{AB} + M'_{CB}\right) = -0.1875(0.93+0+0) = -0.174$$

$$M'_{BC} = \mu_{BC}\left(\bar{M}_B + M'_{AB} + M'_{CB}\right) = -0.3125(0.93+0+0) = -0.291$$

$$M'_{CB} = \mu_{CB}\left(\bar{M}_C + M'_{BC} + M'_{DC}\right) = -0.3077(-7.33-0.291+0) = 2.345$$

$$M'_{CD} = \mu_{CD}\left(\bar{M}_C + M'_{BC} + M'_{DC}\right) = -0.1923(-7.33-0.291+0) = 1.46$$

محاسبات مربوط به سیکل دوم

$$M'_{BA} = \mu_{BA}\left(\bar{M}_B + M'_{AB} + M'_{CB}\right) = -0.1875(0.93+0+2.345) = -0.614$$

$$M'_{BC} = \mu_{BC}\left(\bar{M}_B + M'_{AB} + M'_{CB}\right) = -0.3125(0.93+0+2.345) = -1.023$$

$$M'_{CB} = \mu_{CB}\left(\bar{M}_C + M'_{BC} + M'_{DC}\right) = -0.3077(-7.33-1.023+0) = 2.57$$

$$M'_{CD} = \mu_{CD}\left(\bar{M}_C + M'_{BC} + M'_{DC}\right) = -0.1923(-7.33-1.023+0) = 1.606$$

گام پنجم: تعیین لنگرهای انتهایی $M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki}$

$$M_{AB} = \bar{M}_{AB} + 2M'_{AB} + M'_{BA} = -2.4 + (2\times 0) - 0.66 = -3.06\, ton.m$$

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} + 2M'_{BA} + M'_{AB} = 3.6 + 2(-0.66) + 0 = 2.28$$

$$M_{BC} = -2.67 + 2(-1.1) + 2.595 = -2.28$$

$$M_{CB} = 2.67 + 2(2.594) - 1.1 = 6.76$$

$$M_{CD} = -8 + 2(1.621) + 0 = -4.76$$

استفاده از روش کانی برای تحلیل قاب‌های با انتقال گره (قاب‌های مستطیلی و منظم و دارای ارتفاع برابر ستون‌های طبقه اول):

ضریب انتقال $C_{ik} = C_{ki} = 0.5$

سختی دورانی مطلق $k'_{ik} = k'_{ki} = \frac{4EI}{L}$

ثابت جزء انتقال $B_{ik} = \frac{1}{3} \times \frac{1+C_{ik}}{C_{ik}} = 1$

گام ۱: گیردار کردن تمام گره‌ها در مقابل دوران و انتقال

گام ۲: محاسبه لنگرهای گیرداری اعضا $\bar{M}_{ik}$ برای بارگذاری داده شده و سپس لنگر مقاوم گره‌ها. دقت گردد که لنگر مقاوم گره از مجموع لنگرهای گیرداری اعضای آن به دست می‌آید.

گام ۳: تعیین نیروی برشی طبقه در حالت گیرداری گره‌ها از رابطه $Q_r = \sum P + \sum_r FES_{ik}$

$\sum P$ مجموع کلیه‌ی نیروهای افقی وارد بر طبقه‌ی مورد نظر و بالای آن است (علامت مثبت برای بار افقی از چپ به راست)

$\sum_r FES_{ik}$ مجموع نیروهای برشی موجود در بالای ستون‌های طبقه‌ی مورد نظر در حالت گیرداری کامل گره‌ها

$$FES_{ik} = R_{ik} + \frac{\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}}{h_r}$$

R_{ik} برای بار افقی از چپ به راست مثبت است (در طول ستون). اندیس r بیانگر طبقه‌ی r ام است.

با توجه به توضیحات بالا اگر هیچ بار جانبی به سازه اعمال نشود $Q_r = 0$ و اگر بارهای جانبی فقط در گره‌های قاب اعمال شود $Q_r = \sum P$ است.

گام ۴: محاسبه لنگر طبقه با استفاده از رابطه $\bar{M}_r = \frac{Q_r h_r}{3}$

گام ۵: تعیین ضرائب دوران μ با استفاده از رابطه‌ی $\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \times \frac{k_{ik}}{\sum_k k_{ik}}$ که $k_{ik} = \frac{I}{L}$ است.

گام ۶: تعیین ضرایب انتقال v در هر طبقه با استفاده از رابطه $v_{ik} = -\frac{3}{2} \times \frac{k_{ik}}{\sum_r k_{ik}}$

گام ۷: اجزای دوران M'_{ik} با انجام تعدادی تکرار توسط رابطه‌ی زیر و پیشرفت از یک گره به گره‌ی دیگر در طول مسیر دلخواه به دست می‌آید. دقت گردد که در دور اول تمام M'' ها مساوی صفر می‌شوند.

$$M'_{ik} = \mu_{ik}\left[\bar{M}_i + \sum_k \left(M'_{ki} + M''_{ik}\right)\right]$$

$\bar{M}_i$ لنگر مقاوم گره است که رابطه‌ی $\sum_k \bar{M}_{ik}$ به دست می‌آید.

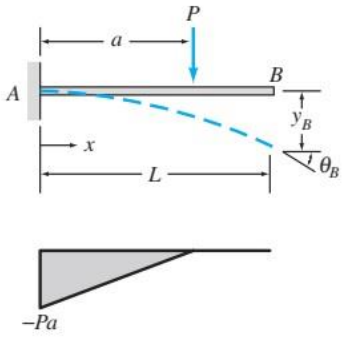
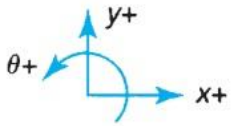
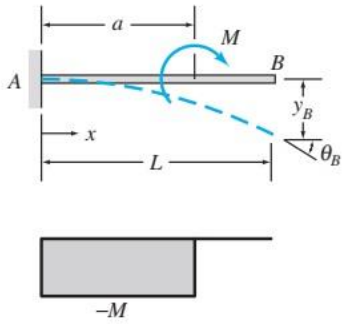
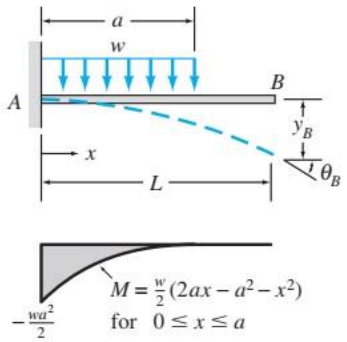
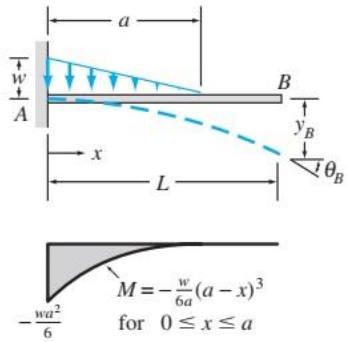
گام ۸: اجزای انتقال گره‌ها M'_{ik} از تکرار عملیات رابطه‌ی زیر و پیشرفت از یک طبقه به طبقه‌ی دیگر به دست می‌آید

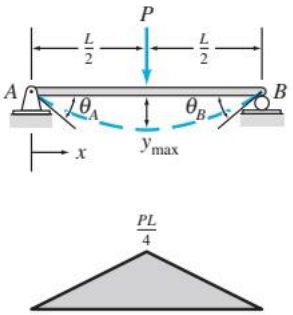
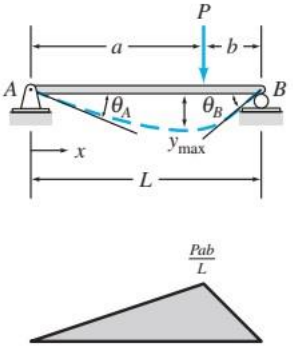
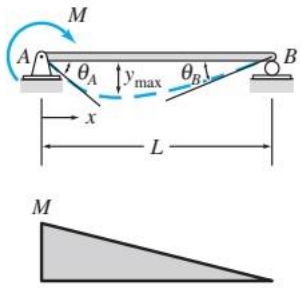
$$M'_{ik} = v_{ik}\left[\bar{M}_r + \frac{r}{r}\left(M'_{ik} + M'_{ki}\right)\right]$$

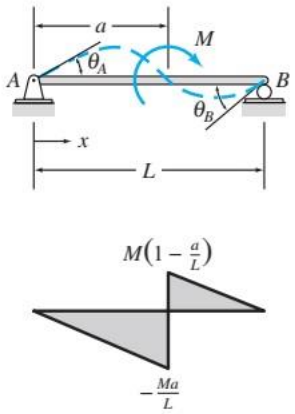
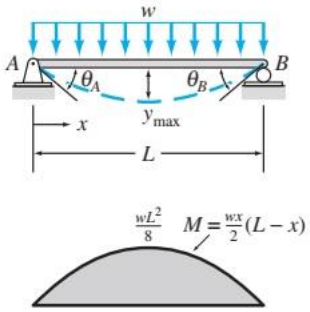
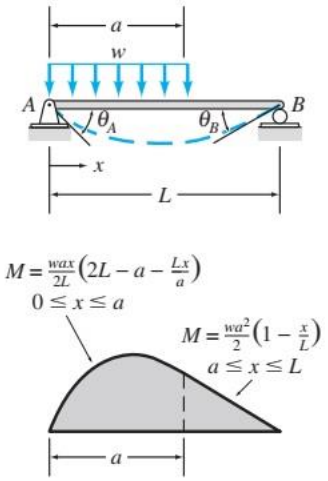
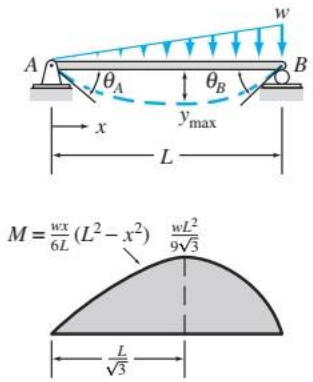
عملیات ۷ برای گره‌ها و ۸ برای هر طبقه تکرار می‌شود تا این که تمام اجزای دوران و انتقال با دقت دلخواه به دست آید.

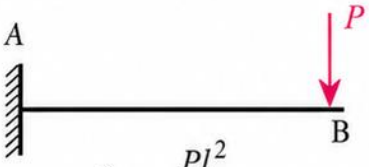
گام ۹: محاسبه لنگرهای انتهایی اعضا با استفاده از رابطه‌ی $M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik}$

پیوست: مقادیر و توابع خیز و شیب برای تعدادی از بارگذاری‌های متداول

Beam, Loading, and Bending Moment Diagram	Equations for Slope and Deflection
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{P}{2EI}(x^2 - 2ax)$ $y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3ax^2)$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{Pa^2}{2EI}$ $y = \frac{Pa^2}{6EI}(a - 3x)$ $\theta_B = -\frac{Pa^2}{2EI}$; $y_B = -\frac{Pa^2}{6EI}(3L - a)$ 
	$0 \le x \le a$: $\theta = -\frac{Mx}{EI}$ $y = -\frac{Mx^2}{2EI}$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{Ma}{EI}$ $y = \frac{Ma}{2EI}(a - 2x)$ $\theta_B = -\frac{Ma}{EI}$; $y_B = -\frac{Ma}{2EI}(2L - a)$
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{w}{6EI}(3ax^2 - 3a^2x - x^3)$ $y = \frac{w}{24EI}(4ax^3 - 6a^2x^2 - x^4)$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{wa^3}{6EI}$ $y = \frac{wa^3}{24EI}(a - 4x)$ $\theta_B = -\frac{wa^3}{6EI}$; $y_B = -\frac{wa^3}{24EI}(4L - a)$
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{w}{24EIa}(x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x)$ $y = \frac{w}{120EIa}(x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2)$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{wa^3}{24EI}$ $y = \frac{wa^3}{120EI}(-5x + a)$ $\theta_B = -\frac{wa^3}{24EI}$; $y_B = -\frac{wa^3}{120EI}(5L - a)$

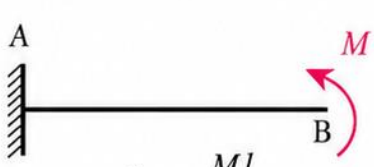
Beam, Loading, and Bending Moment Diagram	Equations for Slope and Deflection
	$0 \le x \le \frac{L}{2}$: $\theta = \frac{P}{16EI}(4x^2 - L^2)$ $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$ $\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}; \quad \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$ $y_{\max} = -\frac{PL^3}{48EI}$
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{Pb}{6EIL}(3x^2 + b^2 - L^2)$ $y = \frac{Pb}{6EIL}(x^3 + b^2x - L^2x)$ $a \le x \le L$: $\theta = \frac{Pa}{6EIL}[L^2 - a^2 - 3(L - x)^2]$ $y = \frac{Pa(L-x)}{6EIL}(x^2 + a^2 - 2Lx)$ $\theta_A = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2)$ $\theta_B = \frac{Pa}{6EIL}(L^2 - a^2)$ For $a \ge b$: $y_{\max} = -\frac{Pb}{9\sqrt{3}EIL}(L^2 - b^2)^{3/2}$ at $x = \left(\frac{L^2 - b^2}{3}\right)^{1/2}$
	$\theta = -\frac{M}{6EIL}(3x^2 - 6Lx + 2L^2)$ $y = -\frac{M}{6EIL}(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$ $\theta_A = -\frac{ML}{3EI}; \quad \theta_B = \frac{ML}{6EI}$ $y_{\max} = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$ at $x = L\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Beam, Loading, and Bending Moment Diagram	Equations for Slope and Deflection
	$0 \le x \le a$: $\theta = \frac{M}{6EIL}(-3x^2 + 6aL - 3a^2 - 2L^2)$ $y = \frac{M}{6EIL}(-x^3 + 6aLx - 3a^2x - 2L^2x)$ $\theta_A = \frac{M}{6EIL}(6aL - 3a^2 - 2L^2)$ $\theta_B = \frac{M}{6EIL}(L^2 - 3a^2)$
	$\theta = -\frac{w}{24EI}(4x^3 - 6Lx^2 + L^3)$ $y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ $\theta_A = -\frac{wL^3}{24EI}$ $\theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$ $y_{max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$ at $x = \frac{L}{2}$
	$0 \le x \le a$: $\theta = -\frac{w}{24EIL}[4Lx^3 - 6a(2L-a)x^2 + a^2(2L-a)^2]$ $y = -\frac{w}{24EIL}[Lx^4 - 2a(2L-a)x^3 + a^2(2L-a)^2x]$ $a \le x \le L$: $\theta = -\frac{wa^2}{24EIL}(6x^2 - 12Lx + a^2 + 4L^2)$ $y = -\frac{wa^2}{24EIL}(L-x)(-2x^2 + 4Lx - a^2)$ $\theta_A = -\frac{wa^2}{24EIL}(2L-a)^2$ $\theta_B = \frac{wa^2}{24EIL}(2L^2 - a^2)$
	$\theta = -\frac{w}{360EIL}(15x^4 - 30L^2x^2 + 7L^4)$ $y = -\frac{w}{360EIL}(3x^5 - 10L^2x^3 + 7L^4x)$ $\theta_A = -\frac{7wL^3}{360EI}$ $\theta_B = \frac{wL^3}{45EI}$ $y_{max} = -0.00652\frac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$



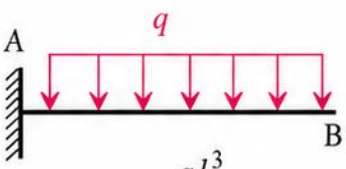
$$\theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{3EI}$$



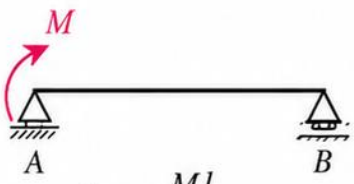
$$\theta_B = \frac{Ml}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{Ml^2}{2EI}$$



$$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI}$$

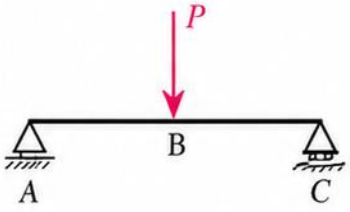
$$\Delta_B = \frac{ql^4}{8EI}$$



$$\theta_A = \frac{Ml}{3EI}$$

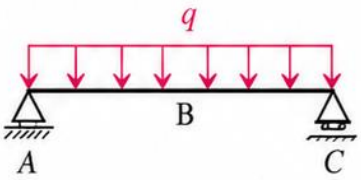
$$\theta_C = \frac{Ml}{6EI}$$

$$\Delta_B = \frac{Ml^2}{16EI}$$



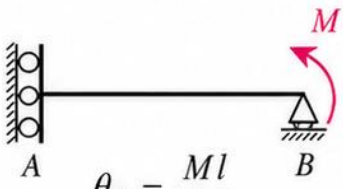
$$\theta_A = \theta_C = \frac{Pl^2}{16EI}$$

$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{48EI}$$



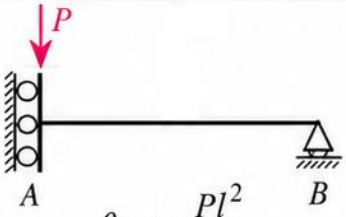
$$\theta_A = \theta_C = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$\Delta_B = \frac{5ql^4}{384EI}$$



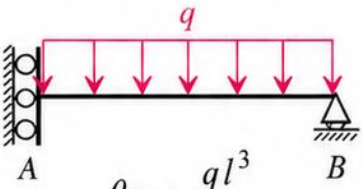
$$\theta_B = \frac{Ml}{EI}$$

$$\Delta_A = \frac{Ml^2}{2EI}$$



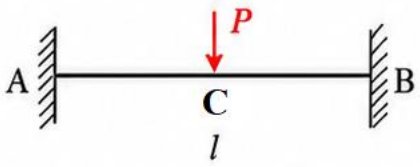
$$\theta_B = \frac{Pl^2}{2EI}$$

$$\Delta_A = \frac{Pl^3}{3EI}$$

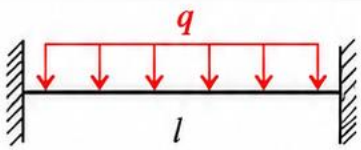


$$\theta_B = \frac{ql^3}{3EI}$$

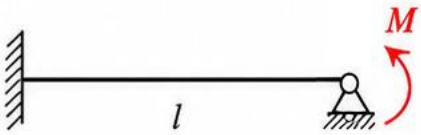
$$\Delta_A = \frac{5ql^4}{24EI}$$



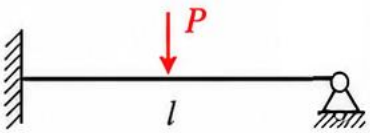
$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \ * \ M_A = M_B = \frac{Pl}{8} \ * \ M_C = \frac{Pl}{8} \ * \ \Delta = \frac{Pl^3}{192EI}$$



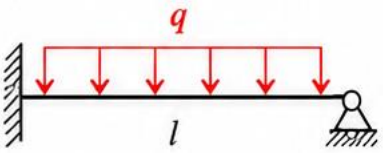
$$R_A = R_B = \frac{q\ell}{2} \ * \ M_A = M_B = \frac{q\ell^2}{12} \ * \ M_C = \frac{q\ell^2}{24} \ * \ \Delta = \frac{q\ell^4}{384EI}$$



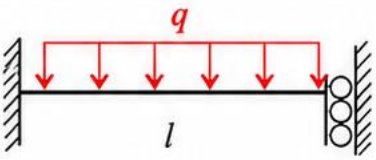
$$M_A = \frac{M}{2} \ * \ R_A = -R_B = \frac{3M}{2l} \ * \ \theta_B = \frac{Ml}{4EI}$$



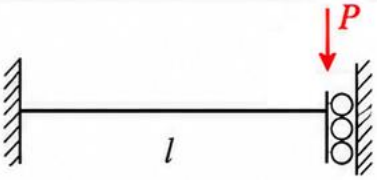
$$M_A = \frac{3Pl}{16} \ * \ R_A = \frac{11}{16}P \ * \ R_B = \frac{5}{16}P \ * \ \theta_B = \frac{Pl^2}{32EI}$$



$$M_A = \frac{q\ell^2}{8} \ * \ R_A = \frac{5}{8}q\ell \ * \ R_B = \frac{3}{8}q\ell \ * \ \theta_B = \frac{q\ell^3}{48EI}$$



$$M_A = \frac{q\ell^2}{3} \ * \ M_B = \frac{q\ell^2}{6} \ * \ \Delta_B = \frac{q\ell^4}{24EI} \ * \ R_A = q\ell$$



$$M_A = -M_B = \frac{Pl}{2} \ * \ \Delta_B = \frac{Pl^3}{12EI} \ * \ \Delta_C = \frac{Pl^3}{24EI}$$

$$* \ R_A = P \ *$$