



تعداد صفحات
۲۷۲



آخرین بروزرسانی
۲ آبان ۱۴۰۵

جزوه

استاتیک

- ✓ شامل جزوات آموزشی درس استاتیک
- ✓ ویژه آزمون های استخدامی و اخذ مدرک



لینک های مفید آزمون های استخدامی

خرید سوالات بانکدار ساختمان (مکانیک) بانک سینا	سوالات رایگان بانک سینا با پاسخنامه
خرید سوالات بانک سینا	خرید درسنامه بانک سینا
منابع آزمون	اخبار آزمون
شبکه های اجتماعی ایران عرضه (فایل های رایگان + تخفیفات هفتگی + اخبار)	
(برای مشاهده هر بخش روی آن بزنید )	

فهرست مطالب

- ❖ فصل اول: خلاصه استاتیک به کوشش قاسمیه - صفحه ۴
- ❖ فصل دوم: خلاصه استاتیک بر اساس کتاب مریام - صفحه ۱۹۱





استاتیک

دکتر مهدی قاسمی

دانشگاه مهندسی عمران پردیس دانشگاه های فنی

آخرین نسخه ی سال 1388

آدرس سایت :

فهرست

1	مقدمه	فصل 1
4	استاتیک نقاط مادی	فصل 2
17	اجسام صلب سیستم نیروهای معادل	فصل 3
44	تعادل اجسام صلب	فصل 4
59	نیروهای گسترده (مرکز سطح یا مرکز خط یا منحنی)	فصل 5
89	تحلیل سازه‌ها	فصل 6
114	کابل‌ها و تیرها	فصل 7
148	اصطکاک	فصل 8
162	نیروهای گسترده: (گشتاور لختی)	فصل 9
181	کار مجازی	فصل 10

مطالعه مکانیک مقدماتی بر شش اصل بنیادین است که همه مبنای تجربی دارند:

- **قانون متوازی الاضلاع برای جمع بستن نیروها:** به جای دو نیرو که به ذره اثر میکنند یک تک نیرو به نام برابند قرار داد که از رسم قطر متوازی الاضلاعی بدست می آید که دو ضلع مجاورش همان دو نیروی معلومند.
- **اصل انتقال پذیری:** اگر نیروی وارد بر نقطه ای از یک جسم صلب را بوسیله نیروی دیگری که با نیروی اول از نظر مقدار و جهت برابر، ولی نقطه اثر آن متفاوت است جایگزین کنند، وضعیت تعادل یا حرکت جسم تغییر نخواهد کرد، به شرط آنکه دو نیرو یک خط اثر داشته باشند.

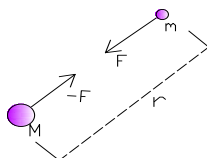
سه قانون بنیادین نیوتن:

- **قانون اول:** اگر برابند نیروهایی که به ذره وارد می شود صفر باشد، ذره در حالت سکون می ماند و اگر در حرکت باشد به حرکت یکنواختش بر روی خط راست ادامه میدهد.

- **قانون دوم:** اگر برابند نیروهایی که به ذره وارد می شود صفر نباشد، ذره در امتداد این برابند و متناسب با بزرگی آن شتاب می گیرد. $F=ma$
که a, m, F به ترتیب نماینده برابند نیروهای وارد بر ذره، جرم ذره و شتاب ذره اند که با یکاهای سیستم سازگار بیان میشوند.

- **قانون سوم:** نیروهای عمل و عکس العمل میان دو جسم که باهم تماس دارند هم اندازه اند، در یک امتدادند و در خلاف جهت هم اثر می کنند.

- **قانون گرانش نیوتن:** دو ذره به جرم های m, M یکدیگر را با نیروی مساوی و مختلف جهت $(F, -F)$ جذب میکنند



r فاصله دو ذره، G ثابت گرانش

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون، نیروی جاذبه زمین بر روی یک ذره واقع بر سطح آن است. در این مورد نیروی F را که زمین به ذره وارد میکند، به عنوان وزن آن (W) تعریف میکنند. اگر m را جرم زمین m را جرم ذره و r را مساوی شعاع زمین (R) بگیریم، و ثابت $g = \frac{GM}{R^2}$ را وارد کنیم مقدار W وزن یک ذره به جرم m را می شود به این صورت بیان کرد:

$$W = mg \quad \text{یا} \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad \text{یا} \quad 32.2 \text{ ft/s}^2$$

سیستم یکا ها

یکای اصلی طول، جرم، زمان است که آنها را به ترتیب متر (m)، کیلوگرم (kg)، و ثانیه (s) مینامند.

جدول ۲.۱ یکاهای اصلی SI که در مکانیک به کار می روند			
کمیت	یکای	نماد	فرمول
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	...	m/s^2
زاویه	رادیان	rad	*
شتاب زاویه ای	رادیان بر مجذور ثانیه	...	rad/s^2
سرعت زاویه ای	رادیان بر ثانیه	...	rad/s
سطح	مترمربع	...	m^2
چگالی	کیلوگرم بر مترمکعب	...	kg/m^3
انرژی	ژول	J	$N.m$
نیرو	نیوتون	N	$kg.m/s^2$
بسامد	هرتز	Hz	s^{-1}
ضربه	نیوتون - ثانیه	...	$kg.m/s$
طول	متر	m	**
جرم	کیلوگرم	kg	**
گشتاور نیرو	نیوتون - متر	...	$N.m$
توان	وات	W	J/s
فشار	پاسکال	Pa	N/m^2
تنش	پاسکال	Pa	N/m^2
زمان	ثانیه	s	**
سرعت	متر بر ثانیه	...	m/s
حجم			
جامدات	مترمکعب	...	m^3
مایعات	لیتر	L	$10^{-3} m^3$
کار	ژول	J	$N.m$

تبدیل ی‌کاها

جدول ۳.۱ یکاهای معمول U.S. و معادل آنها در SI

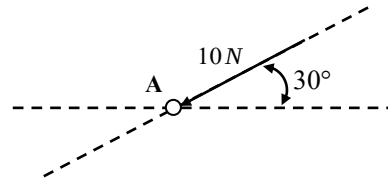
مقدار	یکای معمول در U.S.	معادل در SI
شتاب	ft/s ^۲	۰.۳۰۴۸ m/s ^۲
	in./s ^۲	۰.۰۲۵۴ m/s ^۲
مساحت	ft ^۲	۰.۰۹۲۹ m ^۲
	in ^۲	۶۴۵.۲ mm ^۲
انرژی	ft.lb	۱.۳۵۶ J
نیرو	kip	۴.۴۴۸ kN
	lb	۴.۴۴۸ N
	oz	۰.۲۷۸۰ N
ضربه	lb.s	۴.۴۴۸ N.s
طول	ft	۰.۳۰۴۸ m
	in	۲۵.۴۰ mm
	mi	۱.۶۰۹ km
جرم	oz mass	۲۸.۳۵ g
	lb mass	۰.۴۵۳۶ kg
	slug	۱۴.۵۹ kg
	ton	۹۰۷.۲ kg
گشتاور یک نیرو	lb.ft	۱.۳۵۶ N.m
	lb.in	۰.۱۱۳۰ N.m
گشتاور لختی		
یک سطح	in ^۴	۰.۴۱۶۲×۱۰ ^{-۶} mm ^۴
یک جرم	lb.ft.s ^۲	۱.۳۵۶ kg.m ^۲
مقدار اندازه حرکت	lb.s	۴.۴۴۸ kg.m/s
توان	ft.lb/s	۱.۳۵۶ W
	hp	۷۴۵.۷ W
فشار یا تنش	lb/ft ^۲	۴۷.۸۸ Pa
	lb/in ^۲ (psi)	۶.۸۹۵ kPa
سرعت	ft/s	۰.۳۰۴۸ m/s
	in/s	۰.۰۲۵۴ m/s
	mi/h (mph)	۰.۴۴۷۰ m/s
	mi/h (mph)	۱.۶۰۹ km/h
حجم	ft ^۳	۰.۰۲۸۳۲ m ^۳
	in ^۳	۱۶.۳۹ cm ^۳
مایعات	gal	۳.۷۸۵ L
	qt	۰.۹۴۶۴ L
کار	ft.lb	۱.۳۵۶ J

فصل دوم :

استاتیک نقاط مادی

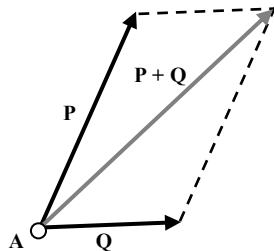
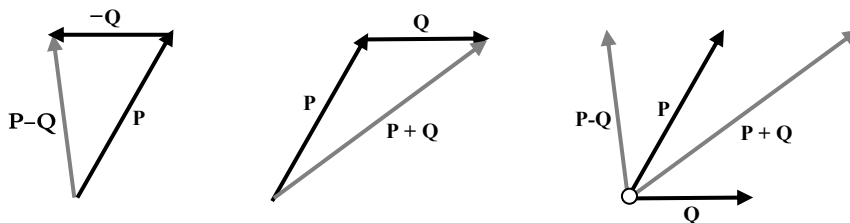
استاتیک نقاط مادی (ذرات):

عملکرد یک جسم را روی جسم دیگر نیرو می نامند که توسط نقطه وارده ، مقدار و جهت آن مشخص می شود. نیرو را توسط یک بردار نشان می دهند . یک بردار دارای مقدار ، خط اثر و جهتی مشخص است که آن را با یک پیکان نشان می دهند .



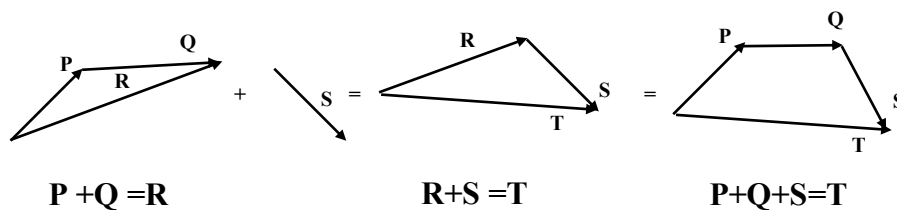
برای تجزیه و تحلیل یک جسم اهمیتی ندارد که نیرو به کدام نقطه ی آن وارد می شود تنها باید در امتداد خط اثر باشد. البته این موضوع تنها در مورد تجزیه و تحلیل نیروهای خارجی صدق می کند و برای نیروهای داخلی نقطه اثر نیرو باید دقیقاً مشخص شده باشد.

جمع بردارها به روش مثلث :



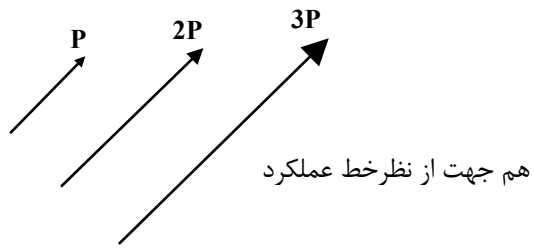
جمع بردارها به روش متوازی الاضلاع :

برای جمع سه بردار Q و P و S داریم :



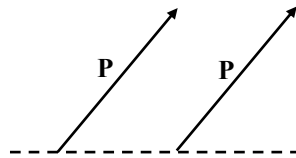
$$\vec{Q} + \vec{P} + \vec{S} = \vec{R} + \vec{S} = \vec{T}$$

ضرب یک بردار در یک عدد :

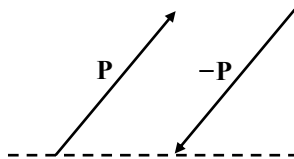


اگر $P \parallel F$ آنگاه $\vec{P} = r\vec{F}$.

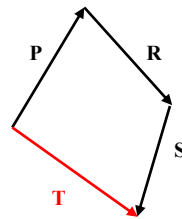
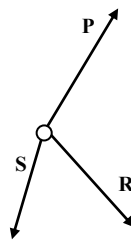
$\vec{P} = \vec{F}$ اگر و فقط اگر $P \parallel F$ و $r=1$.



P قرینه Q است اگر و فقط اگر $P \parallel F$ و $r=-1$.

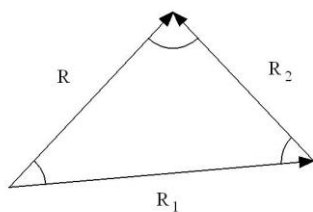


باید چندین نیرو که از یک نقطه عبور می کنند :



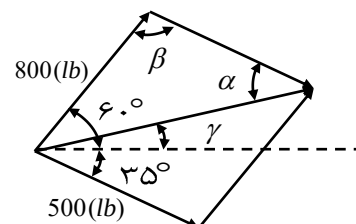
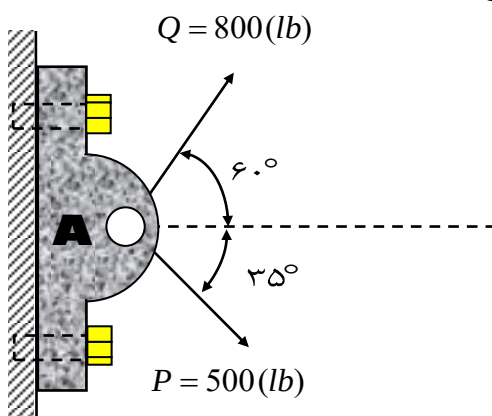
$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{S} = \vec{T}$$

تجزیه نیرو به مولفه‌ها (عکس عمل جمع دو بردار) :



$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

مثال: مطلوب است برآیند دو نیروی $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ و زاویه آن با سطح افق :



با استفاده از قانون کوسینوسها :

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\theta \quad (\beta = 85^\circ)$$

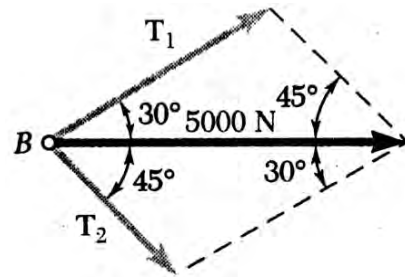
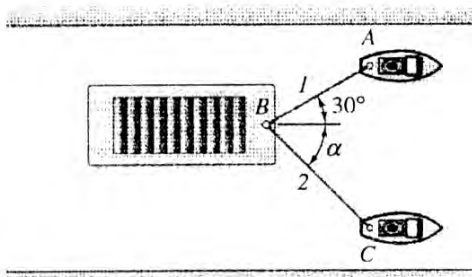
$$R = \sqrt{500^2 + 800^2 - 2 \times 500 \times 800 \times \cos 85} = 905.7 \text{ N}$$

با استفاده از قانون سینوسها :

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin 85} \Rightarrow \frac{500}{\sin \alpha} = \frac{905.7}{\sin 85} \Rightarrow \alpha = 33.36$$

$$R = 905.7 \text{ (N)} \quad \gamma = 60 - 33.36 = 26.64^\circ \quad \text{زاویه با افق}$$

مثال: کشتی B توسط دو قایق A و C در حال حمل می باشد اگر برایند نیروهایی که کابل های 1 و 2 به کشتی B وارد می کنند برابر با 5000N باشد و در جهت مثبت X باشد مطلوب است:
الف) نیروهای کششی به هر کابل وقتی که $\alpha = 45^\circ$.
ب) مقدار زاویه α به طوری که نیروی کششی در کابل 2 حداقل گردد.



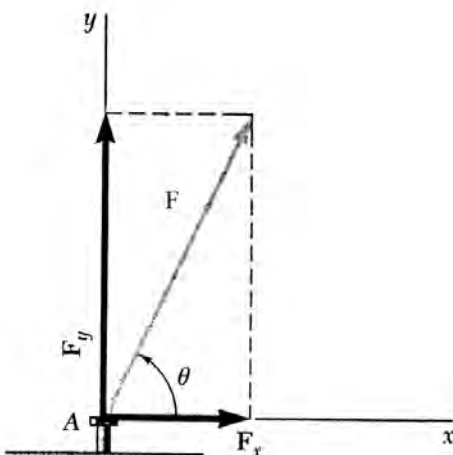
بوسیله قانون سینوسها و قانون متوازی الاضلاع می توان T_1 و T_2 را به دست آورد.

$$\frac{T_1}{\sin 45} = \frac{T_2}{\sin 30} = \frac{R}{\sin 105} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 3660 \text{ (N)} \\ T_2 = 2590 \text{ (N)} \end{cases} \quad R = 5000 \text{ (N)}$$

برای اینکه T_1 Minimum باشد باید $T_1 \perp T_2$ باشد :

$$\frac{T_1}{\sin 60} = \frac{T_2}{\sin 30} = \frac{R}{\sin 90} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 4330 \text{ (N)} \\ T_2 = 2500 \text{ (N)} \end{cases}$$

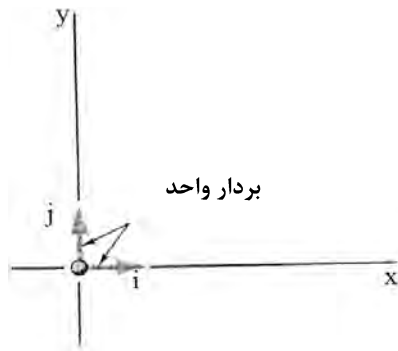
مولفه های متعامد (مستطیلی) یک بردار



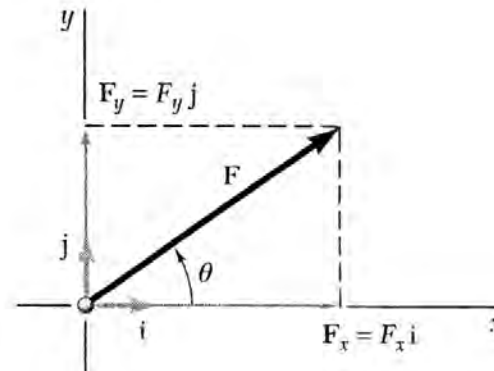
$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

- بردار واحد برداری است که اندازه آن 1 واحد باشد.
- بردار واحد در جهت x را $\vec{i}$ و در جهت y را $\vec{j}$ می‌نامیم.



با توجه به ضرب بردارها خواهیم داشت:



$$\vec{F}_x = F_x \vec{i}$$

$$\vec{F}_y = F_y \vec{j}$$

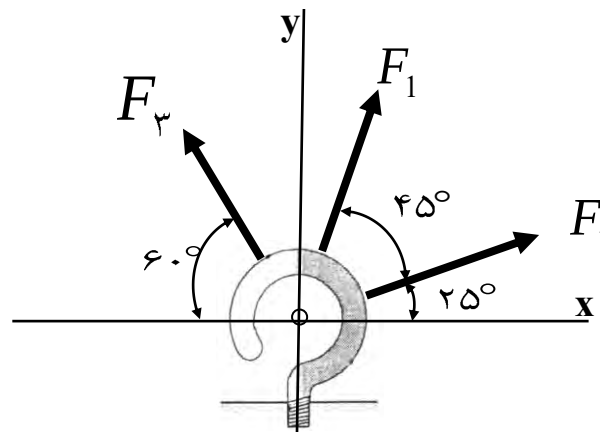
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$F_x = F \cos \theta, \quad F_y = F \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

مثال: برابند نیروهای زیر را بیابید.

$$F_3 = 600 (N), \quad F_2 = 350 (N), \quad F_1 = 800 (N)$$

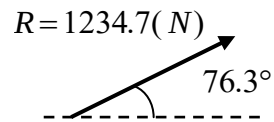


شکل 14.2

نیرو	مقدار	F_x	F_y
F_1	800	$800\cos 70$	$800\sin 70$
F_2	350	$350\cos 25$	$350\sin 25$
F_3	600	$-600\cos 60$	$600\cos 60$
$R = \sum F_i$		+291 (N)	1200 (N)

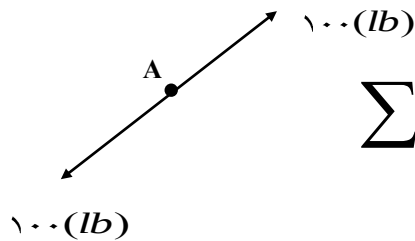
$$R = 291\vec{i} + 1200\vec{j}$$

$$\theta = \text{Arc tan} \frac{1200}{291} = 76.3^\circ$$



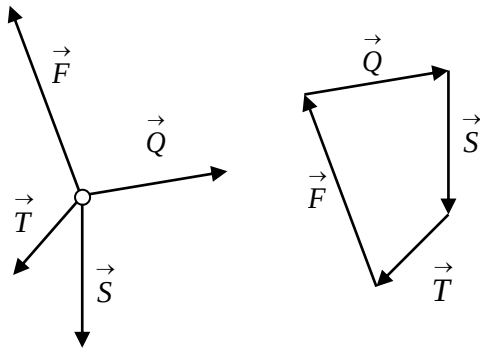
تعدادل یک ذره (نقطه)

اگر برآیند نیروهایی که روی یک جسم و یا یک ذره اثر می کنند برابر با صفر باشد ، آنگاه آن جسم در حال تعدادل است.



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

نقطه A در تعدادل است



$$\vec{Q} + \vec{S} + \vec{T} + \vec{F} = 0$$

اگر نیروها در صفحه xy باشند.

$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0$$

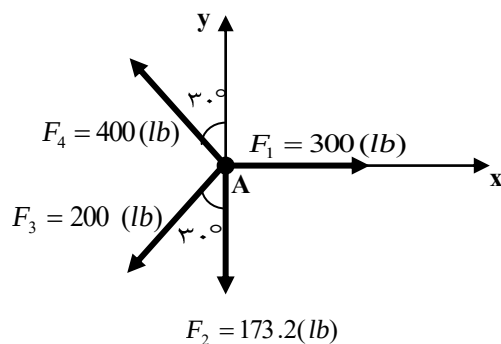
اگر نیروها در فضای xyz باشد.

$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0$$

$$\oplus \downarrow \sum F_z = 0$$

مثال: آیا نقطه A در حال تعدادل است؟

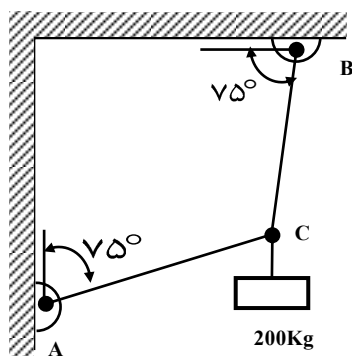


$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

$$R_x = \sum F_x = 0: F_1 - F_3 \sin 30 - F_4 \sin 30 = 300 - 200 \sin 30 - 400 \sin 30 = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0: F_4 \cos 30 - F_3 \cos 30 - F_2 = 400 \cos 30 - 200 \cos 30 - 173 = 0$$

چون R_x و R_y هر دو صفر می‌باشند پس نقطه A در تعادل است.



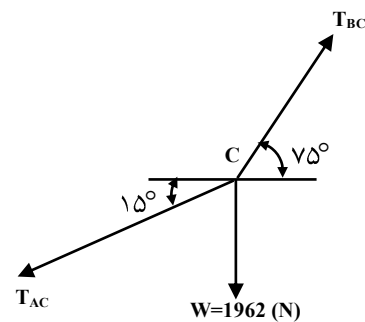
مثال: کشش در طنابها را بدست آورید.
(W وزن جسم است)

در مرحله اول باید همواره دیاگرام آزاد نیروها را رسم کنیم.

$$W = mg = 200 \cdot (9.81) = 1962 (N)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AC} \sin \alpha + T_{BC} \sin \beta - W = 0$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow -T_{AC} \cos \alpha + T_{BC} \cos \beta = 0$$



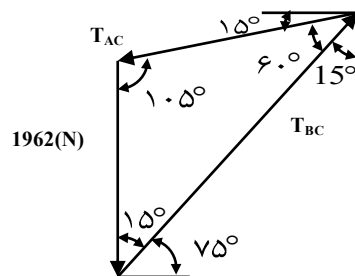
$$w = 1962 (N)$$

$$T_{BC} \sin 15 - T_{AC} \cos 15 = 0$$

$$T_{BC} \cos 15 - T_{AC} \sin 15 - W = 0$$

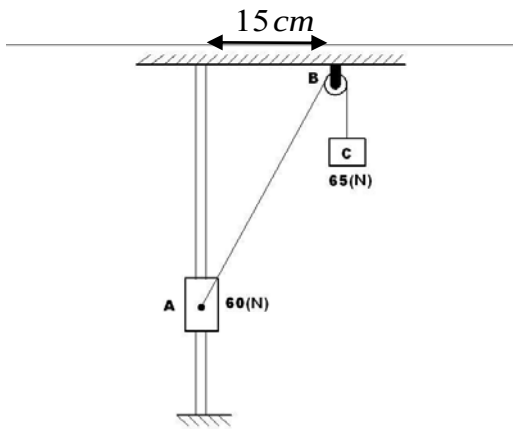
$$\Rightarrow T_{AC} = 586.3 (N)$$

$$\Rightarrow T_{BC} = 2188 (N)$$

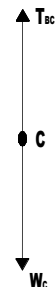


مثال: یک طوقه به وزن $60(N)$ می تواند روی یک میله بدون اصطکاک حرکت کند و به یک وزنه $65(N)$ متصل باشد. h را طوری تنظیم کنید که سیستم در حال تعادل باشد. $W_C = 65(N)$, $W_A = 60(N)$

حل: $AB = \sqrt{(15)^2 + h^2}$



تعادل وزنه C:

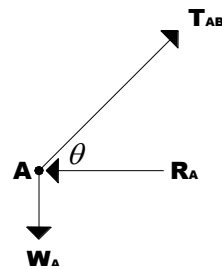


$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{BC} - W_C = 0 \Rightarrow T_{BC} = W_C = 65(N)$$

تعادل وزنه A :

$$T_{AB} = 65(N)$$



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

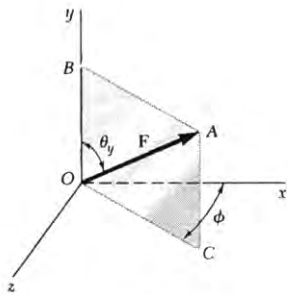
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AB} \cos \theta - R_A = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB} \sin \theta - W_A = 0$$

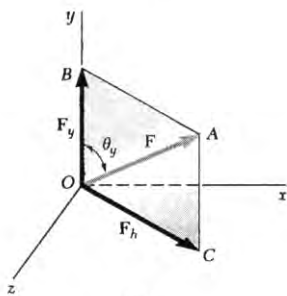
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{W}{T} \Rightarrow h = 15 * \tan \theta = 36(cm)$$

نیروها در فضای سه بعدی:

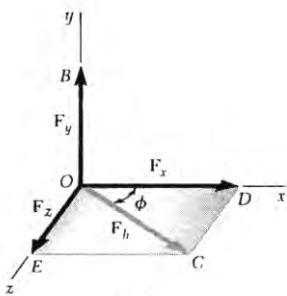
مولفه های متعامد :



(الف)



(ب)



(ج)

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{F}_x = |\vec{F}_x| = |\vec{F}| \cos \theta_x$$

$$\vec{F}_y = |\vec{F}_y| = |\vec{F}| \cos \theta_y$$

$$\vec{F}_z = |\vec{F}_z| = |\vec{F}| \cos \theta_z$$

$$\vec{F}_x = F_x \vec{i}, \vec{F}_y = F_y \vec{j}, \vec{F}_z = F_z \vec{k}$$

$$\vec{F} = F (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

$$\vec{F} = F \lambda \quad (\lambda = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

$$\vec{\lambda} = \lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k}$$

$$\lambda_x = \lambda \cos \theta_x$$

$$\lambda_y = \lambda \cos \theta_y$$

$$\lambda_z = \lambda \cos \theta_z$$

$$\lambda_x = \lambda \cos \theta_x, \lambda_y = \lambda \cos \theta_y, \lambda_z = \lambda \cos \theta_z$$

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

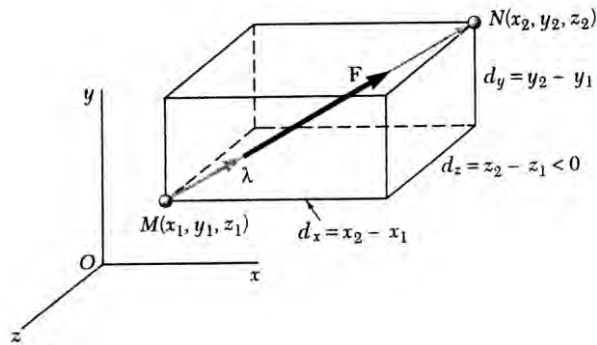
$$\vec{F} = F_y + F_h, \quad F_h = F_z + F_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y, \quad F_h = F \sin \theta_y$$

$$F_x = F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi$$

$$F_z = F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi$$

نیرویی که توسط مقدار و دو نقطه روی خط آن مشخص می شود



$$\overrightarrow{MN} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}$$

$$\left. \begin{aligned} d_x &= x_2 - x_1 \\ d_y &= y_2 - y_1 \\ d_z &= z_2 - z_1 \end{aligned} \right\} d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

$\vec{\lambda}$ بردار واحد در جهت بردار MN می باشد

$$\vec{F} = F \vec{\lambda} = \frac{F}{d} (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$$

$$F_x = \frac{F d_x}{d}, \quad F_y = \frac{F d_y}{d}, \quad F_z = \frac{F d_z}{d}$$

جمع نیروهایی که از یک نقطه در فضا می گذرند

$$\vec{R} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

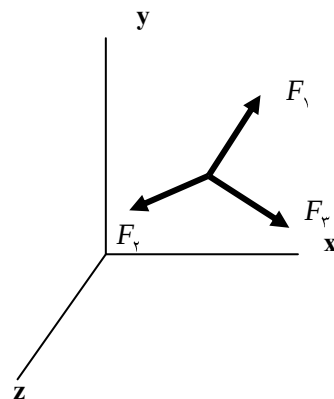
$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$R_x = (\sum F_x)$$

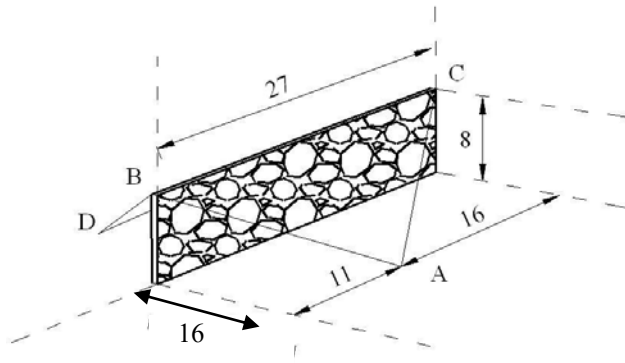
$$R_y = (\sum F_y)$$

$$R_z = (\sum F_z)$$

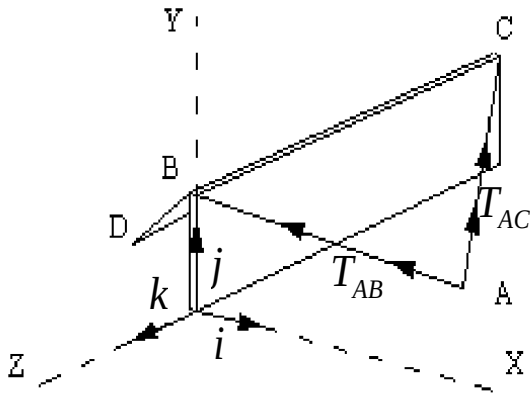
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$



مثال: یک دیوار بتنی توسط 4 طناب نگه داشته شده است. اگر نیروی کششی در طناب AB برابر $840(N)$ باشد و نیروی کششی در طناب AC برابر $1200(N)$ باشد به دست آورید مقدار نیروی برآیندی که توسط طنابهای AB و AC بر نقطه A وارد می شود.



$$\begin{aligned}\vec{R}_A &= \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} \\ \vec{R}_A &= T_{AB} \vec{\lambda}_{AB} + T_{AC} \vec{\lambda}_{AC} \\ \vec{\lambda}_{AC} &= \frac{-16\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k}}{24} \\ \vec{\lambda}_{AB} &= \frac{-16\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k}}{21} \\ \Rightarrow \vec{T}_{AC} &= \frac{1200}{24}(-16\vec{i} + 8\vec{j} - 16\vec{k})\end{aligned}$$



$$\Rightarrow \vec{T}_{AB} = \frac{840}{21}(-16\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k})$$

$$\vec{R}_A = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} = -1440\vec{i} + 720\vec{j} - 360\vec{k} (N)$$

$$R_A = \sqrt{(-1440)^2 + (720)^2 + (-360)^2} = 1650 (N)$$

$$\sum F = 0$$

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1440}{1650} \Rightarrow \theta_x = 150/8^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{720}{1650} \Rightarrow \theta_y = 64/1^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360}{1650} \Rightarrow \theta_z = 102/6^\circ$$

تعادل یک نقطه در فضا:

تعادل در فضای دو بعدی:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

تعادل در فضای سه بعدی:

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

مثال: مطلوب است وزن جسم مکعب مستطیل، اگر نیروی کششی در کابل AD برابر 924N باشد.

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AD} + \vec{W} = 0$$

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \vec{\lambda}_{AB}, \vec{T}_{AC} = T_{AC} \vec{\lambda}_{AC}, \vec{T}_{AD} = T_{AD} \vec{\lambda}_{AD}, \vec{W} = -W \vec{j}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{28\vec{i} + 45\vec{j}}{53}$$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{45\vec{j} - 24\vec{k}}{51}$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{-26\vec{i} + 45\vec{j} + 18\vec{k}}{55}$$

$$\vec{T}_{AB} = \frac{T_{AB}}{53} (28\vec{i} + 45\vec{j})$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{51} (45\vec{j} - 24\vec{k})$$

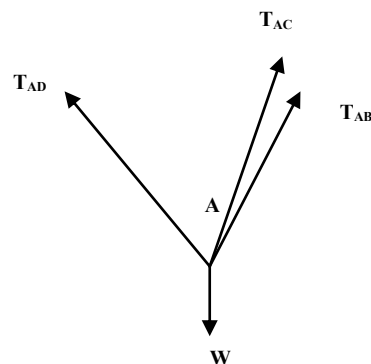
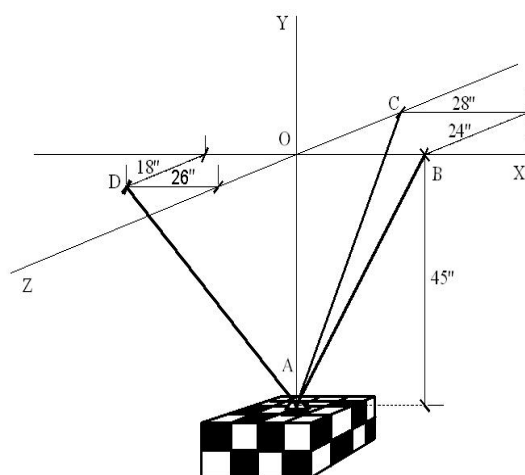
$$\vec{T}_{AD} = \frac{924}{55} (-26\vec{i} + 45\vec{j} + 18\vec{k})$$

$$\vec{W} = -W\vec{j}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{28}{53} T_{AB} - \frac{924(26)}{55} = 0 \Rightarrow T_{AB} = 826.8$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{45}{53} T_{AB} + \frac{45}{51} T_{AC} + \frac{924(45)}{55} - W = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -\frac{24}{51} T_{AC} + \frac{924(18)}{55} = 0$$

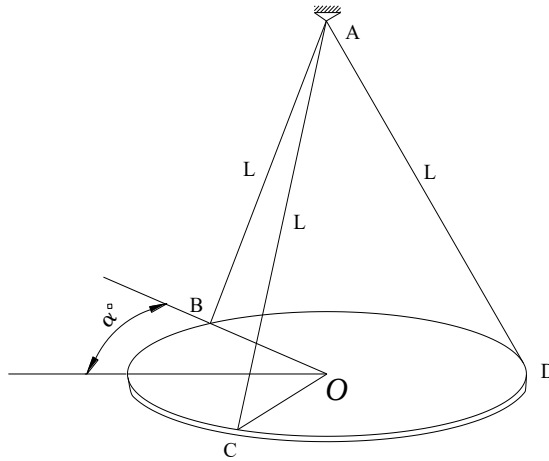


$$\Rightarrow W = 2009 \text{ (N)}$$

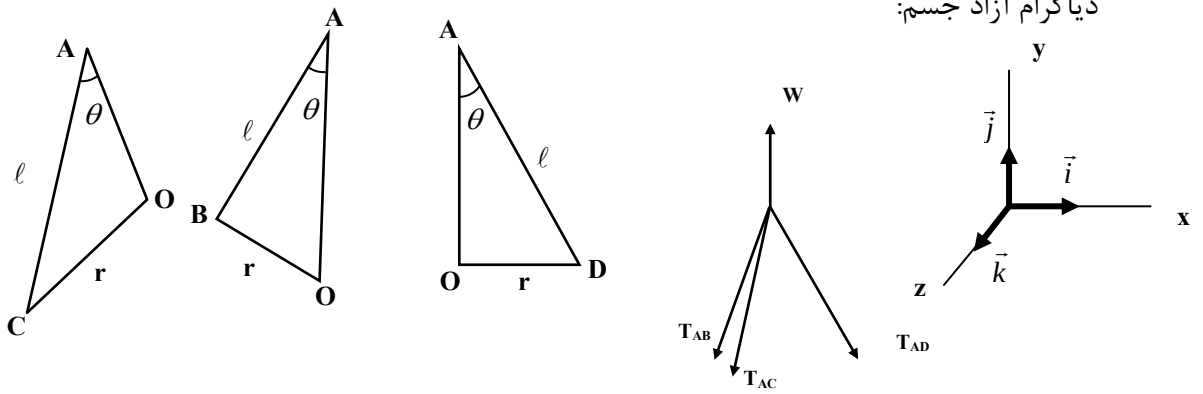
$$\Rightarrow \vec{T}_{AC} = 624.6 \text{ (N)}$$

مثال: ورقه دایره‌ای به شعاع 200(mm) توسط 3 طناب نگه داشته شده است و $\alpha = 30^\circ$ می باشد.

مطلوب است کمترین طول لازم ℓ برای اینکه کشش در طناب از 35(N) بیشتر نشود. جرم ورق 6(Kg) می باشد.



$$M = 6(\text{kg}) \Rightarrow W = 6g = 58.86(\text{N})$$



دیگرام آزاد جسم:

$$\sum F = 0 \xrightarrow{1} \sum F_z = 0 \Rightarrow T_{AB} = T_{AC}$$

$$\xrightarrow{2} \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AD} \sin \theta - (T_{AC} \sin \theta \cos 30) \times 2 = 0$$

$$\xrightarrow{3} \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AD} \cos \theta - (T_{AC} \cos \theta) \times 2 + 6g = 0$$

$$T_{AD} = 1.73 T_{AB}$$

$$T_{AB} = T_{AC} = \frac{15.77}{\cos \theta}, \quad T_{AD} = \frac{27.32}{\cos \theta}$$

$$\theta = 38.7^\circ \quad (T_{AD} = 35)$$

$$\sin \theta = \frac{0.2}{l} \Rightarrow l = 0.32 \text{ (m)} = 320 \text{ (mm)}$$

فصل سوم

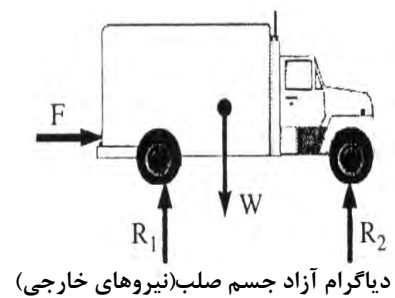
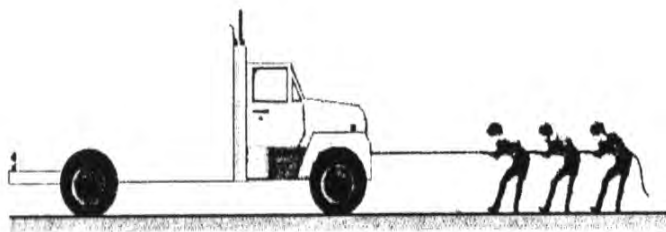
اجسام صلب سیستم نیروهای معادل

اجسام صلب : سیستم نیروهای معادل

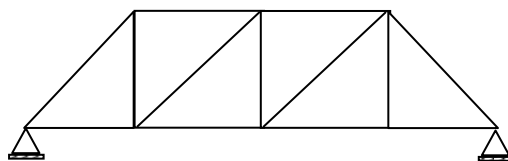
- اکثراً در طبیعت ما با اجسام سر و کار داریم تا نقاط، و می توانیم اجسام را تشکیل شده از نقاط بدانیم.
- در این فصل در مورد اجسام سخت و یا صلب در حالت استاتیک صحبت خواهیم کرد، یعنی اینکه جسم هیچ نوع تغییر شکلی نخواهد پذیرفت. در اصل این یک فرض می باشد چون که هیچ جسمی بطور صد در صد صلب نخواهد بود. ولی این کمبود در صلبیت جسم، در نیروها هیچ نوع اثری نخواهد گذاشت.
- در این فصل راجع به اجسام صلب و نیروهای معادل نیروهای وارد شده بر آن صحبت خواهیم کرد.
- در این فصل همچنین راجع به اصل انتقال نیروهای معادل صحبت خواهیم کرد.

نیروهای داخلی و خارجی

- نیروهای خارجی، نیروهایی می باشند که اثر سایر اجسام خارجی را روی جسم صلب می گذارند. آنها کاملاً مسئول رفتار جسم صلب می باشند.
- نیروهای داخلی، نیروهایی می باشند که نگهدارنده اجزاء مختلف یک جسم صلب بصورت یک عضو می باشند.



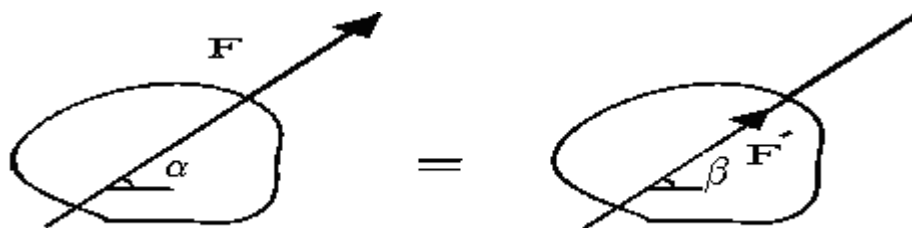
دیاگرام آزاد جسم صلب (نیروهای خارجی)



دیاگرام آزاد یک خرپا (نیروهای داخلی)

اصل انتقال - نیروهای معادل

این اصل می گوید که تعادل یک جسم بهم نخواهد خورد در صورتی که نیروئی که بر آن جسم وارد شده را بر روی خطی که آن نیرو اثر می کند انتقال دهیم.

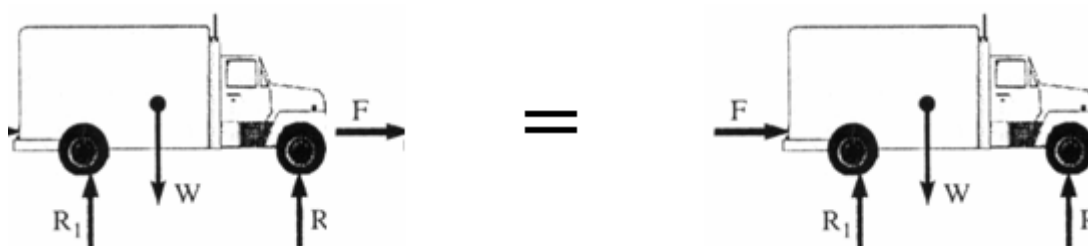


$F = F'$ - هم مقدار

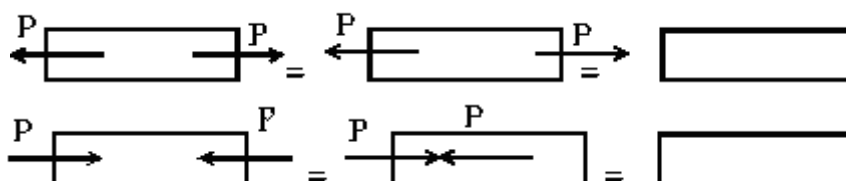
$b = a$ - هم جهت

این قانون را نمی توانیم هم اکنون ثابت کنیم ، مگر در دینامیک و در بخش سیستم های هم ارز و فقط می توانیم به آزمایش ها استناد کنیم .

- اثر این قانون در مثال قبلی به این شکل خواهد بود که در کامیون ، می توان نیروی وارد شده F را در جلو به انتهای کامیون وارد کرد .



نکته : در مورد نیروهای داخلی این قانون ممکن است که سیستم های معادل را بسازد اما اثر نیروها را درست در نظر نگیرد .

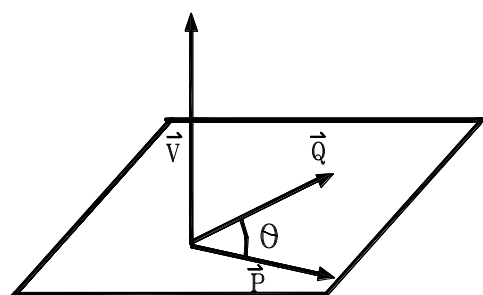


حاصلضرب برداری دو بردار

از حاصلضرب برداری در مبحث مماس ، گشتاور یک نیرو حول یک نقطه و یا یک محور استفاده خواهیم کرد .
حاصلضرب برداری دو بردار چنین تعریف می شود که مثلاً در

$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q}$$

- الف (امتداد $\vec{V}$ عمود بر صفحه ای باشد که $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ در آن قرار دارند .
- ب (مقدار $\vec{V}$ برابر باشد با $PQ \sin \theta$ که θ زاویه بین $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ می باشد .
- ج (جهت $\vec{V}$ از قانون دست راست بدست بیاید .

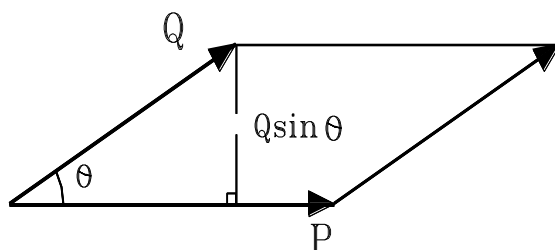


$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q}$$

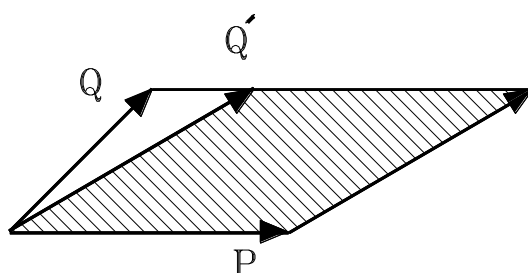
$$|\vec{V}| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \theta$$

اندازه ی بردار V برابر با مساحت متوازی الاضلاعی است که P, Q تشکیل می دهند

$$|\vec{V}| = |\vec{P}| |\vec{Q}| \sin \theta$$



$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = \vec{P} \times \vec{Q}'$$



Q' روی یک ضلع از متوازی الاضلاع اولیه قرار می گیرد

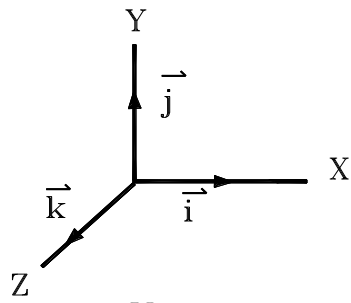
خواص حاصلضرب برداری :

$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P} \quad (\text{الف})$$

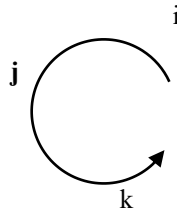
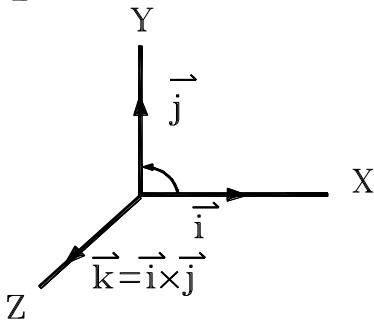
$$\vec{P} \times (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \times \vec{Q}_1 + \vec{P} \times \vec{Q}_2 \quad (\text{ب})$$

$$(\vec{P} \times \vec{Q}) \times \vec{S} \neq \vec{P} \times (\vec{Q} \times \vec{S}) \quad (\text{ج})$$

حاصلضرب برداری بر حسب مؤلفه های متعامد

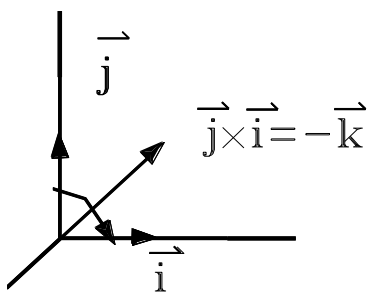


$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array}$$

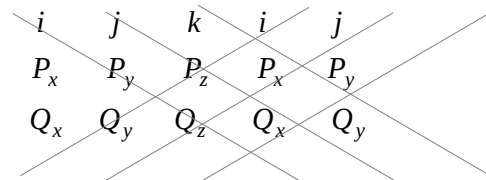


$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \times (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k})$$

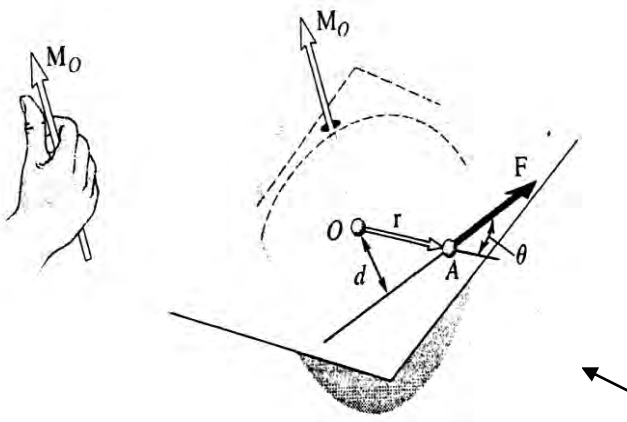
$$\vec{V} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \vec{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \vec{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \vec{k}$$



$$|\vec{V}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (\text{deter minate})$$



$$P_y Q_z \vec{k} - P_z Q_y \vec{i} + P_z Q_x \vec{j} - P_x Q_z \vec{j} + P_y Q_x \vec{j} - P_x Q_y \vec{k}$$



گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

$\vec{F}$ = نیروی وارد بر جسم سخت در نقطه A

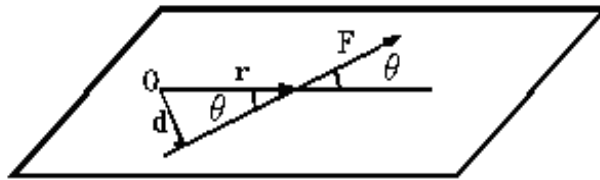
$\vec{r}$ = برداری که مکان A را نسبت به نقطه O مشخص می کند (بردار وضعیت)

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{ممان F حول نقطه O}$$

جهت M_o : یک بردار می باشد که عمود بر

صفحه $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است و سوی آن توسط قانون

دست راست بدست می آید.



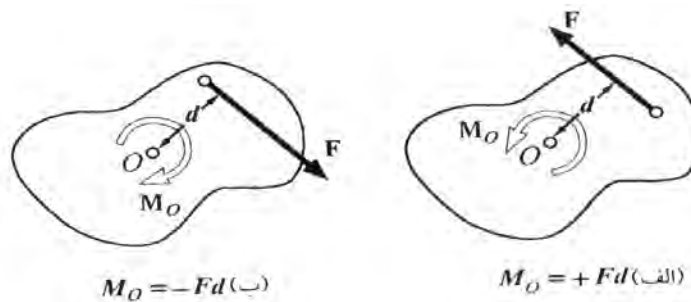
مقدار M_o تعیین کننده مقدار دورانی است که نیروی F حول یک محور خاصی که از نقطه O می گذرد ، انجام می دهد .

$$M_o \text{ واحد : } \begin{matrix} \text{N.m} & (\text{SI}) \\ \text{lb.ft} & (\text{FPS}) \end{matrix}$$

اصل جابجائی یک بردار و نیرو را می توان دوباره به این صورت بیان کرد که دو سیستم وقتی معادل خواهند بود که نه تنها نیروهای آنها با هم برابر و هم سو و هم جهت باشند ، بلکه گشتاورهای ایجاد شده در نقاط O یک مقدار باشند .

$$F=F' \quad M_o=M_o'$$

مسائل دو بعدی :



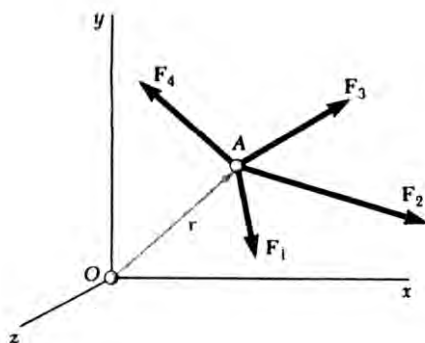
بعضی مسائل در مکانیک طوری هستند که جسم را در یک صفحه می توان قرار داد و ضخامت آن در مسئله تأثیری نخواهد داشت .

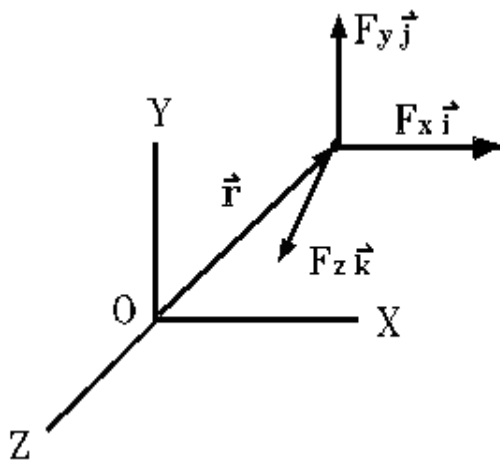
قضیه وارینون

اگر چندین نیرو در یک نقطه اثر کنند مثلاً در نقطه A خواهیم داشت :

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$

گشتاور و یا ممان حول نقطه O برای برآیند چندین نیرویی که از یک نقطه می گذرند برابر است با مجموع ممان های آن نیروها حول همان نقطه O .





$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$

$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$

$$M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

$$\vec{r}_{A/B} = x_{A/B} \vec{i} + y_{A/B} \vec{j} + z_{A/B} \vec{k}$$

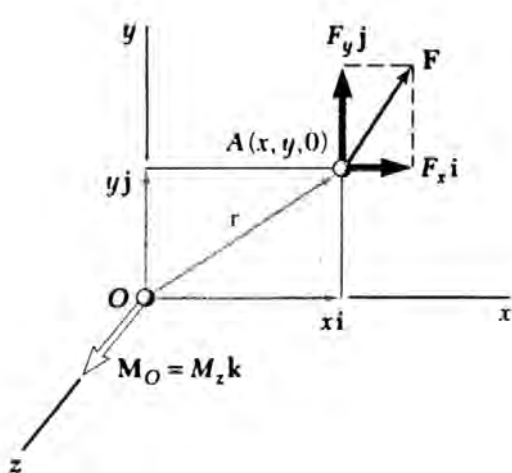
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F} = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$\begin{cases} x_{A/B} = x_A - x_B \\ y_{A/B} = y_A - y_B \\ z_{A/B} = z_A - z_B \end{cases}$$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

در مسائل دو بعدی :



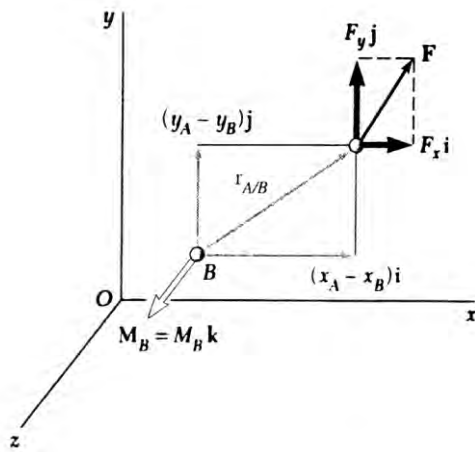
$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (x \vec{i} + y \vec{j}) \times (F_x \vec{i} + F_y \vec{j})$$

$$\vec{M}_O = (xF_y - yF_x) \vec{k}$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = xF_y - yF_x$$



$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

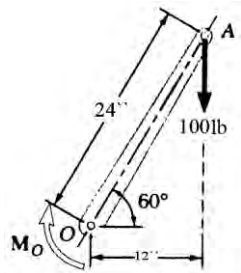
$$\vec{r}_{A/B} = (x_A - x_B) \vec{i} + (y_A - y_B) \vec{j}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_B = [(x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x] \vec{k}$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

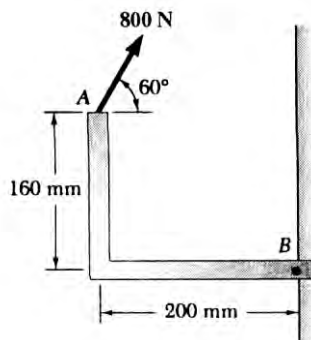


مثال: $M_o = ?$

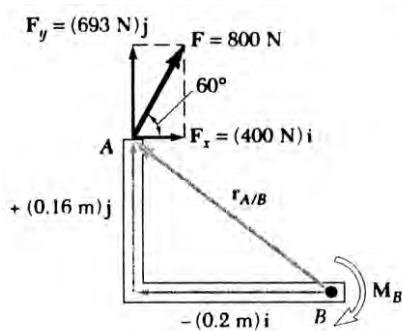
$$M = rF \sin \theta = Fd$$

$$= (100)(24 \sin 30^\circ) = (100)(12)$$

$$M = 1200 \text{ (lb.inch)} \quad \curvearrowright$$



مثال: $M_B = ?$



$$\vec{M} = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{A/B} = -0.2 \vec{i} + 0.16 \vec{j} \quad (\text{m})$$

$$\vec{F} = (800 \cos 60^\circ) \vec{i} + (800 \sin 60^\circ) \vec{j}$$

$$= 400 \vec{i} + 693 \vec{j} \quad (\text{N})$$

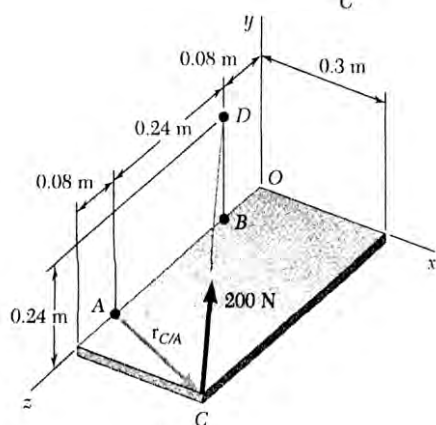
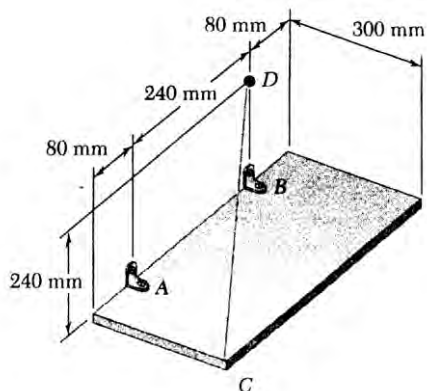
$$\vec{M}_B = [-0.2 \vec{i} + 0.16 \vec{j}] \times [400 \vec{i} + 693 \vec{j}]$$

$$= -138.6 \vec{k} - 64 \vec{k} = -202.6 \vec{k} \quad (\text{N.m})$$

$$M = 202.6 \text{ (N.m)} \quad \curvearrowright$$

مثال:

یک صفحه توسط دو لولا در نقطه A و B و یک سیم CD نگه داشته شده است. در سیم CD اگر نیروی کشش برابر با 200 N باشد، بدست آورید ممان آن نیرو را از طرف C حول نقطه A.



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{C/A} = A\vec{C} = -0.3\vec{i} + 0.08\vec{k}$$

$$\vec{F} = F \hat{\lambda}_{CD} = (200) \frac{C\vec{D}}{CD}$$

$$C\vec{D} = -0.3\vec{i} + 0.24\vec{j} - 0.32\vec{k} \quad (m)$$

$$CD = \sqrt{(-0.3)^2 + (0.24)^2 + (-0.32)^2} = 0.50 \quad (m)$$

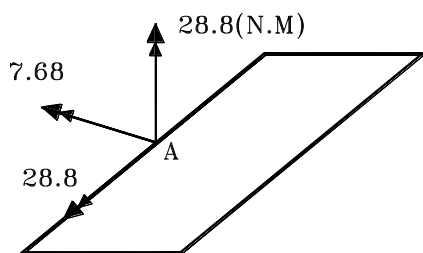
$$\vec{F} = \frac{200}{0.5} [-0.3\vec{i} + 0.24\vec{j} - 0.32\vec{k}] = -120\vec{i} + 96\vec{j} - 128\vec{k} \quad (N)$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F} = (0.3\vec{i} + 0.08\vec{k}) (-120\vec{i} + 96\vec{j} - 128\vec{k})$$

$$= (0.3)(96)\vec{k} + (0.3)(-128)(-\vec{j}) + (0.08)(-120)\vec{j} + (0.08)(96)(-\vec{i})$$

$$\vec{M}_A = -7.68\vec{i} + 28.8\vec{j} + 28.8\vec{k} \quad (N.m)$$

راه حل دوم:



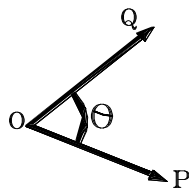
$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = -7.68\vec{i} + 28.8\vec{j} + 28.8\vec{k} \quad (N.m)$$

حاصلضرب عددی دو بردار

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta$$

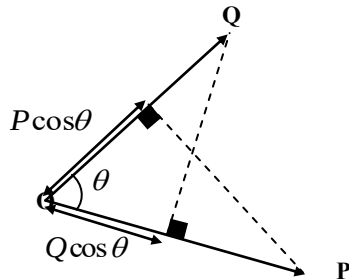


$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{P} \cdot (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \cdot \vec{Q}_1 + \vec{P} \cdot \vec{Q}_2$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \cdot (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k})$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$



$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

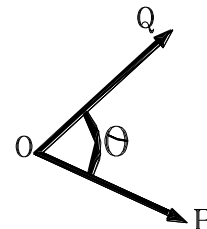
$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

زاویه ای که دو بردار با هم دارند



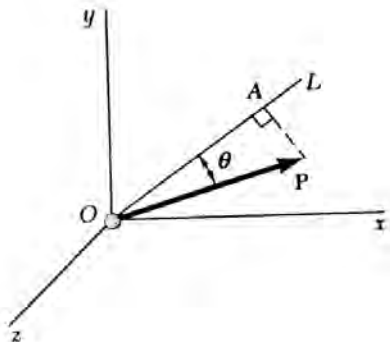
$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

$$\vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$

تصویر یک بردار بر روی یک محور :



تصویر بردار P روی محور L

$$P_{OL} = P \cos \theta$$

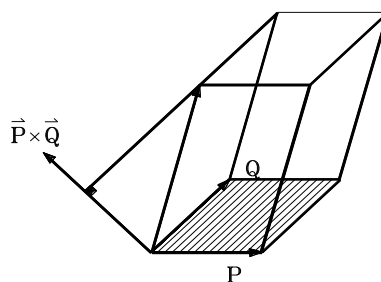
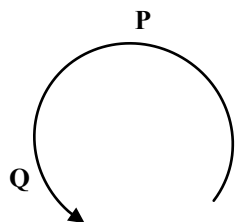
$$P_{OL} = \vec{P} \cdot \vec{\lambda} = P \lambda \cos \theta = P (1) \cos \theta = P \cos \theta$$

یا

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z$$

$$(\vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

ضرب مختلط سه بردار



$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \text{حجم منشور (مکعب)}$

$\vec{P} \times \vec{Q} = \text{مساحت متوازی الاضلاع}$

$$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \vec{P} \cdot (\vec{Q} \times \vec{S}) = \vec{Q} \cdot (\vec{S} \times \vec{P})$$

$$= -\vec{S} \cdot (\vec{Q} \times \vec{P}) = -\vec{P} \cdot (\vec{S} \times \vec{Q}) = -\vec{Q} \cdot (\vec{P} \times \vec{S})$$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \vec{S} \cdot \vec{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

$$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y (P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z (P_x Q_y - P_y Q_x)$$

$$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

ممان یک نیرو حول یک محور

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

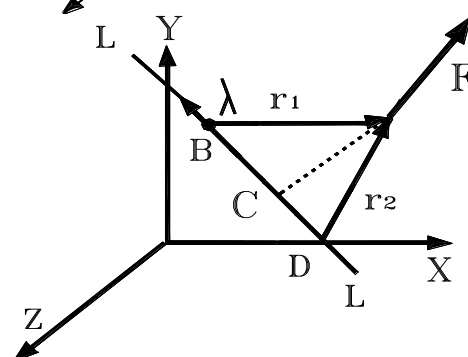
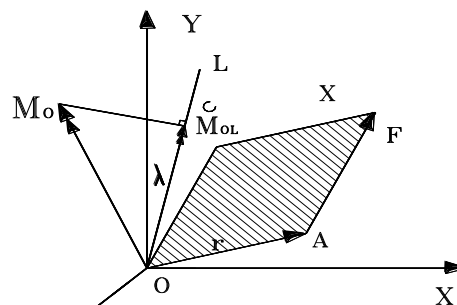
$$|\vec{M}_{OL}| = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_O$$

$$\vec{M}_{OL} = M_{OL} \vec{\lambda}$$

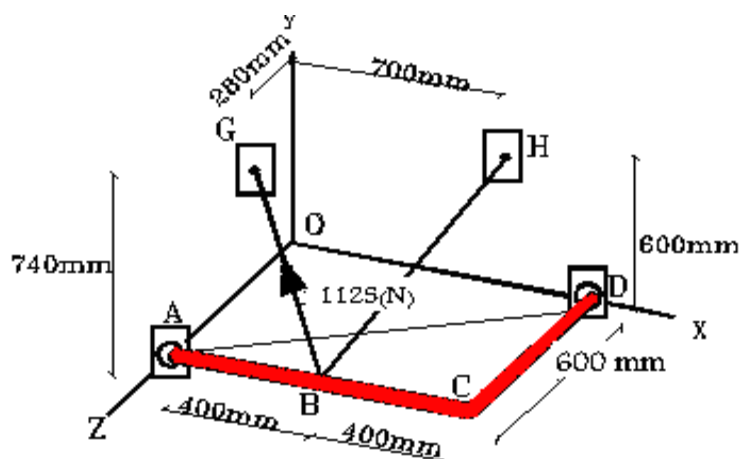
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_{LL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_B = \vec{\lambda}_1 \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F})$$

$$M_{LL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_D = \vec{\lambda}_2 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F})$$



مثال: مماس نیروی وارد شده در طناب BG را در نقطه B حول محور AD بدست آورید .



$$\vec{AD} = 0.8\vec{i} - 0.6\vec{k} \quad (m) \quad , \quad |AD| = 1.00 \, m$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\vec{AD}}{|AD|} = 0.8\vec{i} - 0.6\vec{k} \quad \vec{r}_{B/A} = 0.4\vec{i}$$

$$\vec{BG} = -0.4\vec{i} + 0.74\vec{j} - 0.32\vec{k} \quad (m) \quad , \quad |BG| = 0.9 \, m$$

$$\vec{\lambda}_{BG} = \frac{\vec{BG}}{|BG|} \Rightarrow \vec{F}_{BG} = F_{BG} \frac{\vec{BG}}{|BG|} = 1125 \left(\frac{-0.4\vec{i} + 0.74\vec{j} - 0.32\vec{k}}{0.9} \right)$$

$$\vec{F}_{BG} = -500\vec{i} + 925\vec{j} - 400\vec{k}$$

$$\vec{M}_{AD} = \vec{\lambda}_{AD} \cdot (\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_{BG}) = \begin{vmatrix} 0.8 & 0 & -0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ -500 & 925 & -400 \end{vmatrix} = -222 \, (N \cdot m)$$

مثال: اگر $\vec{P} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{Q} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ و $\vec{S} = 7\vec{i} - \vec{j} + s_z\vec{k}$ باشند. s_z را طوری بدست آورید که هر سه بردار در یک صفحه قرار گیرند .

برای اینکه هر سه بردار در یک صفحه قرار گیرند ، لازم است که

$$\vec{P} \cdot (\vec{Q} \times \vec{S}) = 0$$

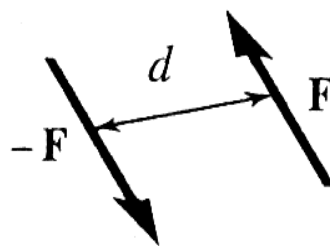
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & -1 & s_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16s_z + 70 - 6 - 84 - 20 + 4s_z = 0$$

$$20s_z - 40 = 0$$

$$\boxed{s_z = 2}$$

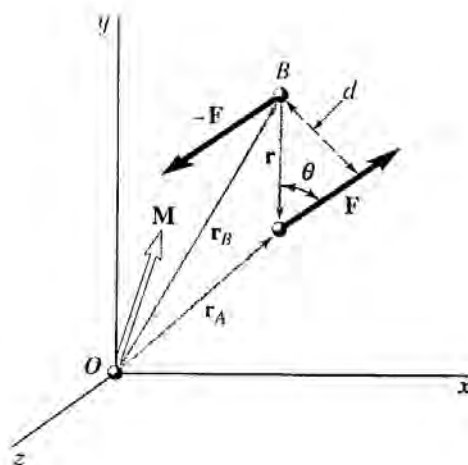
ممان یک کوپل

به مجموعه دو نیروی F و $-F$ که دارای یک مقدار باشند و در جهت مخالف هم بوده کوپل می گویند .



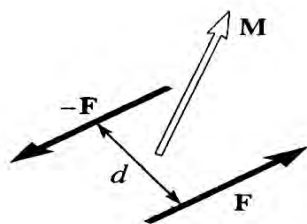
$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$$

$$M = F \cdot d$$



$$\vec{m} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

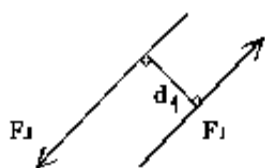
$$m = \vec{r} \times \vec{F}$$



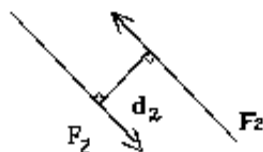
$$m = r F \sin \theta = F d$$

بردار کوپل یک بردار آزاد می باشد ، زیرا که ممان آن بستگی به نقطه خاصی ندارد و نسبت به هر نقطه همان مقدار ممان $F d$ را خواهد داشت .

دو کوپل موقعی برابر می باشند که مقدار و جهت ممان های حاصل از آنها با هم برابر باشند .

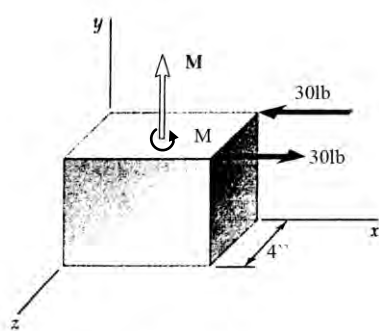


$$\vec{M}_1 = \vec{M}_2$$

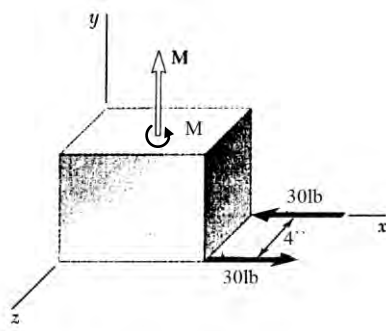


$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

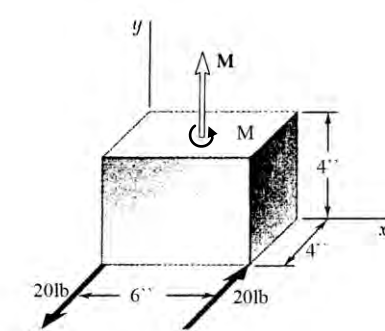
کوپل های معادل



$$M=30(4)=120(\text{lb.m})$$



$$M=30(4)=120(\text{lb.m})$$



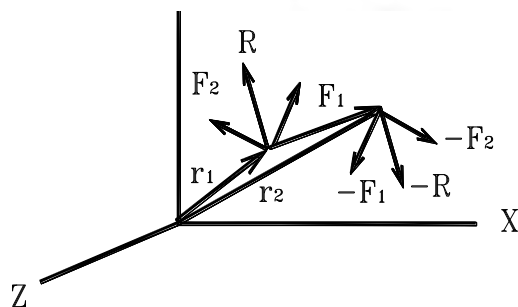
$$M=20(6)=120(\text{lb.m})$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

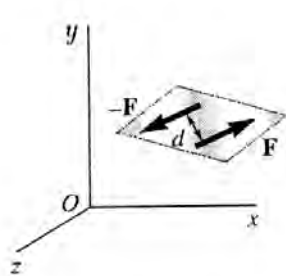
$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{R} + \vec{r}_2 \times (-\vec{R}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{R}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

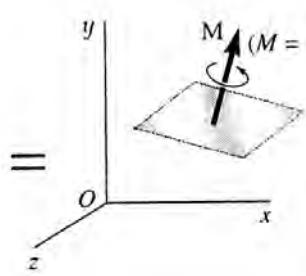
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$



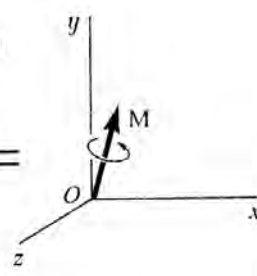
• کوپلی را بوسیله بردار نشان می دهند



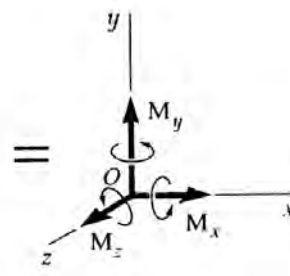
(الف)



(ب)



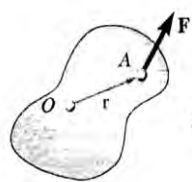
(ج)



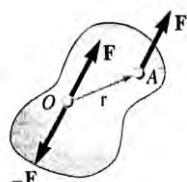
(د)

تجزیه یک نیرو به یک نیرو در یک نقطه و یک کوپل

نیروی F در نقطه A واقع شده و به دلیلی می خواهیم آن را به نقطه O منتقل کنیم .

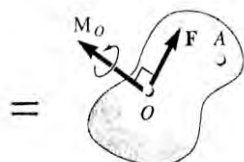


(الف)

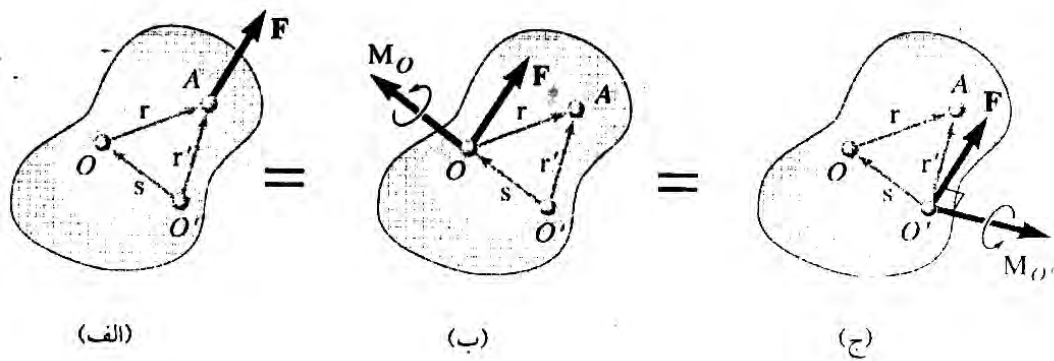


(ب)

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



(ج)



$$\vec{M}_O = \vec{M}_O + \vec{s} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

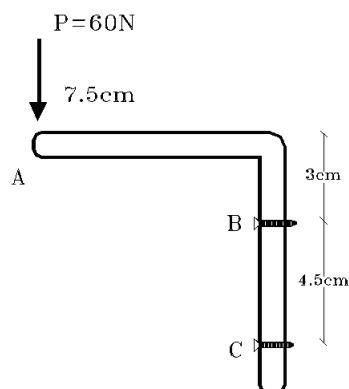
برعکس می توان یک سیستم نیرو - کوپل را به یک نیروی تنها تبدیل کرد . (البته نیرو و کوپل بصورت برداری بایستی بر هم عمود باشند).

مثال:

نیروی P در نقطه A داده شده است . این بخش توسط دو پیچ در نقاط B و C به دیوار نگهداشته شده است .

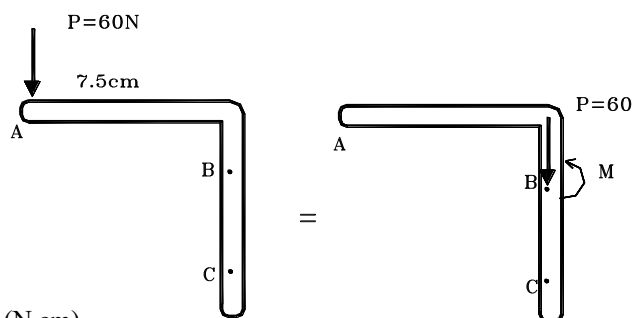
الف) نیروی فوق را با یک سیستم نیروی معادل در نقطه B جایگزین کنید .

ب) دو نیروی افقی در نقاط B و C بدست بیاورید که معادل کوپل بند الف باشد.



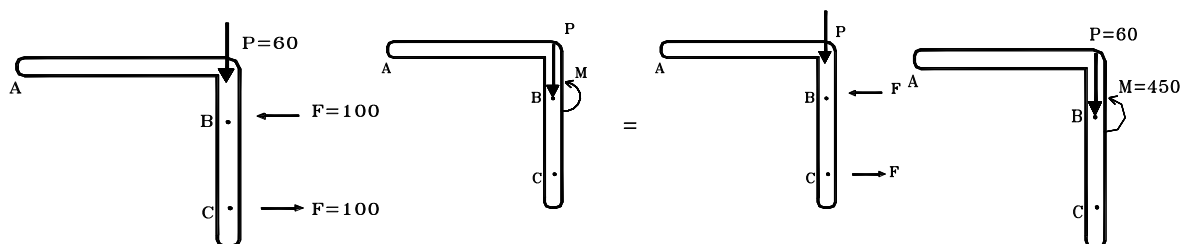
حل:

الف)



ب)

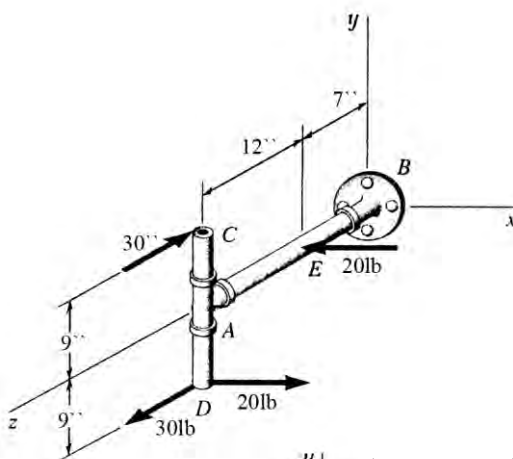
$$M = P(7.5) = 60(7.5) = 450 \text{ (N.cm)}$$



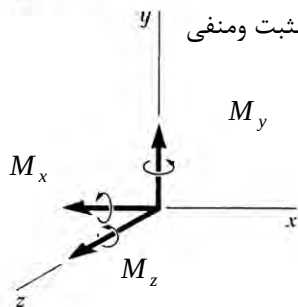
$$F(4.5)=M$$

$$F=450/4.5=100 \text{ (N)}$$

مثال: بدست آورید مولفه های یک کوپل معادل دو کوپل در مسئله زیر را :



حل: در نقطه A دو نیرو را که مقدار آنها 20 پوند است ، قرار می دهیم باعلامت مثبت و منفی

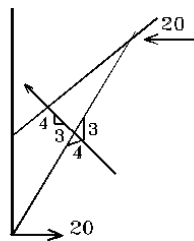
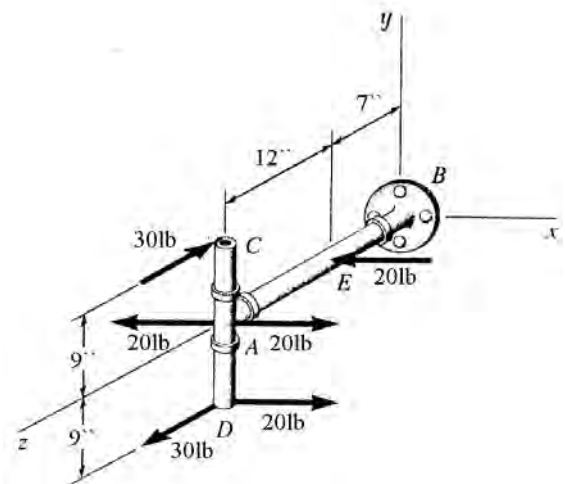


$$\text{کوپل در صفحه yz} \Rightarrow M_x = -30 (18) = -540 \text{ (lb.in)}$$

$$\text{کوپل در صفحه xz} \Rightarrow M_y = 20 (12) = 240 \text{ (lb.in)}$$

$$\text{کوپل در صفحه xy} \Rightarrow M_z = 20 (9) = 180 \text{ (lb.in)}$$

$$\vec{M} = -540\vec{i} + 240\vec{j} + 180\vec{k} \quad (\text{lb.in})$$



راه دوم: می توان ممان تمام نیروها را در یک نقطه دلخواه مثل نقطه D بدست آورد .

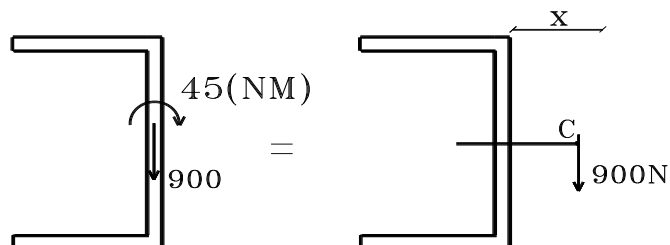
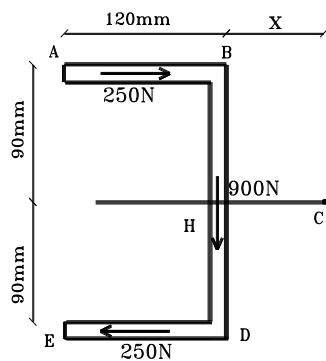
$$\vec{M} = \vec{M}_0 = (18\vec{j}) \times (-30\vec{k}) + (9\vec{j} - 12\vec{k}) \times (-20\vec{i})$$

$$\vec{M} = -540\vec{i} + 240\vec{j} + 180\vec{k} \quad (\text{lb.in})$$

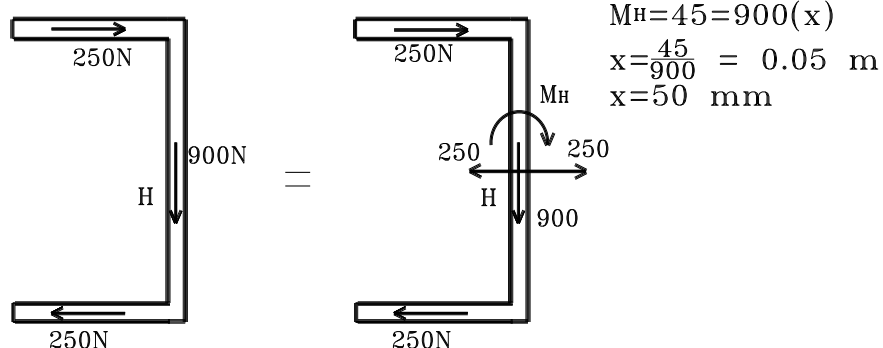
مثال: نیروهای برشی وارد شده بر سطح این مقطع توسط سه نیرو در بالها و جان نشان داده شده اند .

الف) این نیروها را با یک نیرو و کوپل در نقطه H جایگزین کنید .

ب) این نیروها و کوپل را با یک نیرو در نقطه C به فاصله X جایگزین کنید و X را بدست آورید .



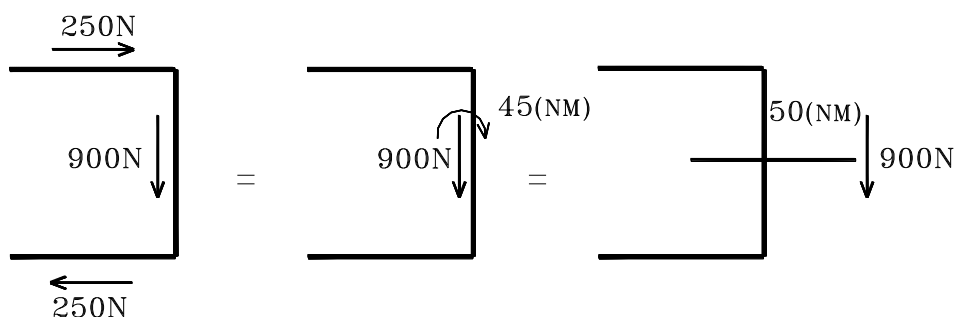
$$M_H = 250(0.18) = 45 \text{ (N.M)}$$



$$M_H = 45 = 900(x)$$

$$x = \frac{45}{900} = 0.05 \text{ m}$$

$$x = 50 \text{ mm}$$



سیستم نیروهای معادل

دو سیستم موقعی معادل یکدیگرند که مجموع نیروها با هم برابر باشند و هم ینطور مجموع ممان های حاصل از نیروها در یک نقطه با هم برابر باشند .

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}'$$

$$\sum \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O'$$

سیستم F_x, F_y, F_z

سیستم F'_x, F'_y, F'_z

$$\sum F_x = \sum F'_x, \quad \sum F_y = \sum F'_y, \quad \sum F_z = \sum F'_z$$

$$\sum M_x = \sum M'_x, \quad \sum M_y = \sum M'_y, \quad \sum M_z = \sum M'_z$$

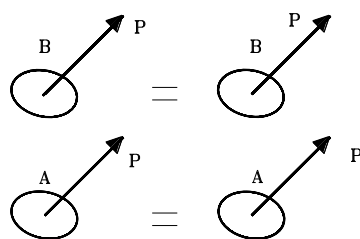
سیستم نیروهای هم ارز

اگر دو سیستم با نیروهای مختلف بر یک جسم سخت اثر کنند و مقدار برآیند آن ها و همینطور ممان های آنها حول یک نقطه برابر باشند با هم در آن سیستم هم ارز خواهند بود .

$$\sum \vec{R} = \sum \vec{R}'$$

$$\sum \vec{M}_o = \sum \vec{M}'_o$$

در حقیقت دو سیستم هم ارز بر روی یک جسم سخت حتماً معادل خواهند بود . ولی آن را نمی توان برای یک سری سیستم جرم ها یا ذرات بسط داد . یعنی اینکه اگر بجای یک جسم سخت یک سری از اجسام باشند و برآیند نیروهای اعمال شده روی آنها برابر باشد و همینطور ممانهای آنها حول یک نقطه ، آن دو سیستم نیرو را می توان هم ارز نامید ولی نمی توان معادل نامید .



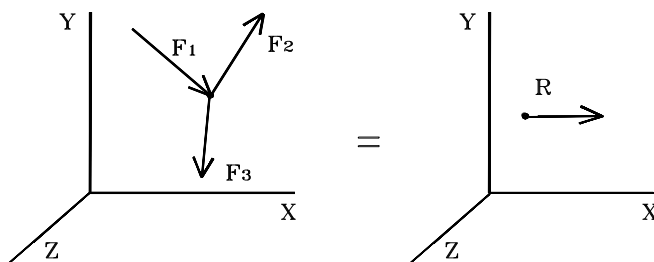
$$\sum \vec{R} = \sum \vec{R}'$$

$$\sum \vec{M}_o = \sum \vec{M}'_o$$

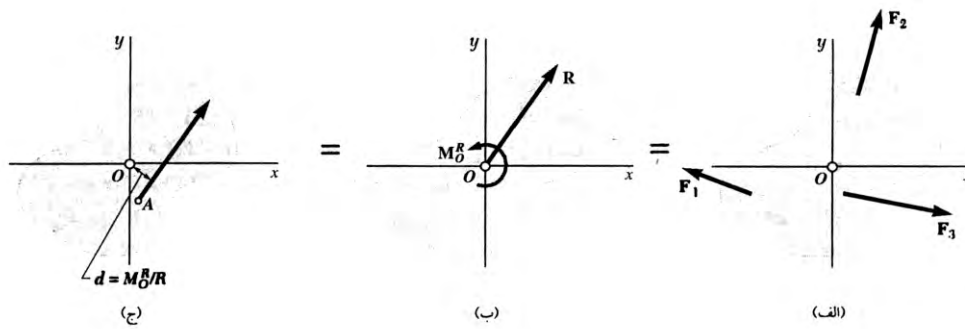
تبدیل یک سیستم نیرو به حداقل ممکنه

قبلاً نشان داده شد که یک سیستم نیرو را می توان به یک سیستم نیرو - کوپل تبدیل کرد . حال نشان خواهیم داد که چگونه یک سیستم را می توان تنها به یک سیستم نیرو تبدیل کرد (اما فقط در حالات ذیل)

- نیروها از یک نقطه عبور می کنند .



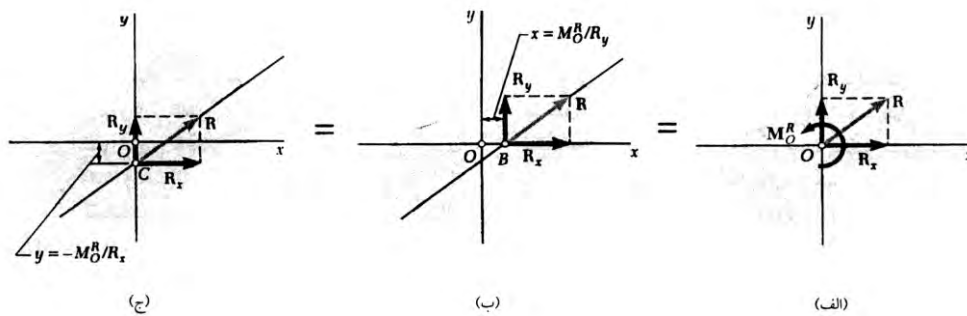
- نیروها در یک صفحه قرار دارند.



$$d = \frac{M_o}{R} \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_o = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$



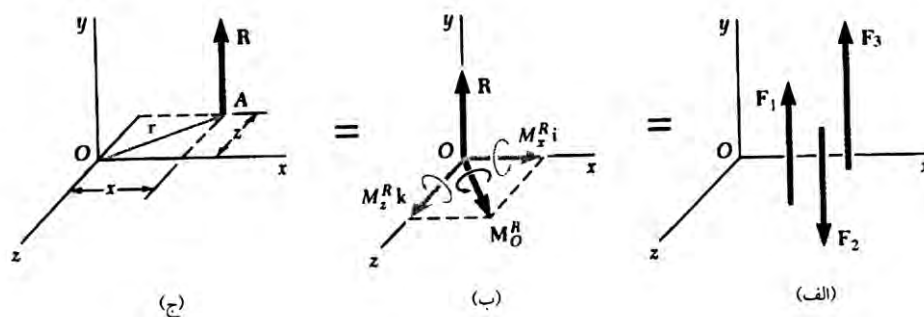
$$x R_y - y R_x = M_o$$

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$M_o = \sum M_o$$

- نیروها موازی اند



$$R = R_y = \sum F_y$$

$$M_x^R = \sum M_x$$

$$M_z^R = \sum M_z$$

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_o^R$$

$$(x \vec{i} + z \vec{k}) \times R_y \vec{j} = M_x^R \vec{i} + M_z^R \vec{k}$$

$$\begin{cases} -z R_y = M_x^R \\ x R_y = M_z^R \end{cases}$$

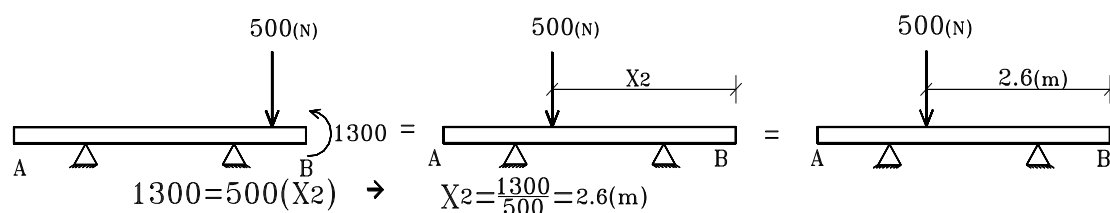
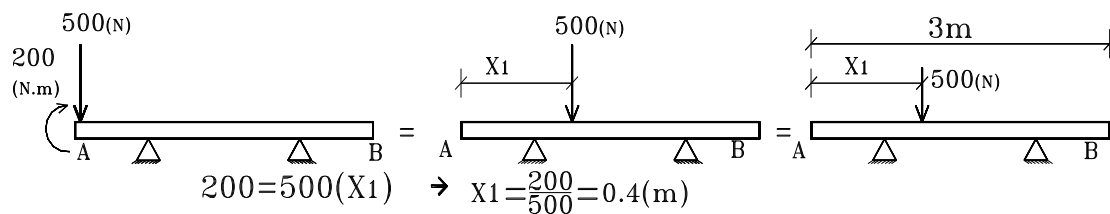
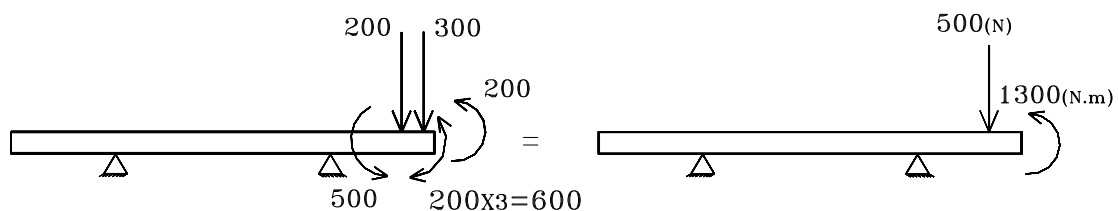
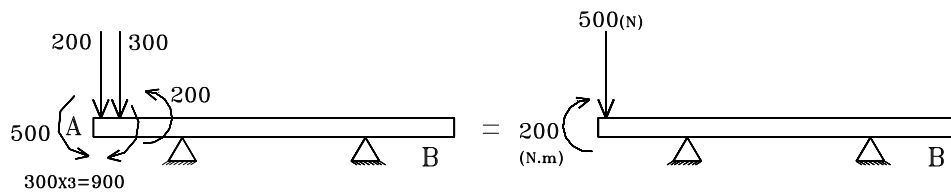
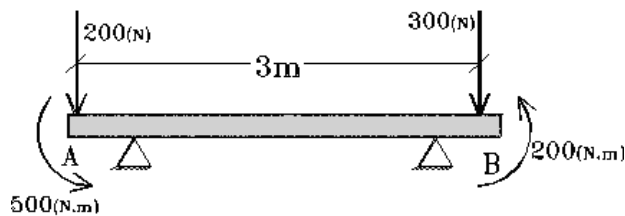
در حالت کلی در فضای سه بعدی، سیستم نیروها را می توان با یک سیستم نیرو ممان جایگزین کرد اما نمی توان آن را به حداقل رساند و به یک سیستم نیروها تبدیل کرد.

مثال: در تیر مقابل بدست آورید

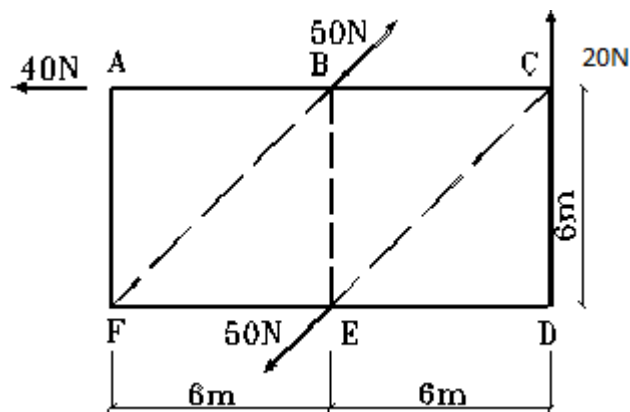
الف) سیستم معادل نیروهای مقابل در نقطه A بصورت نیرو - کوپل

ب) سیستم معادل نیروهای مقابل در نقطه B بصورت نیرو - کوپل

ج) سیستم معادل بصورت یک نیرو آنها



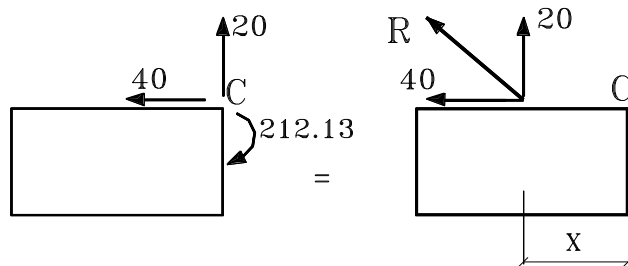
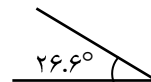
مثال: در صفحه $6m \times 12m$ مقابل که تحت اثر چهار نیرو قرار گرفته است مطلوبست برآیند تمام چهار نیرو و محل اثر آن. 20



$$\vec{R} = -40\vec{i} + 20\vec{j} \Rightarrow R = 44.7 \text{ (N)}$$

$$\vec{M}_C = \vec{r}_{B/C} \times \vec{F} + 0 = -6\vec{i} \times 50 (\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j})$$

$$\vec{M}_C = -212.13 \vec{k} \text{ (N.m)}$$

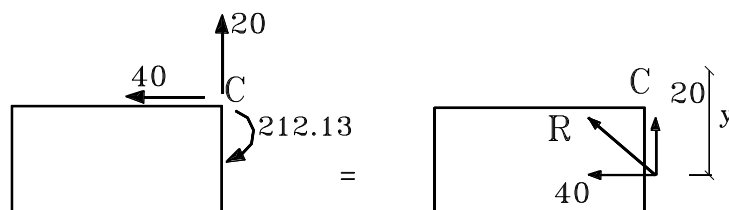


تقاطع با خط AC

$$\vec{M}_C = -x\vec{i} \times 20\vec{j}$$

$$-212.13\vec{k} = -20x\vec{k}$$

$$x = 10.61 \text{ m}$$



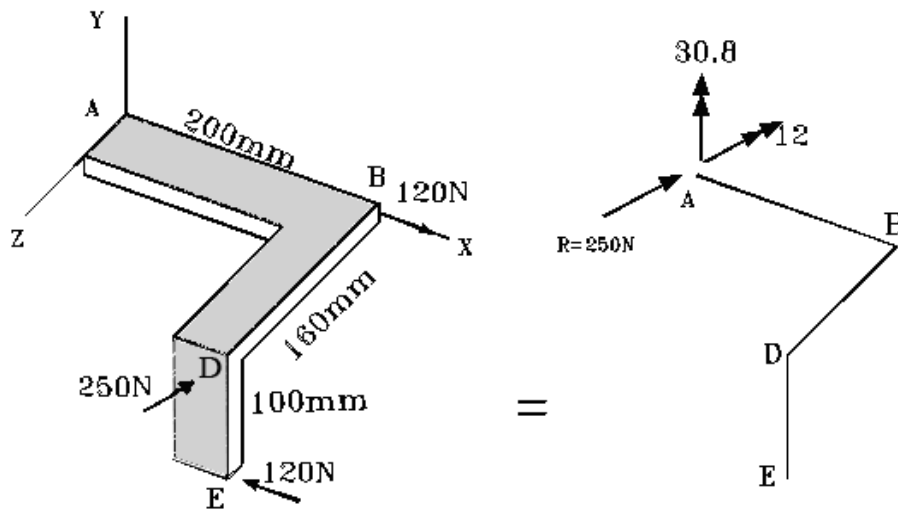
تقاطع با خط CD

$$\vec{M}_C = -y\vec{i} \times -40\vec{i}$$

$$-212.13\vec{k} = -40y\vec{k}$$

$$y = 5.30 \text{ m}$$

مثال: مطلوبست سیستم معادل نیرو در نقطه A.

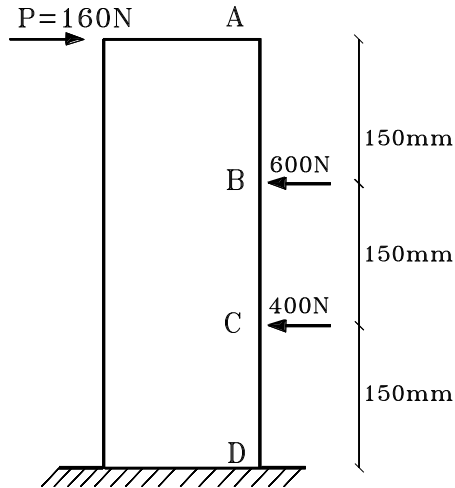


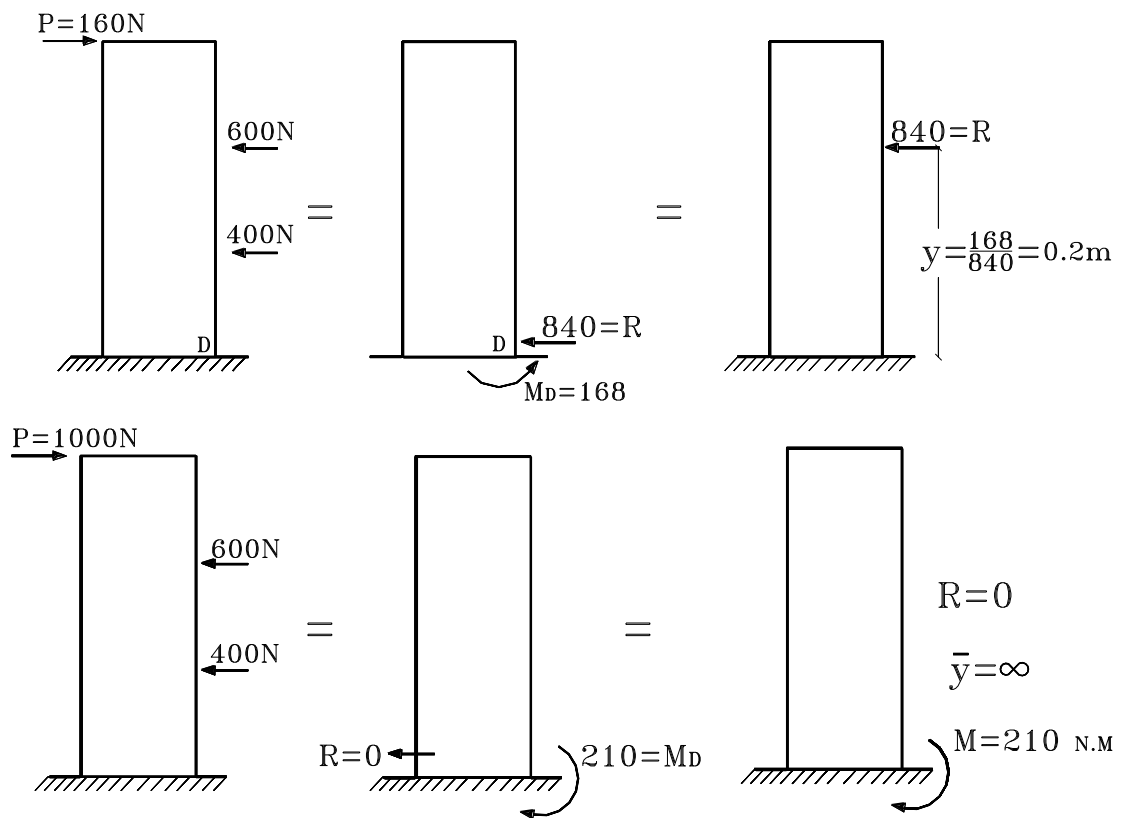
$$\vec{R} = 120 \vec{i} - 120 \vec{i} - 250 \vec{k} = -250 \vec{k}$$

$$\vec{M}_A^R = -0.2 \vec{i} \times (-250 \vec{k}) + [-0.1 \vec{j} + 0.16 \vec{k}] \times (-120 \vec{i}) = 50 \vec{j} - 12 \vec{k} - 19.2 \vec{j}$$

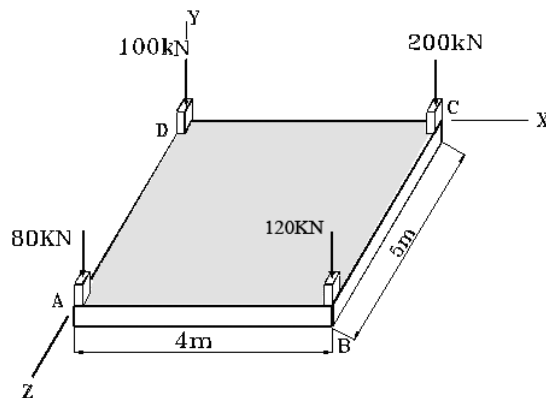
$$\vec{M}_A^R = 30.8 \vec{j} - 12 \vec{k}$$

مثال: مطلوبست برآیند نیروهای مقابل و سیستم معادل بصورت واحد و محل اثر آن.



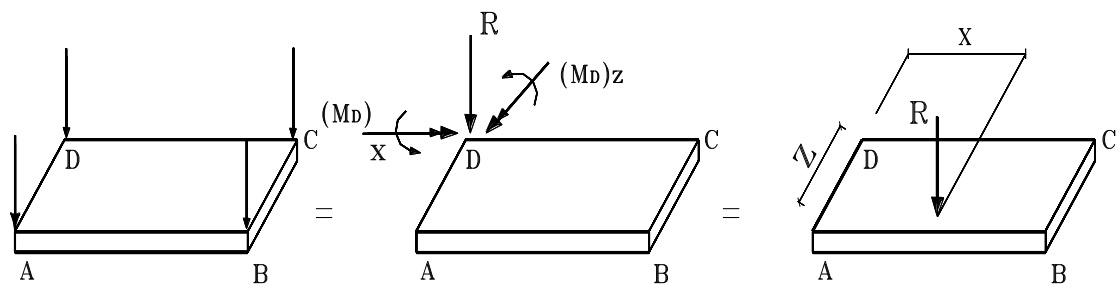


مثال: مطلوبست نیروی معادل چهار نیروی وارده بر فونداسیون گسترده (MAT) به صورت نیروی واحد و مطلوبست محل اثر آن.

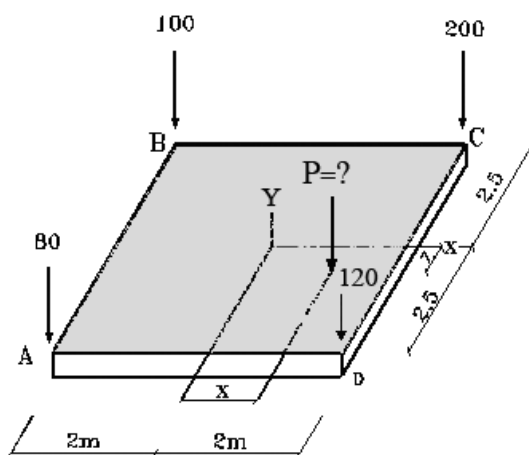


سیستم نیروی معادل در نقطه D

$$\begin{aligned}\vec{R} &= -80\vec{j} - 120\vec{j} - 200\vec{j} - 100\vec{j} = -500\vec{j} \quad (\text{kN}) \\ \vec{M}_D^R &= 5\vec{k} \times (-80\vec{j}) + [4\vec{i} + 5\vec{k}] \times (-120\vec{j}) + 4\vec{i} \times (-200\vec{j}) \\ \vec{M}_D^R &= 1000\vec{i} - 1280\vec{k} = -500x\vec{k} + 500z\vec{i} \\ 1000 &= 500z \Rightarrow z = 2 \quad (\text{m}) \\ 1280 &= -500x \Rightarrow x = 2.66 \quad (\text{m})\end{aligned}$$



مثال: در مثال قبلی مطلوبست کمترین نیرویی که به عنوان نیروی اضافه می تواند بر سیستم گسترده وارد گردد که برآیند چند نیرو از برآیند پنج نیرو از مرکز آن زاویه بگذرد ، همچنین مطلوبست محل اثر آن نیرو .
 $P=?$ ($x=?$, $z=?$)



اگر P نیروی اضافه باشد برای آنکه محل برآیند پنج نیرو در مرکز زاویه باشد ، خواهیم داشت $\vec{M}_O^R = 0$

$$\sum \vec{M}_O^R = \sum \vec{r} \times \vec{F} = (-2\vec{i} + 2.5\vec{k}) \times (-80\vec{j}) + (2\vec{i} + 2.5\vec{k}) \times (-120\vec{j}) + (2\vec{i} - 2.5\vec{k}) \times (-200\vec{j}) + (-2\vec{i} - 2.5\vec{k}) \times (-100\vec{j}) + (x\vec{i} + z\vec{k}) \times (-P\vec{j}) = 0$$

$$(200 + 300 - 500 - 250 + Pz)\vec{i} + (160 - 240 - 400 + 200 - Px)\vec{k} = 0$$

$$Pz = 250 \Rightarrow P = \frac{250}{z}$$

$$Px = -280 \Rightarrow P = \frac{-280}{x}$$

$$|x| \leq 2 \text{ (m)} \Rightarrow P \geq \frac{280}{2} = 140 \text{ (kN)}$$

$$|z| \leq 2.5 \text{ (m)} \Rightarrow P \geq \frac{250}{2.5} = 100 \text{ (kN)}$$

$$P = 140 \text{ kN}$$

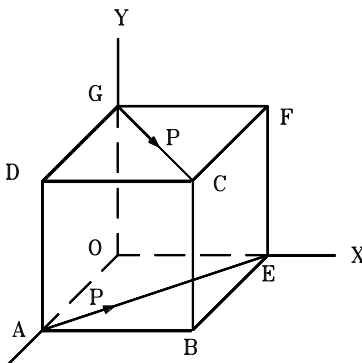
بنابراین حداقل نیروی وارده می باید $\Leftarrow$

$$P = 140 \text{ kN} \quad \text{قابل قبول است} \quad \begin{cases} 140z = 250 & \Rightarrow z = 1.786 \text{ (m)} \\ 140x = -280 & \Rightarrow x = -2 \text{ (m)} \end{cases}$$

روی لبه AD و 0.714 m از نقطه A.

$$\begin{cases} 100z = 250 & \Rightarrow z = 2.5 \text{ (m)} \\ 100x = -280 & \Rightarrow x = -2.8 \text{ (m)} \end{cases} \quad \text{قابل قبول نیست}$$

مثال: در سیستم نیروهای زیر ابتدا سیستم معادل آنها را در نقطه O بدست بیاورید و سپس سیستم معادل را بصورت آچار یا wrench بدست بیاورید.



$$\vec{R} = \frac{P}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{P}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{P}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{P}{\sqrt{2}} \vec{k} = \sqrt{2} P \vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^R &= a \vec{j} \times \left(\frac{P}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{P}{\sqrt{2}} \vec{k} \right) + a \vec{k} \times \left(\frac{P}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{P}{\sqrt{2}} \vec{k} \right) \\ &= \frac{Pa}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \end{aligned}$$

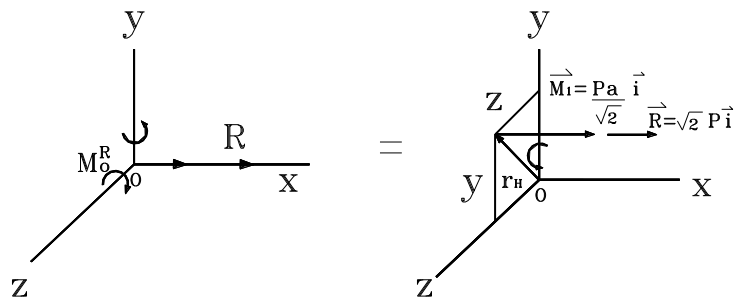
سیستم کوپل و نیرو در O

$$M_1 = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O^R}{R} = \frac{\sqrt{2} P \vec{i} \cdot \frac{Pa}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})}{\sqrt{2} p} = \frac{Pa}{\sqrt{2}}$$

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\frac{Pa}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} P} = \frac{a}{2}$$

محور آن آچار موازی محور x می باشد.

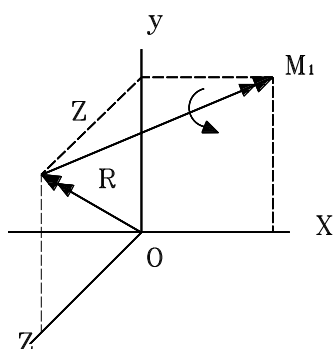
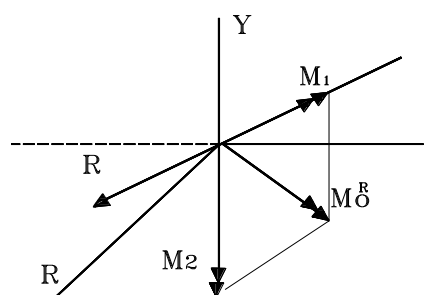
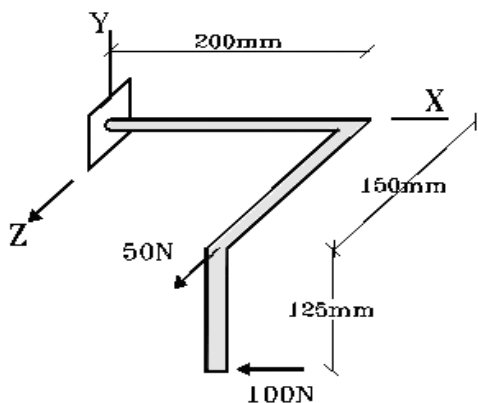
حال می بایستی که نقطه برخورد آن محور را با صفحه yz بدست آورد:



$$\begin{aligned}
 \vec{M}_O^R &= \vec{M}_1 + \vec{r}_H \times \vec{R} \\
 \frac{Pa}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) &= \frac{Pa}{\sqrt{2}}\vec{i} + (y\vec{j} + z\vec{k}) \times \sqrt{2}P\vec{i} \\
 &= \frac{Pa}{\sqrt{2}}\vec{i} - \sqrt{2}Py\vec{k} + \sqrt{2}Pz\vec{j} \\
 \left. \begin{aligned} -\frac{Pa}{\sqrt{2}} &= -\sqrt{2}Py \Rightarrow y = \frac{a}{2} \\ \frac{Pa}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2}Pz \Rightarrow z = \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow
 \end{aligned}$$

پس محور آچار (wrench) بایستی در نقطه $y = z = a/2$ با صفحه yz تقاطع پیدا کند .

مثال:



مطلوبست : الف) سیستم نیروی معادل در نقطه O
ب) سیستم نیروی آچاری (wrench)

$$\vec{R} = -100\vec{i} + 50\vec{k} \quad (N)$$

$$\vec{M}_O^R = (-0.125\vec{j} + 0.15\vec{k}) \times (-100\vec{i}) + (0.2\vec{i}) \times (50\vec{k}) \quad (\text{الف})$$

$$= -12.5\vec{k} - 15\vec{j} - 10\vec{j}$$

$$\vec{R} = -100\vec{i} + 50\vec{k} \quad (N)$$

$$\vec{M}_O^R = -25\vec{j} - 12.5\vec{k} \quad (N.m)$$

$$R = \sqrt{100^2 + 50^2} = 111.8 \quad (N)$$

$$\cos \theta_x = -\frac{100}{111.8} \Rightarrow \theta_x = 153.4^\circ$$

$$\cos \theta_z = -\frac{50}{111.8} \Rightarrow \theta_z = 63.4^\circ$$

$$\cos \theta_y = 0 \Rightarrow \theta_y = 90^\circ$$

ب)

$$M_1 = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O^R}{R} = \frac{(-100\vec{i} + 50\vec{k}) \cdot (-25\vec{j} - 12.5\vec{k})}{111.8} = \frac{50(-12.5)}{111.8}$$

$$M = -5.59 \quad (N.m)$$

$$\text{pitch} = p = \frac{M_1}{R} = \frac{-5.59}{111.8} = -0.05 \quad (m)$$

$$\vec{R} = -100\vec{i} + 50\vec{k}$$

$$\vec{M}_1 = \frac{M_1}{R} \vec{R} = -0.05 \vec{R} = 5\vec{i} - 2.6\vec{k}$$

محور آچار موازی با صفحه xz می باشد . می بایستی تقاطع آن با صفحه yz مشخص شود .

$$\vec{M}_O^R = \vec{r} \times \vec{R} + \vec{M}_1, \quad \vec{r}_D = y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$-25\vec{j} - 12.5\vec{k} = (y\vec{j} + z\vec{k}) \times (-100\vec{i} + 50\vec{k}) + 5\vec{i} - 2.5\vec{k}$$

$$-25\vec{j} - 12.5\vec{k} = 100y\vec{k} + 50y\vec{i} - 100z\vec{j} + 5\vec{i} - 2.5\vec{k}$$

$$0 = 50y + 5 \Rightarrow y = -0.1 \quad (m)$$

$$-25 = -100z \Rightarrow z = 0.25 \quad (m)$$

فصل چہارم

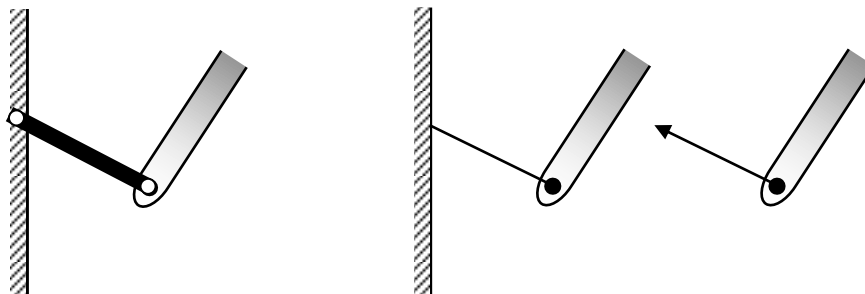
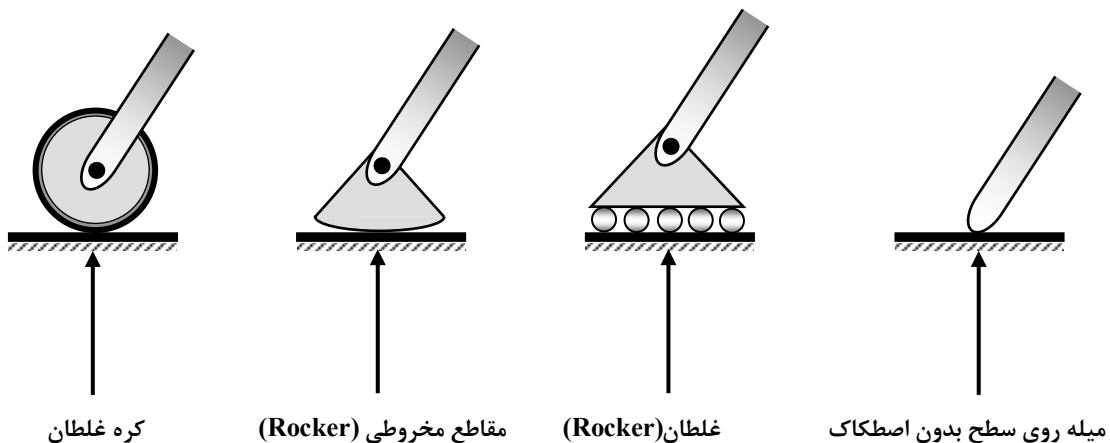
تعادل اجسام صلب

تعدادل جسم در صفحه دو بعدی:

$$\begin{array}{l} \text{جلوگیری از حرکت انتقالی} \\ \text{جلوگیری از حرکت دورانی} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \\ \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0 \end{array}$$

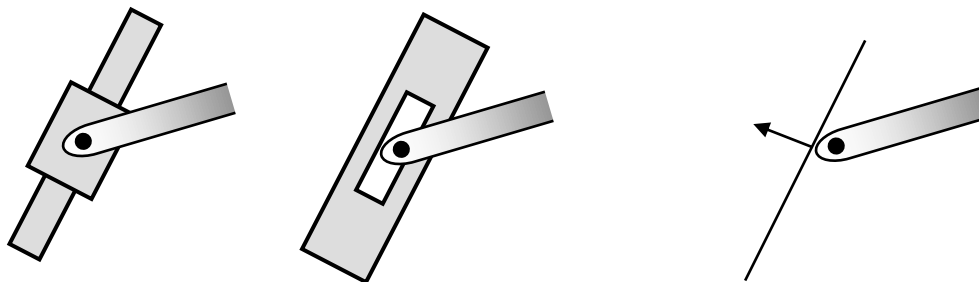
شرایط تکیه گاه های دو بعدی:

1) تکیه گاههایی که دارای یک عکس العمل در جهت مشخص هستند.
کابل تنها نیروی کششی را تحمل می کند.



بست کوتاه (short link)

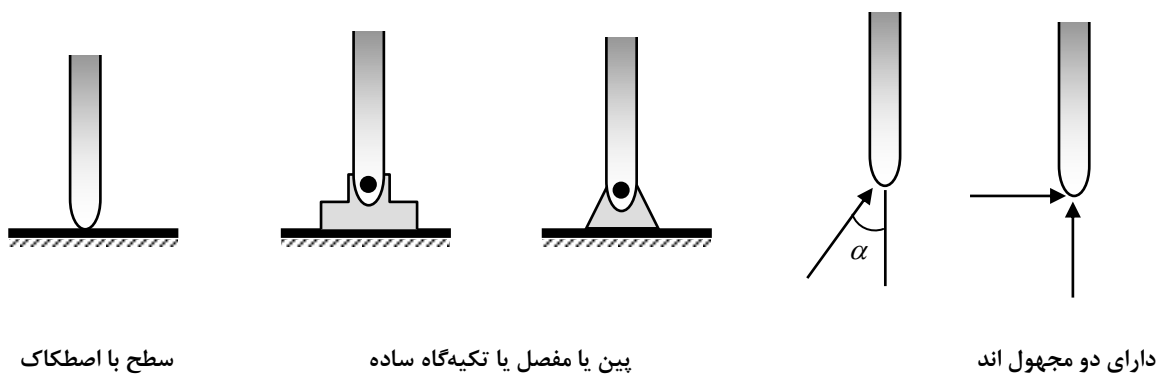
کابل کوتاه (short cable)



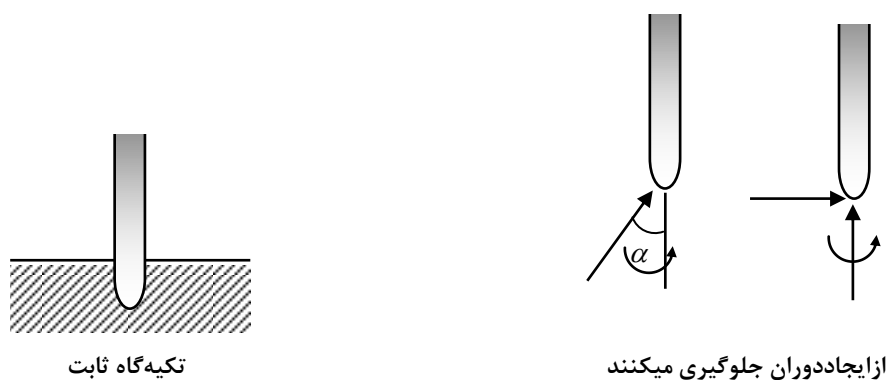
طوقه روی میله صیقلی

پین در شکاف صیقلی

2) تکیه گاههایی که دارای دو عکس العمل در جهت مشخص باشند (یا دارای یک عکس العمل و جهت نامشخص باشند).

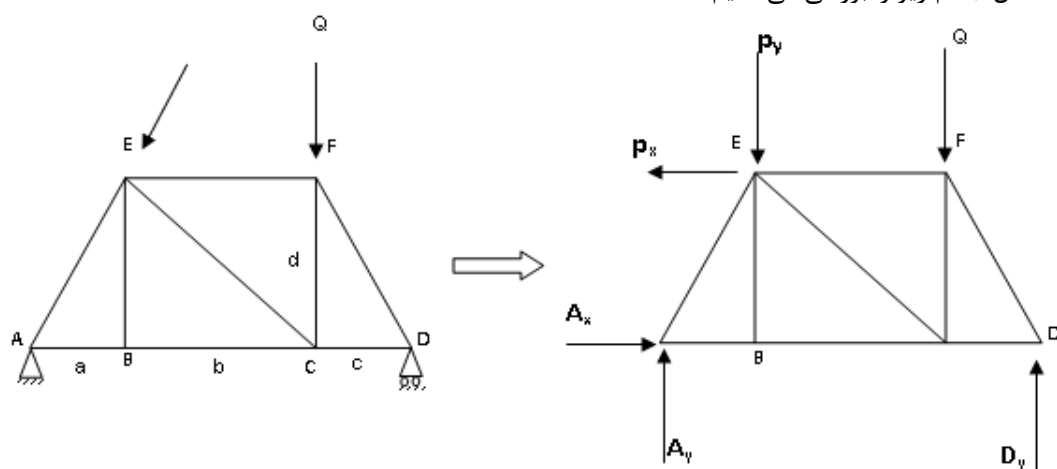


3) تکیه گاههایی که دارای سه عکس العمل می باشند.



تعداد یک جسم صلب دو بعدی:

مثال: تعداد جسم زیر را بررسی می کنیم



دیاگرام آزاد جسم

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow Px - Ax = 0$$

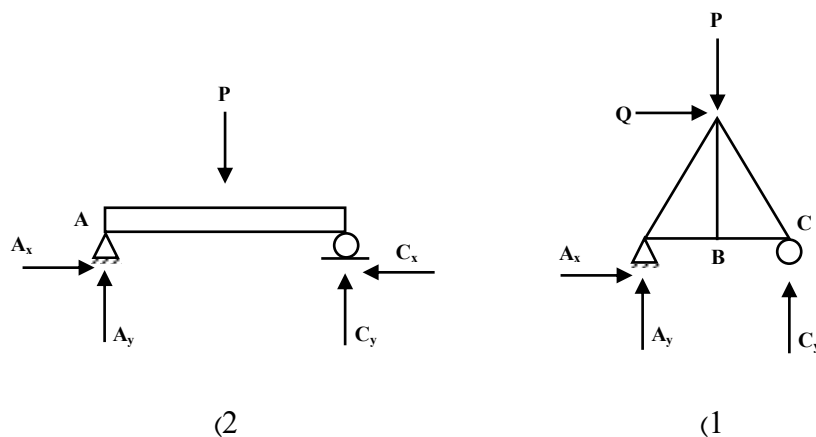
$$Ax = Px$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -Py + Ay - Q + By = 0$$

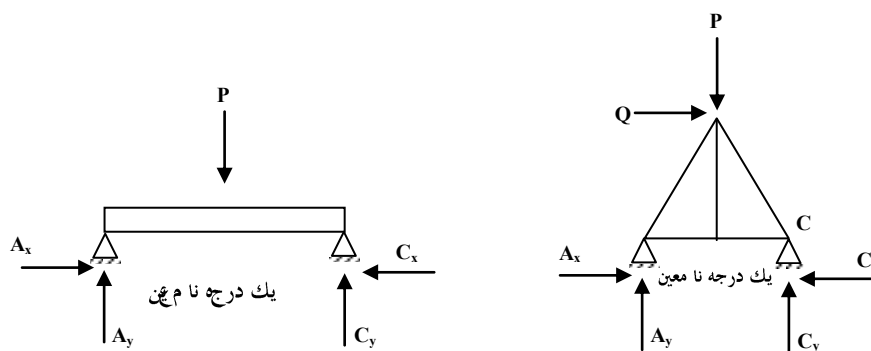
$$\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow -Py(a) - Q(a+b) - Px(d) + Dy(a+b+c) = 0$$

می توانستیم به جای استفاده از رابط $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0$ از مجموعه روابط $\sum F_x = 0, \sum M_B = 0, \sum M_A = 0$ یا از $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_B = 0$ استفاده کنیم.

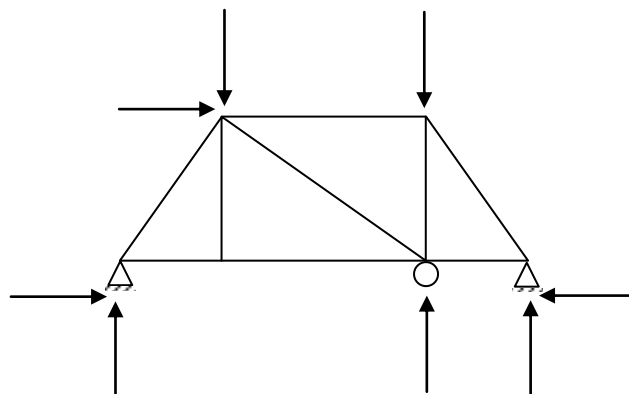
عکس العمل های نامعین:



- (1) سازه پایدار معین (سه معادل و سه مجهول)
 (2) سازه پایدار نامعین (یک درجه) (سه معادل و چهار مجهول)



سازه پایدار نامعین (یک درجه) (سه معادل و چهار مجهول)

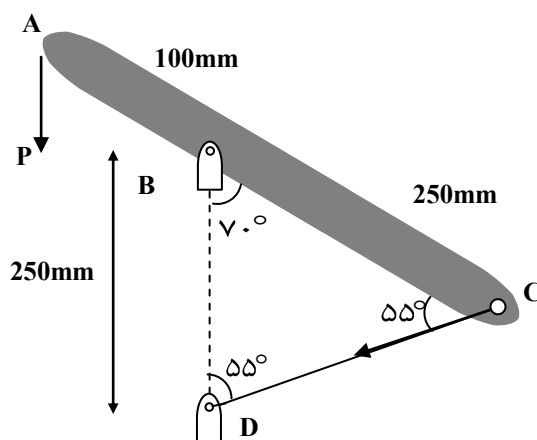


سازه پایدار نامعین (دو درجه) (سه معادل و پنج مجهول)

سازه ناپایدار:

اغلب به سازه هایی گفته می شود که نمی توانند از حرکت انتقالی یا دورانی جسم در یک یا چند جهت (بدلیل نحوه قرارگرفتن تکیه گاه در آنها) جلوگیری کنند. در اغلب این سازه ها هنگام محاسبه ی گشتاور نیروها، خط اثر نیروها از یک نقطه عبور کرده و در نتیجه لنگر صفر نمی شود.

مثال: مطلوب است عکس العمل در تکیه گاه B و نیروی کششی در کابل CD.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 0.1P \cos 20 - 0.25 \cos 35 T = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -B_x (0.25) + P(0.1 \cos 20) = 0$$

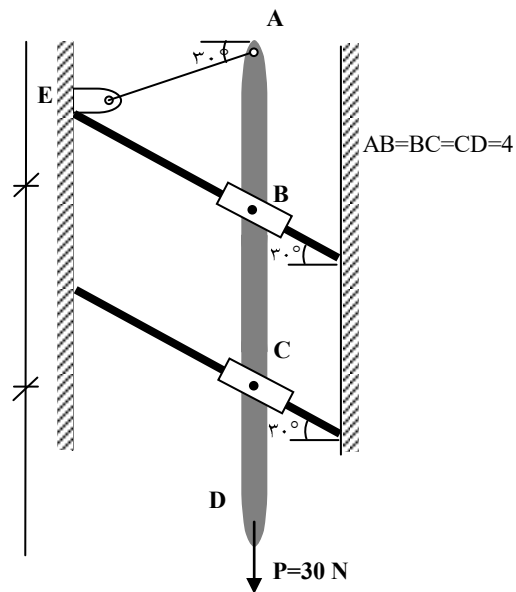
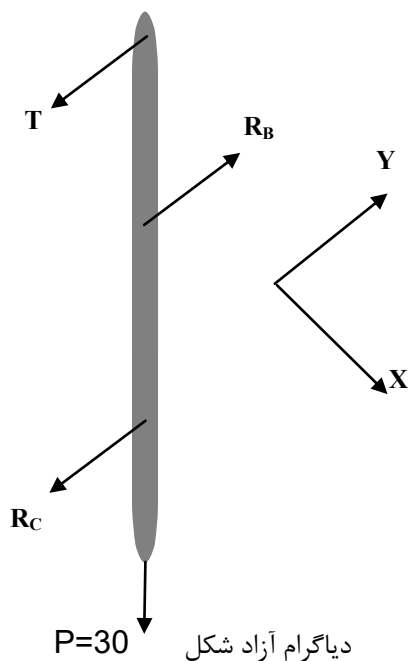
$$B_x = 150.3(N) \rightarrow$$

می توان با لنگر گرفتن نسبت به نقطه C، B_y را بدست آورد. یا راه آسانتر:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -P + B_y - T \sin 35 = 0$$

$$B_y = 505(N) \uparrow$$

مثال: مطلوب است عکس العمل B, C و کشش کابل در AE.



$$+\nearrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P \cos 60 - T \cos 60 = 0 \Rightarrow T = 30(KN)$$

$$+\curvearrowright \sum M_B = 0$$

$$T \cos 30(4) + R_C \sin 30(4) = 0$$

$$R_C = -52(KN)$$

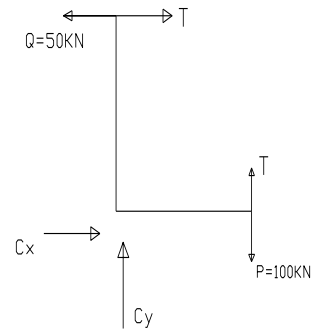
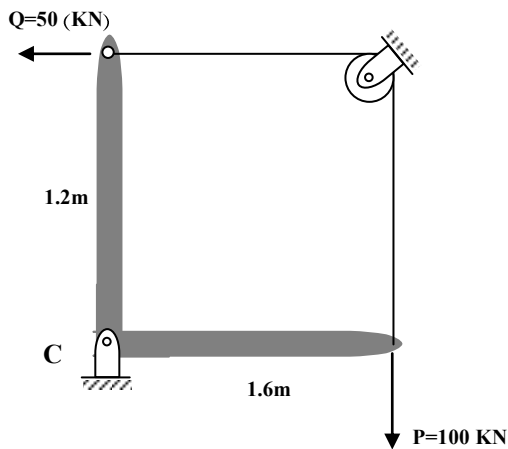
$$+\curvearrowright \sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$T \cos 30(8) - R_B \sin 30(4) = 0$$

$$R_B = 103.7(KN)$$

مثال: مطلوب است کشش در دو کابل

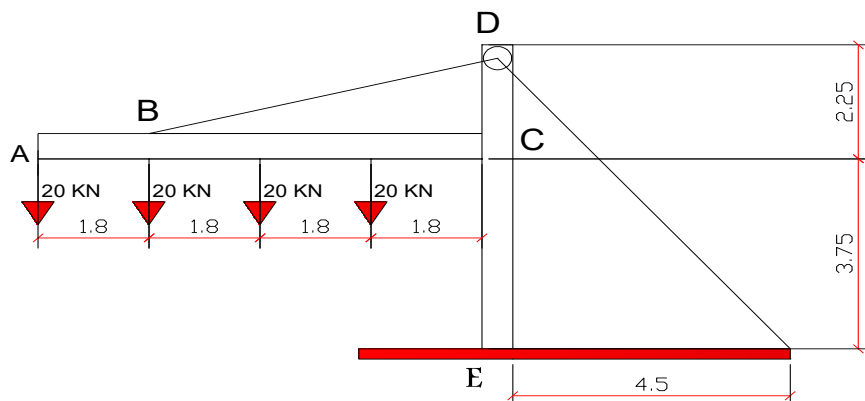
کشش در دو طرف کابل یک اندازه است. زیرا در قرقره داریم:

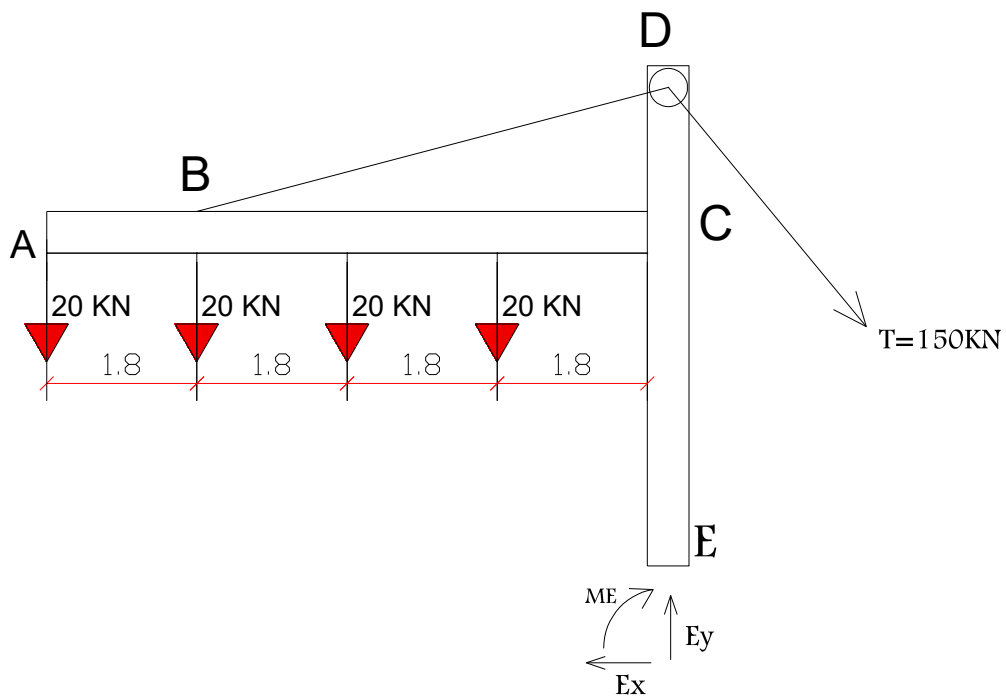


در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow 50 \cdot 1.2 - 1.2 \cdot T - 1.6 \cdot 100 + 1.6 \cdot T = 0 \\ &\Rightarrow T = 250 \text{ (KN)} \uparrow \end{aligned}$$

مثال: اگر نیروی کشش در کابل 150kN باشد مطلوب است عکس العمل ها در تکیه گاه D.





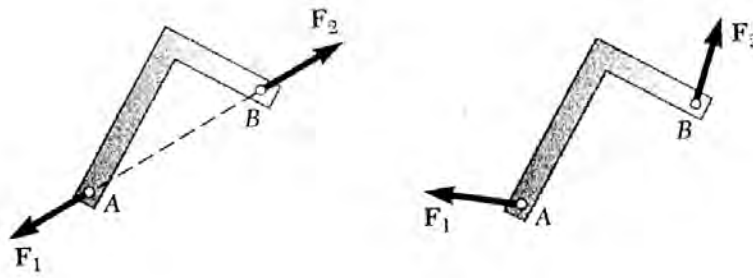
$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0 \\ -E_x + T\left(\frac{3}{5}\right) &= 0 \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E_x &= 90 \text{ kN} \leftarrow \\ \uparrow \sum F_y &= 0 \\ -4(20) - T\left(\frac{4}{5}\right) + E_y &= 0 \Rightarrow E_y = 200 \text{ kN} \uparrow \\ \sum M_E &= 0 \Rightarrow \\ -M_E + 20(1.8)(1+2+3+4) - 6T\left(\frac{3}{5}\right) &= 0 \\ \Rightarrow M_E &= -180 \text{ (kN.m)} \end{aligned}$$

تعدادل جسم تحت اثر دو نیرو

بعضی از اوقات یک جسم امکان دارد تحت اثر فقط دو نیرو قرار گیرد، در این حالت به آن جسم دو نیرویی می گویند . در این حالت دو نیرو می بایستی در یک راستا و مخالف جهت یکدیگر باشند.

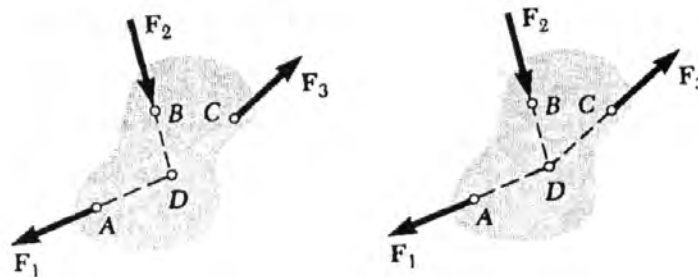


بنابراین دو نیرو باید در یک راستا و با هم برابر باشند.

$$\sum \vec{F} = 0, \sum \vec{M} = 0$$

تعداد جسم تحت اثر سه نیرو

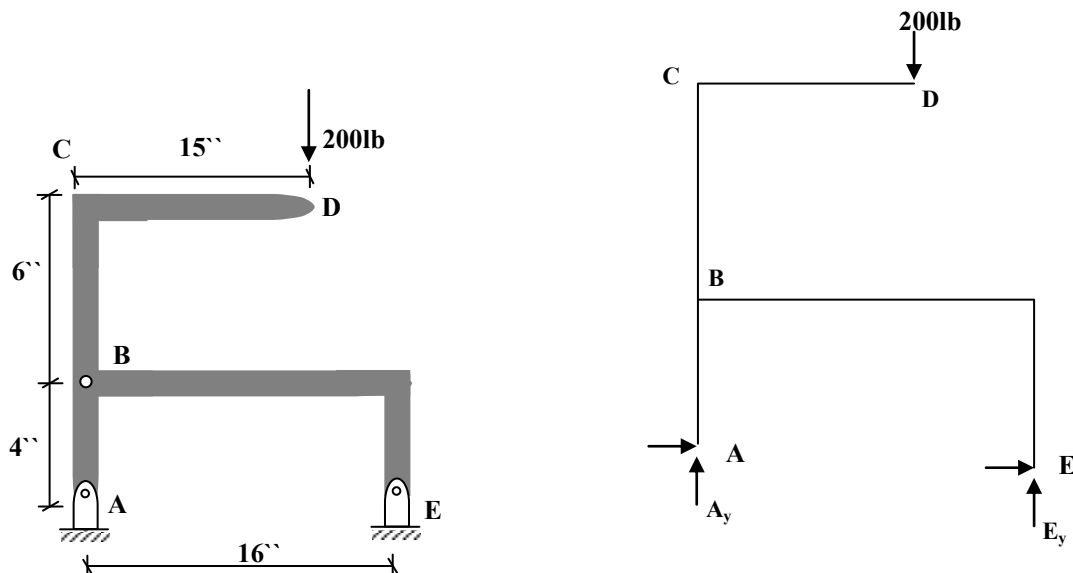
در بعضی از مواقع یک جسم امکان دارد تحت اثر سه نیرو قرار گیرد در این حالت به آن جسم سه نیرویی می گویند در این حالت سه نیرو می بایستی از یک نقطه عبور کنند و یا با هم موازی باشند.



$$\sum \vec{F} = 0, \sum \vec{M} = 0$$

اگر نیروها با هم موازی نباشند باید سه نیرو هم‌رس باشند تا جسم در تعادل باشد. با استفاده از قانون سینوس ها می توان مقادیر محصول را بدست آورد.

مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاه در A و E



با گشتاور گرفتن نسبت به G به آسانی داریم:

$$A_y = E_y = 100(N)$$

برایند سه نیروی E.A.P برابر صفر و این سه نیرو در H هم‌رسند.

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{GE}{GT} \text{ داریم:}$$

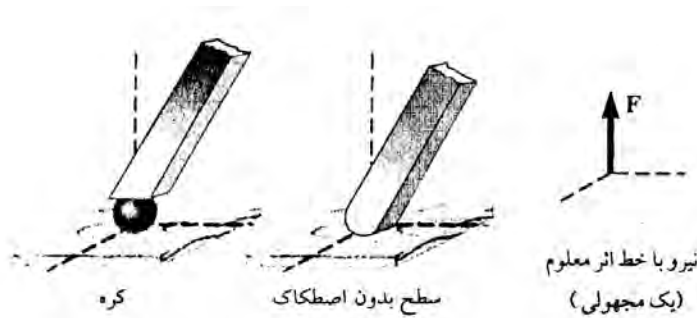
تعداد سه بعدی:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$$

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$$

تکیه گاههای سه بعدی

(1) تکیه گاههایی با یک عکس العمل:



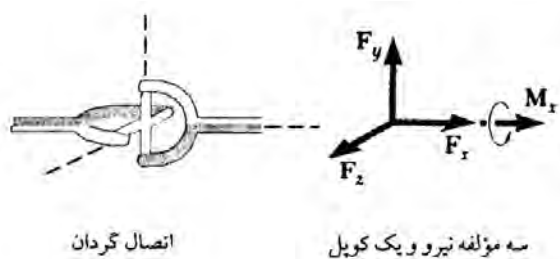
(2) تکیه گاههای با دو عکس العمل



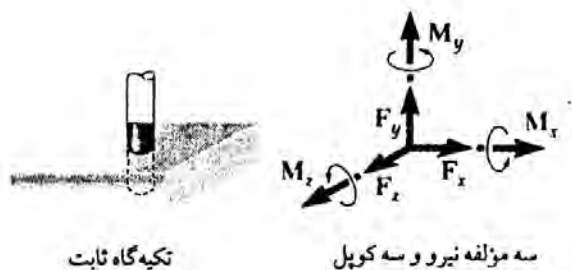
(3) تکیه گاههای با سه عکس العمل



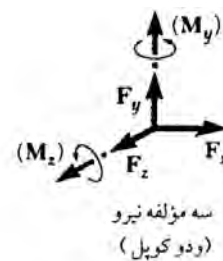
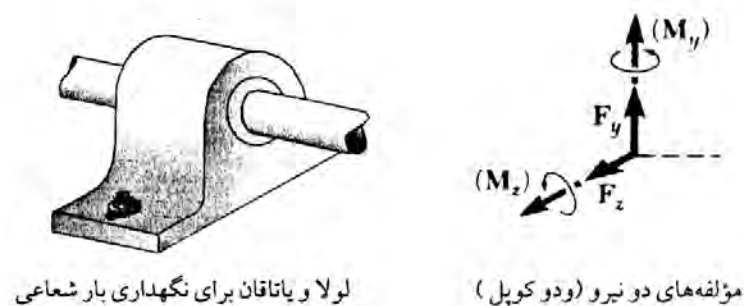
(4) تکیه گاههای دارای چهار عکس العمل



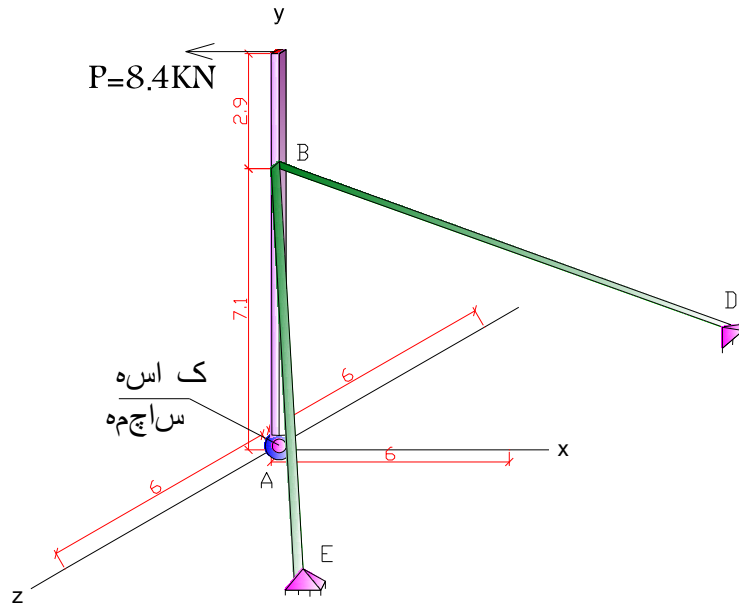
(5) تکیه گاههای با شش عکس العمل



(6) تکیه گاه یاتاقان



مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاه A و نیروهای کشش در کابل های BD و BE



معادلات

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

تقارن نسبت به صفحه xy:

$$A_x = 0$$

$$T_{BD} = T_{BE}$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD} \vec{\lambda}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{6\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}}{h} \right)$$

و داریم:

$$\vec{T}_{BE} = T_{BE} \vec{\lambda}_{BE} = T_{BE} \left(\frac{6\vec{i} - 7\vec{j} + 6\vec{k}}{h} \right)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -8.4 + A_x + \frac{T_{BE}}{h}(6) + \frac{T_{BD}}{h}(6) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \frac{T_{BD}}{h}(7) - \frac{T_{BE}}{h}(7) = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

$$(10\vec{j}) \times (-8.4\vec{i}) + (7\vec{j}) \times \vec{T}_{BD} + 7\vec{j} \times \vec{T}_{BE} = 0$$

و داریم:

$$\sum M_z = 0$$

$$10 \times (8.4) - \frac{4}{11} T_{AD}(7) - \frac{4}{11} T_{AE}(7) = 0$$

$$T_{AD} = T_{AE} = 11(KN)$$

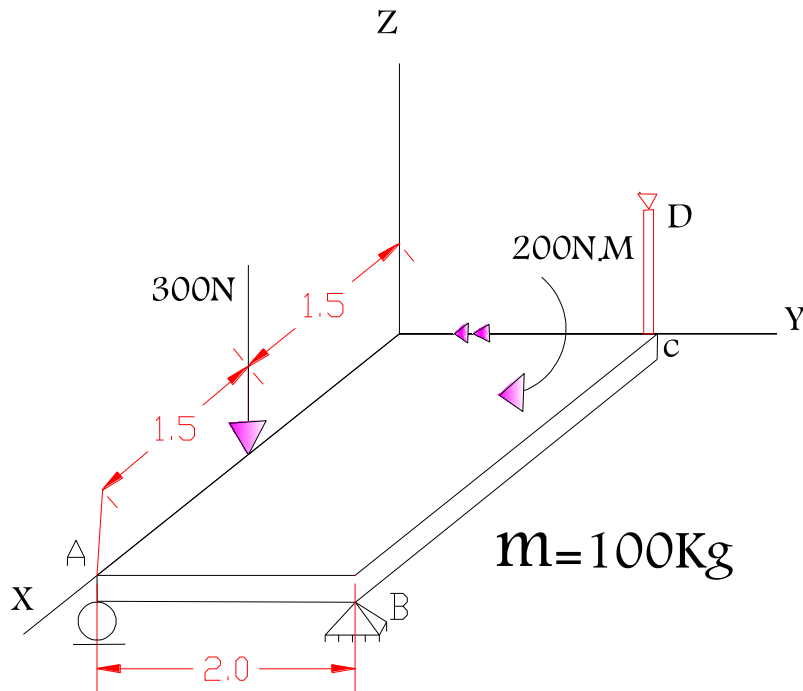
$$A_x = -3.6(KN) \leftarrow$$

$$A_y = 14(kN) \uparrow$$

مثال: جرم 100kg مطلوب است تعیین عکس العمل ها.

تعداد معادلات مجهول 6

تعداد مجهولات 5



$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z + B_z - 300 - 981 + T_{CD} = 0$$

$$\sum M_{ox} = 0 \Rightarrow T_{CD}(2) + B_z(2) - 981(1) = 0$$

$$\sum M_{oy} = 0$$

$$\Rightarrow -200 + 300(1.5) + 981(1.5) - A_z(3) - B_z(3) = 0$$

$$A_z = 790 \text{ N } \uparrow$$

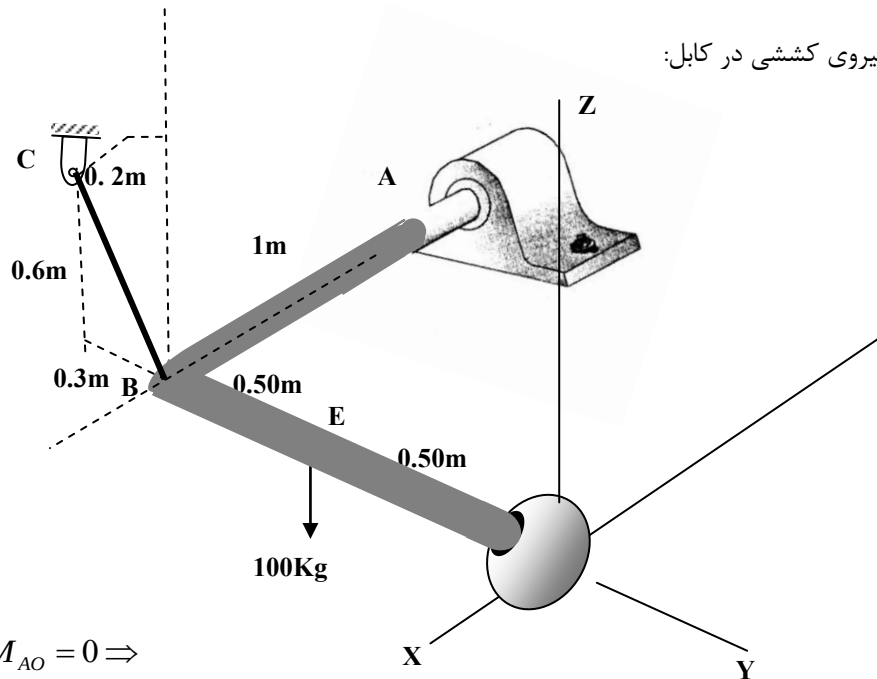
$$B_z = -219 \text{ N } \downarrow$$

$$T_{CD} = 707 \text{ N}$$

از آنجایی که نیرویی وجود ندارد که حول محور Z ایجاد لنگر کند داریم :

$$\sum M_{OZ} = 0$$

مثال: مطلوب است نیروی کششی در کابل:



$$\sum M_{AO} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{OA} \cdot (\sum r_i \times F_i) = 0$$

$$\lambda_{OA} \cdot \left(\vec{r}_{OB} \times \vec{T}_{BC} + \vec{r}_{OE} \times (-981\vec{k}) \right)$$

$$\vec{r}_{OA} = -\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{r}_{OB} = -\vec{j}$$

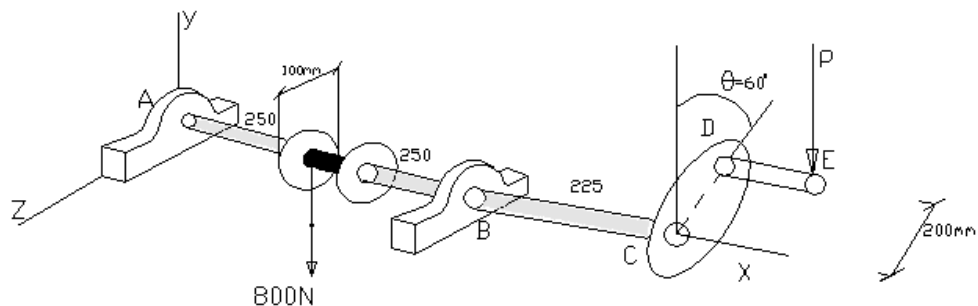
$$\vec{T} = T_{BC} \vec{\lambda}_{AC} = T_{BC} \left(\frac{0.2\vec{i} - 0.3\vec{j} + 0.6\vec{k}}{0.7} \right)$$

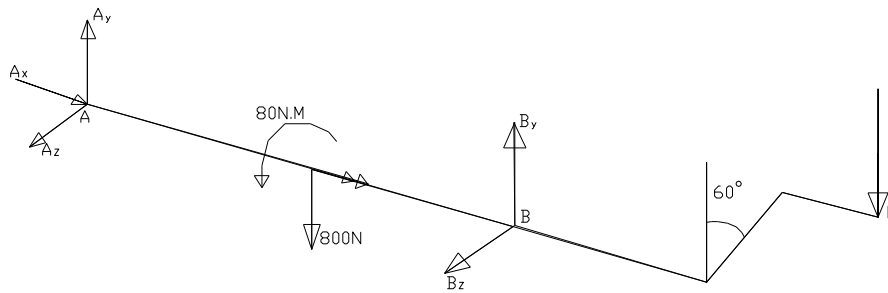
$$\vec{\lambda}_{OA} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \frac{-\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow T_{BC} = 572 \text{ (N)}$$

$$\Rightarrow T_{BD} = 572 \left(\frac{0.2\vec{i} - 0.3\vec{j} + 0.6\vec{k}}{0.7} \right)$$

مثال: مطلوب است عکس العمل تکیه گاهها و نیروی P جهت ایجاد تعادل





$$\sum F = 0 \Rightarrow$$

$$A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} - 800 \vec{j} - P \vec{j} = 0$$

از طرفی داریم:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 80 - 0.2p \sin 60 = 0$$

$$\Rightarrow p = 462 (N)$$

حل از رابطه (1) داریم:

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y + B_y - 80 - 462 = 0 \\ A_z + B_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (0.25 \vec{i} + 0.1 \vec{k}) \times (-800 \vec{j}) + (0.5 \vec{j}) \times (B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) + (0.8 \vec{i} + 0.2 \cos 60 \vec{j} - 0.2 \sin 60 \vec{k}) \times (-462 \vec{j}) = 0 \vec{j}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow 0.5 B_z = 0 \rightarrow B_z = 0$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow -2 + 0.5 B_y - 0.8(462) = 0 \rightarrow B_y = 1139 (N)$$

$$\rightarrow A_z = 0$$

$$\rightarrow A_y = 123 (N)$$

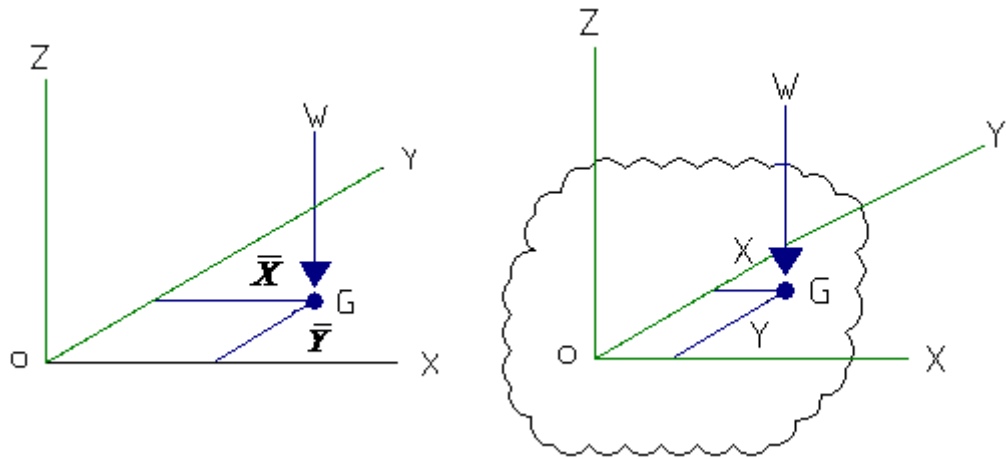
فصل پنجم

نیروهای گسترده ، مرکزهای هندسی و مرکزهای گرانی

مرکز ثقل‌ها و مرکز سطوح :

مرکز ثقل سطوح :

مثلا در فصل‌های قبلی گفتیم که وزن یک جسم را که نیرویی است که بر آن جسم وارد می‌شود می‌توانیم بصورت یک نیروی تنها در یک نقطه قرار دهیم. این نیرو کلاً بصورت بار گسترده‌ای است که بر آن جسم وارد می‌شود، ولی می‌توان به جای آنها از سیستم نیروی معادل استفاده کرد و تمام آن و یا برآیند آنها را در یک نقطه که به آن نقطه مرکز ثقل می‌نامیم قرار دهیم.



مختصات مرکز ثقل جسم دو بعدی نسبت به دستگاه X,Y,Z

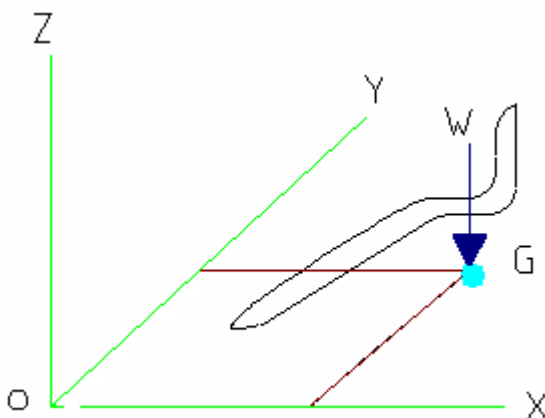
$$W = \sum \Delta w_i = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \Delta w_3 + \dots + \Delta w_n$$

$$\bar{X}W = x_1\Delta w_1 + x_2\Delta w_2 + x_3\Delta w_3 + \dots + x_n\Delta w_n = \sum x_i\Delta w_i$$

$$\bar{Y}W = y_1\Delta w_1 + y_2\Delta w_2 + y_3\Delta w_3 + \dots + y_n\Delta w_n = \sum y_i\Delta w_i$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i\Delta w_i}{W}, \bar{Y} = \frac{\sum y_i\Delta w_i}{W}, W = \sum \Delta w_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int xdw}{W}, \bar{Y} = \frac{\int ydw}{W}, W = \int dw$$



$$G(X, Y) = (\bar{X}, \bar{Y})$$

مراکز سطوح و خطوط :

هنگامیکه جسمی در یک صفحه دارای ضخامت یکنواخت و جنس هموژنیس و یا یکسان (همگن) باشد می توان نوشت :

$$\Delta W = \gamma.t.\Delta A \quad \Delta A = \text{مساحت} \quad t = \text{ضخامت} \quad \gamma = \text{وزن مخصوص}$$

$$W = \int dw = \int \gamma.t.\Delta A = \gamma.t \int dA$$

$$A = \int dA$$

$$\int xdw = \int x\gamma.t.dA = \gamma.t \int x dA$$

$$\int ydw = \int y\gamma.t.dA = \gamma.t \int y dA$$

$$\bar{X} = \frac{\int xdw}{W} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int ydw}{W} = \frac{\int y dA}{A}$$

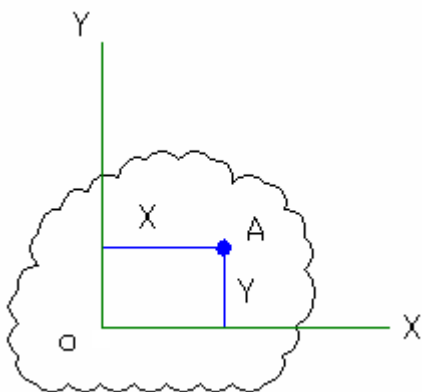
مراکز سطح یک جسم دو بعدی نسبت به دستگاه مختصات X,Y,Z

پس اگر یک جسمی دو بعدی دارای ضخامتی یکنواخت و جنس همگنی باشد، نقطه مرکز سطح با نقطه مرکز ثقل در یک نقطه قرار می گیرد.

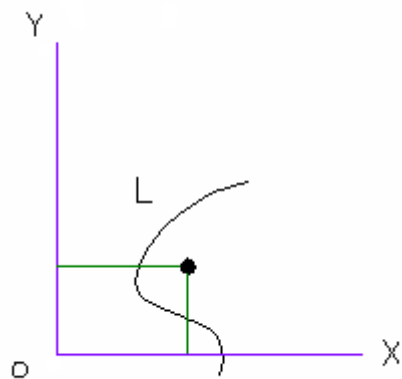
$$\int x dA = \text{گشتاور مساحت A نسبت به محور Y می نامند}$$

$$\int y dA = \text{گشتاور مساحت A نسبت به محور X می نامند}$$

$$C(X,Y) = (\bar{X}, \bar{Y})$$



برای یک مفتول یا سیم :



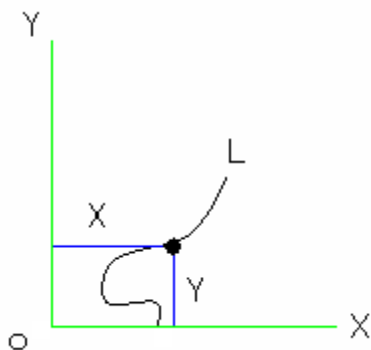
$$\Delta W = \gamma \cdot a \Delta L$$

$$\Delta L = \text{طول}$$

$$a = \text{مساحت سطح مقطع سیم}$$

$$\gamma = \text{وزن مخصوص}$$

$$\bar{X} = \frac{\int x dL}{L}, \bar{Y} = \frac{\int y dL}{L}$$



محورهای تقارن :

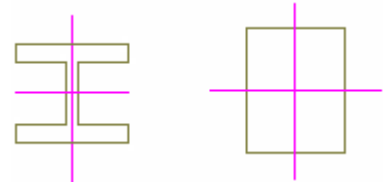
تقارن با یک محور:



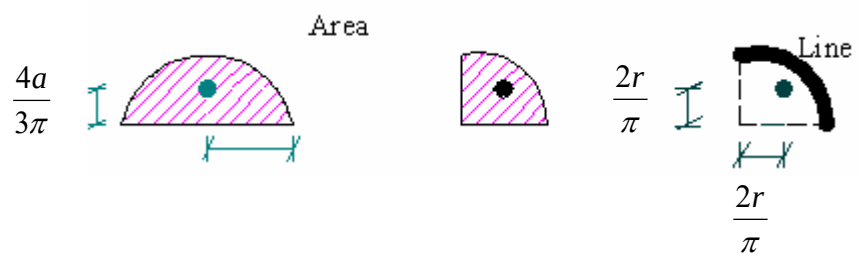
تقارن نسبت به یک نقطه



تقارن با دو محور

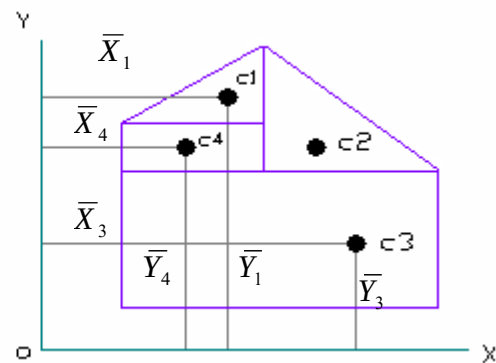
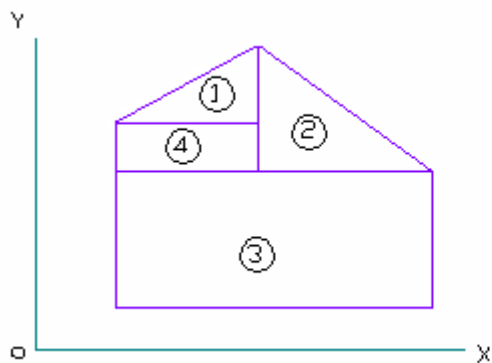


مرکز سطح اشکال عمومی



سطوح و خطوط مختلط :

در خیلی از موارد یک جسم دو بعدی و یا یک خط از چندین مقطع مختلط تشکیل می شود مانند دایره و مستطیل و یا مثلث . در اینگونه موارد می توان آن سطح را به اشکال منتظم هندسی تقسیم کرد و از روابط گذشته استفاده کرد و مرکز سطح را بدست آورد.



مرکز سطح قسمت یک = C_1

مرکز سطح قسمت دو = C_2

مرکز سطح قسمت سه = C_3

مرکز سطح قسمت چهار = C_4

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\bar{X}_1 A_1 + \bar{X}_2 A_2 + \bar{X}_3 A_3 + \bar{X}_4 A_4 = \bar{X} A$$

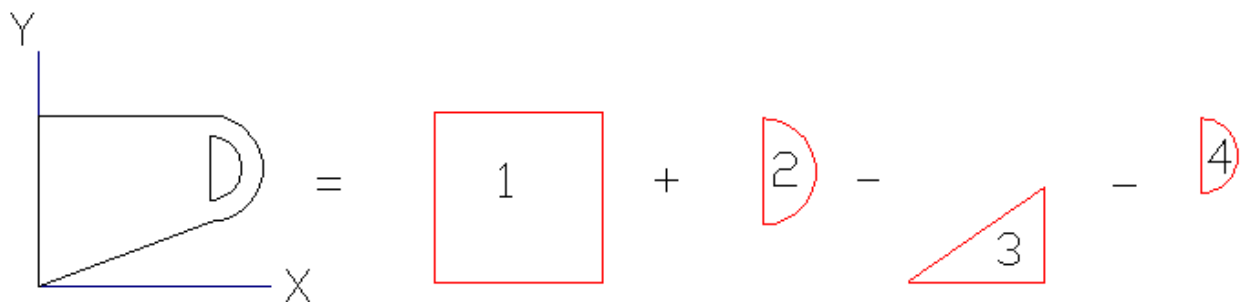
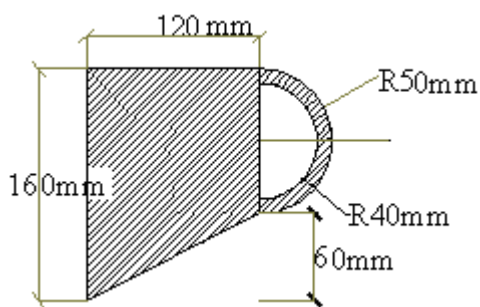
$$\bar{Y}_1 A_1 + \bar{Y}_2 A_2 + \bar{Y}_3 A_3 + \bar{Y}_4 A_4 = \bar{Y} A$$

$$A = \sum A_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x}_i dA_i}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int \bar{y}_i dA_i}{A}$$

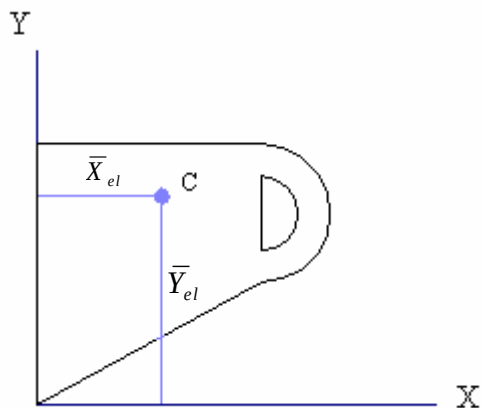
مثال: مختصات مرکز سطح شکل زیر را بدست آورید.



قسمت	علامت	(mm^2) A	$\bar{X}_i$	$\bar{Y}_i$	AX_i	AY_i
1	+	$120 \times 160 = 19,200$	60	80	1,152,000	1,536,000
2	+	$\frac{\pi \cdot (50)^2}{2} = 3927$	$120 + \frac{40(50)}{3\pi} = 140$	110	553,707	431,970
3	-	$\frac{120 \times 160}{2} = 3600$	80	20	-288,000	-72,000
4	-	$\frac{\pi \cdot (40)^2}{2} = 2513$	$120 + \frac{4(40)}{3\pi} = 137$	110	-344,281	-276,430
کلی		17140			1,073,426	1,614,540

$$\bar{X} = \frac{\sum Ax_i}{\sum A_i} = \frac{1073426}{17140} = 62.6(mm)$$

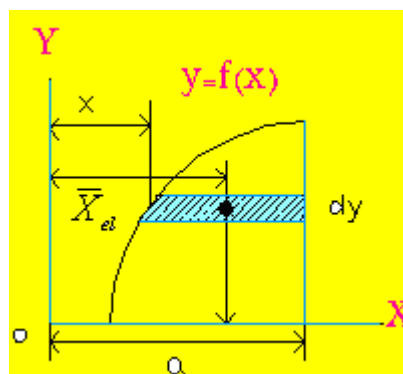
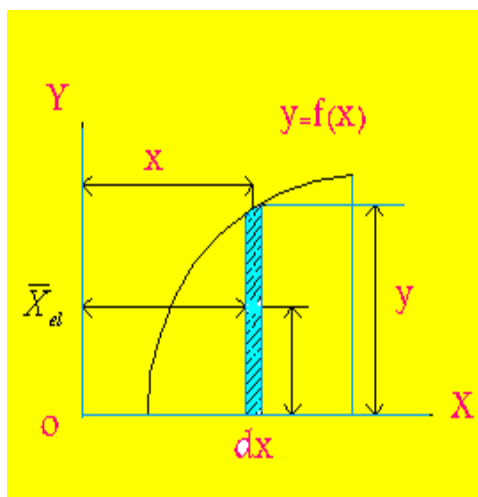
$$\bar{Y} = \frac{\sum Ay_i}{\sum A_i} = \frac{1619540}{17140} = 94.5(mm)$$



بدست آوردن مرکز سطح به روش انتگرال گیری :

$$\bar{X} = \frac{\int x dA}{A}, \bar{Y} = \frac{\int y dA}{A}$$

برای سطوحی که اشکال منتظم هندسی نداشته باشند و از اشکال نامنتظم و یا اشکالی که اطراف آن ها سطح از منحنی های مختلف است ، تشکیل شده باشند ، می توان از روش انتگرال گیری استفاده کرد و مرکز سطح را بدست آورد :



مرکز سطح ریمان برای شکل 1 (سمت راست) :

$$\bar{X}_{el} = x, \bar{Y}_{el} = \frac{y}{2}$$

مرکز سطح ریمان برای شکل 2 (سمت چپ) :

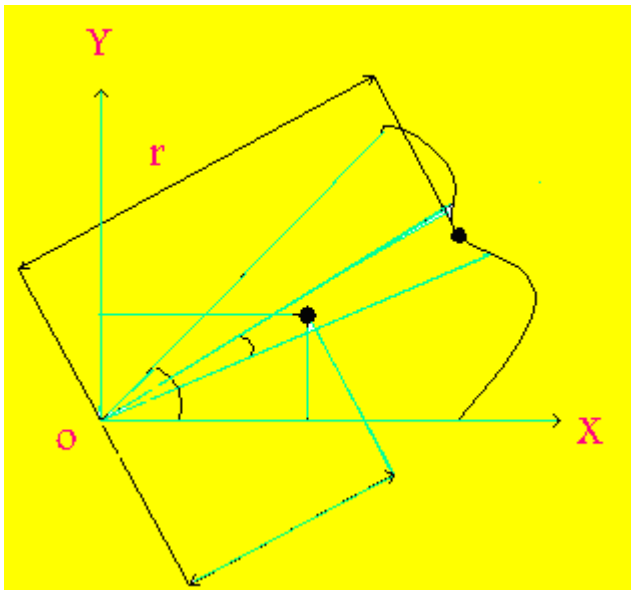
$$\bar{X}_{el} = \frac{a+x}{2}, \bar{Y}_{el} = y$$

مساحت ریمان برای شکل 1 (سمت راست) :

$$dA = ydx$$

مساحت ریمان برای شکل 2 (سمت چپ) :

$$dA = (a-x)dy$$



$$\bar{X}_{el} = \frac{2r}{3} \cos \theta$$

$$\bar{Y}_{el} = \frac{2r}{3} \sin \theta$$

$$dA = \frac{1}{2} r (r d\theta) = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

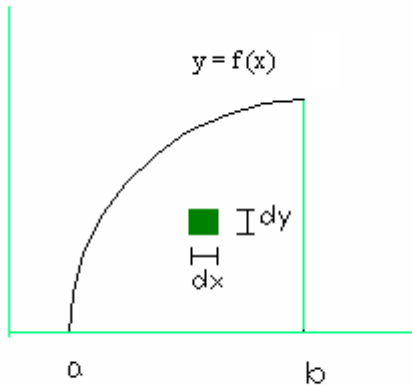
گشتاور اولیه نسبت محور y :

$$\sum M_y : A\bar{X} = \int \bar{X}_{el} dA$$

گشتاور اولیه نسبت محور X :

$$\sum M_x : A\bar{Y} = \int \bar{Y}_{el} dA$$

برای بدست آوردن مرکز سطح از فرمول فوق استفاده می کنیم و باید X_{el} و Y_{el} را بر حسب X و Y جایگزین کرده و dA را بر حسب X و Y محاسبه کنیم ، سپس $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ را به دست آوریم .
برای شکل زیر داریم :

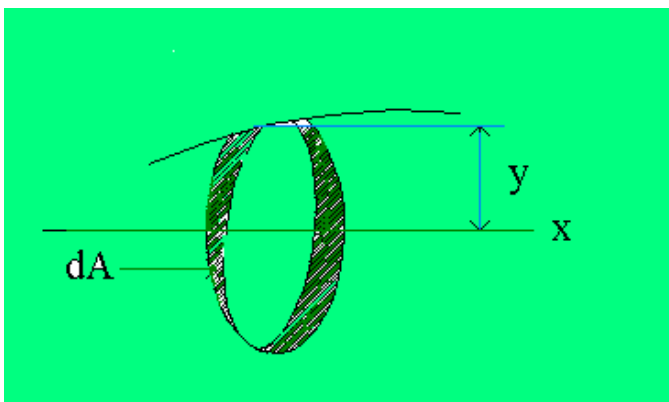


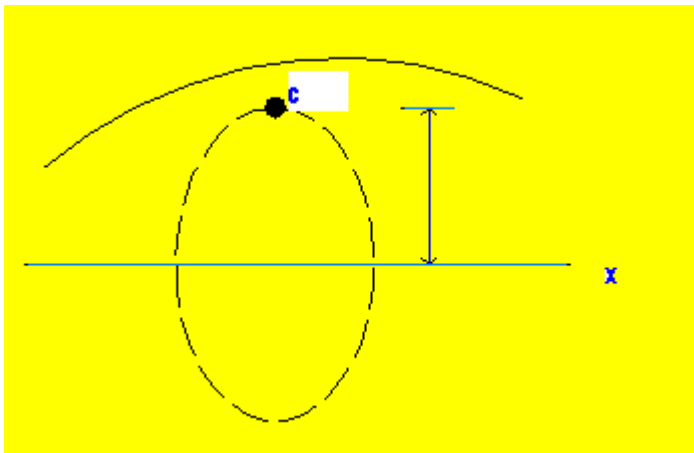
$$\int x dA = \iint x dy dx = \int x \left(\int dy \right) dx = \int_a^b x \left(\int_0^{f(x)} dy \right) dx$$

تئوری پاپیوس - گلدینیوس :

تئوری اول :

سطح یک منحنی دورانی برابر است با طول آن منحنی ضرب در فاصله ای که مرکز سطح آن منحنی می پیماید ، تا آن سطح به وجود آید .





$$dA = (2\pi \cdot y) dL$$

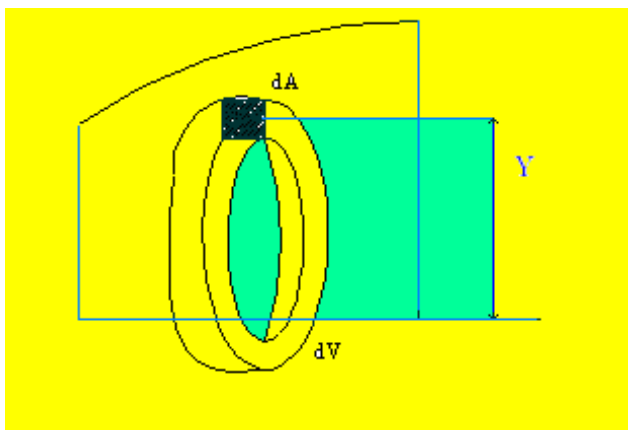
$$A = \int 2\pi \cdot y dL$$

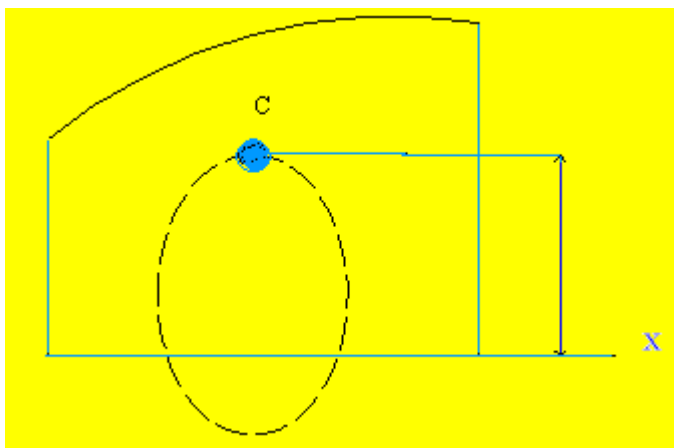
$$\int y dL = \bar{Y} L$$

$$A = 2\pi \cdot \bar{Y} L$$

تئوری دوم :

حجم جسمی که از دوران یک منحنی حول یک محور بدست می آید برابر است با سطح مقطع آن جسم ضرب در فاصله ای که مرکز سطح آن منحنی هنگام دوران می پیماید .





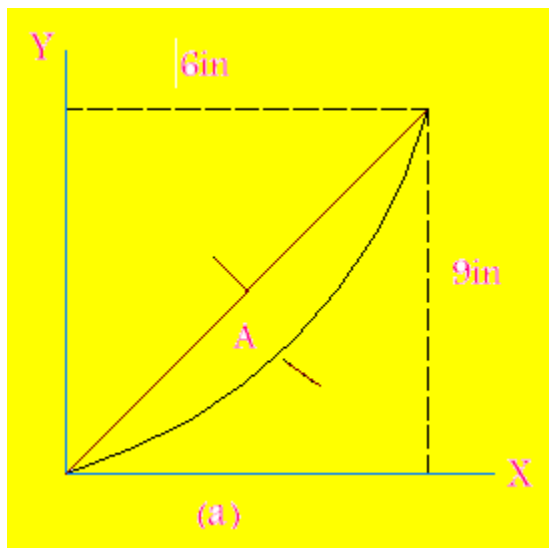
$$V = \int dv$$

$$dv = 2\pi \cdot y dA$$

$$V = \int 2\pi \cdot y dA$$

$$\int y dA = \bar{Y}A \Rightarrow V = 2\pi \cdot \bar{Y}A$$

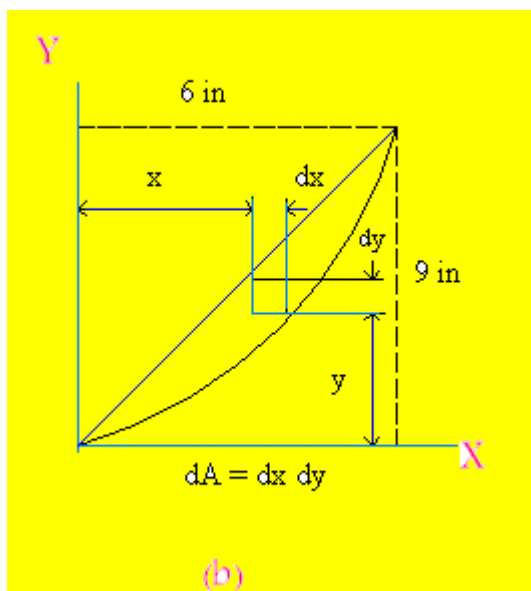
مثال: مطلوب است : محورهای مرکز سطح که بین خط مستقیم $x = \frac{2y}{3}$ و سهمی $x^2 = 4y$ قرار گرفته اند (شکل a). از روشهای (1) انتگرال دوگانه، (2) انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح افقی، (3) انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح عمودی، استفاده کنید (X و Y بر اساس اینچ) .



حل :

قسمت اول - انتگرال دوگانه :

المان دیفرانسیل سطح دوگانه در شکل b نشان داده شده است. بر اساس اینکه بخواهیم نسبت به X یا Y انتگرال بگیریم dA را می توان به صورت $dx \cdot dy$ یا $dy \cdot dx$ نوشت. پس ابتدا نسبت به Y انتگرال می گیریم، مساحت برابر است با :



$$A = \int dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} dy \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 9(in^2).$$

اولین لحظه سطح برای محور Y برابر است با :

$$Q_y = \int_A x dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} x dy \right) dx$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) x dx = 279(in^3).$$

اولین لحظه سطح برای محور X برابر است با :

$$Q_x = \int_A y dA = \int_0^6 \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} y dy \right) dx$$

$$= \int_0^6 \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx = 32.4(in^3).$$

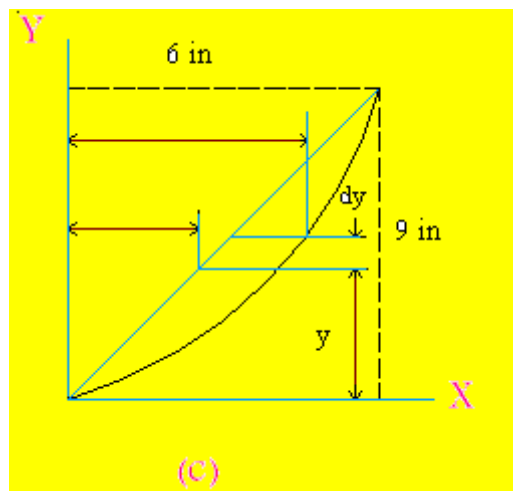
بنابراین محورهای مرکز سطح برابر است با :

$$\bar{X} = \frac{Q_y}{A} = \frac{27}{9} = 3(in.)$$

$$\bar{Y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{32.4}{9} = 3.6(in.).$$

اگر ابتدا نسبت به X انتگرال می گرفتیم ، آنگاه داشتیم :

$$A = \int dA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} dx \right) dy$$



$$Q_y = \int_A x dA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} x dx \right) dy$$

$$Q_x = \int_A y dA = \int_0^9 \left(\int_{\frac{2y}{3}}^{-2\sqrt{y}} y dx \right) dy$$

توجه داریم که این انتگرالها معادل انتگرالهای قبلی است.

قسمت دوم - انتگرال ساده با استفاده از المان دیفرانسیل سطح افقی :

در شکل c ، dA و $\bar{X}_{el}$ مشخص شده اند پس برای محاسبه مساحت داریم :

$$A = \int_A dA = \int_0^9 \left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = 9(in^2)$$

$$dQ_y = \bar{X}_{el} dA \Rightarrow dQ_y = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{y} + \frac{2y}{3} \right) \left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = \left(2y - \frac{2y^2}{9} \right) dy$$

اولین لحظه سطح برای محور Y برابر است با :

$$Q_y = \int_0^9 \left(2y - \frac{2y^2}{9} \right) dy = 27(in^3).$$

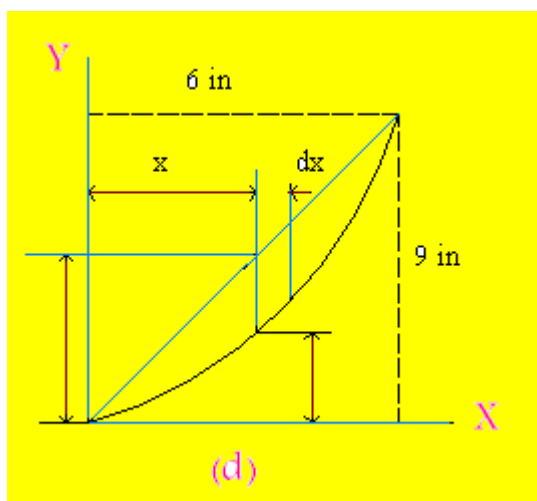
$$dQ_x = y dA \Rightarrow dQ_x = y \left(2\sqrt{y} - \frac{2y}{3} \right) dy = \left(2y^{\frac{3}{2}} - \frac{2y^2}{3} \right) dy$$

اولین لحظه سطح برای محور X برابر است با :

$$Q_x = \int_0^9 \left(2y^{\frac{3}{2}} - \frac{2y^2}{3} \right) dy = 32.4(in^3).$$

توجه شود که A ، Q_x و Q_y برابر همان مقدارهای حساب شده در قسمت اول اند، بنابراین محورهای مرکز سطح نیز همان است.

قسمت سوم - انتگرال ساده بلاستفاده از المان دیفرانسیل سطح عمودی :
در شکل d ، dA و $\bar{Y}_{el}$ مشخص شده اند. پس برای محاسبه مساحت داریم :



$$A = \int_A dA = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 9(in^2).$$

با استفاده از اطلاعات موجود در شکل d داریم:

$$dQ_y = x dA = x \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

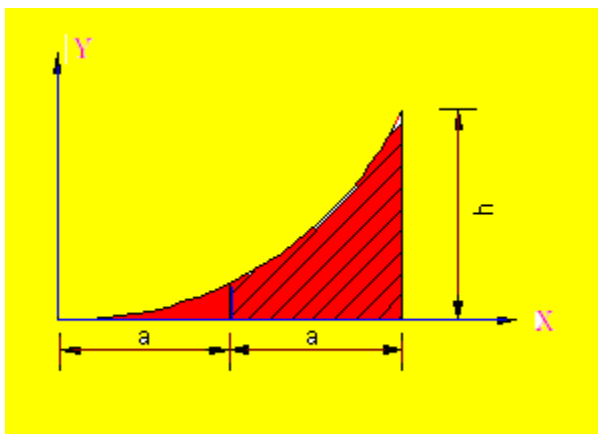
بنابراین اولین لحظه برای محور y برابر است با:

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_0^6 \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{4} \right) dx = 27(in^3).$$

$$dQ_x = \bar{y}_{el} dA \Rightarrow dQ_x = \frac{1}{2} \left(\frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4} \right) \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx$$

$$\Rightarrow Q_x = \int_A dQ_x = \int_0^6 \frac{1}{2} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx = 32.4(in^3).$$

مقادیر بدست آمده A ، Q_x و Q_y در قسمت بالا همان مقادیر بدست آمده در قسمت های 1 و 2 می باشند، بنابراین $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ نیز همان مقادیر هستند.



مثال: مطلوبست مرکز سطح شکل مقابل:

$$y = kx^2$$

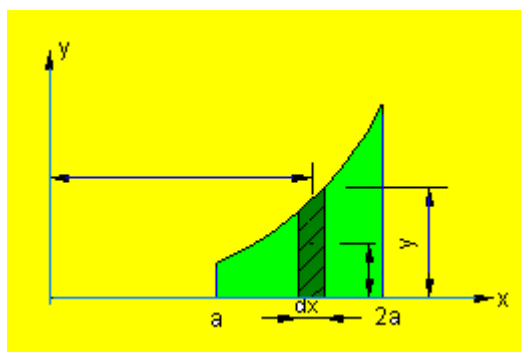
$$x = 2a, y = h: h = k(2a)^2 \Rightarrow k = \frac{h}{4a^2}$$

$$y = \frac{h}{4a^2} x^2$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{1}{2} y = \frac{h}{8a^2} x^2$$

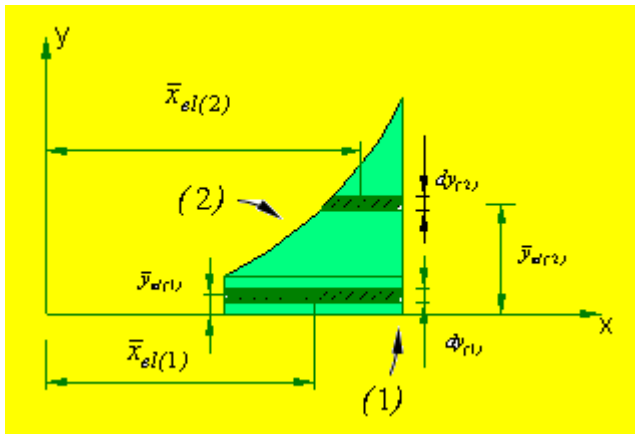
$$\bar{x}_{el} = x$$

$$dA = ydx = \frac{h}{4a^2} x^2 dx$$



$$A = \int dA = \frac{h}{4a^2} \int_a^{2a} x^2 dx = \frac{7}{12} ah$$

$$\left. \begin{aligned} \int \bar{x}_{el} dA &= \int_a^{2a} x \left(\frac{h}{4a^2} \right) x^2 dx = \frac{15}{16} ha^2 \\ \int \bar{y}_{el} dA &= \frac{1}{2} \int_a^{2a} \left(\frac{h}{4a^2} x^2 \right) dx = \frac{31}{160} h^2 a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int \bar{x}_{el} dA}{\int dA} = \frac{45}{28} a = 1.61a \\ \bar{y} &= \frac{\int \bar{y}_{el} dA}{\int dA} = \frac{93}{280} h = 0.33h \end{aligned} \right.$$



$$\bar{y}_{el(1)} = y, \bar{x}_{el(1)} = \frac{3}{2}a$$

$$dA_{(1)} = a dy$$

$$y = \frac{h}{4a^2} x^2 \Rightarrow x = 2a \sqrt{\frac{y}{h}}$$

$$\bar{y}_{el(2)} = y$$

$$\bar{x}_{el(2)} = \frac{2a + x}{2} = \frac{2a + 2a \sqrt{\frac{y}{h}}}{2} = a \left(1 + \sqrt{\frac{y}{h}} \right)$$

$$dA_{(2)} = (2a - x) dy = 2a \left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}} \right) dy$$

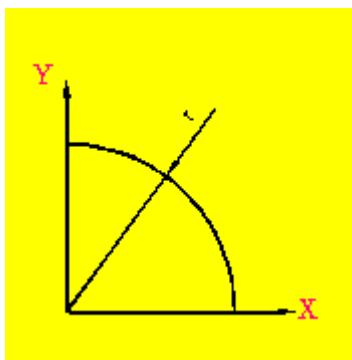
$$\bar{x}_{(2)} = \frac{\int \bar{x}_{el(2)} dA}{A_{(2)}}, \bar{y}_{(2)} = \frac{\int \bar{y}_{el(2)} dA}{A_{(2)}}$$

$$A = A_{(1)} + A_{(2)}$$

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{\bar{x}_{(1)} A_{(1)} + \bar{x}_{(2)} A_{(2)}}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\bar{y}_{(1)} A_{(1)} + \bar{y}_{(2)} A_{(2)}}{A}$$

مثال: منحنی مقابل یک چهارم دایره کامل می باشد . مرکز خط آنرا بدست آورید.

حل:



$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el} dL}{L}, \quad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el} dL}{L}$$

به علت قرینه بودن این کمان حول زاویه 45° داریم :

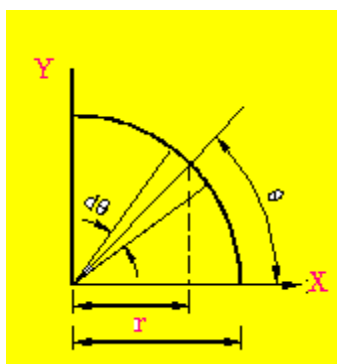
$$\bar{x} = \bar{y}$$

$$\bar{x}_{el} = r \cos \theta$$

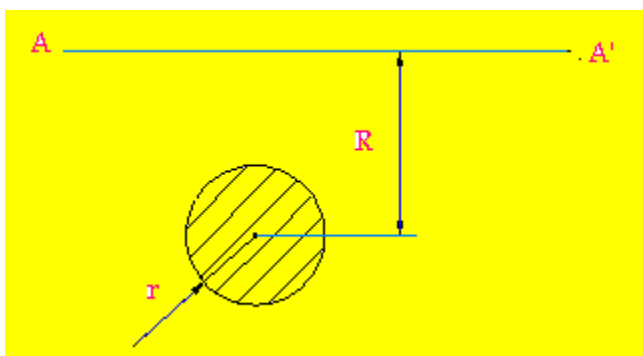
$$dL = r d\theta$$

$$\int \bar{x}_{el} dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta d\theta = r^2 \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2$$

$$\bar{x}L = \int \bar{x}_{el} dL \Rightarrow \bar{x}\left(\frac{1}{2}\pi r\right) = r^2 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$



مثال: مطلوبست سطح دورانی و نیز حجم حاصل از دوران دایره به شعاع r و به فاصله R از محور AA' حول محور AA' .
حل:



$$\text{سطح دورانی: } 2\pi\bar{y}L = 2\pi R(2\pi r) = 4\pi^2 r^2 R$$

$$\text{حجم دورانی: } 2\pi\bar{y}A = 2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$

مرکز ثقل اجسام سه بعدی:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}W &= \int x dW \\ \bar{y}W &= \int y dW \\ \bar{z}W &= \int z dW \end{aligned} \right\} W = \gamma V$$

برای اجسام همگن داریم:

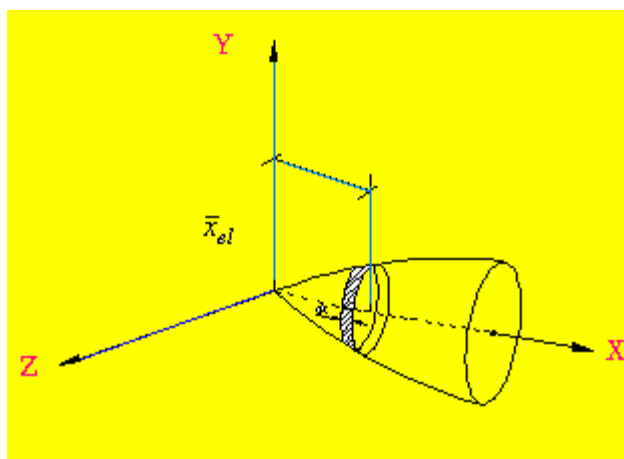
$$\bar{x}V = \int x dV, \bar{y}V = \int y dV, \bar{z}V = \int z dV$$

برای اجسام مختلط:

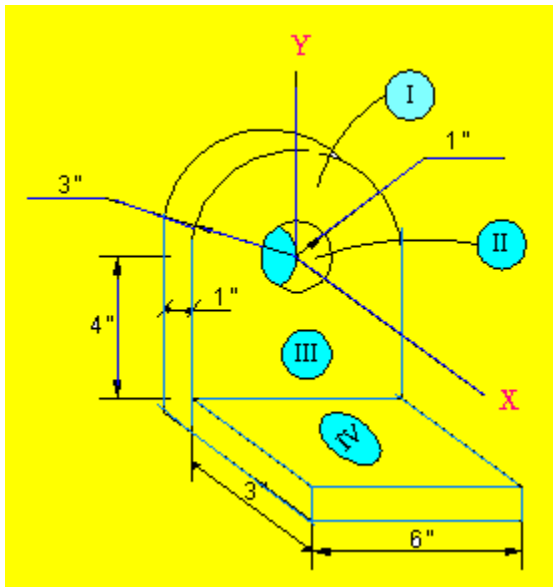
$$\begin{aligned} \bar{x}\Sigma W &= \Sigma \bar{x}W & \bar{y}\Sigma W &= \Sigma \bar{y}W & \bar{z}\Sigma W &= \Sigma \bar{z}W \\ \bar{x}\Sigma V &= \Sigma \bar{x}V & \bar{y}\Sigma V &= \Sigma \bar{y}V & \bar{z}\Sigma V &= \Sigma \bar{z}V \end{aligned}$$

بدست آوردن مرکز ثقل به وسیله انتگرال:

$$\begin{aligned} \bar{x}V &= \int x dV & \bar{y}V &= \int y dV & \bar{z}V &= \int z dV \\ \bar{x}V &= \int \bar{x}_{el} dV & \bar{y}V &= \int \bar{y}_{el} dV & \bar{z}V &= \int \bar{z}_{el} dV \end{aligned}$$



مثال: مرکز ثقل جسم روبرو را بدست بیاورید



حل:

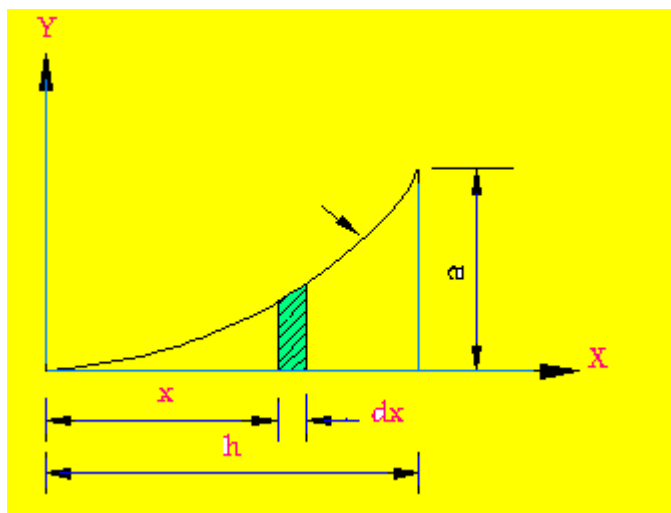
	$V(in^3)$	$\bar{x}(in)$	$\bar{y}(in)$	$\bar{y}V(in^4)$	$\bar{x}V(in^4)$
I	$\frac{\pi}{2}(3)^2 = 14.14$	0	$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{\pi}\right) = 1.27$	18	0
II	$-\pi(1)^2 = -\pi$	0	0	0	0
III	$(1)(5)(6) = 30$	0	-2.5	-75	0
IV	$(3)(6)(1) = 18$	2	-4.5	-81	36
Σ	59			-138	36

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}V}{V} = \frac{36}{59} = 0.61"$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}V}{V} = \frac{-138}{59} = -2.34"$$

مثال: مرکز ثقل جسمی را که از دوران قسمت هاشور زده

در شکل روبرو حول محور X ایجاد می شود ، بدست آورید . معادله ی منحنی $y = kx^n$ است.



حل:

$$dV = \pi r^2 dx = \pi k^2 x^{2n} dx$$

$$V = \int dV = \pi k^2 \int_0^h x^{2n} dx = \frac{\pi k^2 h^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\int \bar{x}_{el} dV = \pi k^2 \int_0^h x^{2n+1} dx = \frac{\pi k^2 h^{2n+2}}{2n+2}$$

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \Rightarrow \bar{x} \cdot \left(\frac{\pi k^2 h^{2n+1}}{2n+1} \right) = \frac{\pi k^2 h^{2n+2}}{2n+2}$$

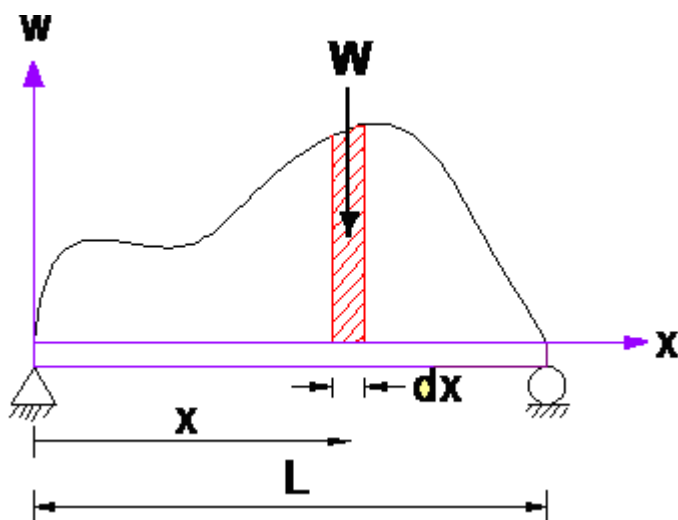
$$\bar{x} = \frac{2n+1}{2n+2} h$$

$$n=1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{2(1)+1}{2(1)+2} h = \frac{3}{4} h \quad \text{برای مخروط}$$

$$n = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2}{3} h \quad \text{برای قطع مخروط}$$

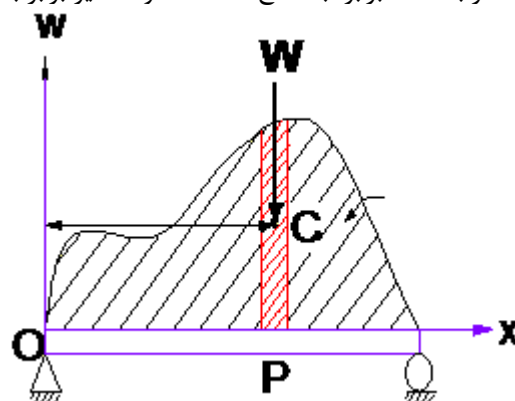
توزیع نیرو روی میله ها:

کاربرد مرکز سطح برای مسائل نیرو های موجود روی تیرها نیز می باشد. فرض می کنیم مصالح روی یک جسم مطابق شکل مقابل باشد. توسط شکل مقابل می توان توزیع بار بر حسب وزن بر واحد طول تیر را نشان داد.



$$dW = w dx \Rightarrow W = \int_0^L w dx$$

حاصلضرب $w dx$ برابر با سطح dA است و W نیز برابر با سطح کل A می باشد.



$$W = \int dw$$

$$dw = w dx$$

$$A\bar{x} = \int x dA$$

$$(OP)W = \int x dw$$

$$(OP)W = \int_0^L x(w) dx$$

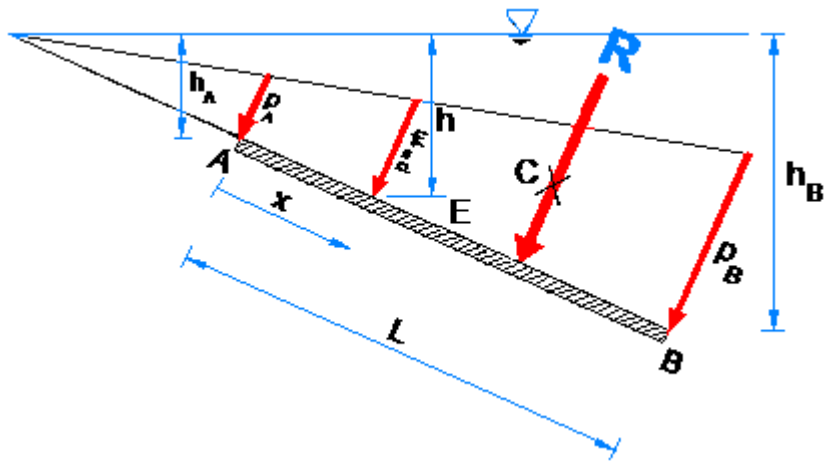
نیروهایی وارده بر سطوح اجسام غوطه ور:

$$p = \gamma h$$

وزن مخصوص γ

ارتفاع سطح تا سطح آزاد مایع h

نقطه E مرکز سطح



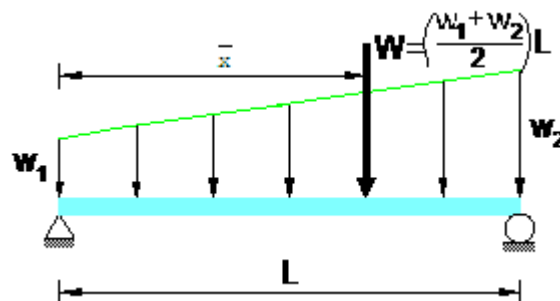
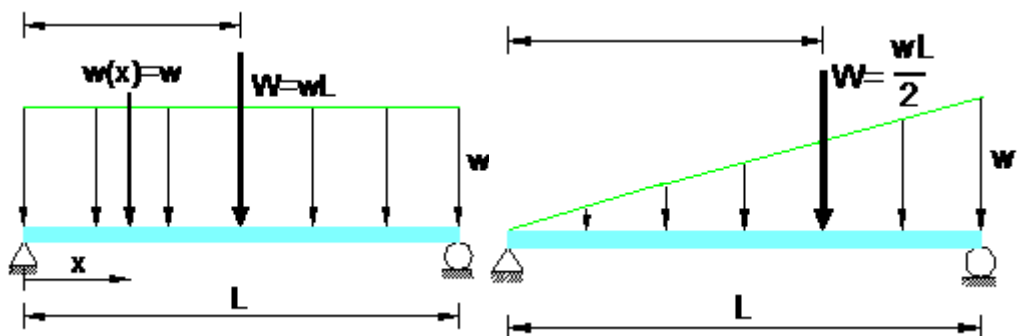
نقطه C مرکز فشار

$$R = R = p_E L = \frac{1}{2} (p_A + p_B) L \quad \text{فشار وارد بر صفحه (کل)}$$

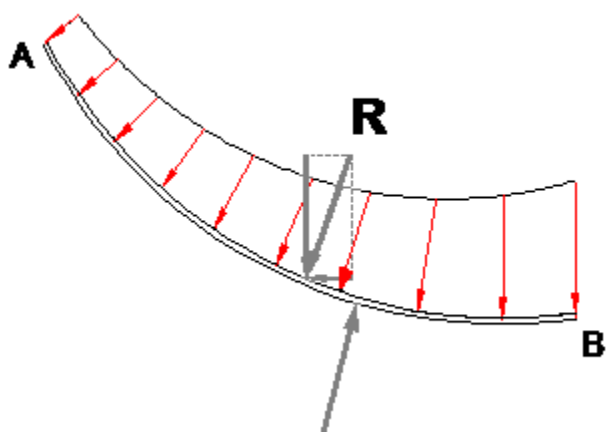
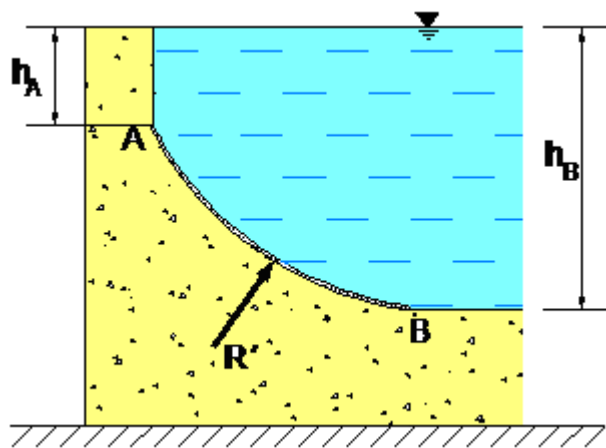
بار گسترده یکنواخت :

$$\bar{x} = \frac{L}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{2L}{3}$$

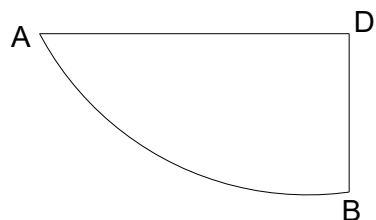


برای محاسبه نیروی برآیند از طرف آب که بر بخش AB در سد نمایش داده شده زیر وارد می شود مراحل زیر را انجام می دهیم:

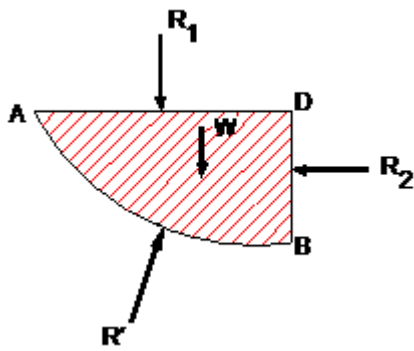


نیروی برآیند وارد شده از طرف آب بر سطح منحنی

حجم مایع ABD را جدا می کنیم.



و برآیند نیروهای وارد بر سطح AB (یعنی R) را بصورت مؤلفه های افقی و عمودی در نظر می گیریم:

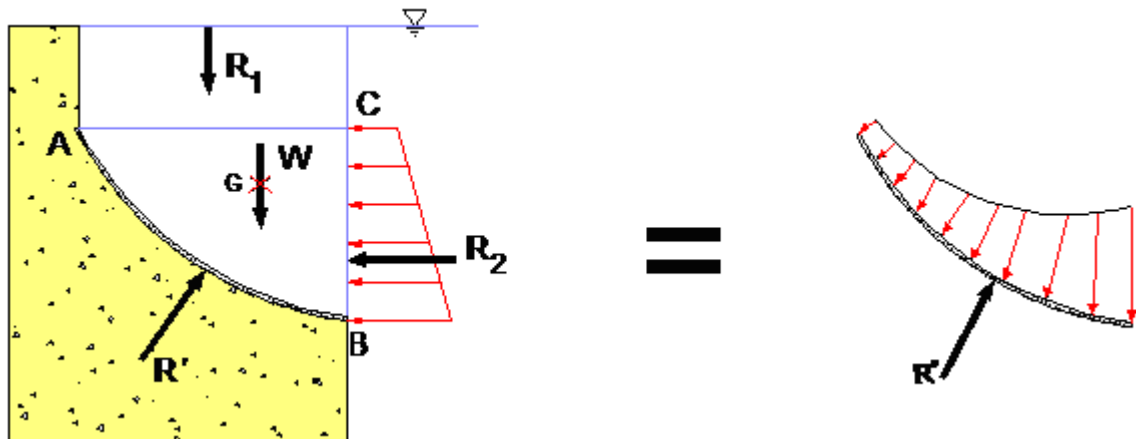


$\left\{ \begin{array}{l} W = \text{مربوط به حجم مایع جدا شده} \\ \text{برآیند نیروهای خارجی وارد بر سطح AD} \end{array} \right. \leftarrow \text{مؤلفه های عمودی}$

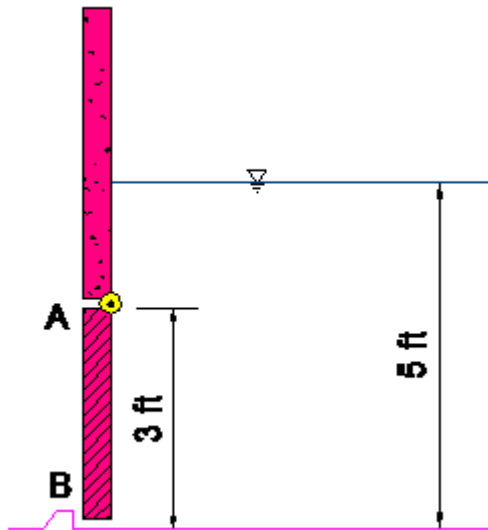
$R_2 = \text{برآیند نیروهای خارجی وارد بر سطح BD} \leftarrow \text{مؤلفه افقی}$

$R = R' = \text{برآیند نیروی وارد بر سطح منحنی، قسمت پایین} - \text{نیروی وارد بر سطح منحنی، قسمت بالا}$

در شکل زیر، دو حالت نمایش داده شده معادل هم هستند، اما انتگرال گیری در حالت سمت راست دشوار است زیرا هم فشار و هم ارتفاع تغییر می کند، در صورتیکه اگر قسمت ABC را بصورت سمت چپ در نظر بگیریم دچار مشکل نخواهیم شد.



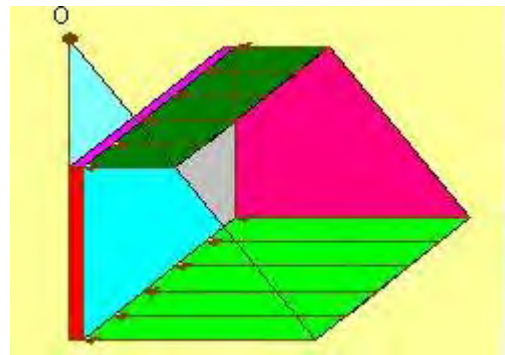
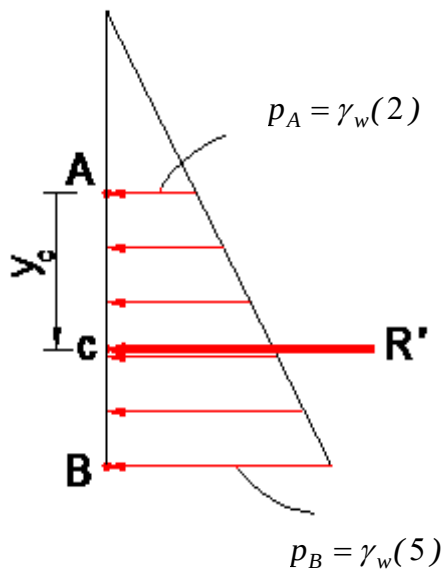
مثال: درب $3\text{ ft} \times 3\text{ ft}$ در پائین دیوار بتنی قرار گرفته است؛
 الف) مقدار و محل برآیند نیروهای وارد بر درب را معین کنید.



ب) اگر این درب در نقطه A به دیوار بتنی لولا شده باشد نیروی وارد بر نقطه B را بدست آورید.

$$\gamma_{conc} = 150 \left(\frac{lb}{ft^3} \right) \quad \gamma_{water} = 62.4 \left(\frac{lb}{ft^3} \right)$$

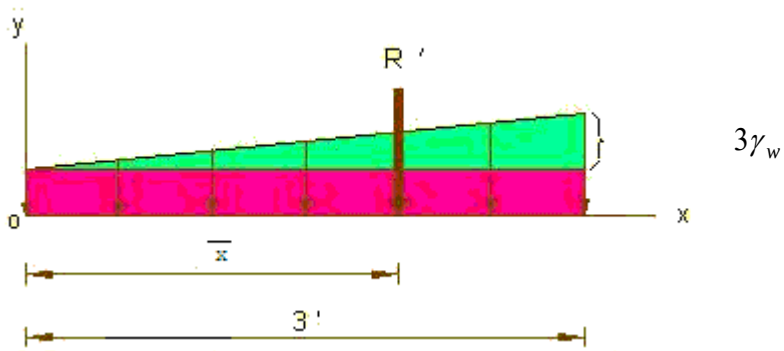
حل الف)



$$R' = \frac{1}{2} (p_A + p_B) L$$

$$R' = \frac{1}{2} [\gamma_w(2) + \gamma_w(5)] (3) = \frac{21}{2} \gamma_w$$

$$= (3) R' = \frac{63}{2} \gamma_w \quad \text{كل R}$$



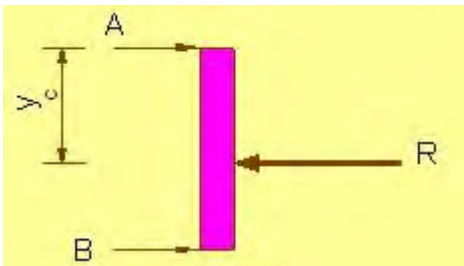
$$\bar{x}R' = [2\gamma_w(3)](1.5) + [1.5\gamma_w(3)](2) = 9\gamma_w + 9\gamma_w = 18\gamma_w$$

$$\bar{x}R' = \sum \bar{x}_i R'_i$$

$$y_c = \bar{X} = \frac{18\gamma_w}{\frac{21}{2}\gamma_w} = \frac{36}{21} = \frac{12}{7} = 1.714'$$

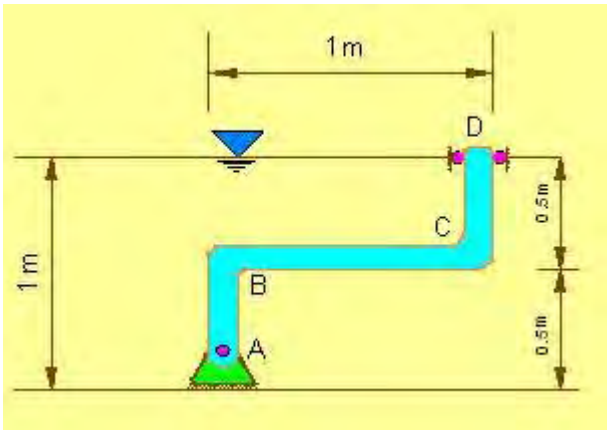
$$R = 31.5 \times 62.4 = 1966 \text{ (lb)}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \text{حل ب}$$



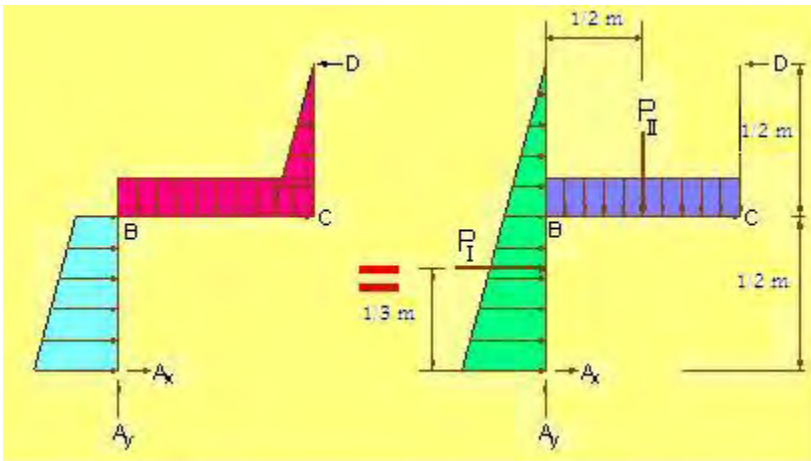
$$\Rightarrow 3B - y_c R = 0 \Rightarrow B = 1123 \text{ (lb)}$$

مثال: دریچه ABCD که از ورق ساخته شده و دارای عرض 2 متر است در نقطه A به زمین لولا شده است. عکس العمل ها را در نقاط A و B بدست آورید.



$$\gamma = \rho g = 1000 (9.81) = 9.81 \text{ (kN/m}^3\text{)}$$

حل:



$$w_A = 2\gamma(1) = 2\gamma \quad P_I = \frac{1}{2} w_A(1) = \gamma$$

$$w_B = 2\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \gamma \quad P_{II} = w_B(1) = \gamma$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (1)D - \frac{1}{3}P_I - \frac{1}{2}P_{II} = 0$$

$$D - \frac{1}{3}\gamma - \frac{1}{2}\gamma = 0$$

$$D = \frac{5}{6}\gamma = \frac{5}{6}(9.81) = 8.18 \text{ (kN)} \leftarrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + P_I - D = 0$$

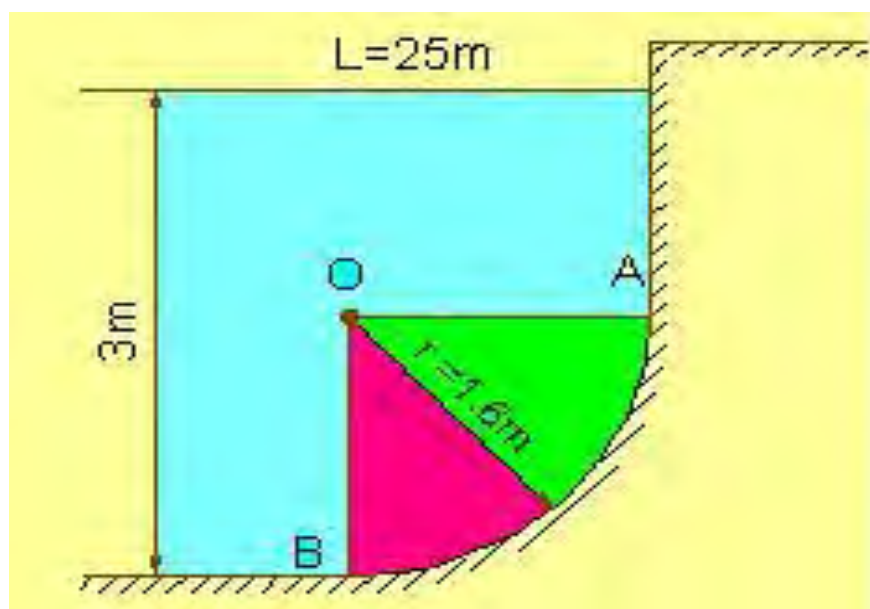
$$A_x = \frac{5}{6}\gamma - \gamma = \frac{1}{6}\gamma = \frac{1}{6}(9.81)$$

$$A_x = 1.635(kN) \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P_{II} = 0$$

$$A_y = \gamma = 9.81(kN) \uparrow$$

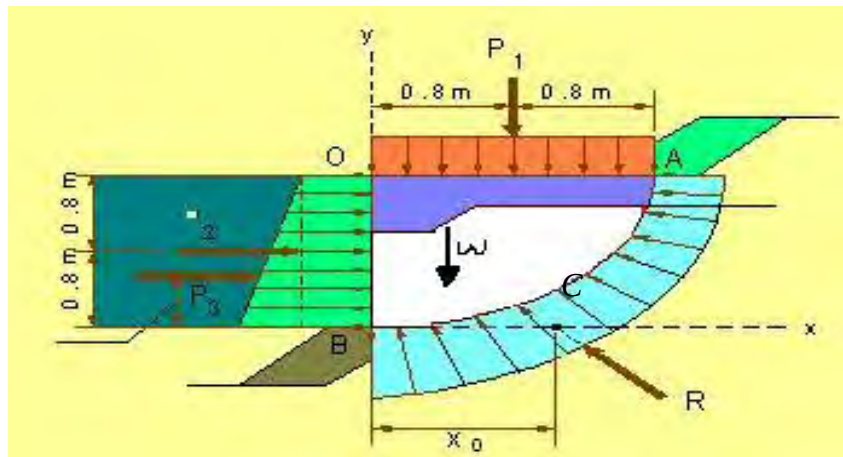
مثال: یک استخر شنا تا عمق 3 متر از آب پر شده است (مطابق شکل).
 بزرگی و خط اثر نیروی برآیندی که بر ربع دایره AB وارد می شود را تعیین کنید. طول دیوار 25 متر و چگالی آب برابر $1000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ است.



حل:

$$\gamma = \rho g = 1000 (9.81) = 9.81 \text{ (kN/m}^3\text{)}$$

$$\frac{4(1.6)}{3\pi} = 0.6791 \text{ (m)}$$



$$p_1 = \gamma h = (9.81)(1.4) \\ = 13.734(kN / m^2)$$

$$p_3 = \gamma h = (9.81)(3) \\ = 29.43(kN / m^2)$$

$$p_2 = \gamma h = (9.81)(3) \\ = 29.43(kN / m^2)$$

$$P_1 = p_1 A = (13.73)(1.6)(25) = 549.2 (kN)$$

$$P_2 = p_2 A = (13.73)(1.6)(25) = 549.2 (kN)$$

$$P_3 = \frac{p_2 - p_1}{2} A = \frac{29.43 - 13.73}{2} (1.6)(25) = 314.0 (kN)$$

$$W = (9.81) \frac{\pi(1.6)^2}{4} (25) = 493.1 kN$$

$$W = \gamma \times (\text{وزن آب موجود در ناحیه OAB})$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

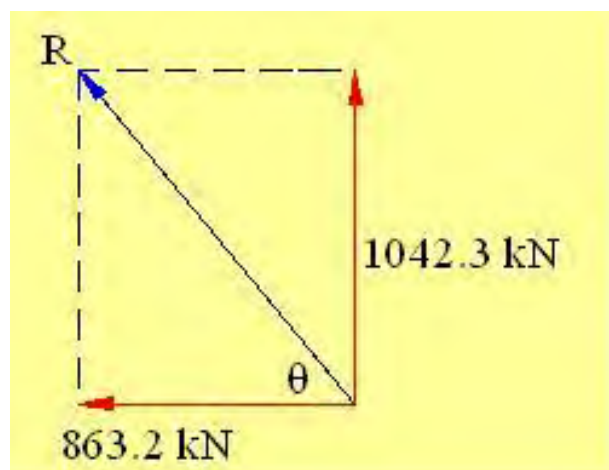
$$\Rightarrow P_2 + P_3 - R_x = 0$$

$$R_x = P_2 + P_3 = 549.2 + 314.0 = 863.2 (kN)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow R_y - W - P_1 = 0$$

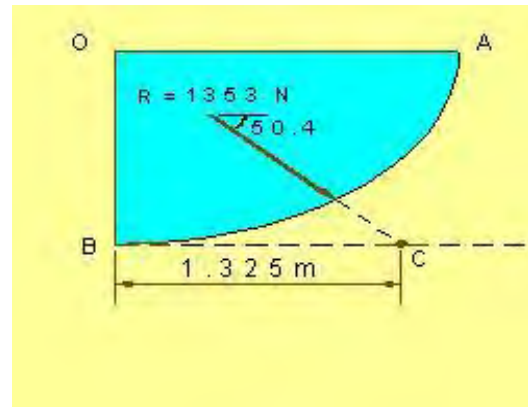
$$R_y = W + P_1 = 493.1 + 549.2 = 1042.3 (kN)$$



$$R = \sqrt{(863.2)^2 + (1042.3)^2} = 1353 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1042.3}{863.2} = 50.4^\circ$$

برای یافتن خط اثر R داریم:



تذکر: X ، فاصله بین B و C (محل تقاطع R و محور Xها) می باشد.

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\Rightarrow R_y x_0 - P_1(0.8) - P_2(0.8) - P_3(0.5333) - W(0.6791) = 0 \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{549.2(0.8) + 549.2(0.8) + 314.0(0.5333) + 493.1(0.6791)}{1042.3} = 1.325 \text{ (m)} \end{aligned}$$

نیرویی که توسط آب بر دیوار اعمال می شود مساوی و در خلاف جهت نیرویی است که در بالا تعیین شد.

فصل ششم

تحلیل سازه‌ها

مقدمه

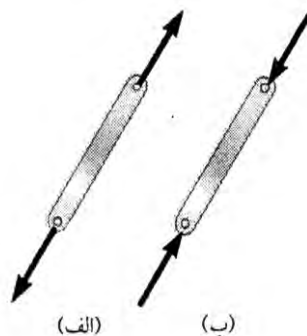
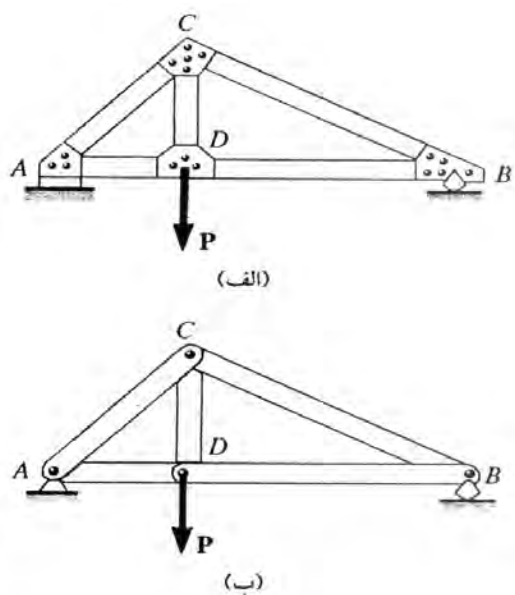
در فصلهای قبل، مسائل تعادل اجسام یک جسم صلب تنها را بررسی کردیم. در این مسائل تمام نیروها خارجی بودند. حال تعادل سازه هایی را بررسی می کنیم که از چند قسمت تشکیل شده اند. در این حالت، نه تنها نیروهای خارجی وارد به سازه، بلکه نیروهای بین قسمت های مختلف آن را، که برای کل سازه به عنوان نیروهای داخلی اند، می یابیم.

در این فصل سه گروه مهم از سازه های مهندسی را بررسی می کنیم:

خرپاها

- 1) سازه های مقید کامل اند که برای تحمل بار به کار می روند و معمولاً ساکن اند.
- 2) از عضو های مستقیمی ساخته شده اند که در دو انتها به هم مفصل شده اند. لذا عضوهای خرپا دو نیرویی اند، یعنی، عضوی که دو نیروی برابر و ناهمسو در امتداد آن اثر می کنند. (بصورت کششی یا فشاری است)
- 3) نیروها در مفصل قرار می گیرند.
- 4) نقاط مشترک مفصل فرض می شود.
- 5) وزن ها هم فرض می شود که در مفصل ها وارد می گردد.
- 6) تمام عضوهای خرپا در گره ها به یکدیگر لولا می شوند یعنی می توانند دوران کنند. (گشتاور در

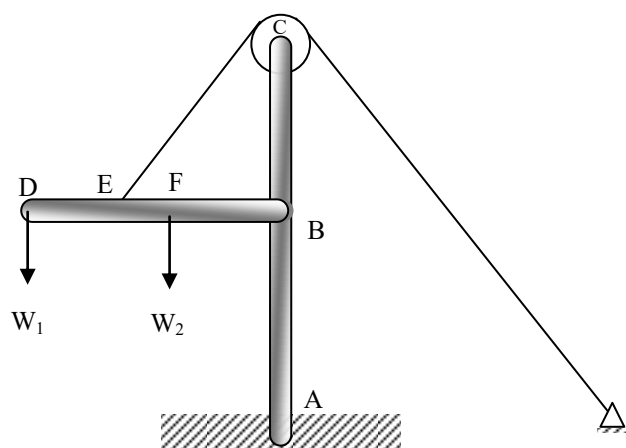
در نظر گرفته نمی شود.)



قاب ها

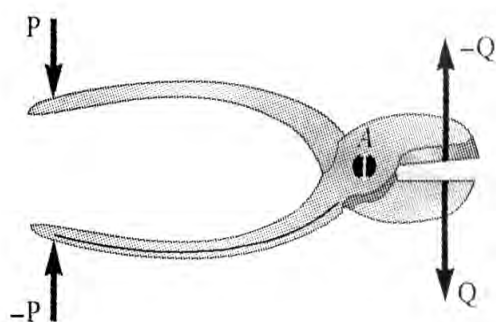
- 1) سازه های مقید کامل اند که برای تحمل بار به کار می روند و معمولاً ساکن اند.
- 2) قاب ها همواره شامل حداقل یک عضو چند نیرویی هستند، یعنی، عضوی که سه یا تعداد بیشتری نیرو، که معمولاً در امتداد عضو نیستند، بر آن اثر می کنند.

3) وظیفه قاب انتقال نیرو به تکیه گاه ها می باشد.



ماشین ها

- 1) سازه هایی هستند که دارای قطعات متحرک اند.
- 2) برای انتقال و تبدیل نیرو ها به کار می روند.
- 3) ماشین ها مانند قاب ها، همواره شامل حداقل یک عضو چند نیرویی هستند.
- 4) وظیفه آن ها انتقال نیرو یا تبدیل نیروست.



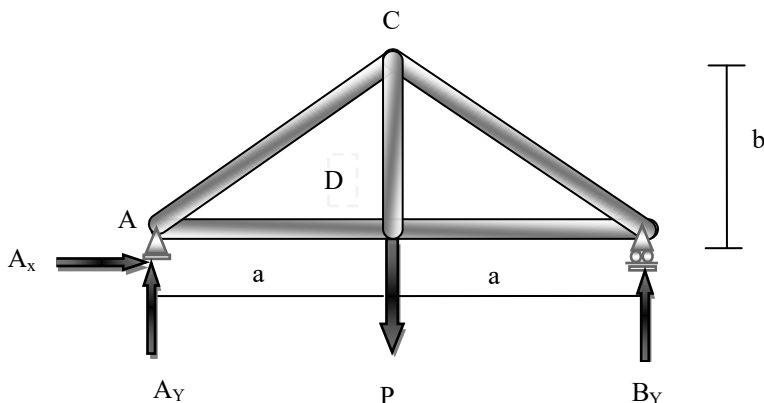
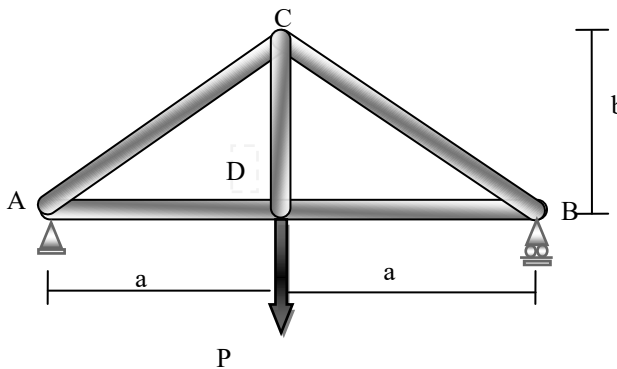
تحلیل خرپا با روش مفصل‌ها (اتصالات)

- 1) ترسیم نمودار آزاد جسم خرپا (برای تعیین واکنش در تکیه گاه‌ها)
- 2) انتخاب مفصل اول (انتخاب مفصل اول یکتا نیست، با تعیین واکنش در تکیه گاه‌های خرپا هر یک از دو مفصل را به عنوان نقطه شروع تحلیل میتوان انتخاب کرد).
- 3) ترسیم نمودار آزاد مفصلی که فقط دو عضو را به هم متصل کرده است.
- 4) ترسیم نمودار آزاد مفصلی که فقط نیروها در دو عضو اتصالی مجهولند.
- 5) تکرار این روش تا نیروها در تمام عضوهای خرپا تعیین شوند.

مثال:

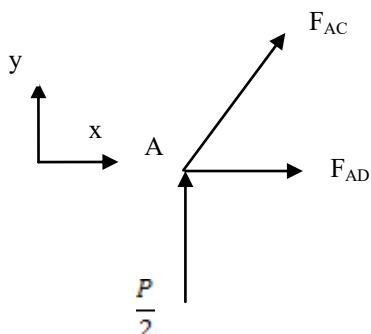
با استفاده از روش مفصل‌ها، نیرو در هر یک از عضوهای خرپای نشان داده شده را تعیین کنید و بگویید هر عضو تحت کشش است یا فشار؟

نکته: در خرپادونوع هرودار هم: فشاری (compression) یا کششی (tension) که به اختصار با (C) و (T) نشان می‌دهیم. هنگامی که نیرو داخل گره رود فشاری (C) است و هنگامی که نیرو از گره خارج شود کششی (T) است.



$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow A_x = 0 \\
 \sum M_A = 0 &\Rightarrow -P \times a + B_y \times 2a = 0 \Rightarrow B_y = \frac{P}{2} \\
 + \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow A_y = \frac{P}{2}
 \end{aligned}$$

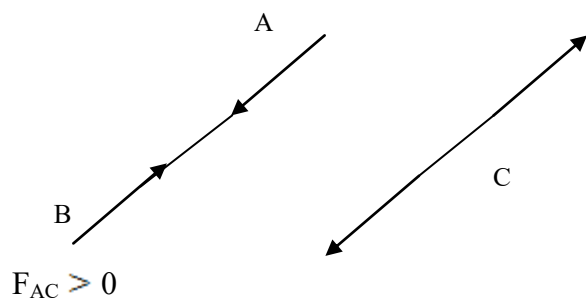
در دیاگرام جسم آزاد A خواهیم داشت:



دو معادله داریم چون سؤال در صفحه است .

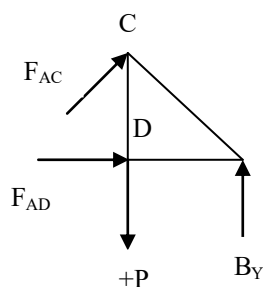
$$\begin{aligned}
 + \uparrow \sum F_y = 0 \\
 \frac{P}{2} + F_{AC} \sin \theta = 0 &\Rightarrow F_{AC} = -\frac{P}{2 \sin \theta} \quad (C) \\
 + \rightarrow \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{AC} \cos \theta + F_{AD} = 0 \\
 F_{AD} = +\frac{P}{2 \sin \theta} \cos \theta \quad (T)
 \end{aligned}$$

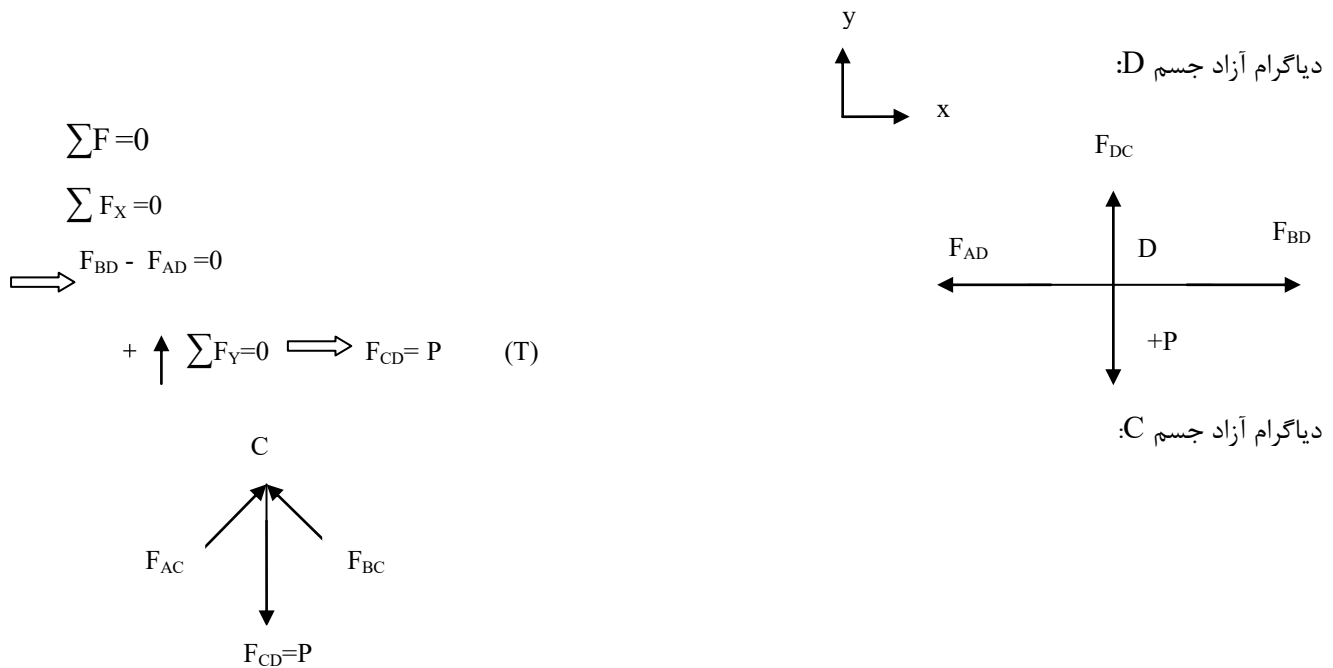
عضو C تحت کشش است .



لازم به ذکر است تحلیل بای از گره های معین شروع شود.

بقیه شکل:





$$\sum F = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow F_{BD} - F_{AD} = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CD} = P \quad (T)$$

$$\sum F_C = 0$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} = F_{AD}$$

لازم به ذکر است تحلیل گره (B) برای چک کردن درستی جواب ها مفید است ولی لازم نیست که آن را تحلیل کنیم.

خرپای معین (از نظر داخلی و خارجی):

هرخرپای ساده ای که دارای تکیه گاه ساده است مقید کامل و معین استاتیکی است

اگر تعداد گره هادر خرپا برابر j و تعداد عضوها m و تعداد عکس العمل ها r باشد. داریم تعداد معادلات $2j$ است و تعداد مجهولات $m+r$ است پس اگر:

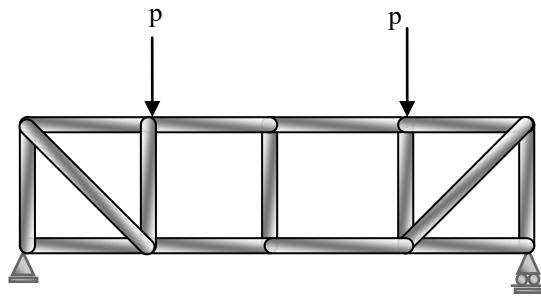
$$m+r > 2n(1) \quad \leftarrow \text{مقید ناقص (چون برخی از معادله ها برقرارن)}$$

$$m+r > 2n(2) \quad \leftarrow \text{نامعین (چون بعضی مجهولات را نمی توان تعیین کرد)}$$

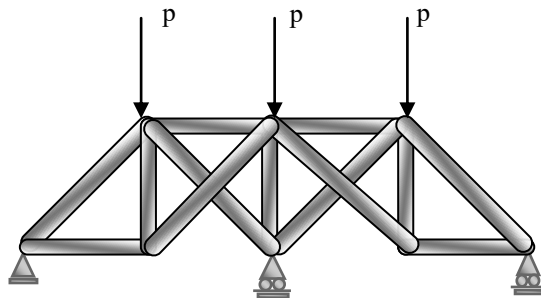
(3) $m+r=2n$ $\leftarrow$ تعداد معادلات و مجهولات با هم برابرند البته نه به این معنی که میتوان تمام مجهولات را حل کرد یا تمام معادلات برقرار میشوند برای این که خرپا مقید کامل است یا ناقص باید بررسی کرد که آیا میتوان تمام واکنش ها ونیرو ها در تمام عضو ها را تعیین کرد یا نه؛ اگر میتوان خرپا مقید کامل و معین استاتیکی است.

$$m+r-2j = \text{درجه نامعین}$$

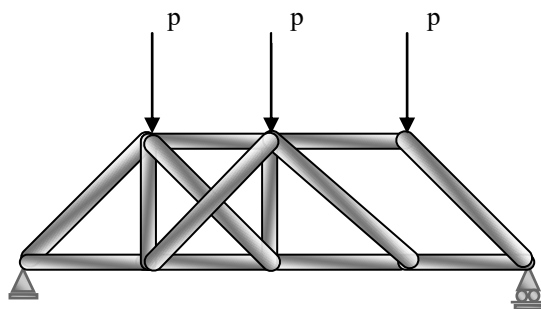
مثال: سازه های نشان داده شده را بر حسب مقید کامل، مقید ناقص، مقید نادرست طبقه بندی کنید. (آن هایی که مقید کاملند بر حسب معین و نامعین طبقه بندی کنید).



خرپای ساده با $r=3$, $m=16$, $n=10$ بنابراین $2n=20 > m+r=19$ در نتیجه سازه مقید ناقص است.



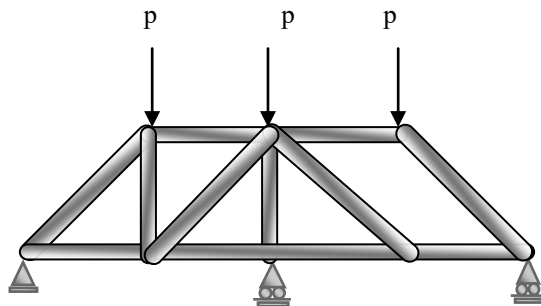
خرپای ساده با $r=4$, $m=13$, $n=8$ بنابراین $2n=16 < r+m=17$ در نتیجه مقید ولی نامعین است.



خرپای غیر ساده با $r=3$, $m=13$, $n=8$ بنابراین $2n=16 = r+m$

$$\sum M_A = aF_1 \neq 0$$

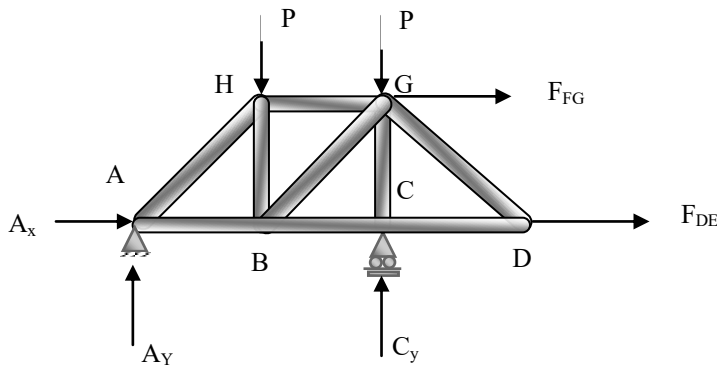
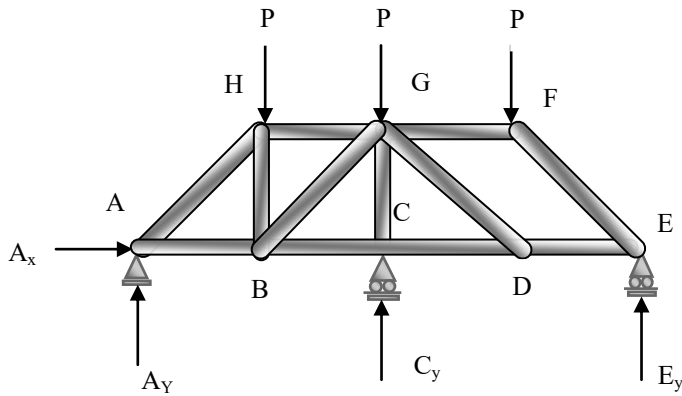
بنابراین سازه قید نامناسب است.



خرپای غیر ساده با $r=4$, $m=12$, $n=8$ بنابراین $2n=16 = r+m$

بررسی برای معین بودن:

یک بار می توان مفصل F به ازای نیروهای در EF، FG، و مفصل E به ازای E_y و نیرو در DE حل کرد.

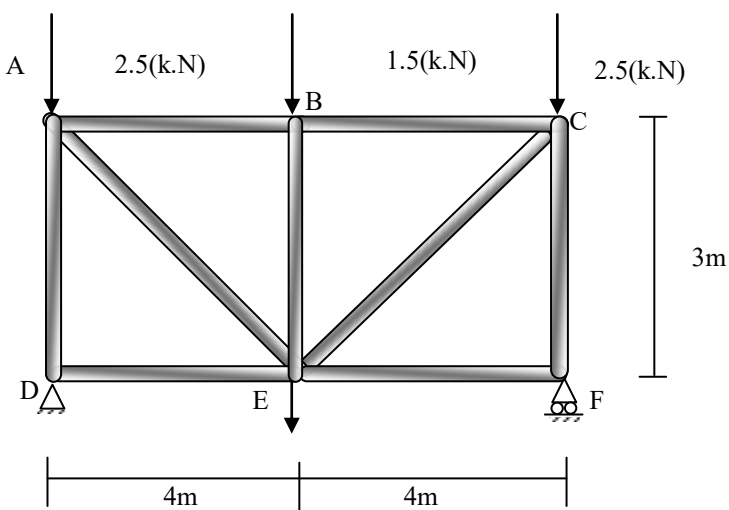


این سطوح یک خرپای ساده ABCDGH با

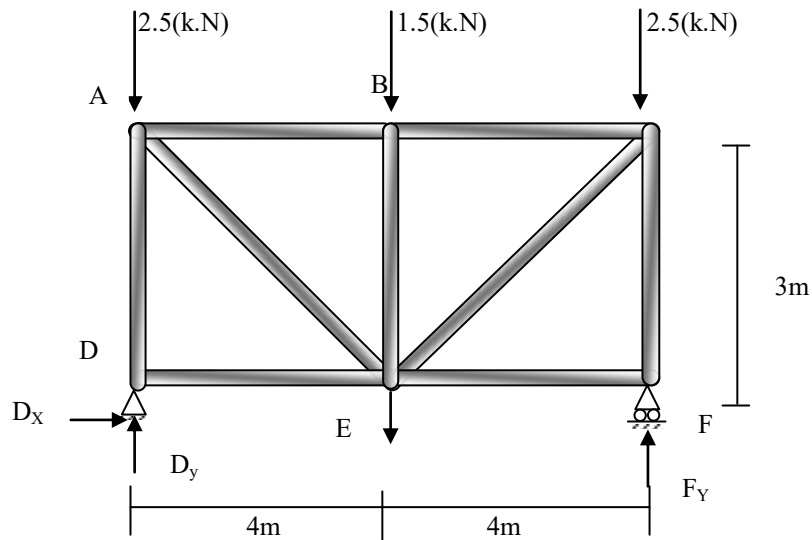
$n = 6$, $m = 9$, $R = 3$ بنابراین $r + m = 12 = 2n$ سازه به طور کامل مقید و معین است.

مثال: با استفاده از روش مفصل ها، نیرو در هر یک از عضوهای خرپای نشان داده شده را تعیین کنید و بگویید هر عضو تحت کشش

است یا فشار؟



دلیگرام آزاد جسم : C



خرپای فوق معین است زیرا:

$$m=9 \quad r=3 \quad j=6$$

$$m + r = 2J$$

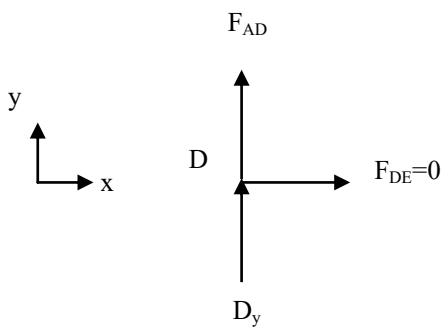
برای تقارن در بارگذاری داریم:

$$+\rightarrow \sum F_X = 0 \Rightarrow$$

$$D_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0$$

$$\Rightarrow D_y = F_y$$



$$D_y + F_y = 8$$

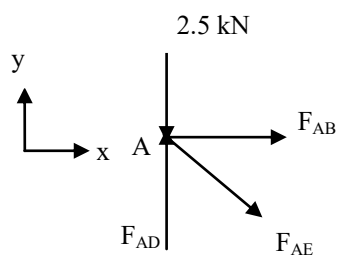
$$D_y = F_y = 4 \text{ kN}$$

در گره D داریم:

$$F_{AD} = 4 \text{ kN} = D_y = F_{CF} \quad (C)$$

$$F_{DE} = 0$$

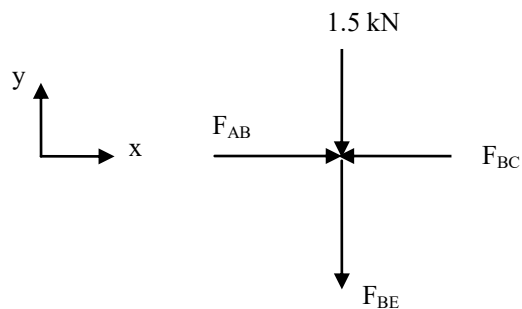
در گره A داریم:



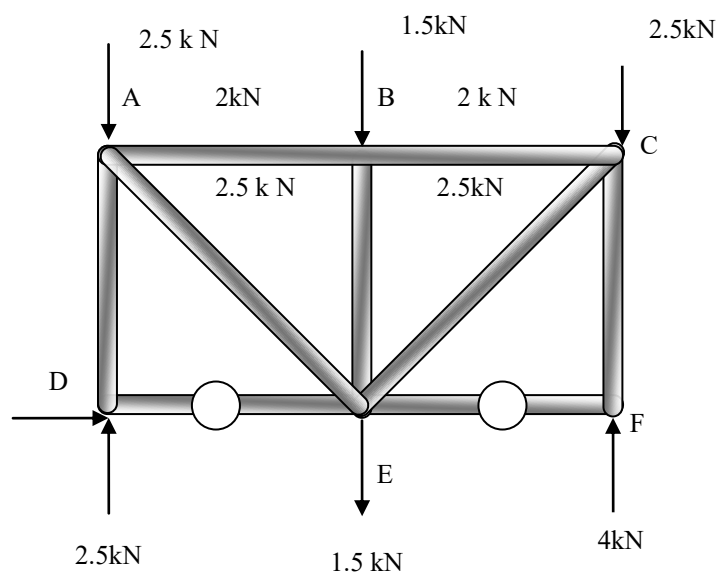
$$F_{AE} \times \frac{3}{5} + 4 - 2.5 = 0 \implies F_{AE} = -2.5 \text{ kN (T)}$$

$$-F_{AB} - F_{AE} \times \frac{4}{5} = 0 \implies F_{AB} = 2 \text{ kN}$$

در گره B داریم:



$$F_{BE} = 1.5 \text{ kN}$$

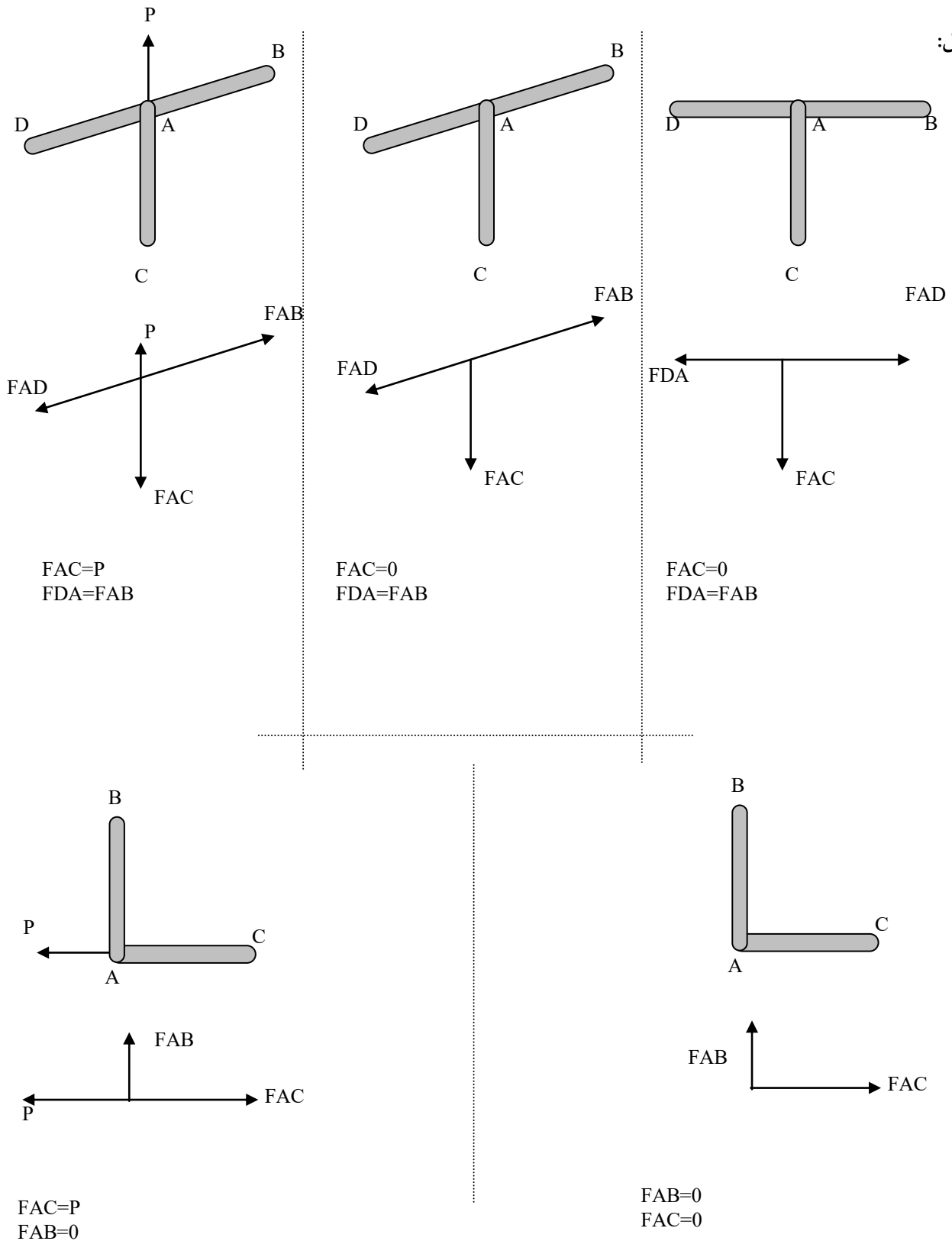


حالات خاص گره ۱۰۰:

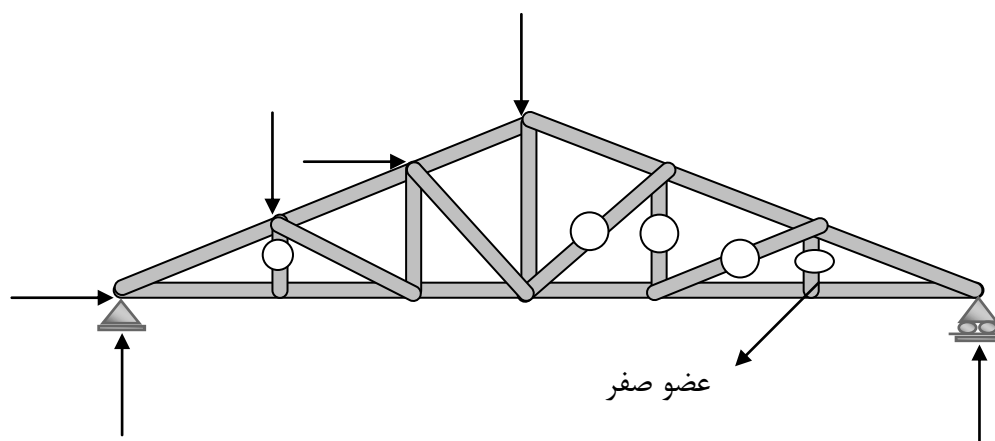
اگر سه عضو در گره به هم متصل شوند و نیروی خارجی به مفصل وارد نشود و دو عضو در یک راستا باشند عضو دیگر عضو

صفر نیرویی گویند .

مثال:



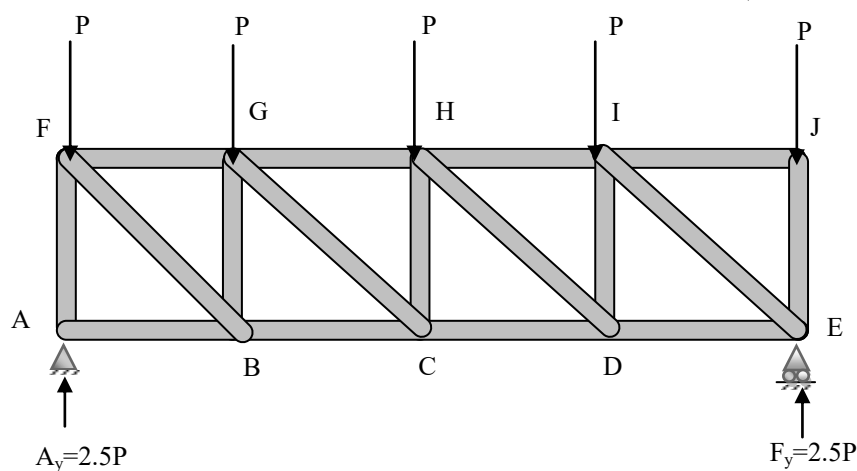
مثال: عضوهای صفر نیروی را نشان دهید.



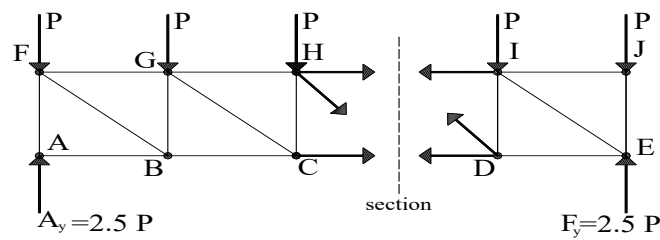
تحلیل خرپا به روش برش روش قطع یا روش برش: (section)

- برای تعیین نیروها در تمام عضوهای یک خرپای ساده روش مفصل ها که قبلا بررسی شد معمولا بهترین روش است ولی برای تعیین نیرو در یک عضو تنها یا در چند عضو اندک یک خرپای ساده، روش مقاطع بهتر است.
 - (1) ترسیم نمودار آزاد جسم خرپا (برای تعیین واکنش در تکیه گاه ها)
 - (2) عبور خط برش از سه عضو خرپا، که یکی از آنها عضو مورد نظر است. پس از حذف این عضوها خرپا به دو سمت جداگانه تقسیم می شود.
 - (3) انتخاب یکی از دو قسمت خرپا و ترسیم نمودار جسم آزاد آن
 - (4) نوشتن سه معادله تعادل
- در عبور خط برش باید دقت شود که خط برش فقط سه عضو را قطع کند زیرا باحل معادله های تعادل نمی توان بیش از سه مجهول را حل کرد.

مثال: فرض کنیم F_{HD} را بخواهیم :



برش روبرو می‌تواند مقادیر F_{HD} بدهد.



سازه باید دارای دو نیمه در تعادل باشد.

از تعادل در صفحه سه معادله و سه مجهول و F_{HD} بدست می‌آید.

باید توجه داشته باشیم که از آنجایی که سه معادله تعادل داریم برش ما باید به گونه‌ای باشد که سه نیروی مجهول داشته باشیم.

ضمناً می‌توانستیم بجای نیمه ی سمت چپ نیمه سمت راست را مورد نظر قرار دهیم.

با برش فوق داریم:

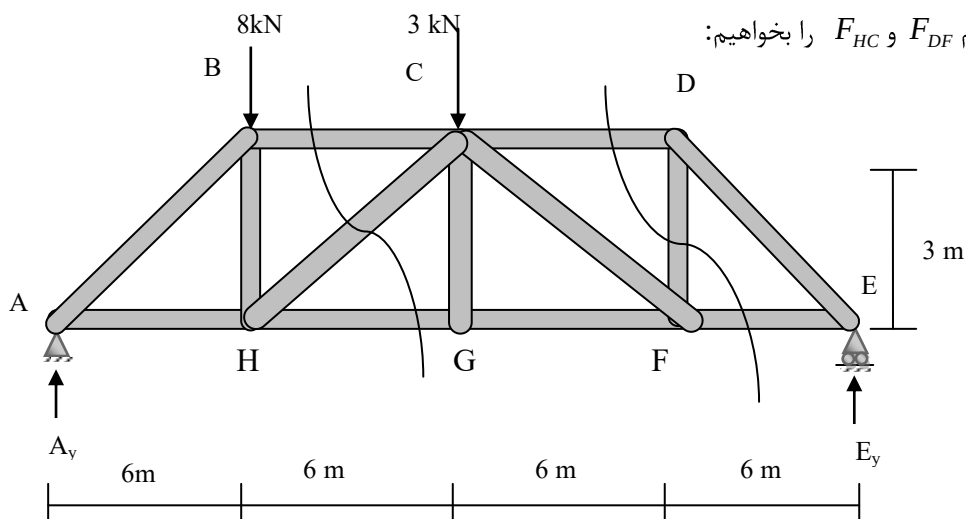
$$+\rightarrow \sum F_X = 0$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \Rightarrow$$

$$F_{HD} \sin \theta - 2P + 2.5P = 0 \Rightarrow F_{HD} = \frac{-0.5P}{\sin \theta}$$

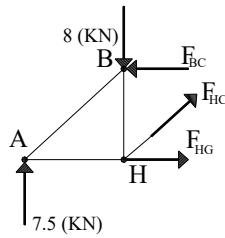
$$\sum M_A = 0$$

مثال: فرض کنیم F_{HC} و F_{DF} را بخواهیم:



برش روبرو می‌تواند مقادیر F_{HC} بدهد.

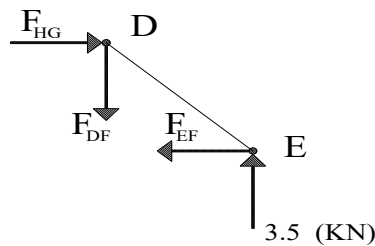
سازه باید دارای دو نیمه در تعادل باشد.



از تعادل در صفحه سه معادله و سه مجهول داریم و F_{HC} بدست می آید.

ضمناً می توانستیم بجای نیمه ی سمت چپ نیمه سمت راست را مورد نظر قرار دهیم.

برش روبرو می تواند مقادیر F_{DF} بدهد.



$$+\uparrow \sum M_E = 0 \quad -A_y \times 24 + 8 \times 18 + 3 \times 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_y = 7.5 \quad \text{k N}$$

$$\Longrightarrow (+) \sum F_y = 0 \quad E_y = 3.5 \text{ K N}$$

با برش سمت چپ داریم:

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 7.5 - 8 + F_{HC} \times \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow F_{HC} = \frac{5}{8} \text{ (KN) (T)}$$

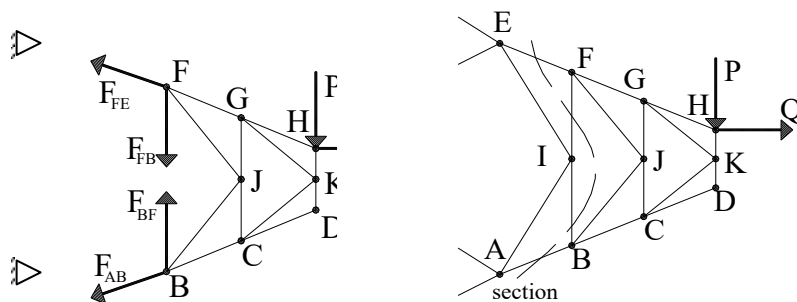
با برش سمت راست داریم:

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Longrightarrow F_{DF} = 3.5 \quad \text{k N} \quad (\text{T})$$

نکته: گاهی ممکن است برای بدست آوردن ردهای داخلی مورد نظر چند برش قبل از رسیدن به عضو مورد نظر بزرگ تا

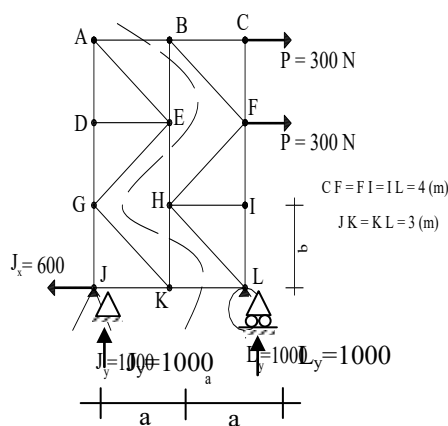
مجهولات برش اصلی کاهش یابد.

مثال:



$$\odot \sum M_F = 0 \Rightarrow F_{AB} \text{ بدست می آید.}$$

مثال:

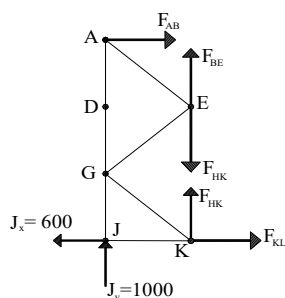


خرپای پایدار معین: $M = 21 \quad r = 3 \quad j = 12 \quad m + r = 2j$

$$L_y \times (2 \times 3) = (2 \times 4) \times p + (3 \times 4) \times p$$

$$\Rightarrow L_y = \left(\frac{5 \times 4}{2 \times 3} \right) \times p = 1000 \text{ (N)}$$

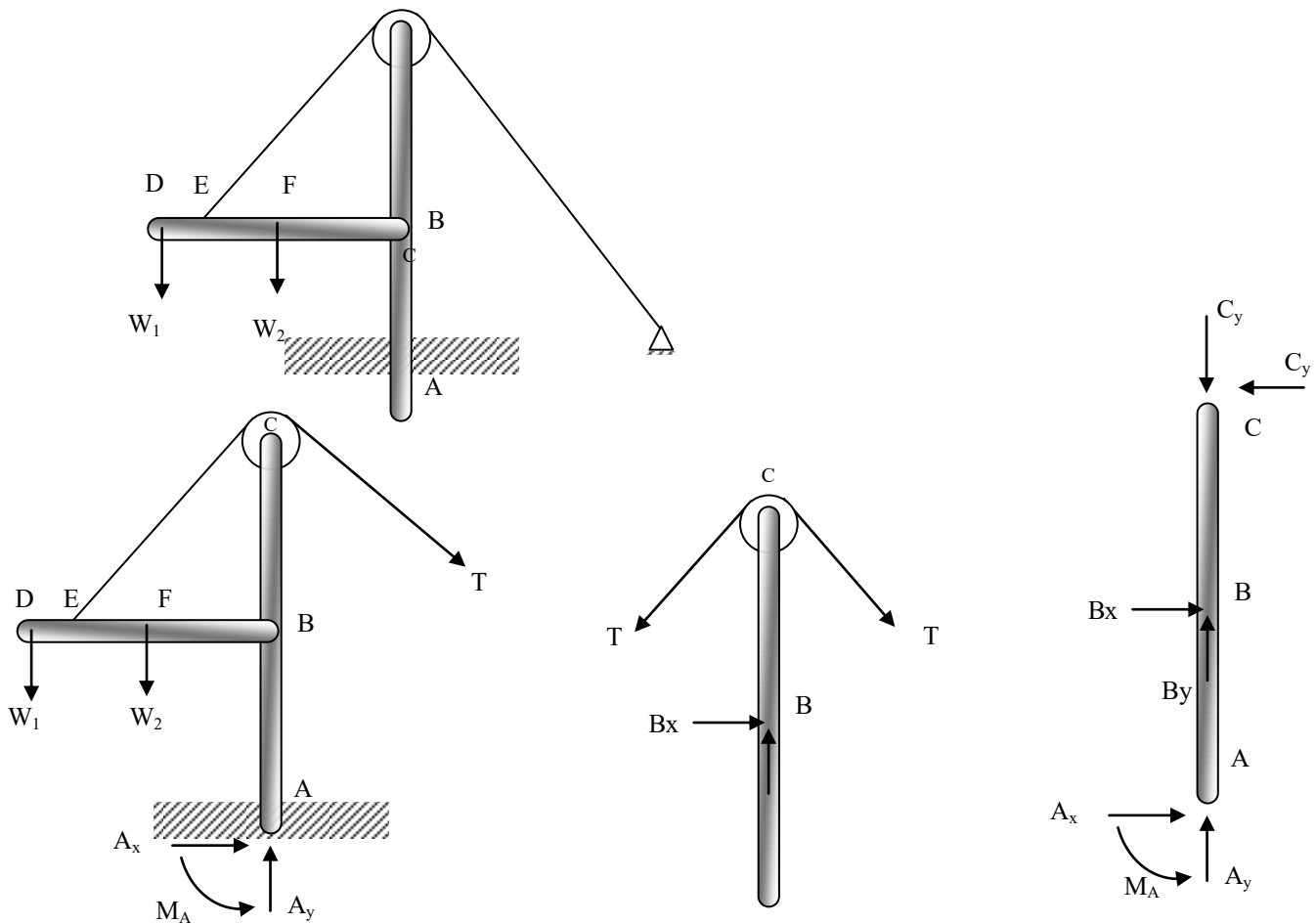
$$-j_y + L_y = 0 \rightarrow j_y = \left(\frac{5 \times 4}{2 \times 3} \right) \times p = 600 \text{ (N)}$$



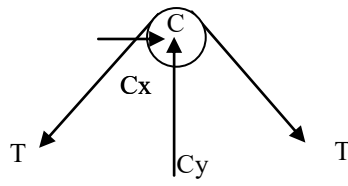
$$\odot \sum M_K = 0 \rightarrow j_y \times (3) - F_{AB} \times (3 \times 4) = 0 \Rightarrow F_{AB} = 250 \text{ (N) (T)}$$

قاب ها و ماشین ها:

برخلاف خرپاها که سازه هایی هستند با عضوهای صاف و مستقیم و دو نیروئی، قاب ها و ماشین ها سازه هایی هستند که حداقل یکی از آن عضوها از دو نیرویی بیشتر باشد. عضو چندنیرویی طبق تعریف عضوی است که سه یا تعداد بیشتری نیرو و سه یا تعداد بیشتری کوپل به آن وارد می شود. قاب سازه ای است که برای تحمل بار طراحی می شود و معملاً در محل خود ثابت است. ماشین سازه ای است که دارای قطعات متحرک است و برای تبدیل نیرو یا کوپل ورودی یا کوپل خروجی معینی طراحی می شود. برای تعیین نیروهای وارد بر هر یک از ایضای سیستم آن را منزوی می کنیم و دیاگرام آزاد آن را رسم می کنیم و معادلات تعادل را برای آن می نویسیم. هنگام نمایش نیروها در دیاگرام آزاد اعضای مختلف بای عمل و عکس العمل را با دقت رعایت می کنیم.

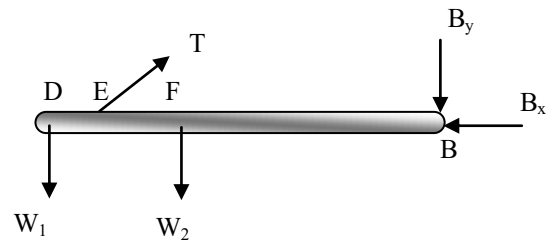


1- دیاگرام آزاد قاب



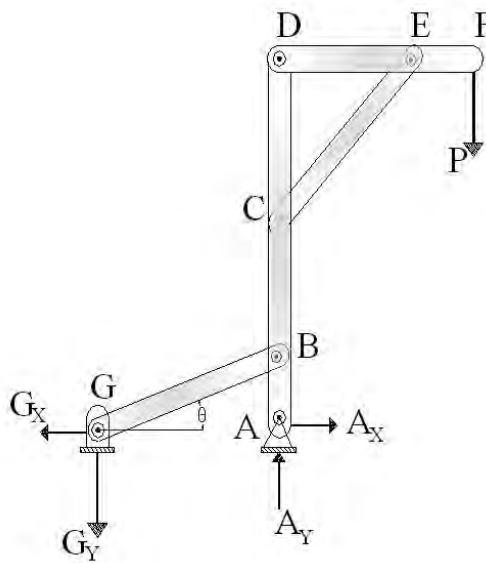
4- دیاگرام آزاد قرقه

2- دیاگرام آزاد عضو AC با قرقه



5- دیاگرام آزاد عضو DB

مثال:



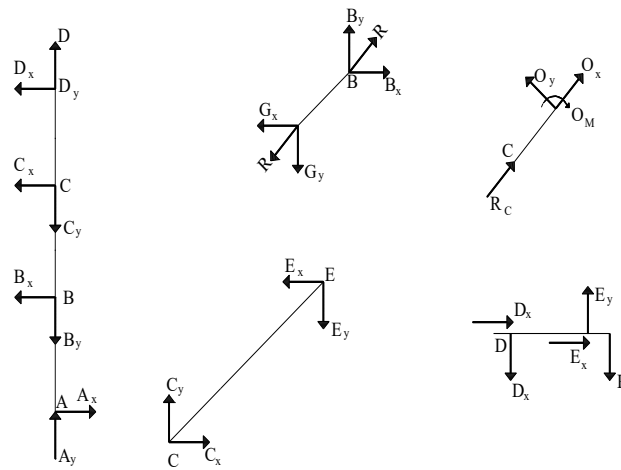
$$\tan \theta = \frac{G_y}{G_x} \Rightarrow G_x = \frac{G_y}{\tan \theta}$$

$$\oplus \odot \sum M_D = 0 \Rightarrow C_x = ? \text{ \& } C_y = ?$$

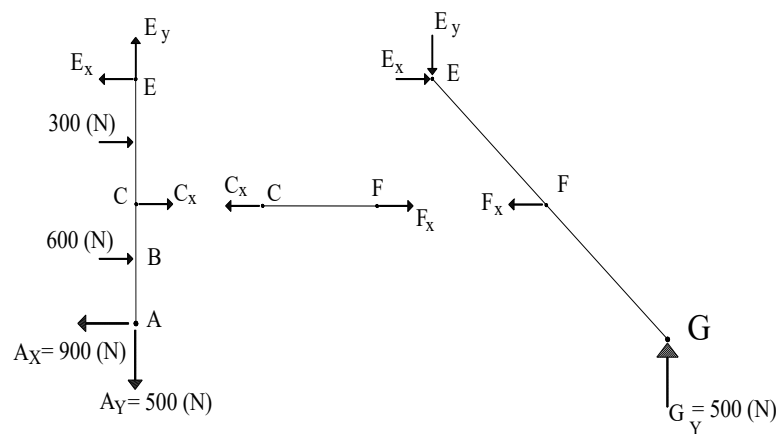
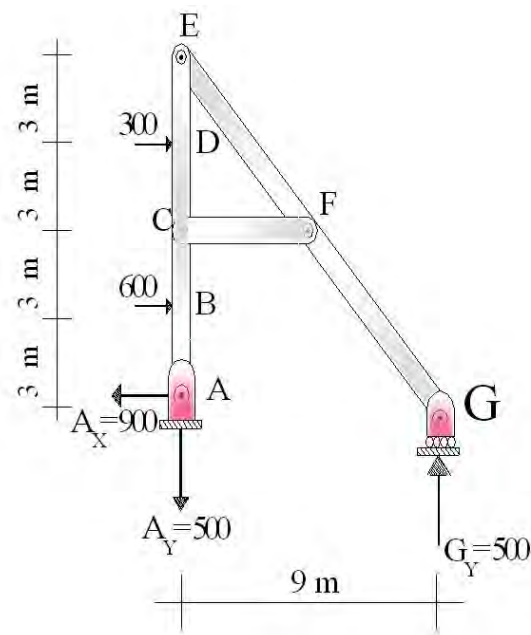
$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow O_y = 0$$

$$\oplus \circlearrowleft \sum M_O = 0 \Rightarrow O_M = 0$$

$$\oplus _ \sum F_x = 0 \Rightarrow R_C + O_x = 0 \Rightarrow O_x = -R_C$$



مثال: ریزوهای داخلی را تعیین کنید .



ابتدا رُخوهای عکس العمل را محاسبه می‌کنیم سپس رُخوهای داخلی :

$$\oplus \odot \sum M_A = 0 \Rightarrow G_y = P \Rightarrow 600 \times (3) + 300 \times (9) = G_y \times (9) \Rightarrow G_y = 500 \text{ (N)}$$

$$\oplus \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = -500 \text{ (N)}$$

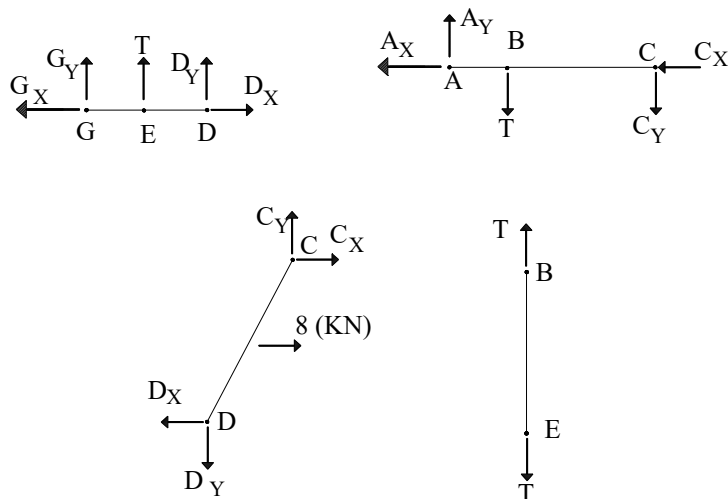
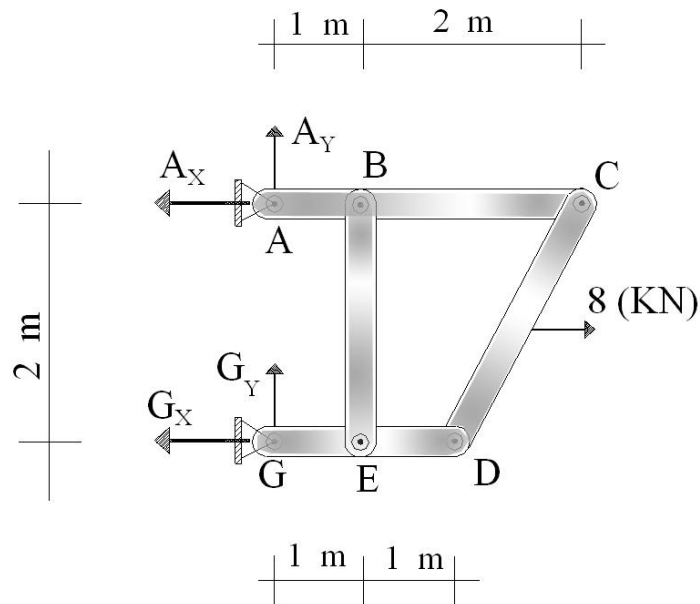
$$\oplus \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 900 \text{ (N)}$$

$$\oplus \odot \sum M_C = 0 \Rightarrow -900 \times (6) + 600 \times (3) - 300 \times (3) - E_y \times (6) = 0 \Rightarrow$$

$$E_y = -750 \text{ (N)}$$

نکته: در قاب‌ها نیروها می‌توانند در نقطه‌ای به غیر از مفصل نیز وارد شوند.

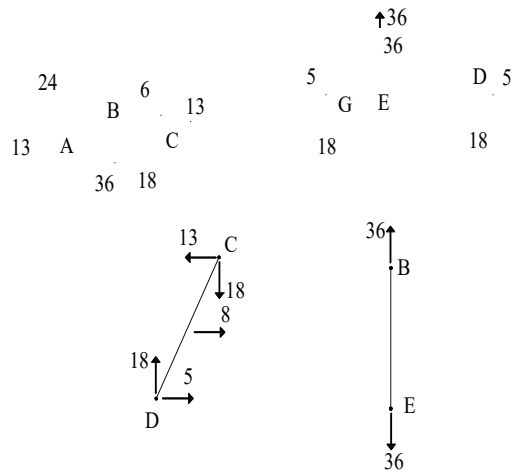
مثال:



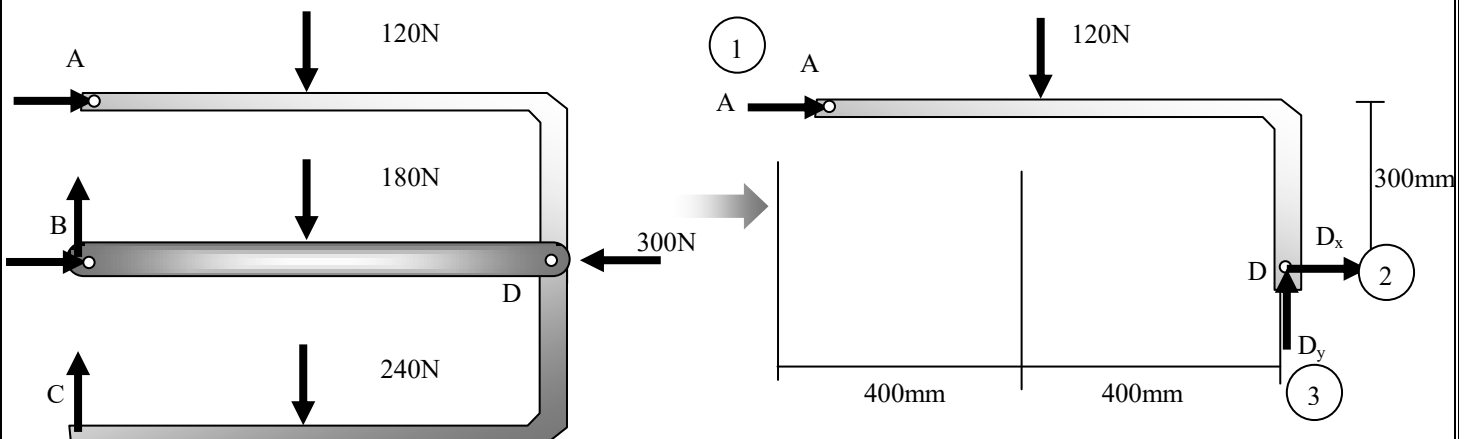
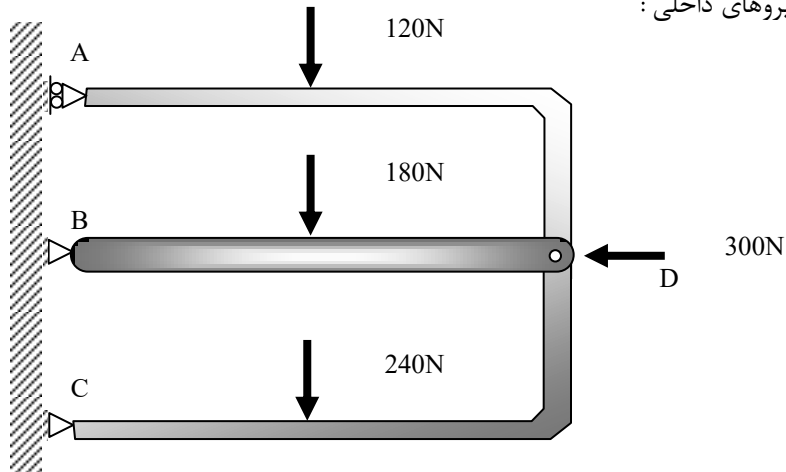
9 معادله و 9 مجهول زی که قابل حل می باشد .

$$A_x, A_y, T, C_x, C_y, D_x, D_y, G_x, G_y$$

اگر نیروی 6 (KN) روی گره C قرار گیرد در این صورت دلی گرام جواب ها پس از حل معادلات به صورت زی در می آیند .



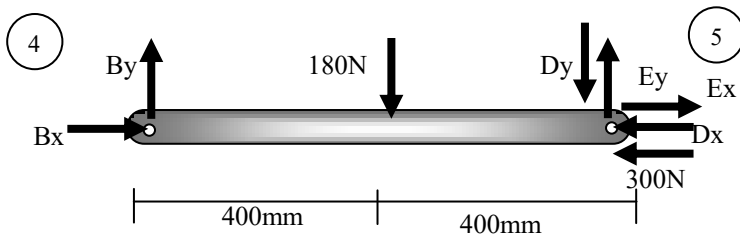
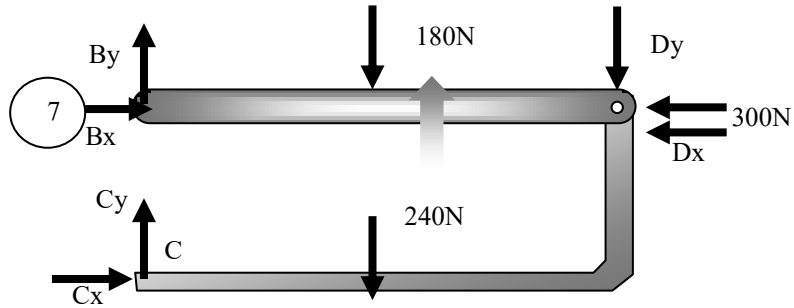
مثال: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی :



$$(i) + \sum M_D = \cdot \Rightarrow A = 160 \rightarrow$$

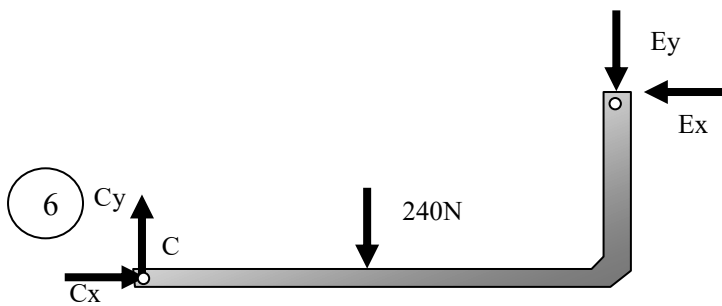
$$(ii) + \rightarrow \sum F_x = \cdot \Rightarrow D_x = 160 \leftarrow$$

$$(iii) + \uparrow \sum F_y = \cdot \Rightarrow D_y = 160 \uparrow$$



$$(iv) + \sum M_D = \cdot \Rightarrow B_y = 90 \uparrow$$

$$(v) + \uparrow \sum F_y = \cdot \Rightarrow E_y = 210 \uparrow$$

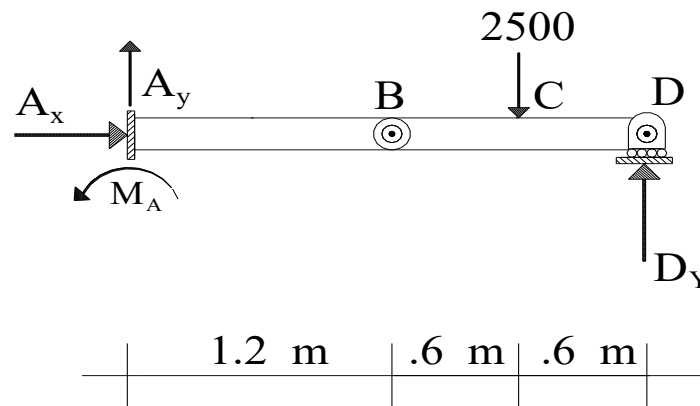


$$(6) + \sum M_C = \cdot \Rightarrow E_x = 880 \uparrow$$

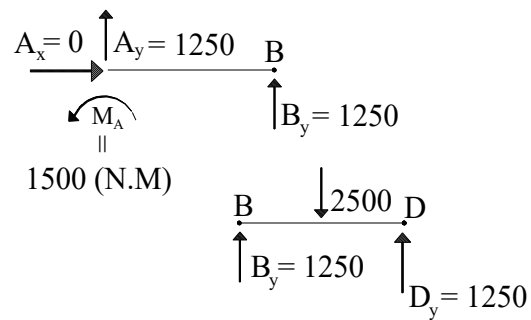
$$(6) + \uparrow \sum F_y = \cdot \Rightarrow C_y = 450 \uparrow$$

$$(7) + \rightarrow \sum F_x = \cdot \Rightarrow B_x = 740 \leftarrow$$

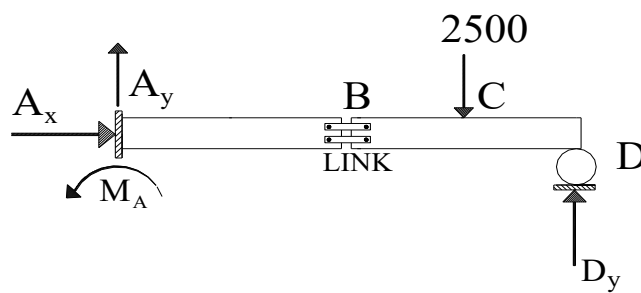
مثال: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی :



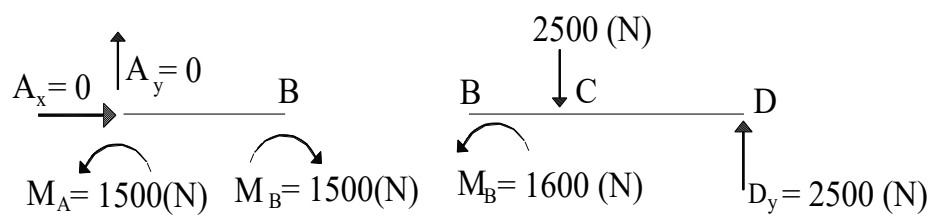
پس از حل کردن داریم :

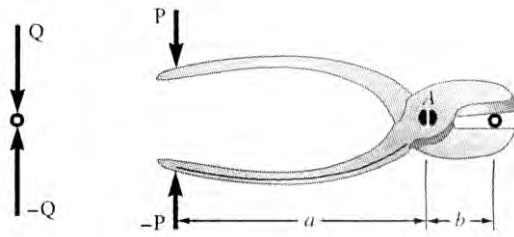


مثال: مطلوب است تعیین نیروهای داخلی :

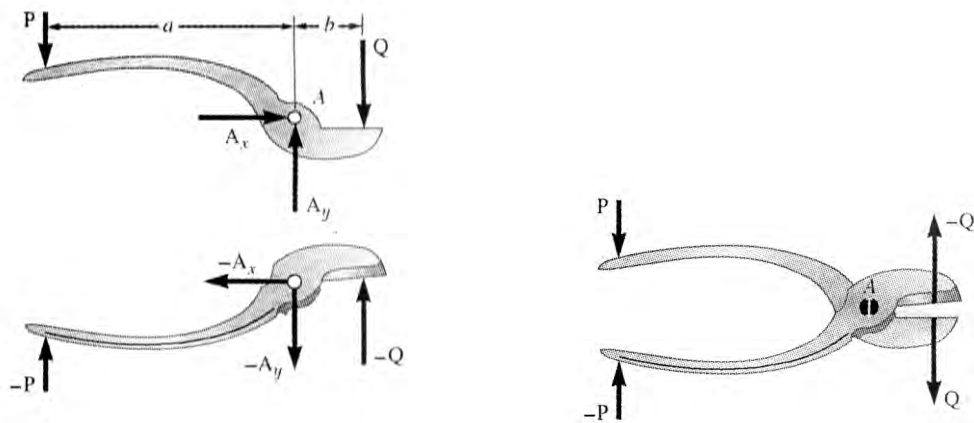


در واقع چون دو ر

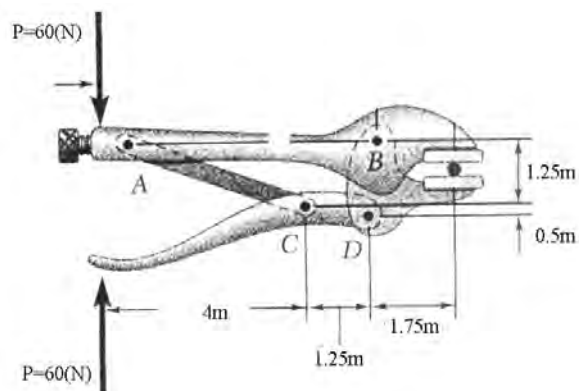




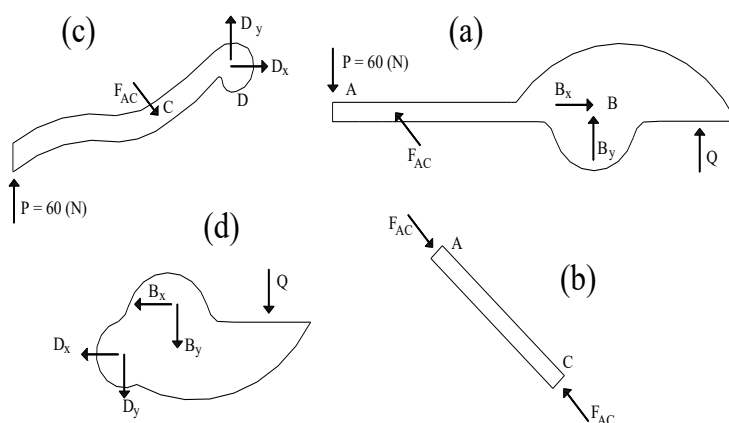
$$\oplus \odot M_B = 0 \Rightarrow (b) \times Q - (a) \times P = 0 \Rightarrow Q = P \times \frac{a}{b}$$



مثال: مطلوب است تعیین نیروهای وارده بر سیستم در E , F .



توجه به شکل خواهیم داشت:



در دیاگرام (C) داریم:

$$\oplus \odot \sum M_D = 0$$

$$(-60) \times (5.25) + F_{AC} \times \frac{1.25}{\sqrt{(3.5)^2 + (1.25)^2}} \times (1.25) - F_{AC} \times \frac{(3.5)}{\sqrt{(3.5)^2 + (1.25)^2}} \times (0.25) = 0$$

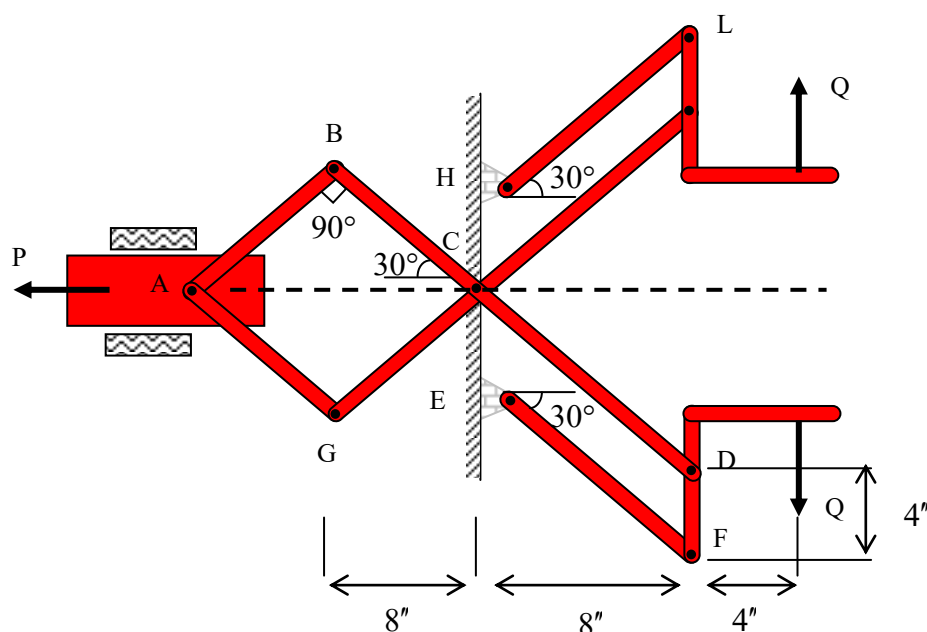
$$\Rightarrow \frac{F_{AC}}{\sqrt{(3.5)^2 + (1.25)^2}} = 458.2 \text{ (N)}$$

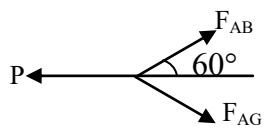
در دیاگرام (a) داریم:

$$\oplus \odot \sum M_B = 0$$

$$Q \times (1.5) + 60 \times (5.5) - F_{AC} \times \frac{(5) \times (1.25)}{\sqrt{(1.25)^2 + (3.5)^2}} = 0 \Rightarrow Q = 1689 \text{ (N)}$$

مثال: مکانیزم نشان داده شده کنترل انگشتهای یک روبات را نشان می دهد رابطه بین نیروی P و نیروی نگهدارنده Q را.





$$P = 2F_{AB} \cos 60^\circ$$

$$F_{AB} = P$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0:$$

$$- Q(4) + (F_{EF} \cos 30)(4) = 0$$

$$F_{EF} = \frac{Q}{\cos 30} = 1.15Q$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0:$$

$$-D_x + F_{EF} \cos 30 = 0$$

$$D_x = F_{EF} \cos 30$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0:$$

$$D_y - F_{EF} \sin 30 - Q = 0$$

$$D_y = 1.575Q$$

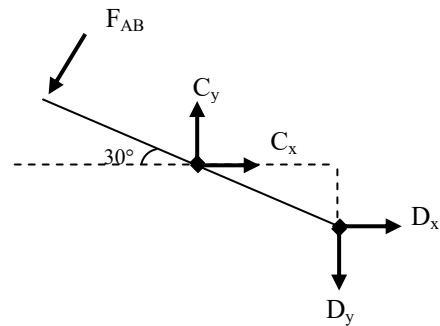
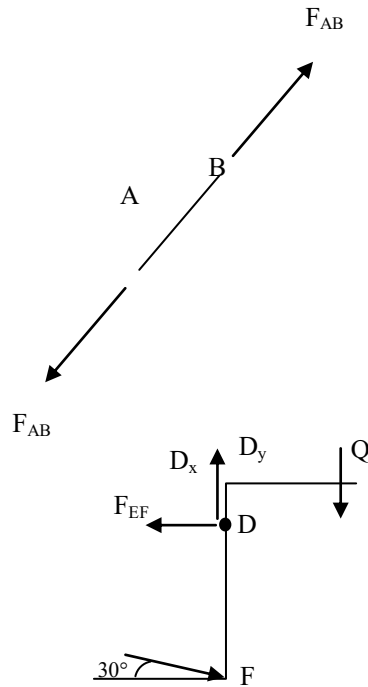
$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0:$$

$$+F_{EB}(9.238) - 8D_y + D_x(8 \tan 30) = 0$$

$$+P(9.238) - 8(1.575Q) + (4.619)Q = 0$$

$$+9.238 - 7.98Q = 0$$

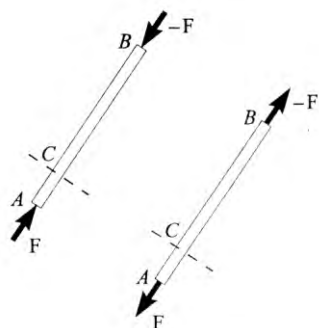
$$\boxed{Q = 1.157P} \quad , \quad \boxed{P = 0.866Q}$$



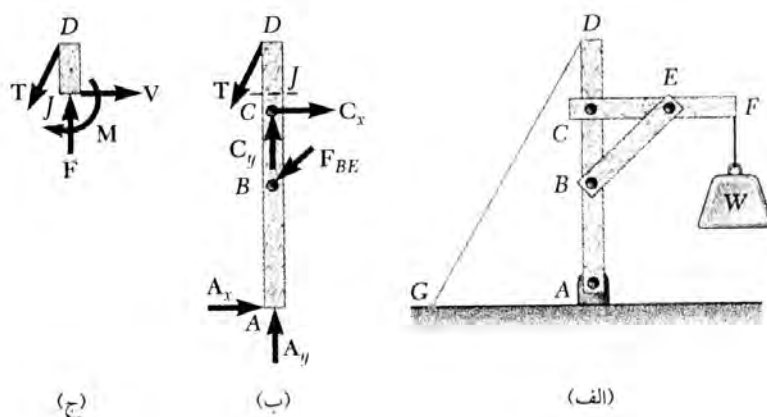
فصل هفتم

نیروها در تیرها و کابلها

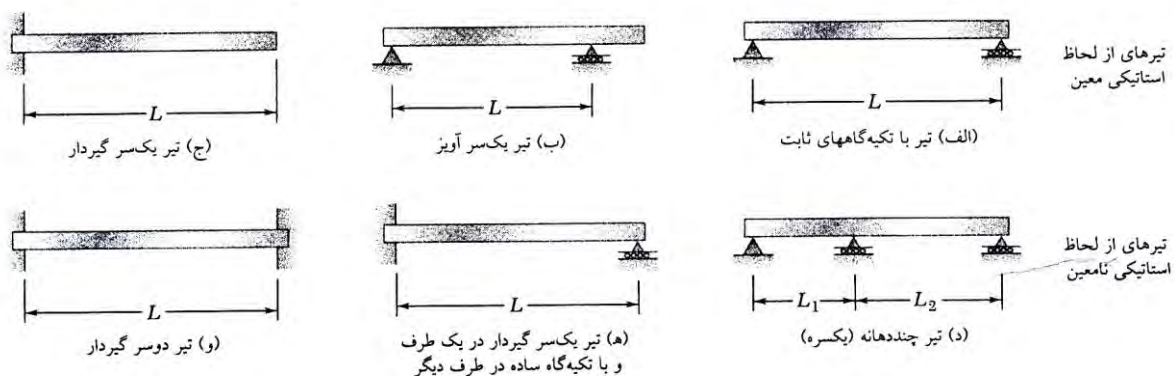
عضوهای خریا - نیروهای دو جهت محور عضو 0- عضو دو نیروئی



عضوهای قاب - در حالت کلی عضوهایی با نیروهای مانند محوری و برشی و خمشی



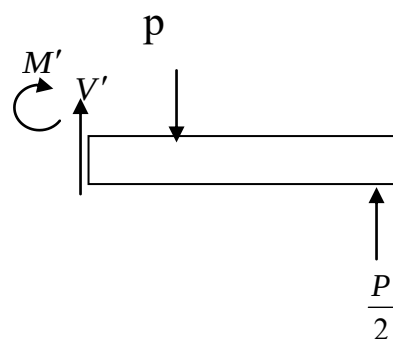
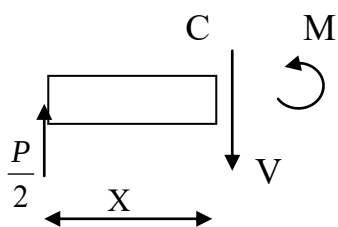
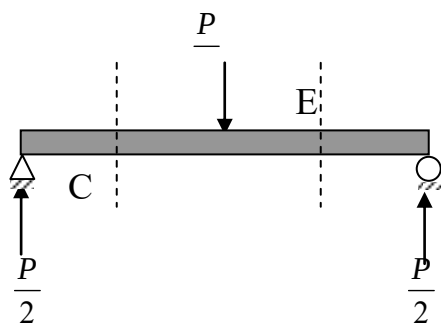
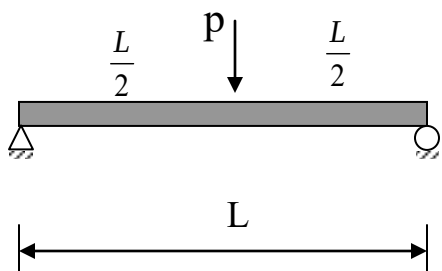
تیرها - حالات مختلف با رگذاری و تکیه گاه‌ها



می‌خواهیم نیروهای داخلی در نقطه c از این تیر را بدست بیاوریم.

$$\begin{aligned}
 &+\sum M_A=0 \Rightarrow R_B = \text{اول به} \\
 &+\uparrow \sum f_g=0 \Rightarrow R_A = \\
 &+\uparrow \sum f_y=0 \Rightarrow V = \text{دوم} \\
 &+\sum Mc=0 \Rightarrow M =
 \end{aligned}$$

- دیاگرام برش ها و گشتاورها (خمش ها)



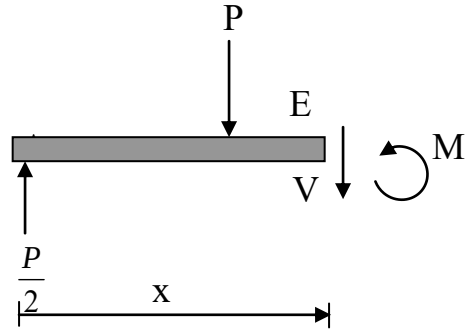
شکل AC :

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} - V = 0 \quad V = \frac{P}{2}$$

$$+\uparrow \sum M_C = 0 \quad M = \frac{P}{2} x$$

$$@ x = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{2}, \quad M = 0$$

$$@ x = \frac{L}{2} \Rightarrow V = \frac{P}{2}, \quad M = \frac{PL}{4}$$



شکل AE : $+\uparrow \sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} - P - V = 0 \quad V = -\frac{P}{2}$

$+\uparrow \sum M_C = 0 \quad M = P(L-x)/2$

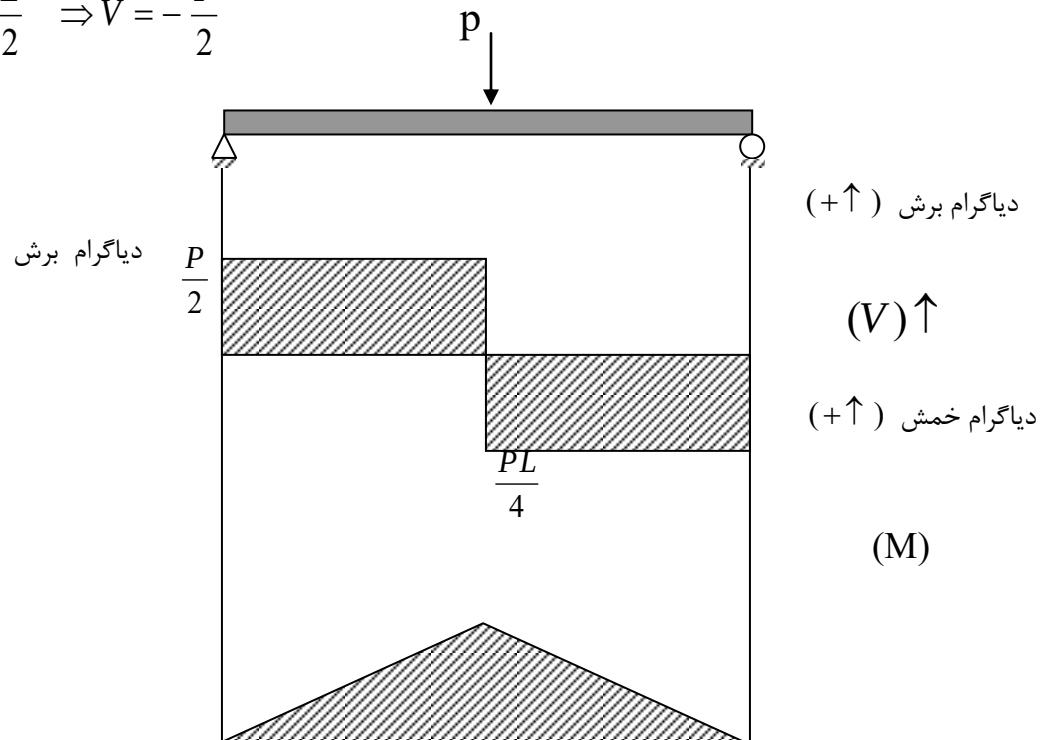
@ $x = \frac{L}{2} \Rightarrow M = \frac{PL}{4}$

@ $x = L \Rightarrow M = 0$

@ $x = \frac{L}{2}^- \Rightarrow V = \frac{P}{2}$

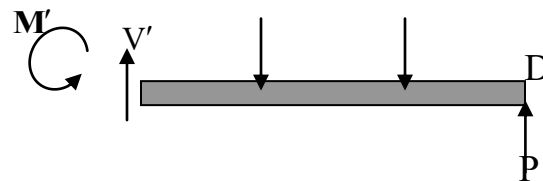
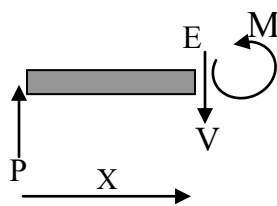
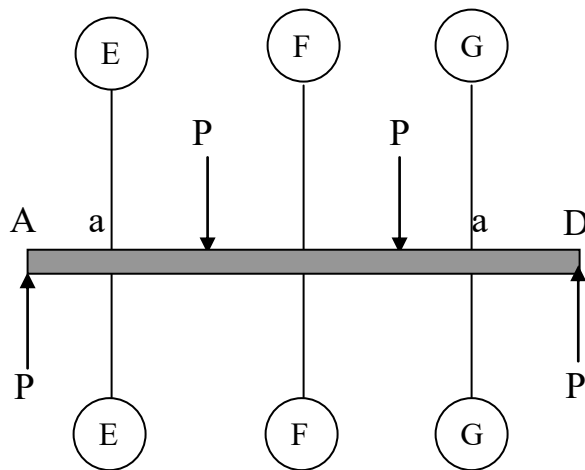
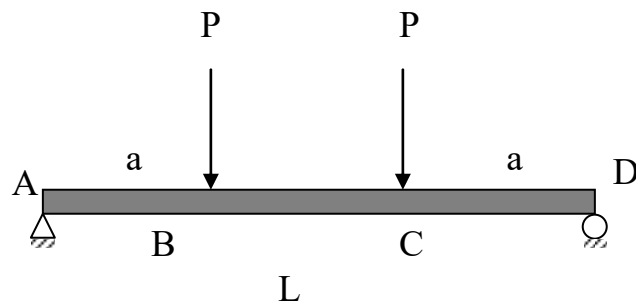
@ $x = L \Rightarrow V = -\frac{P}{2}$

@ $x = \frac{L}{2}^+ \Rightarrow V = -\frac{P}{2}$



مثال :

نمودار خمشی و برش تیر زیر را رسم کنید



$$0 < x < a$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = P$$

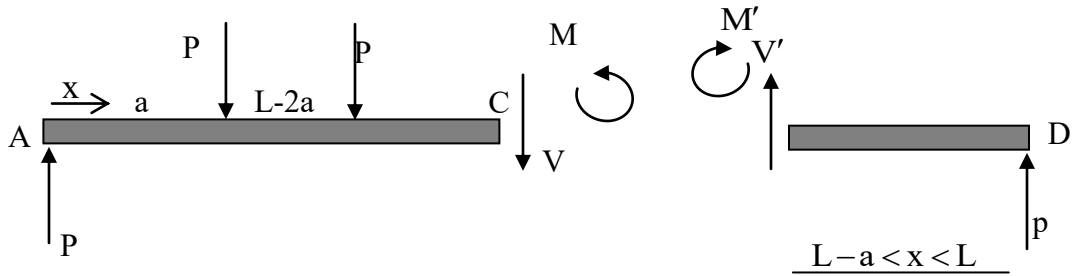
$$+\curvearrowright \sum M_E = 0 \Rightarrow M = Px$$

$$a < x < L - a$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 0$$

$$\curvearrowright \sum M_E = 0 \Rightarrow m = P(x)$$

$$L - a < L$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -p$$

$$+\curvearrowright \sum M_G = 0 \Rightarrow m = P(L) - P(x)$$

$$m - Px + P(x-a) + P[x - (L-a)] = 0$$

$$m - Px + Px - Pa + Px - P(L-a) = 0$$

$$x=0 \Rightarrow V=P, \quad m=0$$

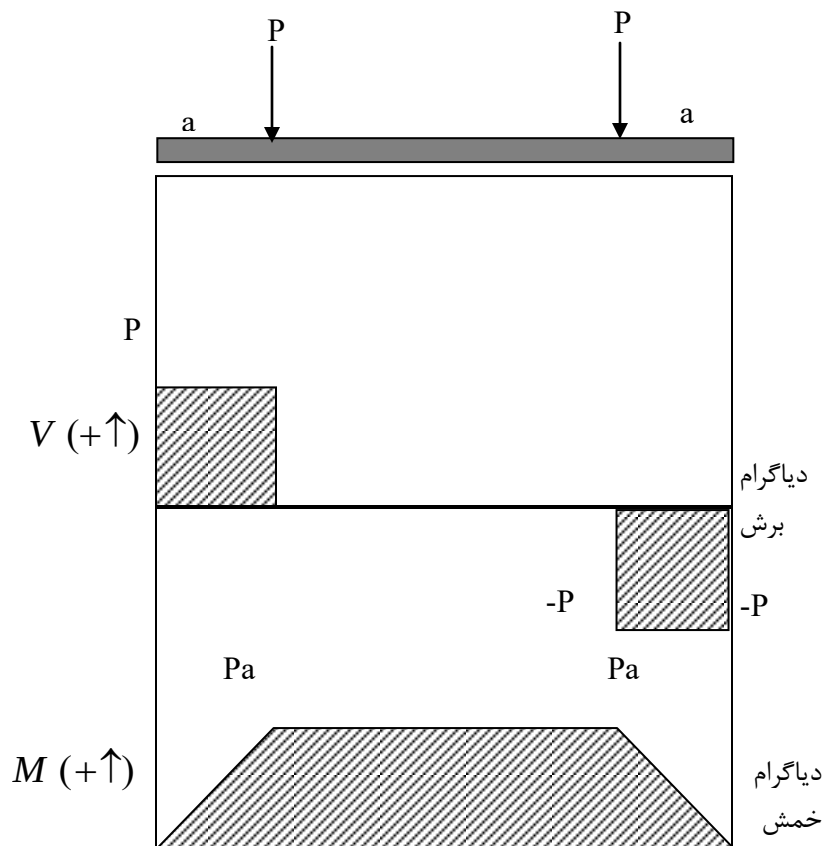
$$x=a^- \Rightarrow V=P, \quad m=Pa$$

$$x=a^+ \Rightarrow V=0, \quad m=Pa$$

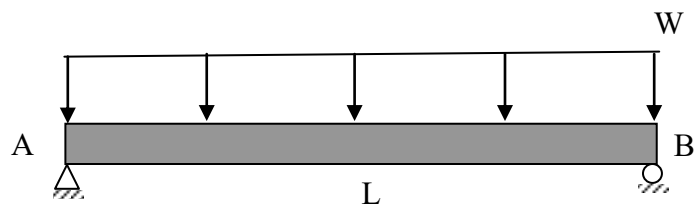
$$x=(L-a)^- \Rightarrow V=0, \quad m=Pa$$

$$x=(L-a)^+ \Rightarrow V=0, \quad m=Pa$$

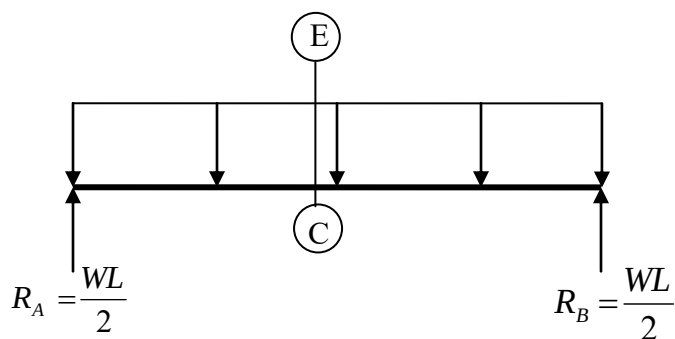
$$x=L \Rightarrow V=-p, \quad m=0$$



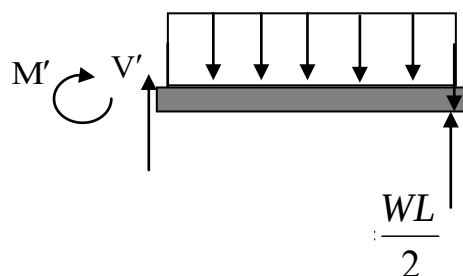
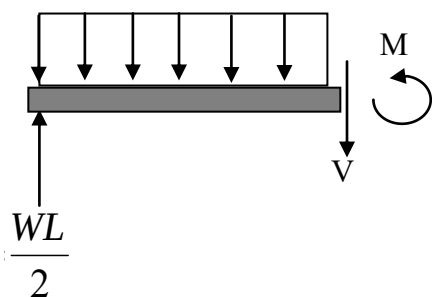
مثال : نمودار خمشی برش تیر زیر را رسم کنید .



$$+ \sum M_A = 0 \Rightarrow R_B = \frac{WL}{2}$$



$$R_A = \frac{WL}{2}$$



$$+ \uparrow \sum F_y \Rightarrow \frac{WL}{2} - WX - V = 0$$

$$V = W \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

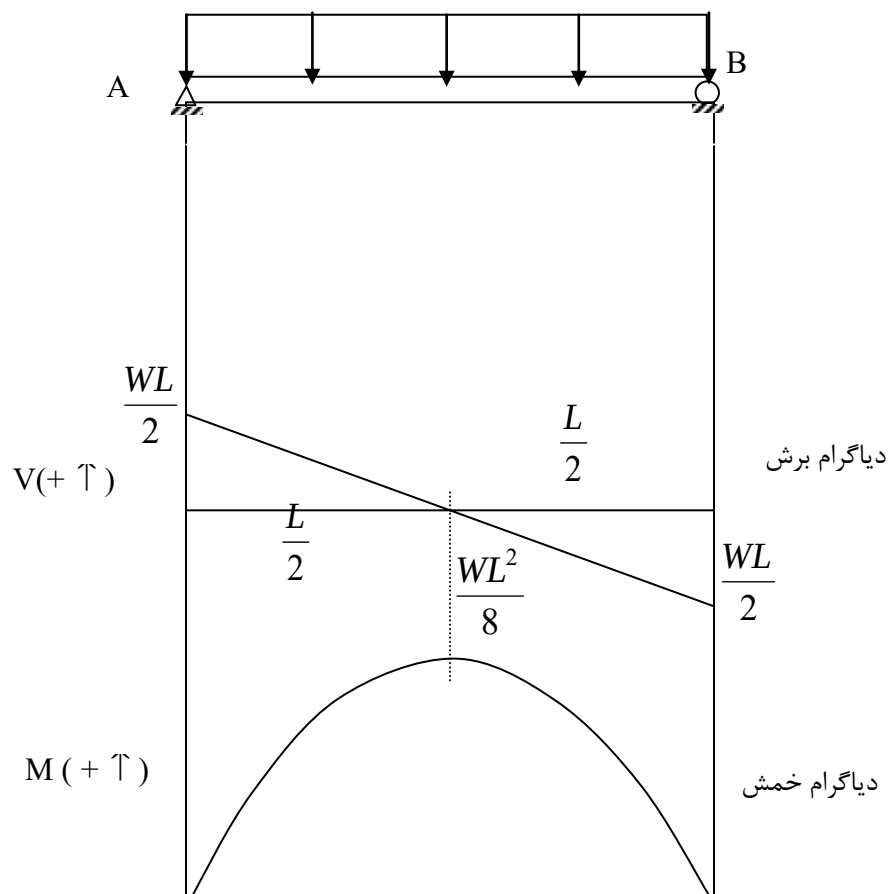
$$+ \curvearrowright \sum M_c = 0 \Rightarrow \frac{WL}{2} x - \frac{Wx^2}{2} + M = 0$$

$$M = \frac{W}{L} (Lx - x^2)$$

$$x=0 \Rightarrow V = \frac{WL}{2}, M=0$$

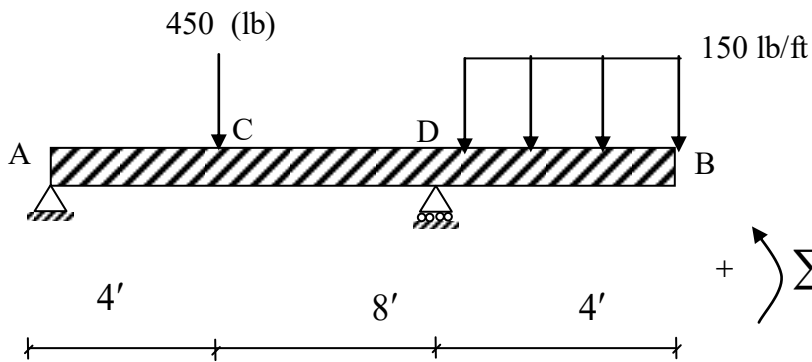
$$x=\frac{L}{2} \Rightarrow V=0, M=\frac{WL^2}{8}$$

$$x=L \Rightarrow V=-\frac{WL}{2}, M=0$$



لنگر خمشی از برش یک درجه بیشتر است .
همواره جایی که برش صفر است ماکزیمم لنگر خمشی داریم .

مثال :



$$+ \curvearrowright \sum m_A = 0 \Rightarrow 12 R_D - 460 (4) - 600 (14) = 0$$

$$R_D = 850 \text{ (lb)} \uparrow$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = 200 \text{ (lb)} \uparrow$$

C to A

$$0 < x < 4$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - V = 0 \Rightarrow V = 200$$

$$+ \curvearrowright \sum M = 0 \Rightarrow M - 200x - 460(x-4) = 0 \Rightarrow m = 1800 - 260x$$

D to C

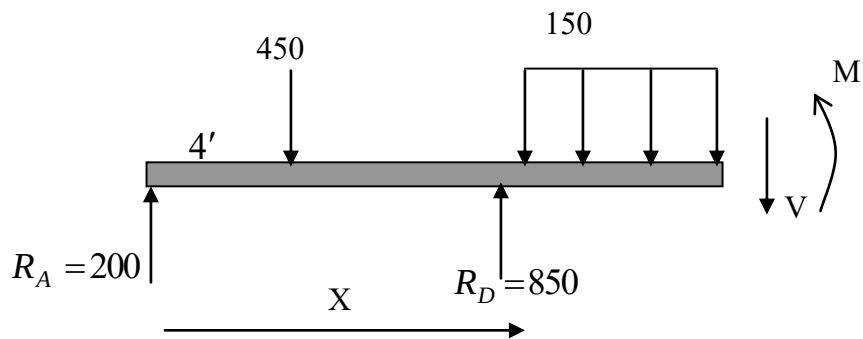
$$4 < x < 12$$

$$+ \uparrow \sum f_y \Rightarrow R_A - 450 - V = 0 \Rightarrow V = -250$$

$$+ \curvearrowright \sum M = 0 \Rightarrow M - 200X - 450(x-4) = 0 \Rightarrow M = 1800 - 250x$$

$$12 < x < 16$$

D ٤ B ٦



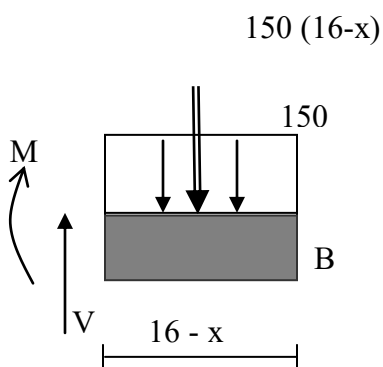
$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 200 + 850 - 450 - 150(x-12) - V = 0$$

$$V = 150(16-x)$$

$$+ \curvearrowright \sum M = 0 \Rightarrow -200x + 450(x-4) + 150(x-12)\left(\frac{x-12}{2}\right) + M$$

$$-850(x-12) = 0$$

$$M = -75(16-x)^2$$



$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad V = 150(16-x)$$

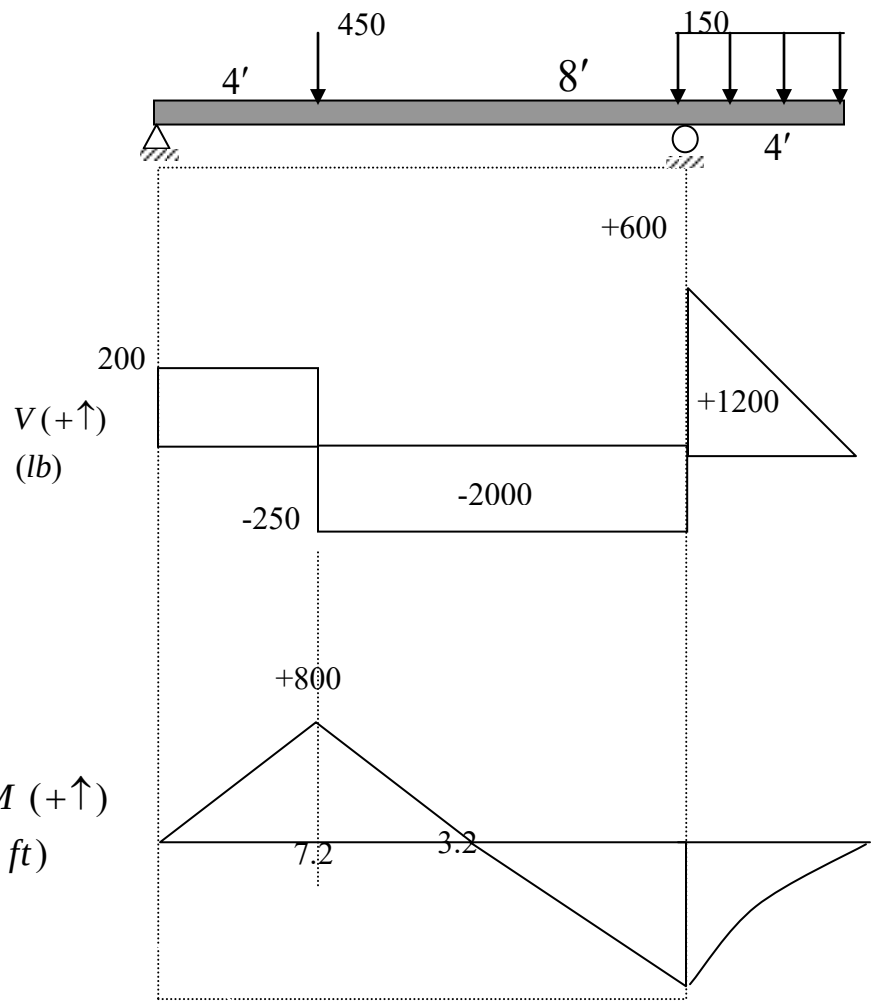
$$+ \curvearrowright \sum M = 0 \quad -M = 150(16-x)\left(\frac{16-x}{2}\right) = 0$$

$$M = -75(16-x)^2$$

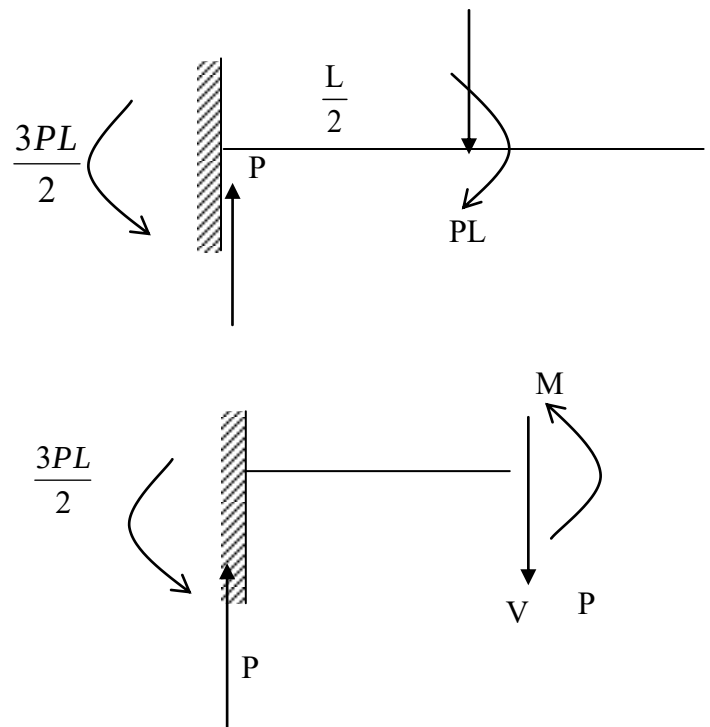
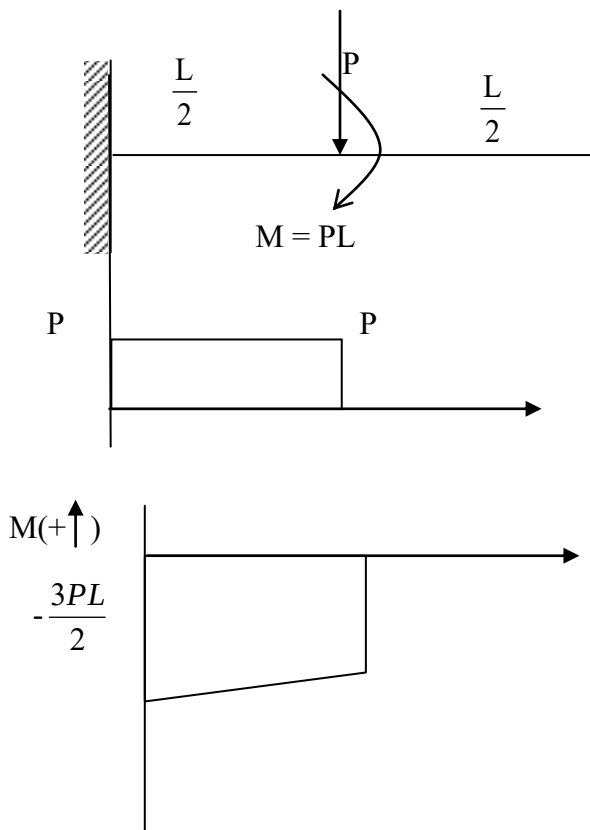
$$9 < x < 12$$

$$M = 1800 - 260x = 0$$

$$A = \frac{1800}{250} 7.2 \text{ (ft)}$$



مثال:



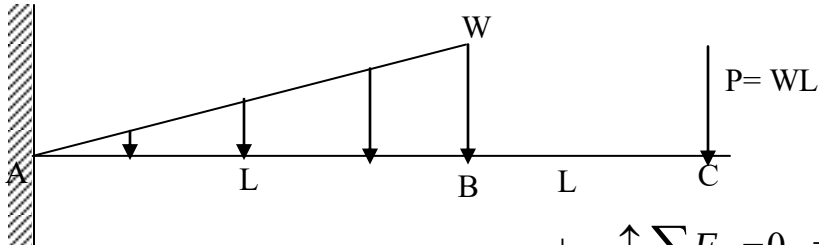
$$+\curvearrowright \sum M = 0 \Rightarrow \frac{3 PL}{L} + M - Px = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow P - V = 0 \rightarrow P = V$$

$$M = Px - \frac{3 PL}{L}$$

$$x=0 \Rightarrow V = P, M = -\frac{3 PL}{L}$$

$$x = \frac{L^2}{2} \Rightarrow V = P, M = -PL$$



مثال :

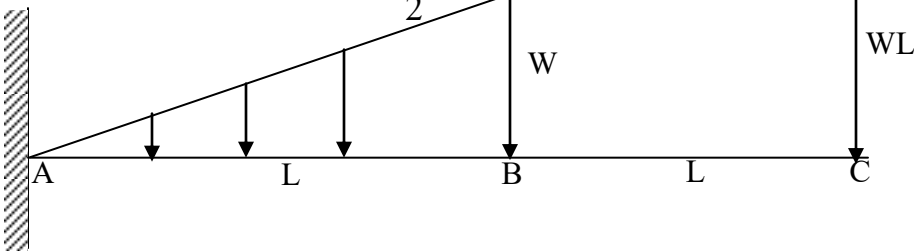
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{L} - WL + R_A = 0$$

$$+\curvearrowright \sum M = 0$$

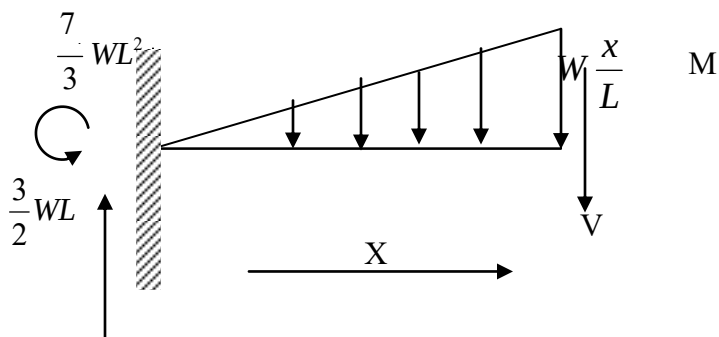
$$\frac{WL}{2} \left(\frac{qL}{3} \right) + WL (2L) - M = 0$$

$$M = \frac{7}{3} WL^2$$

$$M = \frac{7}{2} EL^2$$



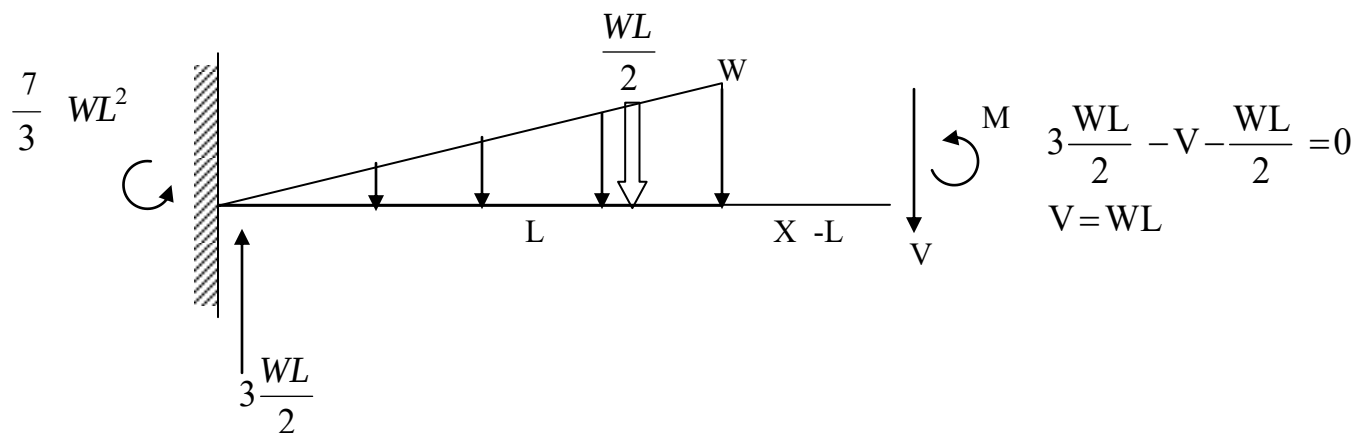
$$R_A = \frac{WL}{2} + WL = 3 \frac{WL}{2}$$



$$+ \quad \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \quad 3 \frac{WL}{2} - V - W \left(\frac{x}{L} \right) \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

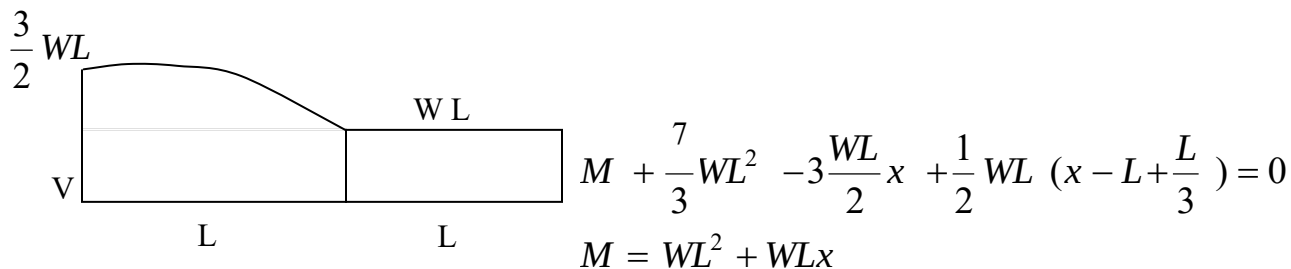
$$V = 3 \frac{WL}{2} - \frac{Wx^2}{2L}$$

$$+ \quad \curvearrowright \sum M = 0 \Rightarrow M + \frac{-7}{3} WL^2 + \frac{3WL}{2} X - W \frac{x^3}{6L}$$



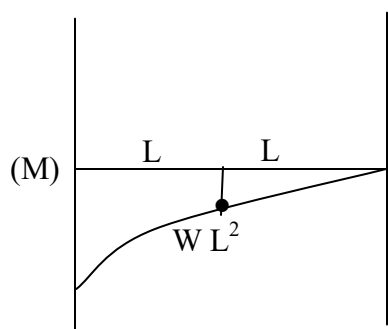
$$3 \frac{WL}{2} - V - \frac{WL}{2} = 0$$

$$V = WL$$



$$M + \frac{7}{3} WL^2 - 3 \frac{WL}{2} x + \frac{1}{2} WL \left(x - L + \frac{L}{3} \right) = 0$$

$$M = WL^2 + WLx$$



$$x=0 \Rightarrow V=3\frac{WL}{2}, M=-\frac{1}{2}WL^2$$

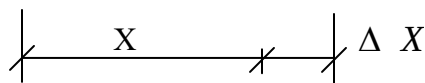
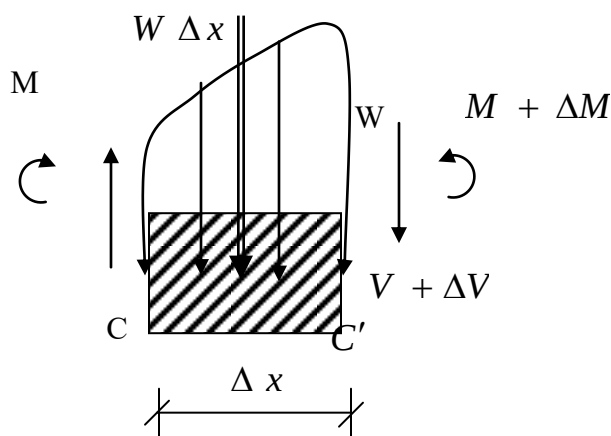
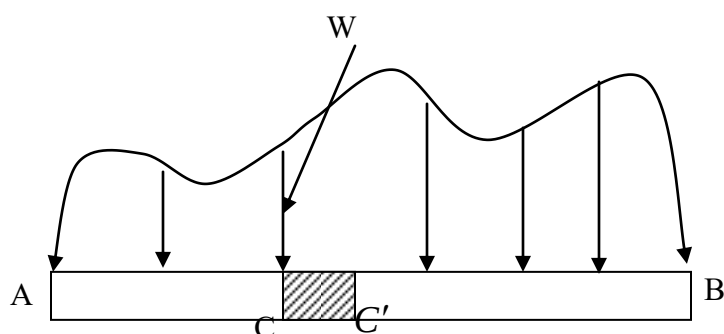
$$x=\frac{L}{3} \Rightarrow V=\frac{26}{18}WL$$

$$x=L \Rightarrow V=WL, M=-WL^2$$

$$x=\frac{2L}{3} \Rightarrow V=\frac{23}{18}WL$$

$$x=2L \Rightarrow V=WL, M=0$$

ارتباط بین نیرو، برش و خمشی



$$V - (V + \Delta V) - W \Delta X = 0$$

$$\Delta V = -W \Delta X$$

ضریب زاویه
برش

$$\frac{dV}{dx} = -W$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -W$$

$$\int \frac{dV}{dx} dx = \int -W dx$$

$$V \Big|_{V_C}^{V_D} = - \int_{x_C}^{x_D} W dx \Rightarrow V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} W dx =$$

مساحت زیر نیروها بین C و D

این فرمول برای فاصله هائی می باشد که نیروی متمرکز وجود نداشته باشد .
فقط بین نیروهای متمرکز صادق می باشد .

$$(M + \Delta M) - M - V \Delta x + W \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} W (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = V - \frac{1}{2} W (\Delta x) \quad \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

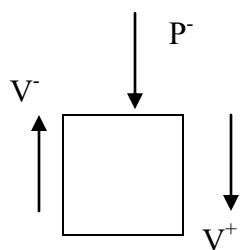
$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$

نیروی برش = ضریب زاویه خم

وقتی که $V = 0$ ← نقطه ماکزیمم خم

$$\int \frac{dM}{dx} dx = \int V dx + \int_{M_c}^{M_D} dM = \int_{x_c}^{x_D} V dx$$

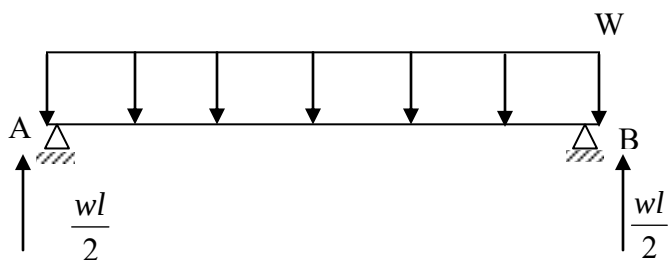
$$M_D - M_c = \int_{x_c}^{x_D} V dx = \text{مساحت زیر نیروهای برش بین C و D}$$



$$-P - V^+ + V^- = 0$$

$$V^+ = V^- - P$$

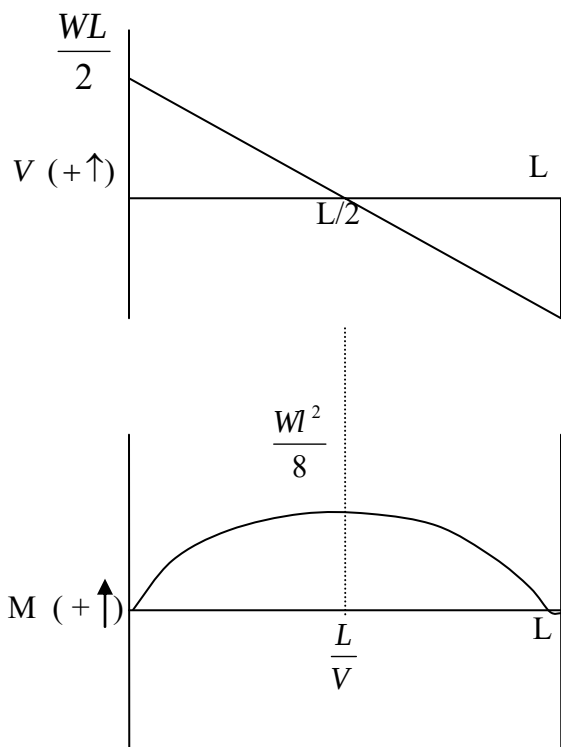
مثال:



$$\frac{dV}{dx} = -W$$

$$V - V_A = - \int_0^x W dx = -Wx$$

$$V = V_A - Wx = \frac{WL}{2} - Wx = W \left(\frac{L}{2} - x \right)$$



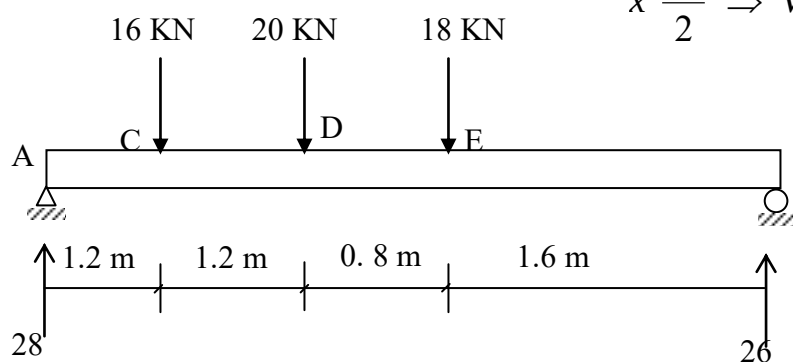
$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$M - M_A = \int_D^x v dx = \int_D^x W \left(\frac{L}{2} - x \right) dx = \frac{W}{2} (Lx - x^2)$$

کشتاور خمشی یک سهمی است .

نقطه ماکزیمم در $x = \frac{L}{2}$ قرار دارد چونکه $V = 0$

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow V = 0 \quad M = M_{\max} = \frac{WL^2}{8}$$



مثال

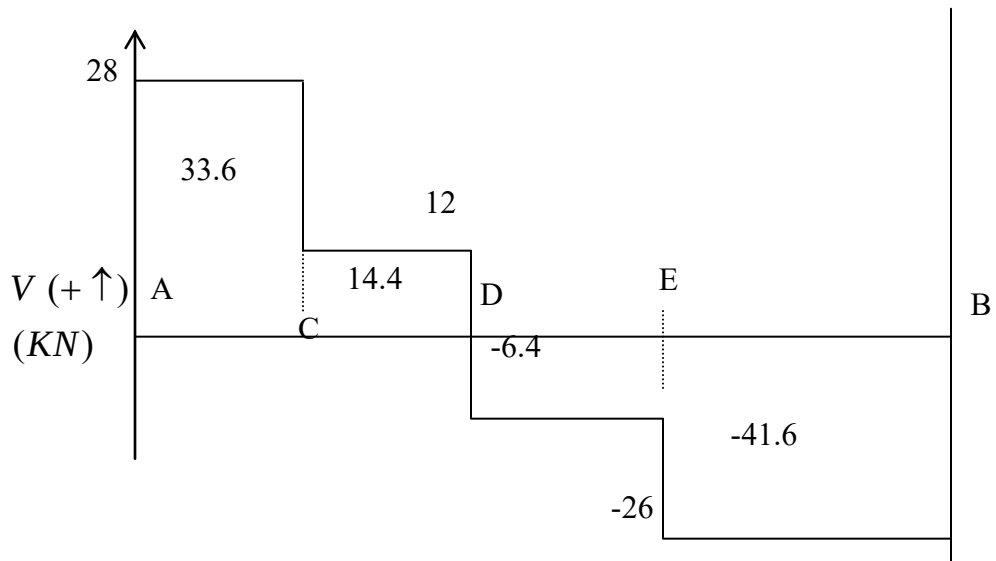
$$V_C - V_A = - \int_{x_A}^{x_C} W dx = 0$$

$$V_C^- - V_A = 0 \Rightarrow V_C^- = V_A = 28 \text{ (KN)}$$

$$V_C^+ = V_C^- - 16 = 12 \text{ (KN)}$$

$$V_D^- - V_C^+ = - \int_{x_C}^{x_D} W dx = 0 \Rightarrow V_D^- = V_C^+ = 12 \text{ (KN)}$$

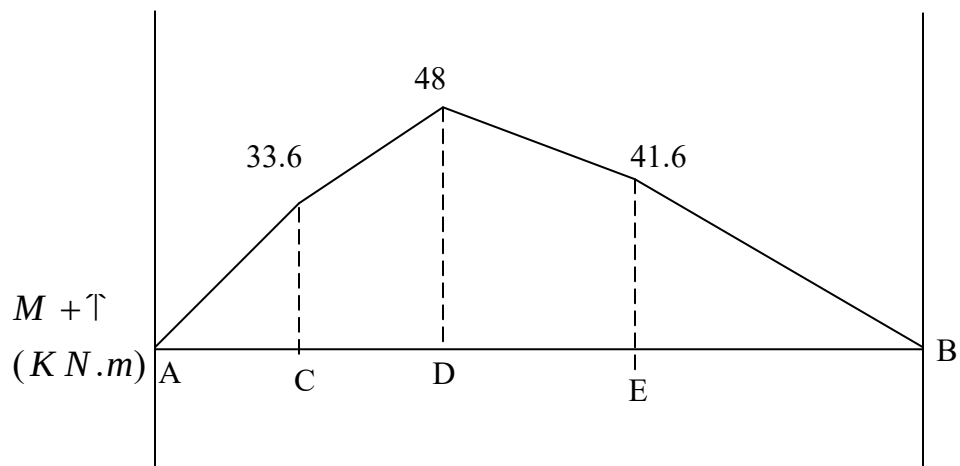
$$V_D^+ = V_D^- - 20 = 12 - 20 = -8 \text{ (KN)}$$



$$V_E^- - V_D^+ = - \int_{x_D}^{x_E} W dx = 0 \Rightarrow V_E^- = V_D^+ = 8 \text{ KN}$$

$$V_E^+ = V_E^- - 18 = -26 \text{ (KN)}$$

$$V_B - V_C^+ = - \int_{x_E}^{x_B} W dx = 0 \Rightarrow V_B = V_E^+ = -26 \text{ (KN)}$$



$$M_C - M_A = \int_{x_A}^{x_C} V dx = \int_0^{1.2} 28 dx = 28 (1.2) = 33.6$$

$$M_C = 0 + 33.6 = 33.6 \text{ (KN.m)}$$

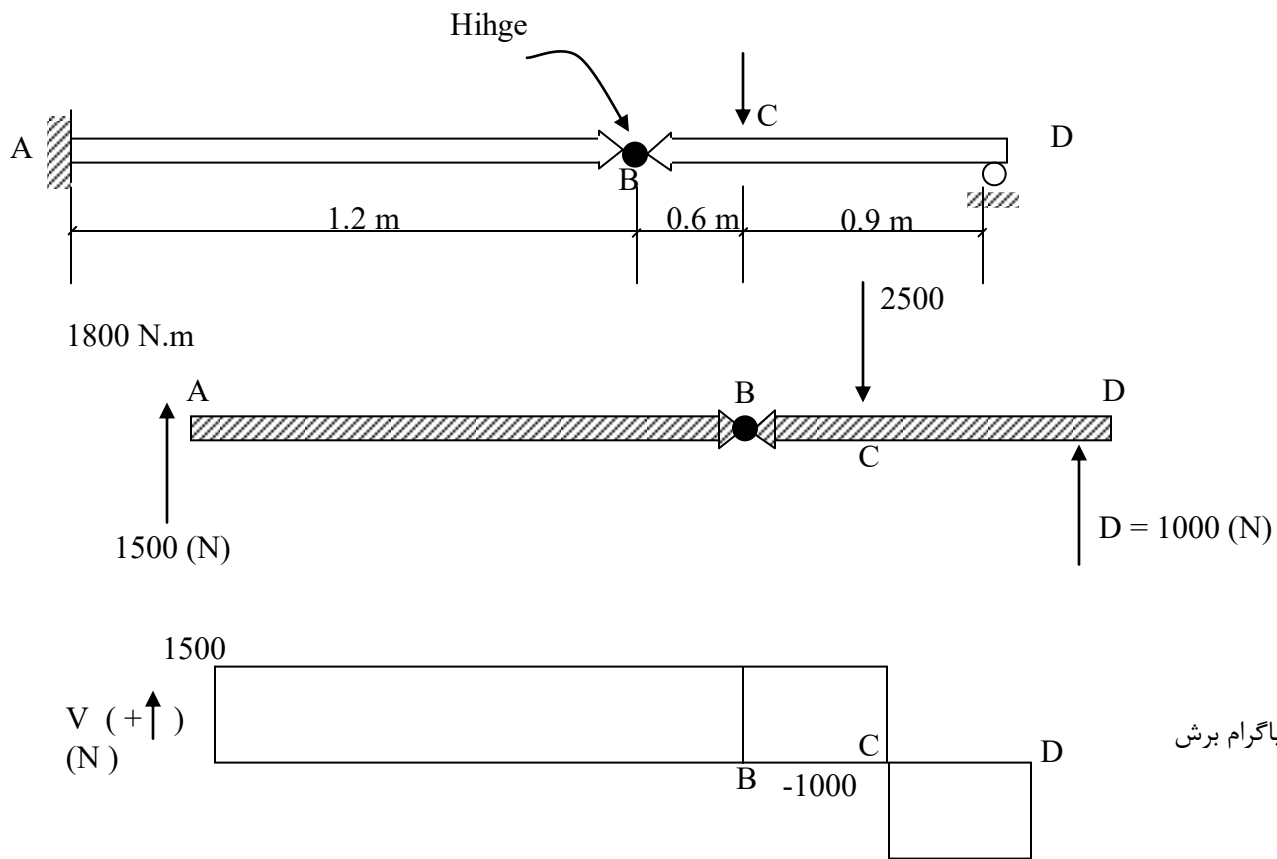
$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx = \int_{1.2}^{2.4} 14.4 dx = 14.4 (2.4 - 1.2)$$

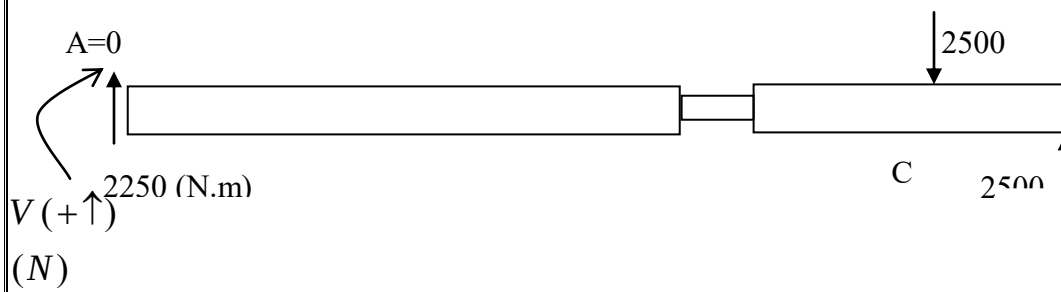
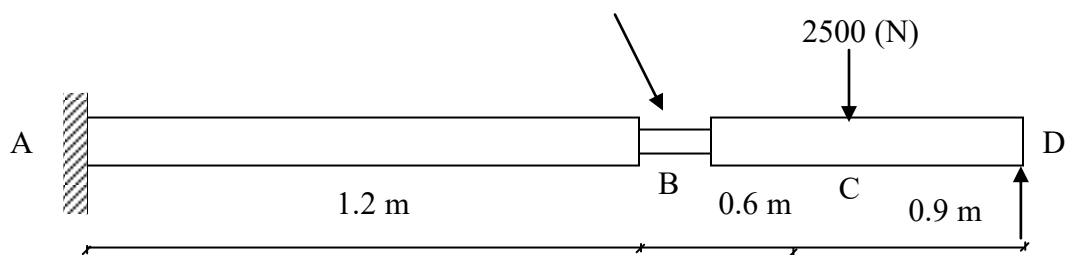
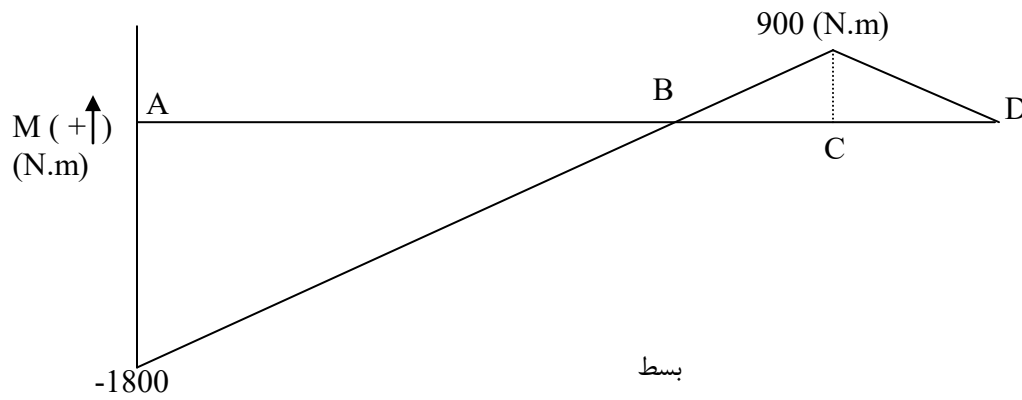
$$M_D = M_C + 14.4 = 33.6 + 14.4 = 48 \text{ (KN.m)}$$

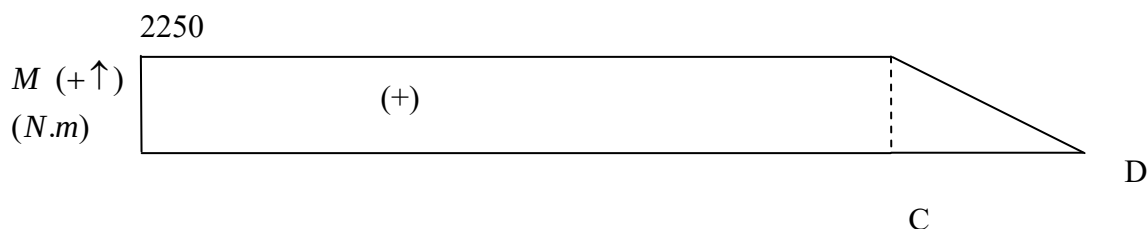
$$M_E - M_D = \int_{x_D}^{x_E} V dx = \int_{2.4}^{3.2} (-6.4) dx = -6.4 (3.2 - 2.4)$$

$$M_E = M_D - 6.4 \times 0.8 = 48 - 6.4 \times 0.8 = 44.6 \text{ (KN.m)}$$

$$M_B - M_E = \int_{x_E}^{x_B} V dx = \int_{3.2}^{4.8} (-41.6) dx = -41.6 (1.6)$$





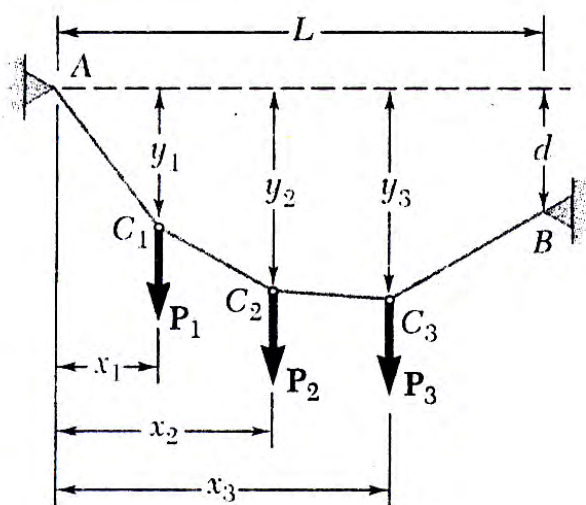


کابل با نیروهای متمرکز :

کابل ها در مهندسی در موارد مختلف استفاده می شوند : پل های معلق ، دکل ها و غیره

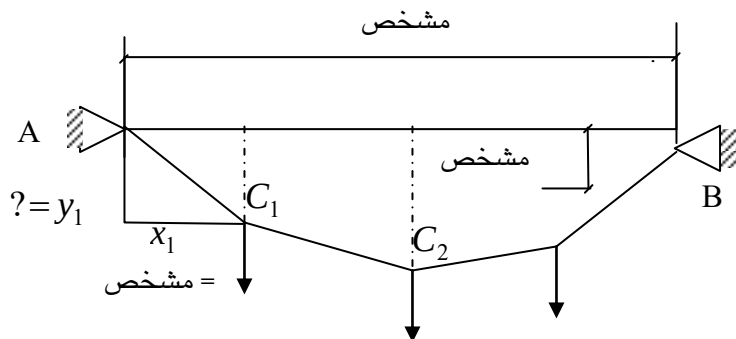
کابل ها را می توان به دو دسته تقسیم کرد : 1- کابل های با نیروی متمرکز . 2- کابل های تحت نیروی گسترده .

فرض می کنیم که کابل در دو نقطه A و B در تکیه گاه قرار دارد و تحت اثر چند نیرو در نقاط C1 الی C4 قرار گرفته است که فواصل افقی آن مشخص است . فرض می کنیم که کابل کاملاً نرم و در مقابل خمش از خود مقاومتی نشان نمی دهد .



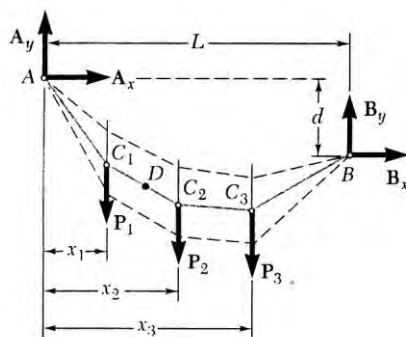
همچنین فرض می کنیم که وزن کابل را می توان در مقابل نیروهای وارده نادیده گرفت .

سپس با در نظر گرفتن وارد شدن نیروها در نقاط مختلف و بدون نیروی گسترده هر قسمت از کابل بین دو نیرو را می توان عضو با دو نیرو در نظر گرفته که در کشش می باشد .



می دانیم فاصله بین A و B را هم در جهت افقی و هم در جهت عمودی .

می بایستی که شکل این کابل را پس از وارد کردن نیروها بدست بیاوریم و همینطور مقدار کشش در طناب را در قسمت های مختلف یعنی در حقیقت مقدار فاصله بین نقطه A از C1 در جهت عمودی مشخص گردد و همینطور مقادیر فواصل بین نقاط A و C2 و C3 و C4 در جهت عمودی مشخص گردد .



یک معادله بر حسب A_y, A_x

(با گرفتن ممان در نقطه B)

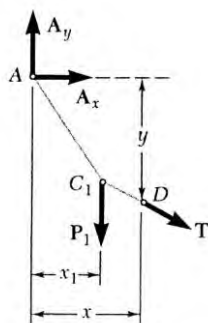
دیاگرام آزاد کل

در این حالت می توانیم یک معادله برای A_y, A_x

بنویسیم اگر مختصات نقطه D را بدانیم

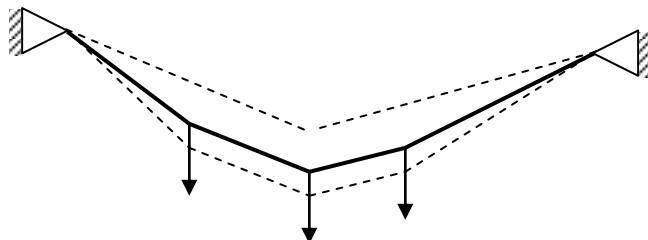
(با گرفتن ممان در نقطه D)

دیاگرام قسمت چپ کابل

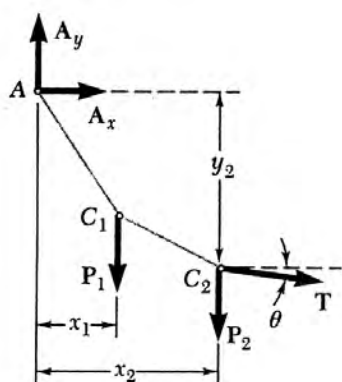


اگر مختصات نقطه D را نداشته باشیم این مسئله بصورت نامعین می بود

و هر جوابی برای کابل در تغییر شکل می توانست داشته باشد .



هنگامیکه عکس العمل در نقطه A مشخص گردد تمام مختصات نقاط زیر نیرو را هم می توان از دیگرام آزاد قسمتی از کابل مشخص کرد .



$$\curvearrowright + \sum M_{C2} = 0 \Rightarrow (y_2)(A_x) - A_x(x_2) + P_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -T \sin \theta - P_1 - P_2 + A_y = 0$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \Rightarrow T \cos \theta + A_x = \boxed{T \cos \theta = -A_x}$$

مولفه افقی کشش در کابل در تمام طول طناب یکسان می باشد .

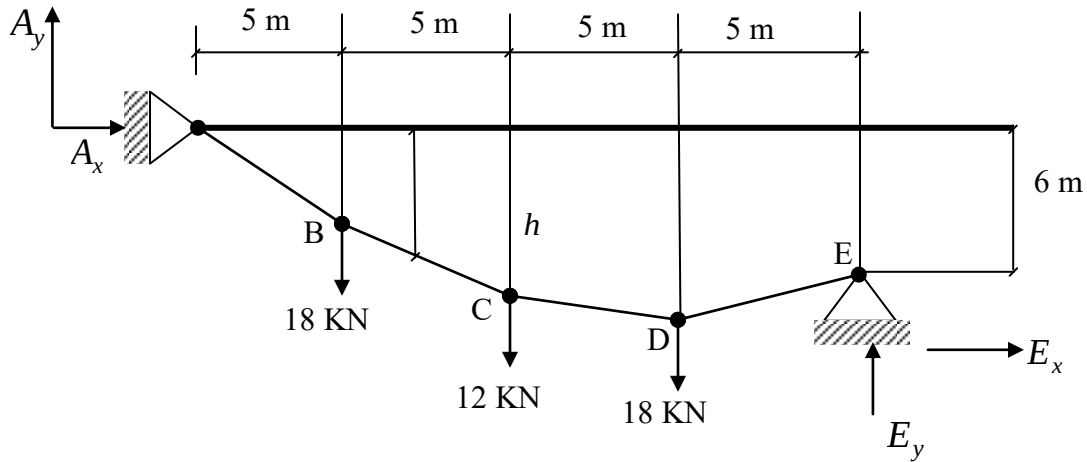
همچنین بدست می آید که کشش بیشترین است وقتی که $\cos \theta$ کمترین باشد یعنی در قسمتی که بیشترین زاویه را با افق

داشته باشیم که طبیعتاً در دو انتهای کابل نزد تکیه گاه خواهد بود.

مثال_

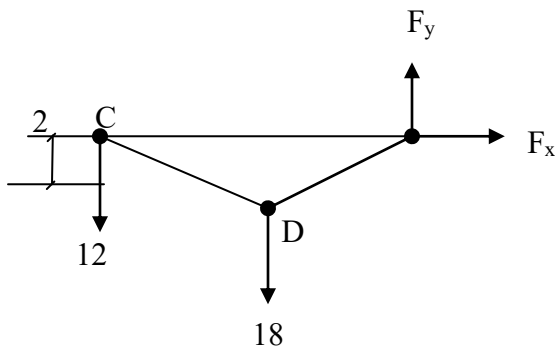
الف) اگر $8m = R_c$ باشد عکس العمل در نقطه E و حداکثر کشش در طناب را بدست بیاورید.

ب) مقدار R_c را طوری بدست بیاورید که قسمت CD کابل افقی باشد و همینطور عکس العمل E بدست بیاورید.



$$+ \sum M_A = 0 \quad \curvearrowright \quad E_x(6) + (E_y(10) - (18)(5) - 12(10) - 18(15)) = 0$$

$$6E_x + 20E_y - 480 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3E_x + 10E_y = 240 \quad (1)$$



$$+ \sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_x(2) - E_y(10) - 18(5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2E_x - 10E_y = -90 \quad (2)$$

$$E_x = 30 \text{ KN} \rightarrow$$

$$E_y = 15 \text{ KN} \uparrow$$

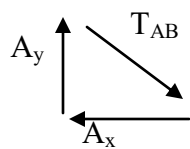
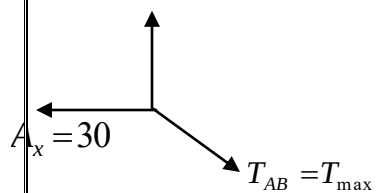
بین (1) و (2) خواهیم داشت

$$\sum F_x = 0 \quad A_x + E_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -30 \text{ KN} \quad \Rightarrow \quad A_x = 30 \text{ KN} \leftarrow$$

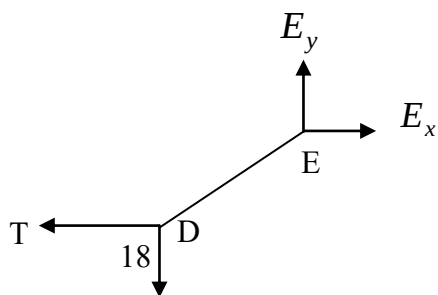
$\Rightarrow$ درست مکمل

$$\sum F_y = 0 \quad A_y - 18 - 12 - 18 + E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 33 \text{ KN} \uparrow$$

$$A_y = 33$$



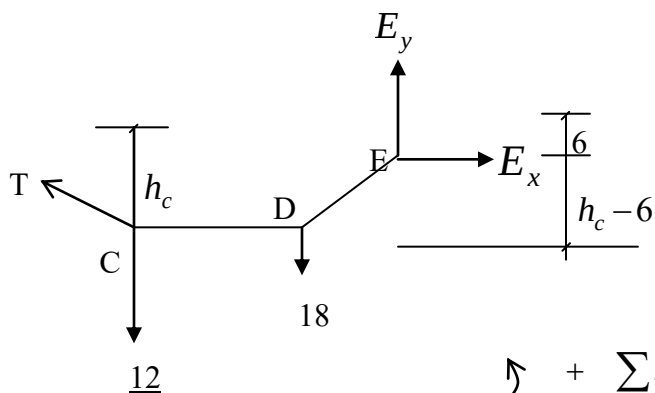
$$T_{AB} = \sqrt{33^2 + 30^2} = 44.6 \text{ KN}$$



(ب)

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow E_y = -18 = 0 \Rightarrow E_y = 18 \text{ KN } \uparrow$$

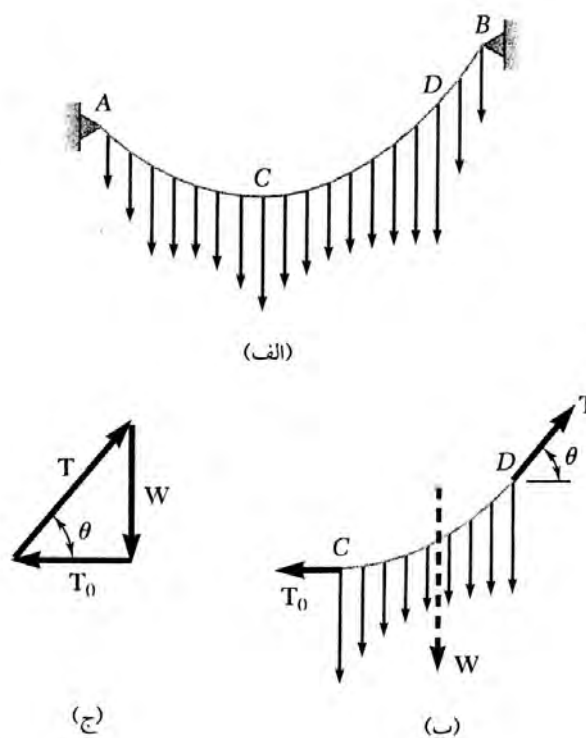
$$3 E_x + 10 E_y = 240 \quad (1) \Rightarrow E_x = 20 \text{ KN } \rightarrow$$



$$\curvearrowright + \sum m_C = 0 \Rightarrow (18)(10) - (20) \left(h_c - \frac{\sigma}{6}\right) - 18(5) = 0$$

$$h_c = 10.5 \text{ (m)}$$

کابل با نیروهای گسترده :



هر قسمت به صورت منحنی می باشد و نیروی T بصورت مماس بر منحنی می باشد

این رابطه می گوید که مولفه افقی کشش همیشه ثابت است برابر است با T_0 (کشش در پائین ترین نقطه کابل)

$$T \cos \theta = T_0$$

این رابطه می گوید که مولفه عمودی کشش برابر است با مقدار نیروی گسترده از پائین ترین نقطه

$$T \sin \theta = W$$

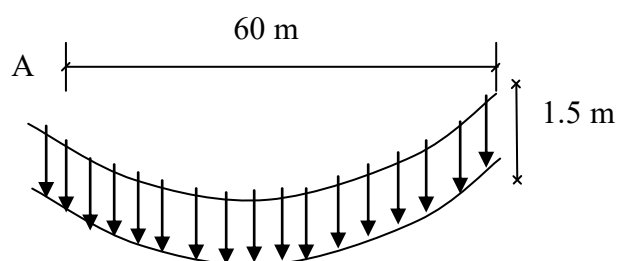
$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2}$$

برای T داریم:

کشش کمترین است در پائین ترین نقطه و ماکزیمم در یکی از دو نقطه تکیه گاه ها

$$\tan \theta = \frac{W}{T_0}$$

مثال -



(الف) ماکزیمم کشش را در سیم را بدست بیاورید.

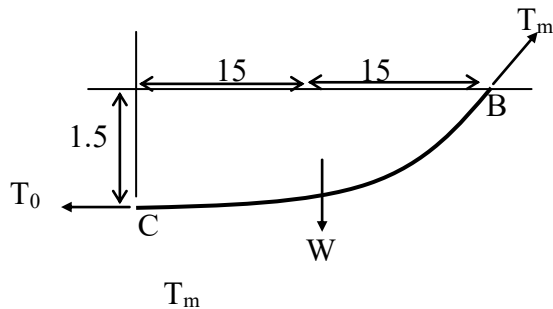
ب) طول سیم را بدست بیاورید.

$$0.6 \text{ kg/m} = \text{جرم}$$

$$L = 60 \text{ m} \quad h = 1.5 \text{ m}$$

$$\omega = 0.6 (9.8) = 5.89 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

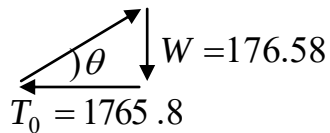
$$W = 5.89 (30) = 176.58 \text{ (N)}$$



$$\sum M_B = (176.58) (7.5) - T_0 (1.5) = 0$$

$$(176.58) (N) \quad)$$

$$T_m = \sqrt{(176.58)^2 + (5.89)^2} = 1774.6 \text{ (N)}$$



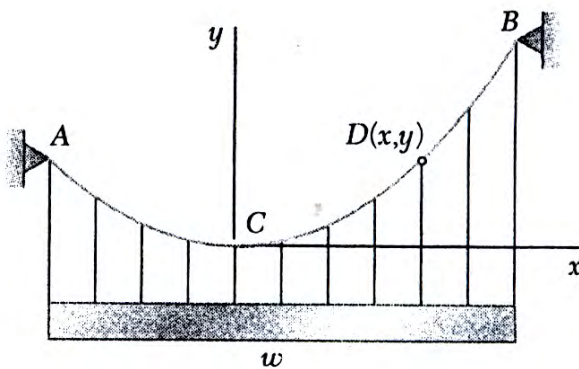
$$S_B = X_B - \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{X_B} \right)^2 \right] = 30 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1.5}{30} \right)^2 \right] = 30.05 \text{ (m)}$$

$$TOTAL = 2 S_B = 2 (30.05) = 60.1 \text{ (m)}$$

کابل سهمی

(کابل با نیروی گسترده یکنواخت)

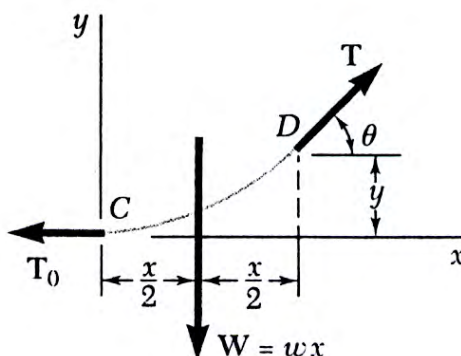
فرض کنیم که وزن سیم ها را صرف نظر کنیم



کابل بار در فاصله x $W = \omega x$

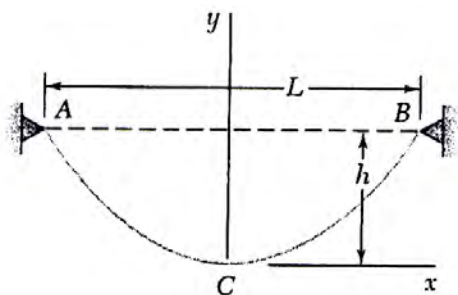
$$T = \sqrt{T_0^2 + \omega^2 x^2}$$

$$\tan \theta = \frac{\omega x}{T_0}$$



$$\sum M_D = 0 \Rightarrow \omega x \left(\frac{x}{2}\right) - T_0 y = 0 \Rightarrow y = \frac{\omega x^2}{2 T_0}$$

معادله سهمی که رأس آن در نقطه C در مرکز مختصات می باشد.



مینیمم کشش در طناب T_0

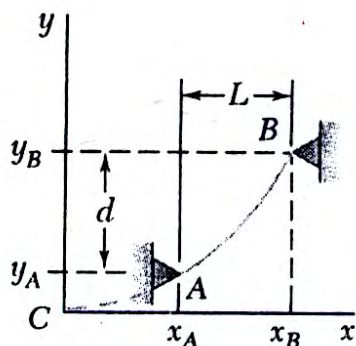
اگر L و h مشخص شود می توانیم کمترین

کشش را بدست بیاوریم با جایگزین کردن

روابط زیر:

$$T_0 = \frac{\omega x^2}{2 y} = \frac{W L^2}{8 h} \quad y = h, \quad x = \frac{L}{2}$$

اگر هر دو تکیه گاه در یک ارتفاع نباشد دیگر مختصات تکیه گاه ها مشخص نیست و می بایستی بدست آورد .



می دانیم:

$$y_B - y_A = d \quad T_{\min} \quad A_x = B_x \quad x_B - x_A = L$$

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$S = \int dL$$

$$S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

در بسط نیوتنی

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{W^2 x^2}{T_0^2}} dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{W^2 x^2}{2T_0^2} - \frac{W^4 x^4}{8T_0^4} + \dots \right) dx$$

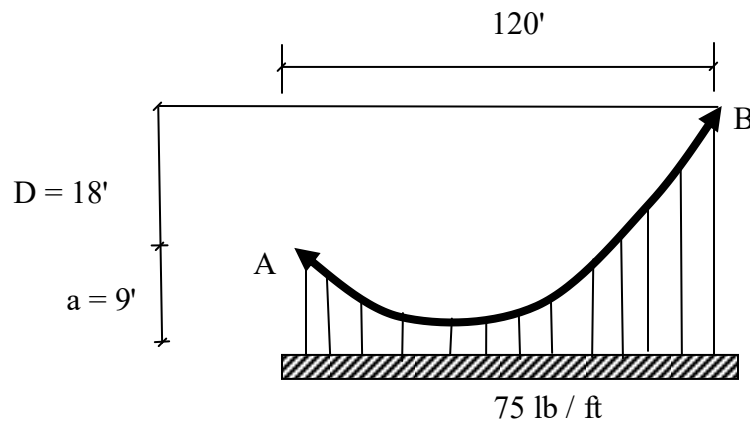
$$S_B = x_B \left(1 + \frac{W^2 x^2}{6T_0^2} - \frac{W^4 x_B^4}{40T_0^4} + \dots \right) \quad \frac{W x_B^2}{2T_0} y_B$$

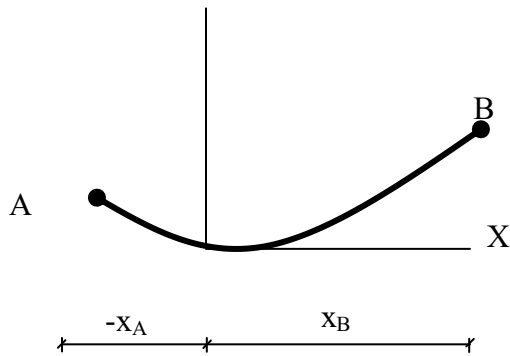
$$S_B = x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^4 + \dots \right] \Rightarrow S_B \approx x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 \right]$$

مثال - بدست بیاورید کمترین

و بیشترین کشش را در طناب .

(اگر پائین ترین نقطه طناب در 9' زیر تکیه گاه A)





A نقطه

B نقطه

$$X_B - X_A = 120'$$

$$X_A = X_B - 120'$$

$$y_A = \frac{w x_A^2}{2 T_0} = 9 = \frac{w (x_B - 120)^2}{2 T_0}$$

$$y_B = \frac{w x_B^2}{2 T_0} = 27 = \frac{w x_B^2}{2 T_0}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{(X_B - 120)^2}{X_B^2} \Rightarrow 2 X_B^2 - 720 X_B + 43200 = 0 \Rightarrow X_B = 76.08 \text{ (ft)}$$

$$27 = \frac{W X_B^2}{2 T_0} = \frac{75 (76.08)^2}{2 T_0} \Rightarrow T_0 = 8034 \text{ (lb)}$$

$$T_{\min} = T_0$$

$$T_{\max} = \sqrt{T_0^2 + W^2 X_B^2} = \sqrt{(8038)^2 + (75)^2 (76.08)^2} = 9860 \text{ (lb)}$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2 X_A^2} = \sqrt{(8038)^2 + (75)^2 (120 - 76.08)^2} = < T_{\max}$$

در B :

$$S_B = X_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{X_B} \right)^2 \right]$$

در A :

$$S_A = X_A \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_A}{X_A} \right)^2 \right]$$

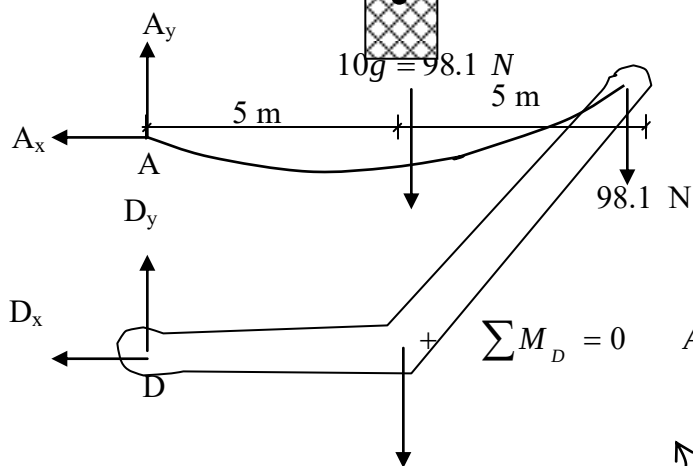
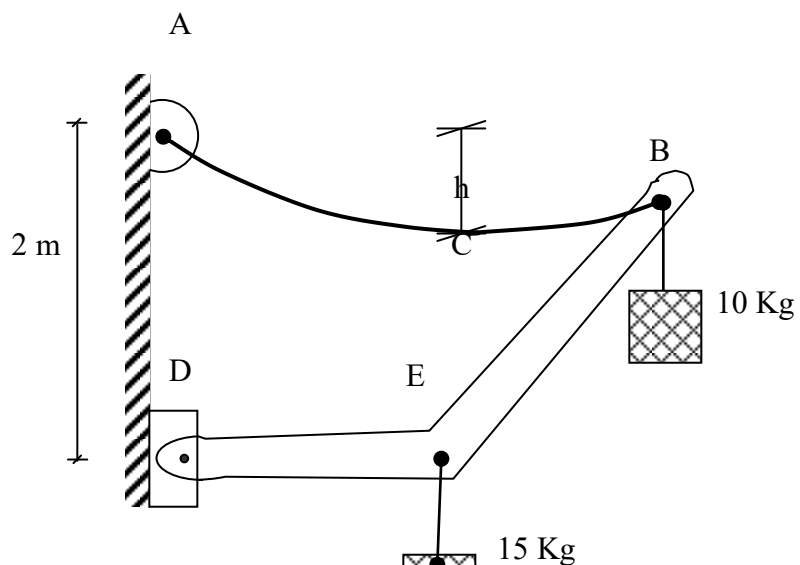
$$S = |S_A| + |S_B|$$

مثال - کل جرم طناب ABC برابر است با 10 Kg اگر فرض کنیم که این جرم روی طناب بصورت یکنواخت قرار می گیرد

بدست بیاورید .

الف (عمق کابل را (h)

ب) ضریب زاویه طناب در نقطه A



$$\sum M_D = 0 \quad A_x (2) - 98.1(5) - 98.1(10) - 147.15 (5) = 0$$

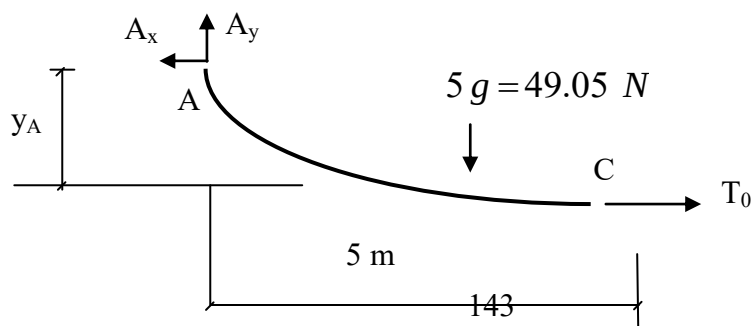
$$A_x = 1103.6 (N)$$

$$T_0 = A_x = 1103.6 (N)$$

$$15g = 147.15 N$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 49.05 = 0$$

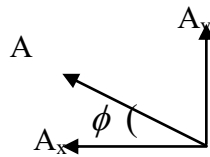
$$A_y = 49.05 (N)$$



$$\curvearrowright + \sum M_C = 0 \Rightarrow A_x y_X - A_y^{(5)} - 49.05 (2.5) = 0$$

$$(1103.6) y_A - A_x y_X - A_y (5) + 49.05(2.5) = 0$$

$$y_A = 0.111 (m) \Rightarrow h = 111 (mm)$$



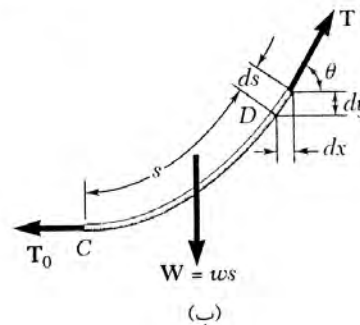
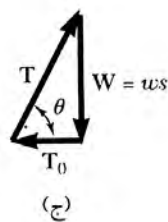
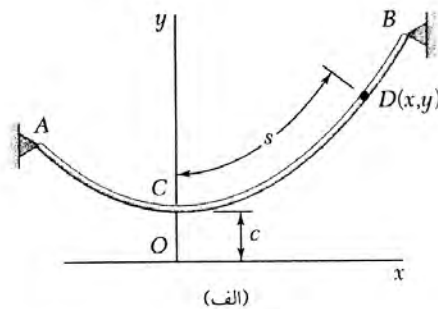
$$\tan \phi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{49.05}{1103.6} = 0.044 \Rightarrow \phi = 2.54^\circ$$

کابل زنجیره ای :

کابلی است که باری یکنواخت در امتداد طول خود دارد .

وزن واحد طول در امتداد خود کابل =

ω



$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad \Leftrightarrow \quad T = \sqrt{T_0^2 + W^2}$$

$$T = \sqrt{C^2 \omega^2 + S^2 \omega^2} = W \sqrt{C^2 + S^2} \quad T_0 \quad cC\omega \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{T_0}{\omega}$$

در این دیاگرام معادله منحنی شکل کابل مشخص نیست .

ژول

$$d_x = d_s \cos \theta = d_s \frac{T_0}{T}$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{T_0}{T}$$

$$dx = \frac{\omega c ds}{\omega \sqrt{C^2 + S^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + S^2 / C^2}}$$

$$X = \int dx = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + S^2 / C^2}} = C \sinh^{-1} \frac{S}{C} \Rightarrow$$

$$dy = d_x \tan \theta = \frac{W}{T_0} dx = \frac{S}{C} dx = \sinh \frac{X}{C} dx \quad \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{W}{T_0}$$

$$\int_c^y dy = y - C = C \sinh \frac{x}{C}$$

$$y - C = \int_0^x \sinh \frac{x}{C} dx = C \left[\cosh \frac{x}{C} \right]_0^x = C \left(\cosh \frac{x}{C} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$y = C \cosh \frac{x}{C}$$

$$w^2 y^2 = w S^2 + w c^2 = T^2$$

$$T_0 = \omega c, \quad W = \omega s, \quad T = \omega y$$

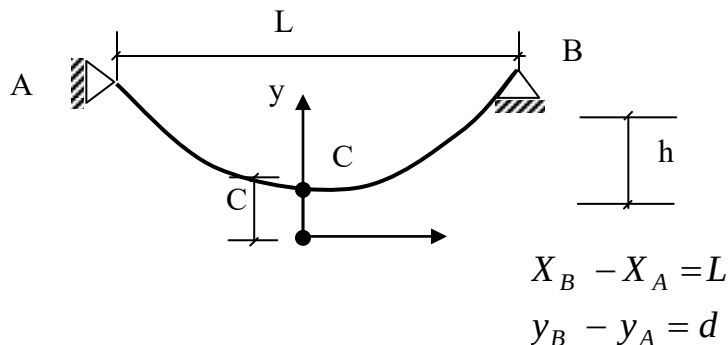
$$y^2 - S^2 = C^2$$

اگر دو نقطه A و B هم سطح باشند

$$h = y_A - C = \text{عمق کابل}$$

L = طول دهانه کابل

C = فاصله نقط ممانی هم کابل



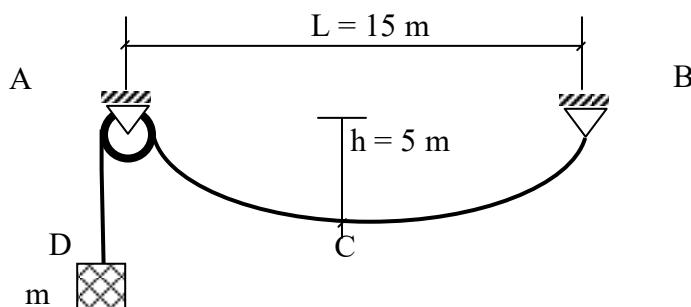
اگر دو نقطه هم سطح نباشند مانند کابل سهمی خواهیم داشت
مثال - وزنه D به جرم 40 Kg به

یک کابل که از نقطه A می گذرد متصل

شده است. اگر L = 15m, h = 5m

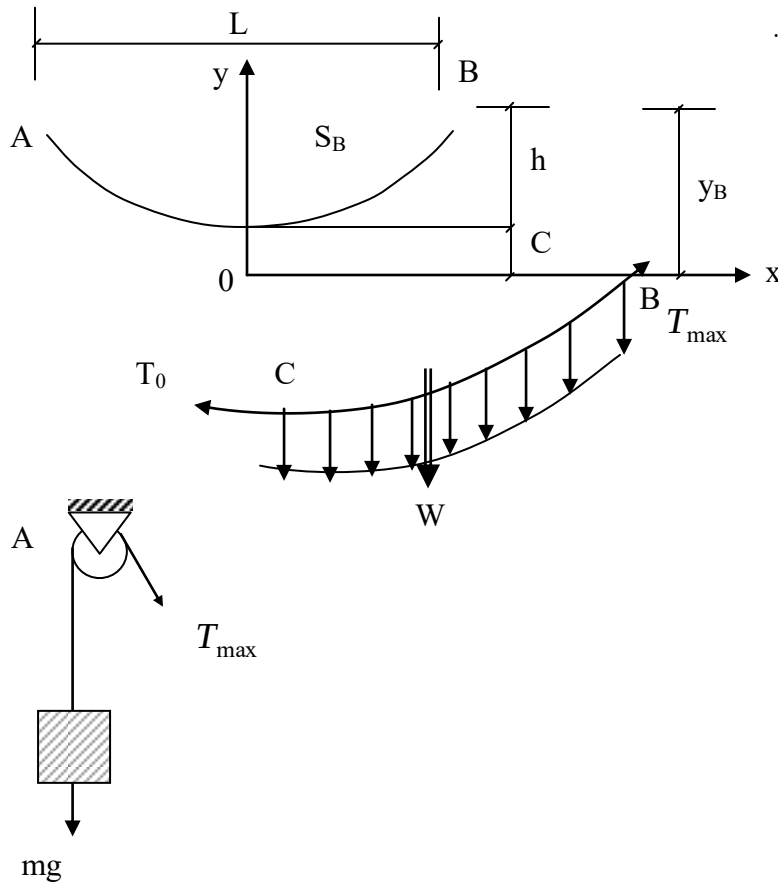
معین کنید.

الف) طول کابل از A تا B



ب) جرم کابل را بصورت جرم در طول

از جرم کابل در قسمت AD صرفنظر گردد.



$$T_0 = \omega c$$

$$W = \omega c$$

$$T = \omega y$$

$$T_{\max} = T_A = T_B = 392.4 \text{ (N)}$$

$$L = 15 \text{ m} , \quad x_B = 7.5 \text{ m} , \quad h = 5 \text{ m}$$

$$y_B = C \cosh \frac{x_B}{C} = C \cosh \frac{7.5}{C} \quad y_B = h + C = 5 + C$$

$$C \cosh \frac{7.5}{C} = 5 + C \quad \Rightarrow \quad \cosh \frac{7.5}{C} = \frac{5}{C} + 1 \quad \Rightarrow \quad C = 6.3175 \text{ (m)}$$

$$y^2 - S^2 = C^2 , \quad S_B = C \sinh \frac{x_B}{C}$$

$$S_B = 6.3175 \sinh \frac{7.5}{6.3175} = 9.39 \text{ (m)} \quad \Rightarrow \quad 2S_B = 18.78 \text{ (m)}$$

$$T_{\max} = \omega y_B = \omega (h + C) \Rightarrow \quad 392.4 = \omega (5 + 6.3175)$$

$$w = 34.67 \text{ N/m}$$

$$m' = \frac{w}{g} = \frac{34.67}{9.81} = 3.53 \text{ Kg/m}$$

فصل هشتم

اصطکاک

برای سطوحی که سخت و خشن می باشند. اگر جسمی با آن سطح در تماس بیافتد . حتماً نیرویی به نام اصطکاک بین آن دو بوجود می آید. البته بعضی از اوقات دو جسم در مقابل حرکت روی هم دارای هیچ نوع اصطکاکی نخواهند بود . یعنی اینکه سطح های آنها دارای اصطکاک نیستند. البته این مسئله کلاً در هیچ نوع جسمی صدق نمی کند چونکه اصطکاک همیشه خواهد بود حت اگر تعداد آن ناچیز باشد.

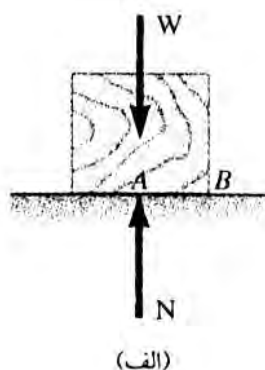
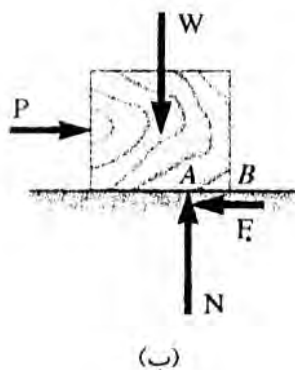
پس اصطکاک نیرویی است که در مقابل با حرکت ممانعت خواهد کرد و جهت آن نیرو مخالف جهت حرکت خواهد بود. مقدار اصطکاک یک حدی خواهد داشت که متناسب است با مقدار نیروی عمود بر سطح (جهت اصطکاک)

انواع اصطکاک:

1- اصطکاک خشک: Coulumb Friction

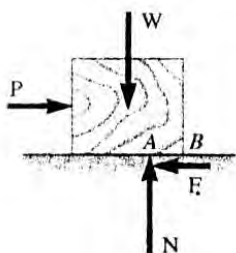
2- اصطکاک مایعات: Fluid Friction

قوانین اصطکاک خشک: ضریب اصطکاک



اگر P اضافه شود همینطور F هم اضافه شود تا اینکه مقدار P به حد ماکزیمم F_m می رسد. اگر P از حد F_m بگذرد دیگر بالانس تعادل استاتیکی برقرار نخواهد بود. بعد از یک لحظه که حرکت آغاز شد، مقدار اصطکاک از حد F_m کمتر خواهد شد. مجازاً وضع مولکولی حجم و سطح و نفوذ آن مولکول ها نسبت به هم در موقع حرکت، کمتر خواهد شد. و از آن به بعد سرعت آن بلوک اضافه خواهد گردید در حالیکه بزرگی اصطکاک، ثابت خواهد ماند.

اگر P کوچک باشد این بلوک حرکت نخواهد کرد. یعنی نیرویی می بایست باشد که به آن اصطکاک می گویند و مقاومت در موقع حرکت خواهد داشت.



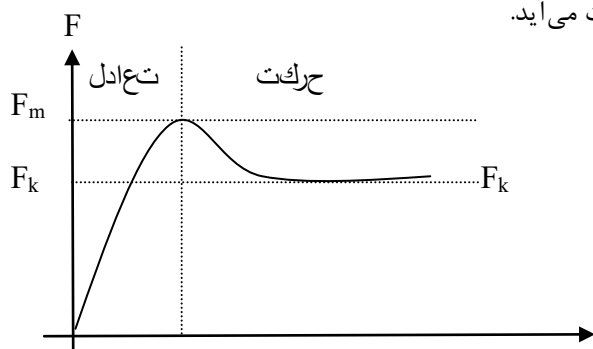
بسته به نوع وضعیت سطح تماس دارند و بصورت تقریبی از روی آزمایشات بدست می آید.

ضریب اصطکاک ایستایی: μ_s

ضریب اصطکاک: μ_x

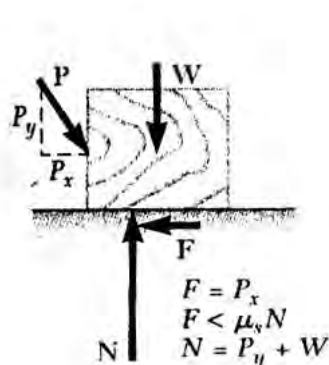
آزمایشات بدست می آید.

$$\begin{cases} F_m = \mu_s N \\ F_x = \mu_x N \end{cases}$$

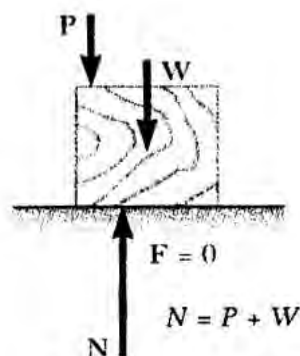


مقادیر تقریبی ضریب اصطکاک ایستایی برای سطوح خشک

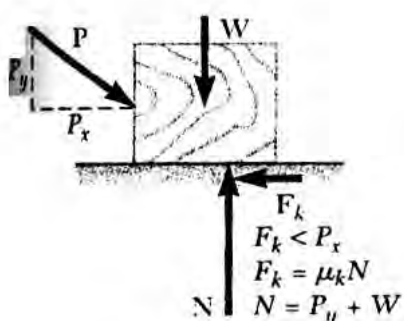
فلز روی فلز	۰٫۶۰-۰٫۱۵
فلز روی چوب	۰٫۶۰-۰٫۲۰
فلز روی سنگ	۰٫۷۰-۰٫۳۰
فلز روی چرم	۰٫۶۰-۰٫۳۰
چوب روی چوب	۰٫۵۰-۰٫۲۵
چوب روی چرم	۰٫۵۰-۰٫۲۵
سنگ روی سنگ	۰٫۷۰-۰٫۴۰
خاک روی خاک	۰٫۱۰-۰٫۲۰
لاستیک روی سیمان	۰٫۹۰-۰٫۶۰



(ب) بدون حرکت ($P_x < F_m$)

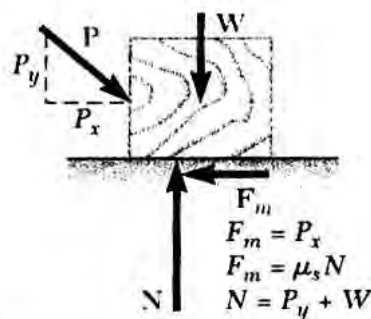


(الف) بدون اصطکاک ($P_x = 0$)



(د) در حال حرکت

$\longrightarrow (P_x > F_m)$



(ج) در شرف حرکت

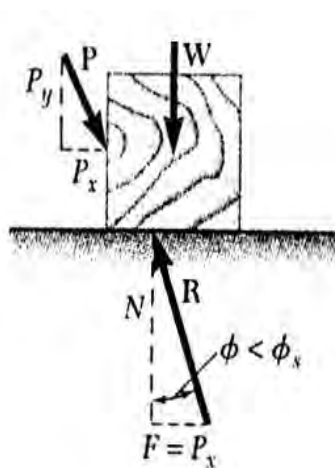
$\longrightarrow (P_x = F_m)$

زاویه اصطکاک:

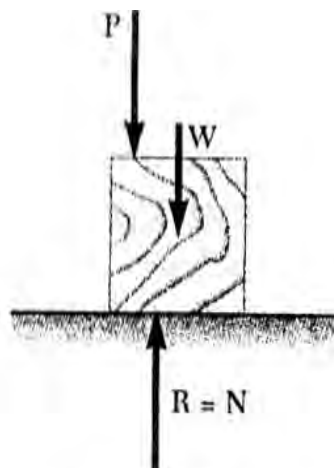
بعضی از اوقات بهتر است که نیروی اصطکاک و نیروی عمودی (نرمال) N را با یک نیرو جانشین کرد. این نیروی برآیند را R می‌نامیم.

زاویه اصطکاکی دینامیکی ϕ_n =

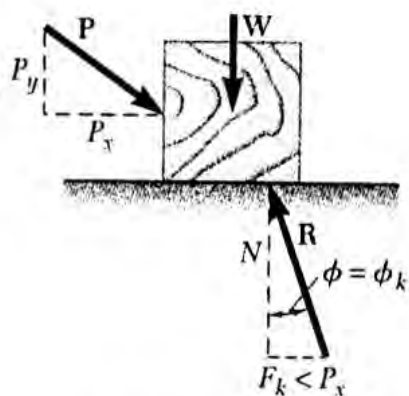
زاویه اصطکاکی استاتیکی ϕ_s =



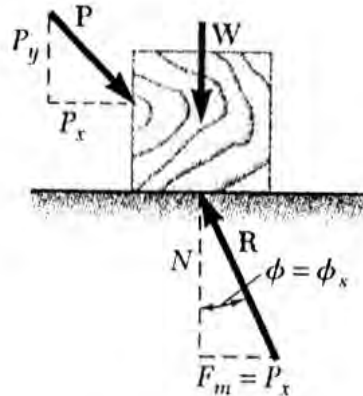
(ب) بدون حرکت



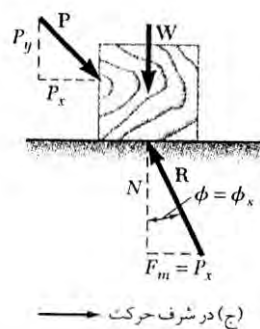
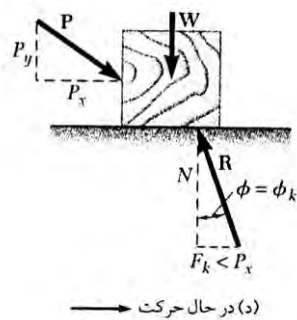
(الف) بدون اصطکاک



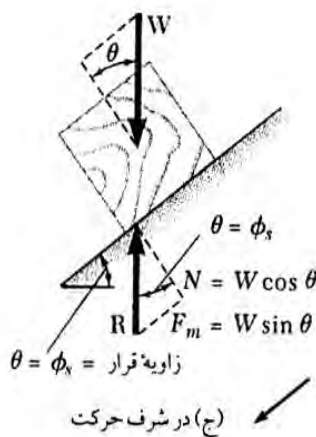
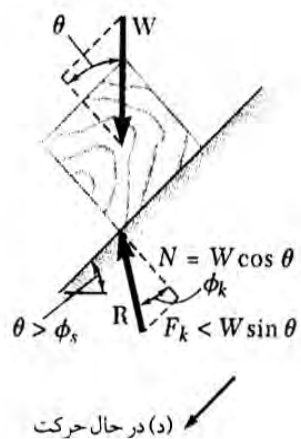
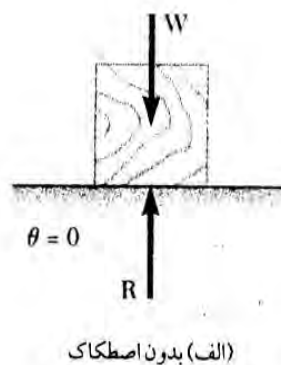
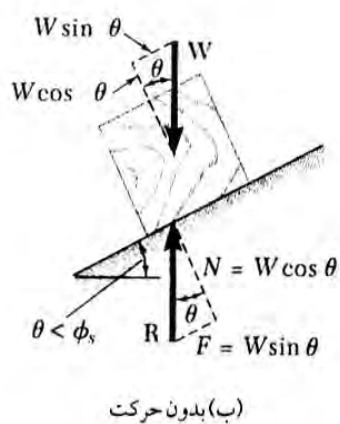
(د) در حال حرکت

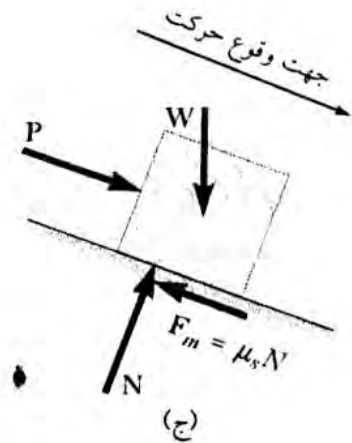
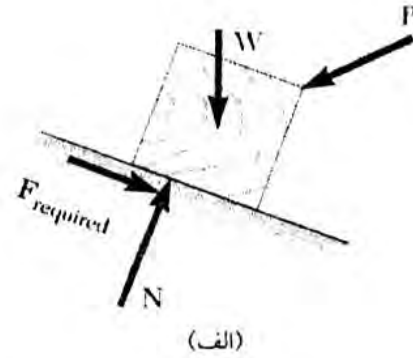
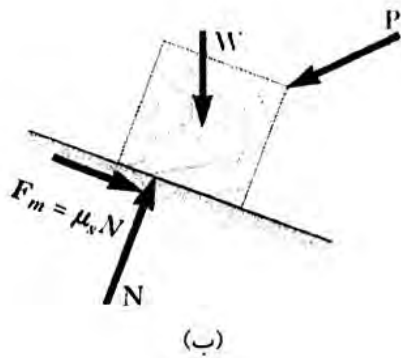


(ج) در شرف حرکت



اصطکاک در سطح شیب دار:



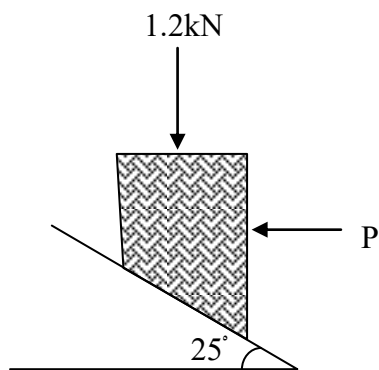


مثال ها:

مثال: گروه اول مسائل اصطکاکی

(الف) بدست بیاورید اگر بلوک در حال تعادل است یا خیر $\mu_k = 0.25$

(ب) بدست بیاورید مقدار و جهت نیروی اصطکاک را $P = 750N$



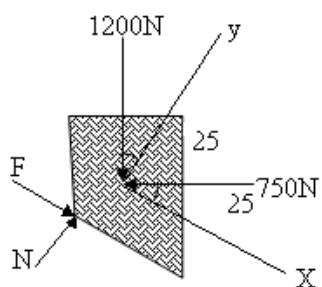
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F + 1200 \sin 25 - 750 \cos 26 = 0$$

$$F = 172.6 \text{ (N)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - (1200) \cos 26 - 750 \sin 26 = 0$$

$$N = 1404.5 \text{ (N)}$$

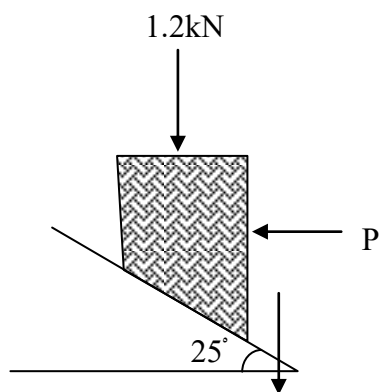
$$F_m = \mu_s N = 1404.5(0.36) = 491.6 \text{ (N)}$$



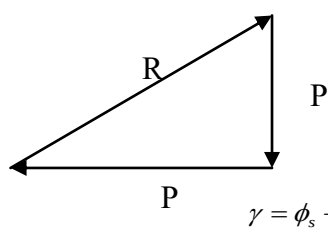
$$F < F_m \rightarrow F = 172.6 \text{ (N)} \text{0 تعادل برقرار است}$$

مثال : گروه دوم مسائل اصطکاکی 2

- (الف) کمترین مقدار θ را که بلوک را به طرف بالا به حرکت در آورد، بدست بیاورید.
 (ب) کمترین مقدار P را که بلوک مقابل را پس از حرکت بطرف بالا در حال حرکت نگهدارد ، بدست بیاورید.

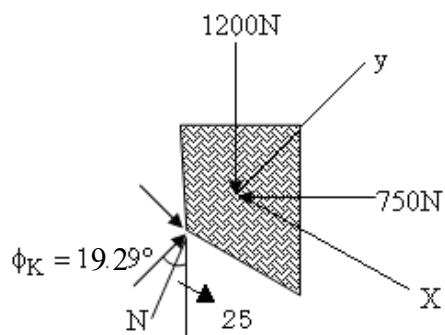


(الف)



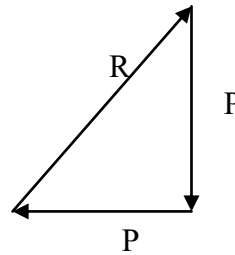
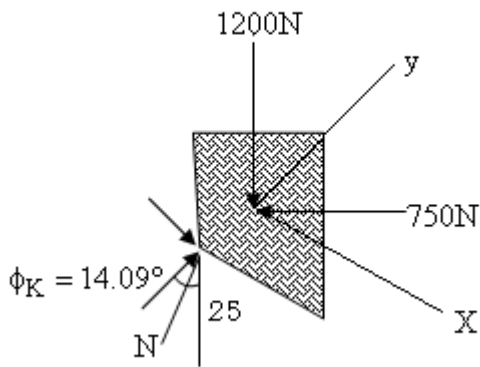
$$\phi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.29^\circ$$

$$\gamma = \phi_s + \theta = 44.29^\circ$$



$$p = 1200 \tan 44.29 = 1171 \text{ (N)}$$

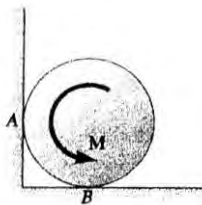
ب)



$$\gamma = \phi_k + \theta = 39.09^\circ$$

$$p = 1200 \tan 39.04 = 973(\text{N})$$

مثال : بدست بیاورد مقدار کوپل M که به دیسک مقابل وارد می شود و هیچ چرخشی وارد نمی کند. وزن دیسک W می باشد با ضریب اصطکاک μ_s



$$F_A = \mu_s M \quad F_B = \mu_s N_B$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad M - r F_A - r = 0 \quad M = k N_A (1 + \mu_s)$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad N_A - F_B = 0 \quad \rightarrow N_A = \mu_s N_B$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad N_B + F_A - W = 0 \quad \rightarrow N_B = W - \mu_s N_A$$

$$N_A = \mu_s (W - \mu_s N_A) \rightarrow N_A = \frac{\mu_s W}{1 + \mu_s^2}$$

$$N = W r \mu_s \left(\frac{1 + \mu_s}{1 + \mu_s^2} \right)$$

مثال :

معین کنید مقدار و جهت حداقل نیروی P را:

الف) برای شروع حرکت بطرف بالا

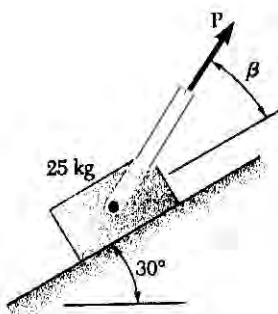
ب) نیروی لازم برای جلوگیری حرکت جسم بطرف پائین

$$W = 40(\text{lb})$$

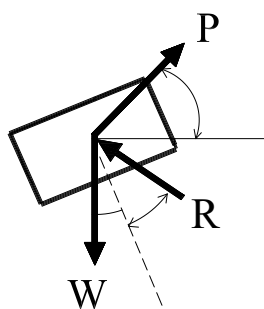
$$= 25^\circ \quad \alpha$$

$$= 0.20 \quad \mu_s$$

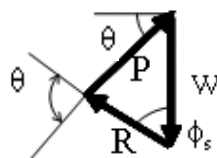
$$\tan \phi_s = \mu_s = 0.20 \quad \phi_s = 11.3^\circ \quad \Rightarrow$$



(الف)



برای حداقل P
این زاویه 90° است



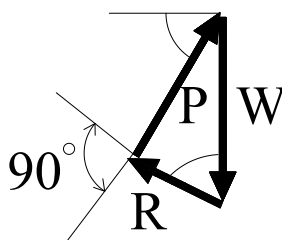
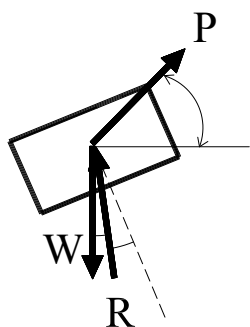
$$40(\text{lb})$$

$$25^\circ + 11.3^\circ = 36.3^\circ$$

$$\theta = 36.3^\circ$$

$$P = 40 \sin 36.3^\circ = 23.7 \text{ (lb)}$$

(ب)



$$40(\text{lb})$$

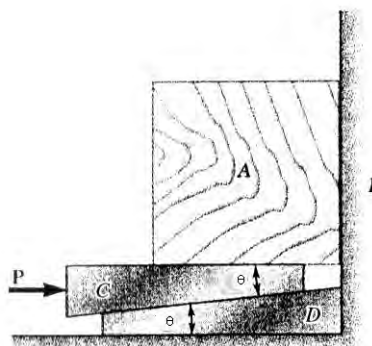
$$25^\circ - 11.3^\circ = 13.7^\circ$$

$$\theta = 13.7^\circ$$

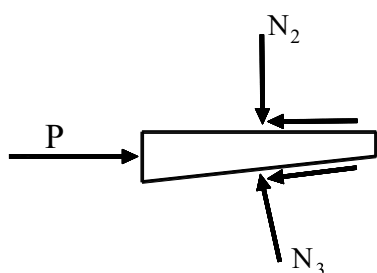
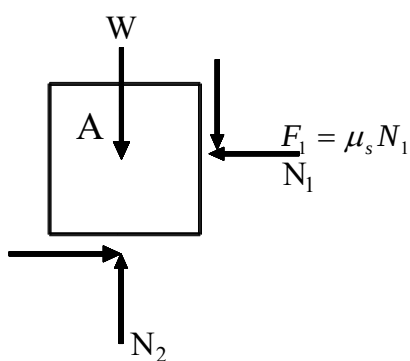
$$P = 40 \sin 13.7^\circ = 9.47 \text{ (lb)}$$

نگاه دارنده (WEDGE)

ابزار و یا ماشین هایی هستند که برای بالا بردن بلوک ها و سنگ ها و همینطور اجسام سنگین دیگر بکار میروند. این نیروهای سنگین را می توان بطریق وارد کردن یک نیروی کمتر بلند کرد. همینطور بخاطر شکل این نگاهدارنده ها بعد از بلند کردن این اجسام آنها به حالت خوب بخاطر اصطکاک در همان مکان ها خواهند ماند. مثلاً بخواهیم بلوک A را با کمترین نیروی p به طرف بالا ببریم.



$$F_2 = \mu_s N_2$$



نامعلوم: N_1, N_2, N_3, P

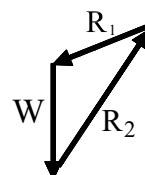
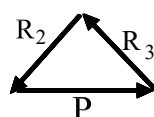
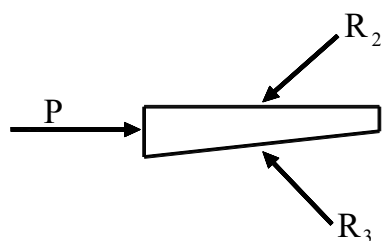
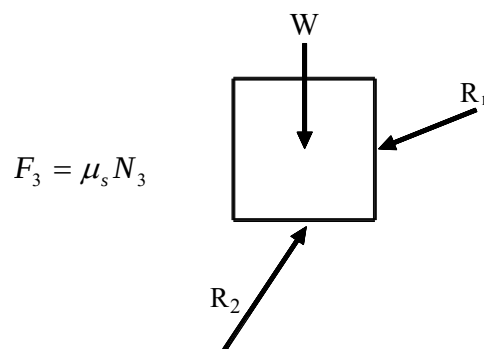
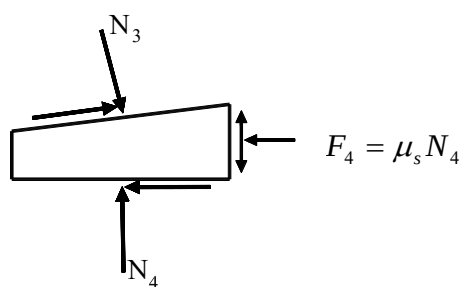
W = معلوم

P = ?

$$\left. \begin{array}{l} F_2 = \mu_s N_2 \\ F_3 = \mu_s N_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{از شکل 1} \\ \text{از شکل 2} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right.$$

4 معادله و 4 مجهول

$$\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array}$$



مثال : تیر مقابل توسط یک گاهه آهنی E , F تنظیم می شود .

ورق CD به تیر AB جوش داده شده است . عکس العمل تیر توسط نیروهای خارجی به روی بتن برابر است با 100kN.

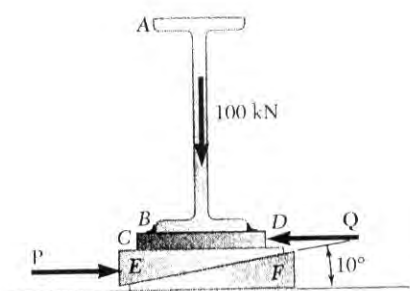
$$= 0.30 \mu_s \quad \text{بین آهن ها}$$

$$= 0.60 \mu_s \quad \text{بین بتن و آهن}$$

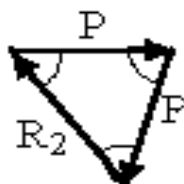
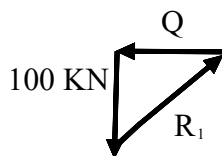
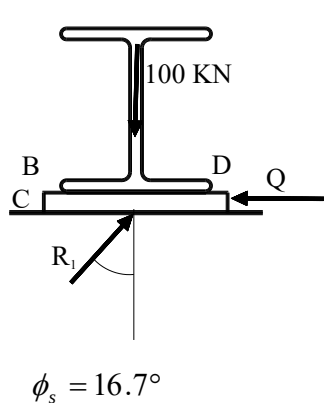
اگر حرکت افقی تیر مقابل توسط Q جلوگیری شود، بدست بیاورید:

الف) مقدار نیروی P را که برای بالا بردن این تیر لازم است.

ب) مقدار Q را. (از وزن گاهه ها صرف نظر کنید).



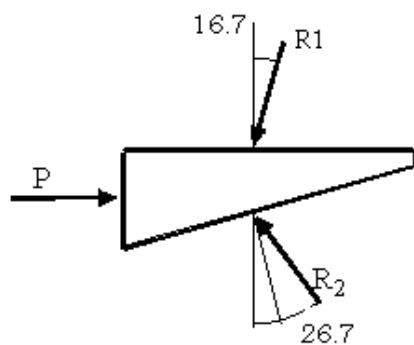
فرض می کنیم که به هنگام حرکت تیر آهن بوسیله ی گاهه وسطی ، گاهه زیرین حرکت نخواهد کرد.



$$\mu_s = 0.30 \quad \phi_s = 16.7^\circ \quad \Rightarrow$$

$$Q = (100) \tan 16.7^\circ = 30 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

$$R_1 = \frac{100}{\cos 16.7^\circ} = 104.4 \text{ kN}$$

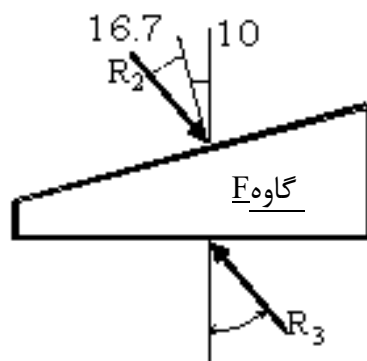


$$90^\circ - 16.7^\circ = 73.3^\circ \quad , \quad 90^\circ - 26.7^\circ = 63.3^\circ$$

گاوِه E

$$26.7^\circ + 16.7^\circ = 43.4^\circ$$

می بایستی چک کنیم و ببینیم که آیا گاوِه F لیز خواهد خورد یا خیر؟



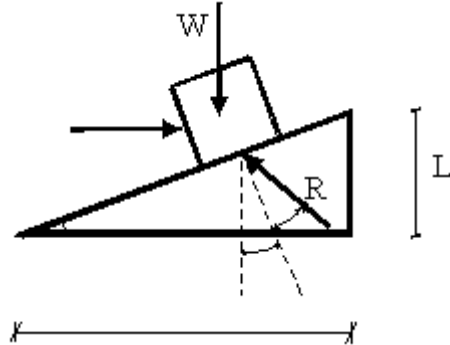
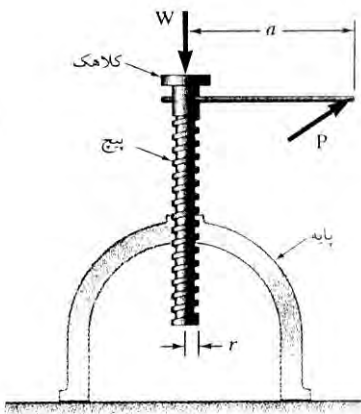
$$= 16.7^\circ + 10^\circ = 26.7^\circ \theta$$

$$\phi_{Conc} = \tan^{-1} 0.60 = 31.0^\circ$$

گاوِه F حرکت نخواهد کرد $\Rightarrow \theta < \phi$

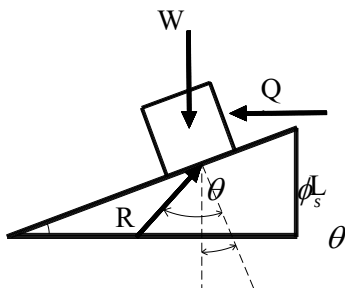
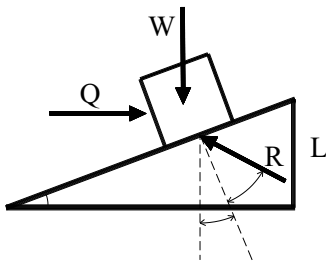
پیچ ها - با برجستگی های مربعی (SQUARE-THREADED SCREWS)

این نوع پیچ ها برای جک ها و ماشین های مختلف بکار می رود .
 $P = ?$ $Q = ?$



$$\frac{Pa}{r} = Q = \text{فاصله ای که پیچ بعد از یک دور با لایتر خواهد رفت .}$$

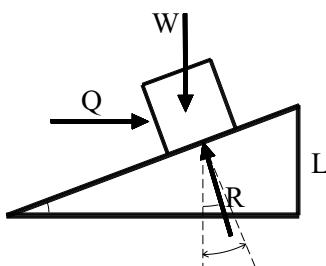
می بایستی از این شکل مقدار P را که لازم است وزن W را به بالا برد بدست بیاوریم.
 سفت کردن پیچ ← حرکت در حال شروع بطرف بالا
 (برای بالا بردن W)



باز کردن پیچ ← حرکت در حال شروع بطرف پائین
 $\phi_s > \theta$

(حالت قفل کننده) self locking

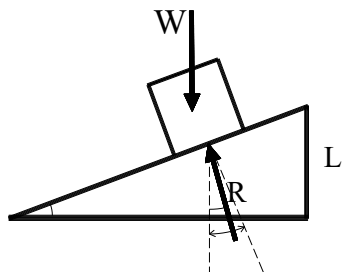
(برای پائین بردن W)



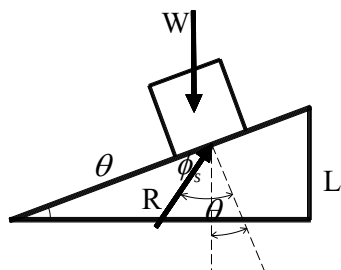
حرکت در حال شروع بطرف پائین

اگر $\phi_s < \theta$

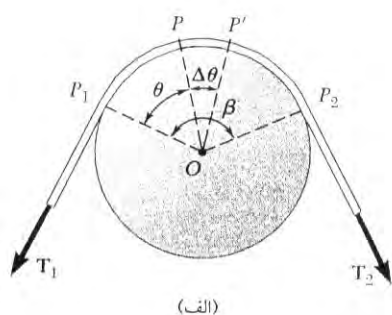
برای نگه داشتن این جسم می بایستی
 Q به طرفی که نشان داده شده است وارد شود .



if $\phi_s < \theta$
حالت خود بخود باز شونده
(unwind)



if $\phi_s > \theta$
حالت قفل کننده
(self locking)



اصطکاک تسریم

اگر تسریم مقابل را در نظر بگیریم و بدانیم که بعد از وارد کردن نیروی T_2 به طناب نیروی طناب در سر دیگر T_1 بستگی پیدا می کند به مقدار اصطکاک در روی قرقره . اگر پس از وارد شدن نیروی T_2 این طناب در شرف حرکت شود سپس از رابطه زیر معادله T_2, T_1 بدست می آید .

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

مقدار زاویه ای که طناب به دور قرقره پیچیده شده است . (رادیان)

$$T_2 > T_1$$

طناب نسبت به قرقره در

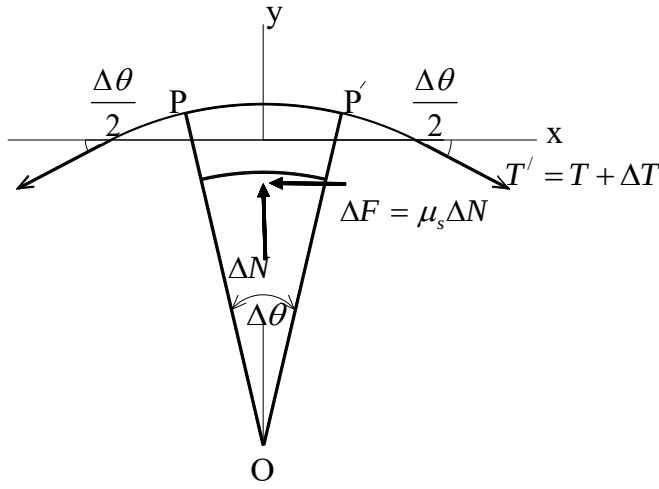
شرف لیز خوردن می باشد
یعنی هم قرقره و هم
طناب با هم می چرخند .

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta} \quad \frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$

اگر طناب پس از وارد شدن نیروی T_2 به آن به حرکت نیافتد ولیز بخورد سپس طناب نسبت به قرقره در حال حرکت است.

$$T_2 = T_1 e^{\mu_k \beta}$$

اگر طناب در روی قرقره به هیچ عنوانی در شرف حرکت نباشد و هیچ حرکت نداشته باشد دیگر روابط بالا برقرار نخواهد بود . در آن صورت $T_1 = T_2$



$$\sum F_x = 0$$

$$(T + \Delta T) \cos \frac{\Delta \theta}{2} - T \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta \theta}{2} - T \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 0$$

$$\Delta N = (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta \theta}{2} + T \sin \frac{\Delta \theta}{2}$$

$$\Delta T \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu_s (2T + \Delta T) \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 0$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta \theta} \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu_s \left(T + \frac{\Delta T}{2} \right) \frac{\sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} = 0$$

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \theta}{2} \rightarrow 0 \quad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

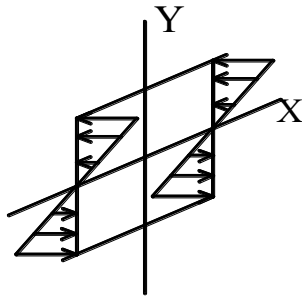
$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad \Rightarrow \quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu_s d\theta$$

فصل نهم

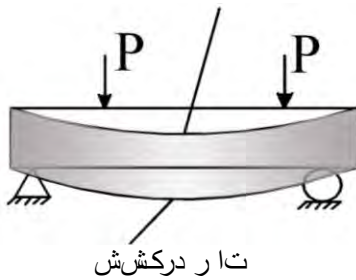
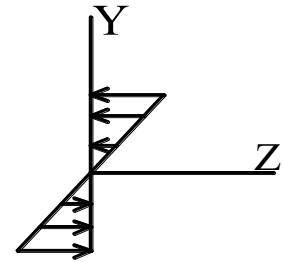
نیروهای گسترده و گشتاور لختی

گشتا ورماند (ممان اینرسی) Moment of inertia

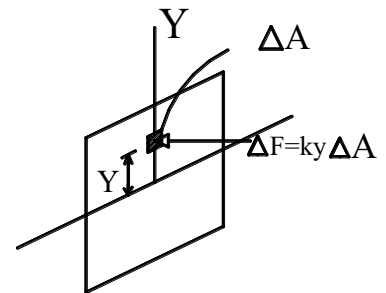
در طراحی تیرها باید به سرتاسر تیر نگاه کرد و حداکثر تنش موجود را بدست آورد.



تار در فشار



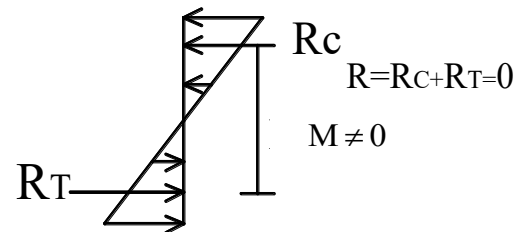
گشتاور اولیہ مقطع حول محور X



(شکل 9-1)

$$R = \int \mathbf{k} y dA = \mathbf{k} \int y dA$$

$$\int y dA = \bar{y}A = 0$$



R_C و R_T ایجاد یک کوپل میکنند.

گشتاور دوم مقطع حول محور X یا ممان اینرسی

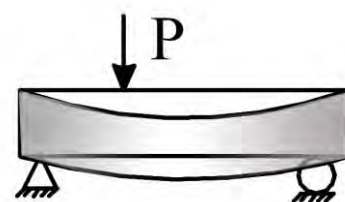
$$\Delta M = y \Delta f = y k y \Delta A$$

$$M = \int k y^2 dA = k \int y^2 dA$$

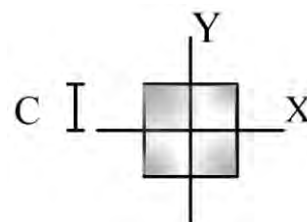
$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$\sigma_x = \frac{m_c}{I_x}$$



(شکل 2-9)

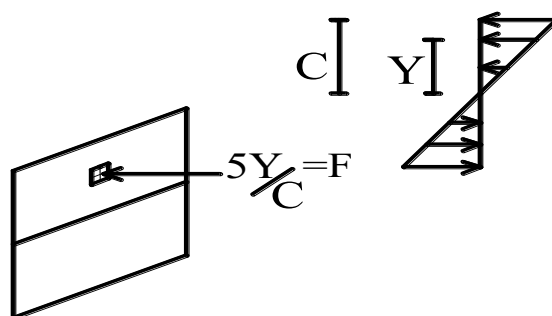


(شکل 3-9)

ممان اینرسی تعریف خاصی ندارد اما می توان گفت که ممان اینرسی نمایانگر مقاومت جسم در مقابله با خمش است. هر چقدر ممان اینرسی زیادتر شود تنش بخاطر خمش کمتر خواهد شد و بالعکس.

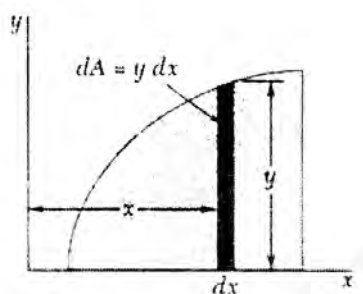
$$\Delta P = f dA$$

$$\Delta M = y \Delta F = f y dA = \frac{\sigma y}{c} y dA = \frac{\sigma y^2 dA}{c}$$

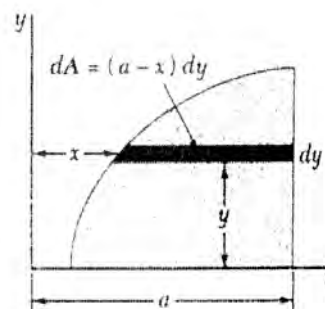


$$m = \int \frac{\sigma y^2 dA}{c} = \frac{\sigma}{c} \int y^2 dA \Rightarrow \sigma = \frac{m c}{\int y^2 dA} = \frac{M C}{I}$$

- بدست آوردن ممان اینرسی یک مساحت توسط روش انتگرالگیری



(شکل 4-9)



$$dI_y = x^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int x_{el}^2 dA$$

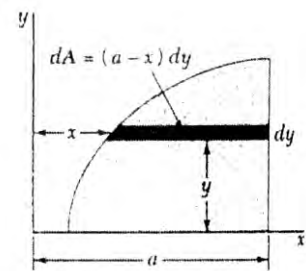
$$dI_x = y^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$\bar{x} = \int x dA$$

$$\bar{x}^2 A \neq \int x^2 dA = I_y$$

(شکل 5-9)



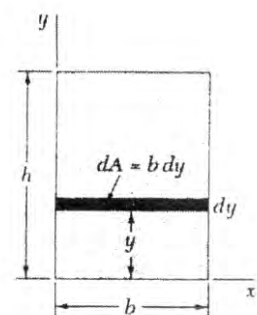
- ممان اینرسی مقطع مستطیل:

$$dA = b dy$$

$$dI_x = y^2 b dy$$

$$I_x = \int_0^h b y^2 dy = \frac{1}{3} b h^3$$

(شکل 6-9)

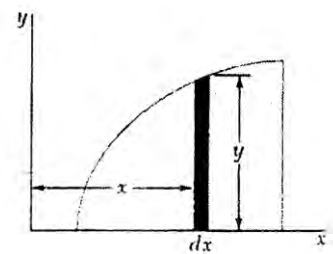


- ممان اینرسی از یک المان کوچک:

$$dI_y = x^2 dA = x^2 y dx$$

$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 dx$$

(شکل 7-9)



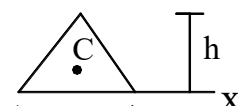
$$I_x = b h^3 / 36 + (\frac{h}{3})^2 (b h / 2) = \frac{b h^3}{36} + \frac{b h^3}{18} = \frac{b h^3}{12}$$

$$\bar{I} = b h^3 / 36$$

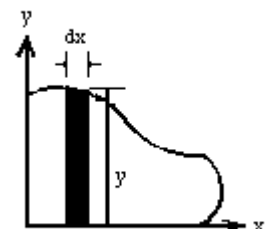
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \Rightarrow \bar{x} A = \int x dA \Rightarrow \int \bar{x}_{el} dA = \int x dA$$

$$\bar{x}^2 \neq \sum x_i^2 \Rightarrow \bar{x}^2 A \neq \int x^2 dA \Rightarrow \int \bar{x}_i^2 dA \neq \int x^2 dA$$

(شکل 8-9)



(شکل 9-9)

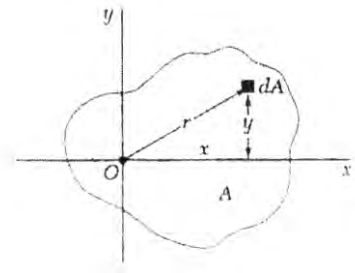


ممان اینرسی قطبی (polar moment of inertia):

$$J_o = \int r^2 dA \quad \text{گشتاور ماند قطبی}$$

(نسبت به یک نقطه)

(شکل 9-10)



$$J_o = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA$$

$$J = I_x + I_y$$

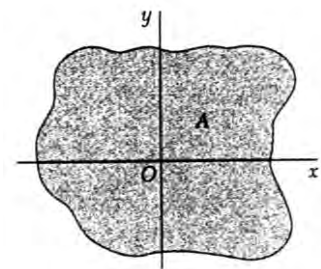
- شعاع ژیراسیون (شعاع ماند radius of gyration):

شعاع چرخشی سطحی

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \Rightarrow I_x = k_x^2 (A)$$

k_x = شعاع ماند حول محور x

(شکل 9-11)

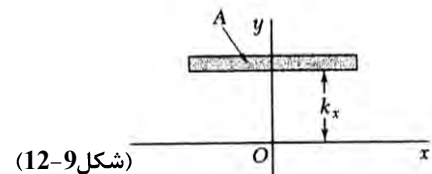


گشتاور سطح A نسبت به محور x

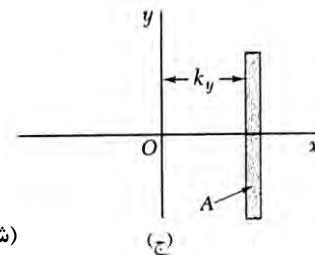
** هر چقدر k_x بزرگتر شود یعنی اینکه قسمتی از مساحت از تار خنثی بیشتر فاصله خواهد گرفت

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \Rightarrow I_y = k_y^2 (A)$$

k_y = شعاع ماند حول محور y



(شکل 9-12)

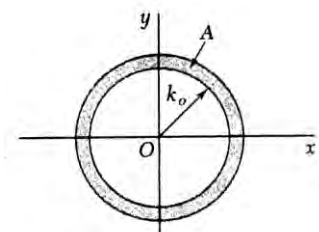


(شکل 9-13)

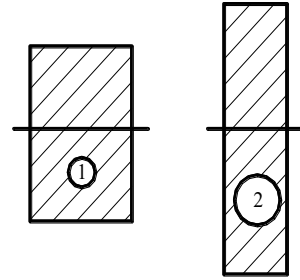
$$k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}} \Rightarrow J_o = k_o^2 (A)$$

k_o = شعاع ماند حول یک نقطه

(شکل 9-14)



$$r_0 \approx 0 < r_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} > r_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$



(شکل 9-15)

مثال: گشتاور لختی سطح مشخص شده را نسبت به محور y ها مشخص کنید؟

$$y_1 = k_1 x^2 \Rightarrow b = k_1 a^2 \Rightarrow k_1 = \frac{b}{a^2} \Rightarrow y_1 = \frac{b}{a^2} x^2$$

$$y_2 = k_2 x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = k_2 a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow k_2 = \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y_2 = \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$dI_y = x^2 dA = x^2 (y_2 - y_1) dx$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 (y_2 - y_1) dx = \int_0^a x^2 \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx$$

$$= \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} \int_0^a x^{\frac{5}{2}} dx - \frac{b}{a^2} \int_0^a x^4 dx = \frac{3}{35} a^3 b$$

$$dI_x = \left(\frac{1}{3} y_2^3 - \frac{1}{3} y_1^3 \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{b^3}{a^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{b^3}{a^6} x^6 \right) dx$$

$$I_x = \int dI_x = \frac{3}{35} ab^3$$

$$dI_x = y_1^2 x dy - y_2^2 x dy$$

$$dI_x = \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right)^2 x dy - \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} \right)^2 x dy$$

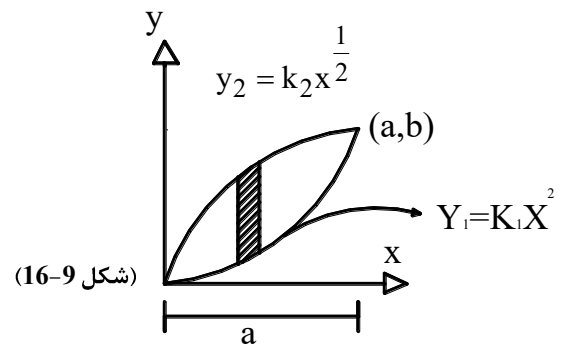
$$= \frac{b^2}{a^4} x^5 dy - \frac{b^2}{a} x^2 dy$$

$$I_x = \int dI_x = \dots$$

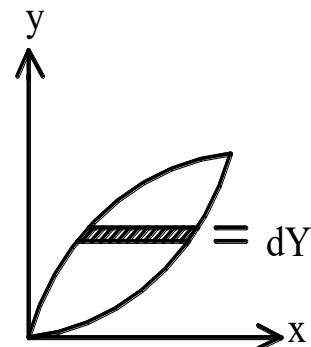
$$A = \dots$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

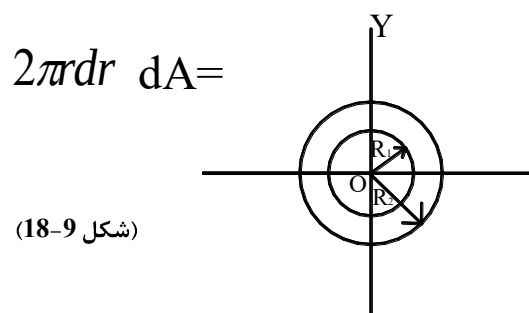


(شکل 9-16)



(شکل 9-17)

مثال: گشتاور لختی قطبی و گشتاور لختی حول محور Yها را بدست آورید؟



(شکل 9-18)

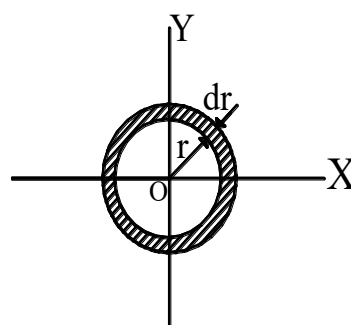
$$dJ = r^2 dA = r^2 (2\pi r dr) = 2\pi r^3 dr$$

$$J = \int dJ = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_{R_1}^{R_2}$$

$$J = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$J = I_x + I_y - 2I_{xy} \quad (\text{شکل 9-19})$$

$$I_x = \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

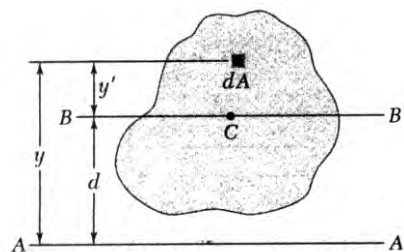


تئوری محورهای موازی:

نسبت به محور AA'

$$I = I_{AA'} = ?$$

(شکل 9-20)



$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA = \int y'^2 dA + \int d^2 dA + \int 2dy'dA$$

$$I = \int y'^2 dA + d^2 \int dA + 0$$

$$\boxed{I = \bar{I} + d^2 A}$$

I = گشتاورماند نسبت به هر محور

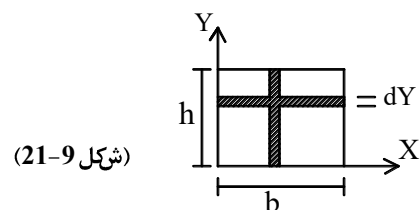
$\bar{I}$ = گشتاور ماند نسبت به محور مرکز سطح

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

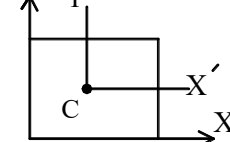
$$J_0 = \bar{J}_0 + d^2 A$$

$$k_0^2 = \bar{k}_0^2 + d^2$$

مثال:

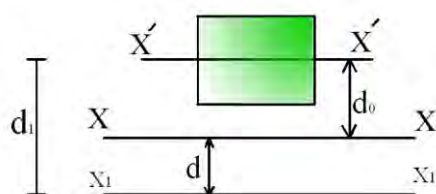


$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3}$$



$$I = \bar{I} + Ad^2$$

$$\bar{I} = I - Ad^2 = \frac{bh^3}{3} - bd\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$



$$I_x =$$

$$I_{x_1} = ?$$

$$I_x = \bar{I} + Ad_0^2$$

$$\bar{I} = I_x - Ad_0^2$$

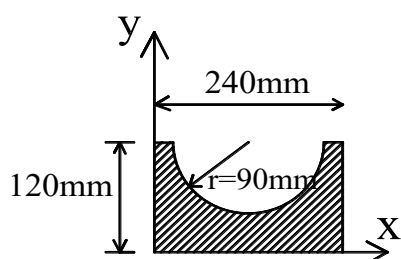
$$I_{x_1} = \bar{I} + Ad_1^2 = I_x - Ad_0^2 + Ad_1^2$$

$$I_{x_1} \neq I_x + Ad^2$$

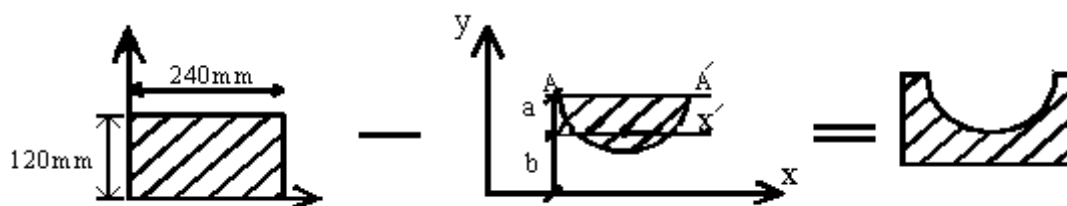
$$d = d_1 - d_0$$

مثال: ممان اینرسی شکل مقابل را نسبت به محور x

بدست آورید.



(شکل 9-22)



$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240)(120)^3 = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 90}{3\pi} = 38.2 \text{ mm}$$

$$b = 120 - a = 81.8 \text{ mm}$$

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi (90)^2 = 12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$I_{AA'} = \bar{I}_{x'} + Ad^2$$

$$25.76 \times 10^6 = \bar{I}_{x'} + (12.72 \times 10^3)(38.2)^2$$

$$\bar{I}_{x'} = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

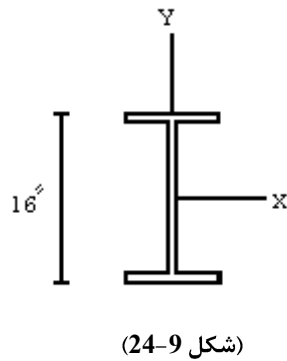
$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20 \times 10^6 + (12.72 \times 10^3)(81.8)^2 = 92.3 \times 10^6$$

$$I_x = 138.2 \times 10^6 - 92.3 \times 10^6 = 45.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

مستطیل		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} b h^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} b^3 h$ $I_x = \frac{1}{3} b h^3$ $I_y = \frac{1}{3} b^3 h$ $J_C = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2)$
مثلث		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36} b h^3$ $I_x = \frac{1}{12} b h^3$
دایره		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2} \pi r^4$
نیم دایره		$I_x = I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4} \pi r^4$
ربع دایره		$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8} \pi r^4$
بیضی		$\bar{I}_x = \frac{1}{4} \pi a b^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$ $J_O = \frac{1}{4} \pi a b (a^2 + b^2)$

(شکل 9-23)

ممان اینرسی سطوح مختلط:

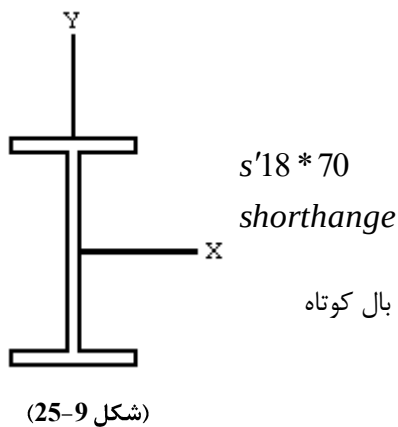


W16*64

ارتفاع = 16"
وزن = 64 $\frac{lb}{ft}$

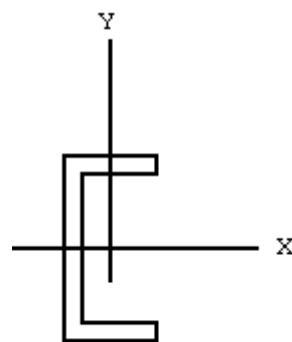
$A = 18.80 \text{ in}^2$

$I_x = 836 \text{ in}^4$ $h_x = 6.66"$
 $I_y = 73.3 \text{ in}^4$ $h_y = 1.97"$



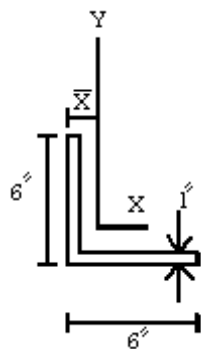
s'18*70
shorthange

بال کوتاه



10*25
channel
ناودانی

$A = 7.35 \text{ in}^2$
 $\bar{x} = .62"$
 $I_x = 91.2 \text{ in}^4$
 $I_y = 24 \text{ in}^4$



L6*6*1

Angle
نبشی

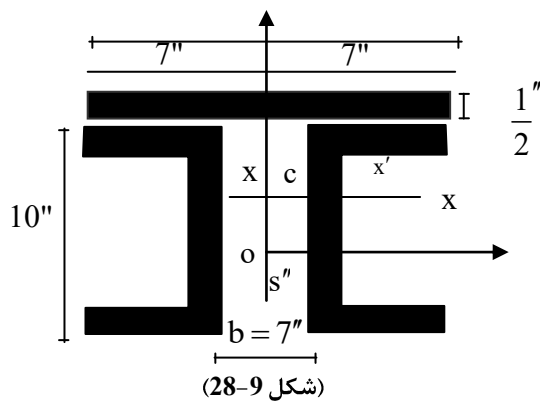
$A = 11.0 \text{ in}^2$ $\bar{x} = \bar{y} = 1.80"$
 $I_x = 35.6 \text{ in}^4$ $I_y = 35.5 \text{ in}^4$
 $k_x = 1.80 \text{ in}$ $k_y = 1.83 \text{ in}$

مثال:

نسبت به مرکز سطح

$I'_x = ?$

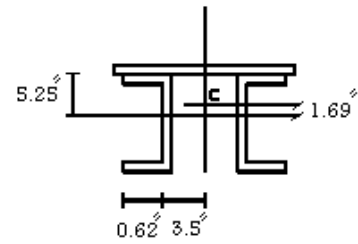
$I'_y = ?$



	A	$\bar{y}$	$\bar{y}A$
p14*1/2	7	5.25	36.75
C10*25	7.35	0	0
C10*25	7.35	0	0
Σ	21.7	2.25	36.75

$$\bar{Y} \sum A_i = \sum \bar{Y}_i A_i \Rightarrow \bar{Y}(21.7) = 36.75$$

$$\Rightarrow \bar{Y} = 1.69''$$



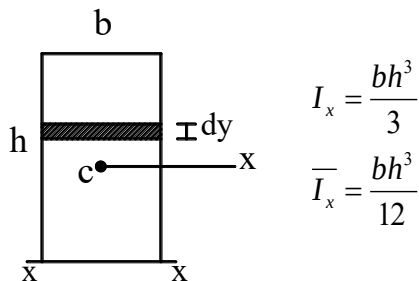
(شکل 9-29)

1 ورق: $I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = \frac{1}{12}(0.5)^3(0.4) + (0.5)(14)(5.35 - 1.694)^2 = 88.7 \text{ in}^4$

2 نبشی: $I_x = \bar{I}_x + Ad^2 = 91.2 + 7.35(1.69)^2 = 112.3 \text{ in}^4$

$$I_x = I_{x1} + 2I_{x2} = 88.7 + 2 * 112.3 = 313 \text{ in}^4$$

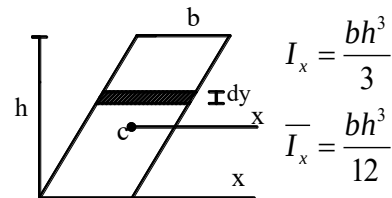
کل $I_y = \frac{1}{12}(0.5)(14)^3 + 2(8.4 + 7.35(3.5 + .62)^2) = 114.3 + 2 * 128.2 = 371 \text{ in}^4$



(شکل 9-30)

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

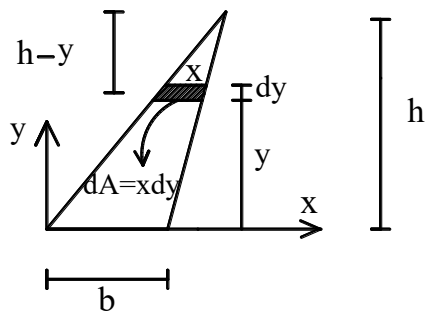
$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$$



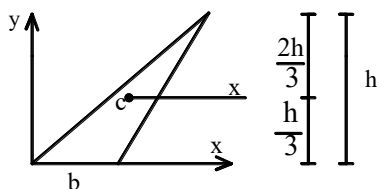
(شکل 9-31)

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$$



(شکل 9-33)



$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 \Rightarrow \frac{bh^3}{12} = \bar{I}_x + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$$

(شکل 9-32)

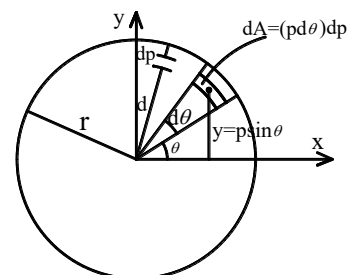
$$x = \frac{b}{h}(h-y)$$

از مثلث های مشابه:

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y) dy$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

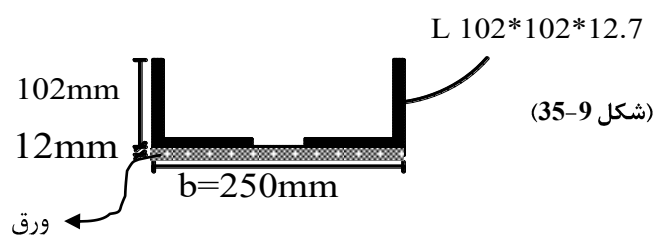
(شکل 9-34)



$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^r \int_0^{2\pi} (\rho \sin \theta)^2 \rho d\theta dp = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta d\theta dp$$

$$I_x = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho^3 d\rho \right) \sin^2 \theta d\theta = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

مثال:



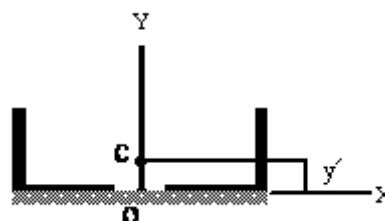
$$I_x = ?$$

$$I_y = ?$$

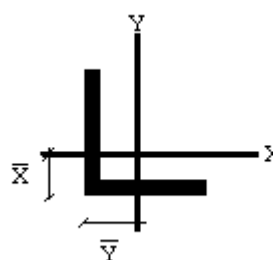
$$A = 2420 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 2.31 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{x} = \bar{y} = 30 \text{ mm}$$



$$\bar{y} = \frac{2 \times 2420 \times 30 - 12 \times 250 \times 6}{2420 \times 2 + 12 \times 250} = 16.22 \text{ mm}$$



$$\bar{I}_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2 = \frac{1}{12} \times 250 \times 12^3 + 12 \times 250 \times (16.22 + 6)^2 = 1.52 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

برای ورق:

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} \times 12 \times 250^3 = 15.63 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

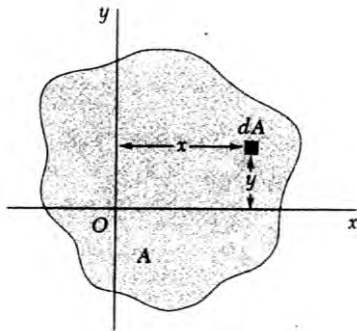
$$\begin{aligned} \bar{I}_x &= 2(\bar{I}_{x'} + Ad^2) = 2(2.31 \times 10^6 + 2420 \times (30 - 16.22)^2) = 5.54 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ \bar{I}_y &= 2(\bar{I}_{y'} + Ad^2) = 2(2.31 \times 10^6 + 2420 (125 - 30)^2) = 48.3 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

برای نبشی ها:

$$\begin{aligned} \bar{I}_x &= 1.52 \times 10^6 + 5.54 \times 10^6 = 7.06 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ \bar{I}_y &= 15.6 \times 10^6 + 48.3 \times 10^6 = 63.93 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

برای کل مقطع:

حاصل ضرب اینرسی: (I_{xy}) product of inertia



(شکل 9-36)

$$I_{xy} = \int xy dA$$

$$I_{xy} > 0 \text{ یا } I_{xy} < 0$$

$$I_{xx}$$

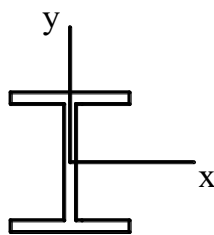
$$I_{yy}$$

برخلاف

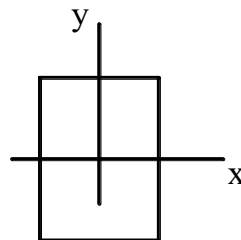
$$I_{xx} = \int y^2 dA > 0$$

$$I_{yy} = \int x^2 dA > 0$$

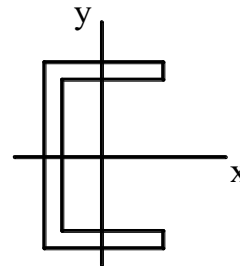
** برای اشکال قرینه نسبت به یک یا دو محور $I_{xy} = 0$ است.



$$I_{xy} = 0$$



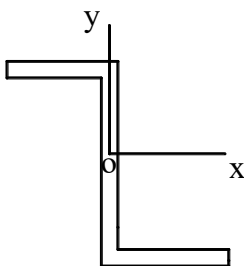
$$I_{xy} = 0$$



$$I_{xy} = 0$$

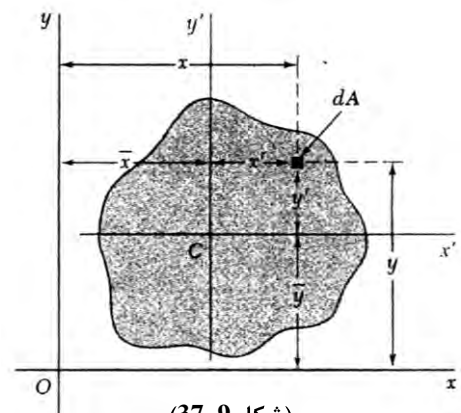
$$I_{xy} \neq 0$$

برای اشکال قرینه نسبت به یک نقطه (به غیر از دایره)

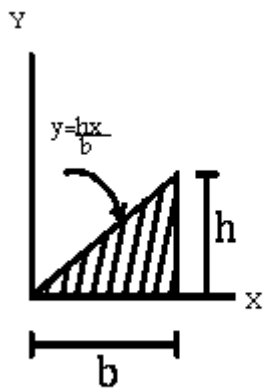


$$I_{xy} \neq 0$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$$



(شکل 9-37)



(شکل 9-38)

مثال: $I_{xy} = ?$

$$I_{xy} = \int dI_{xy}$$

$$dI_{xy} = d\bar{I}_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}dA$$

$$d\bar{I}_{x'y'} = 0$$

$$\bar{x}_{el} = x$$

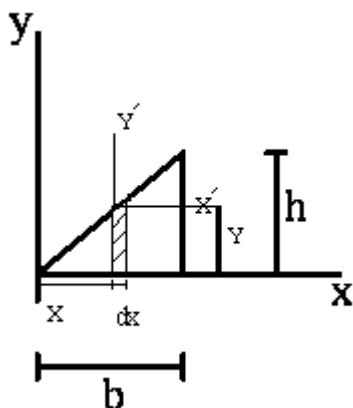
$$\bar{y}_{el} = \frac{y}{2}$$

برای یک المان جز

$$dA = ydx, y = \frac{hx}{b}$$

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = 0 + \int_0^b x\left(\frac{1}{2}y\right)ydx = \frac{1}{2} \int_0^b x\left(\frac{hx}{b}\right)^2 dx$$

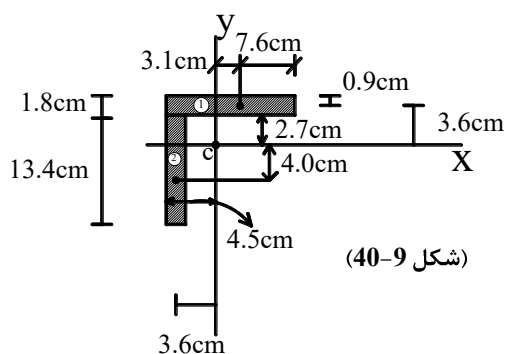
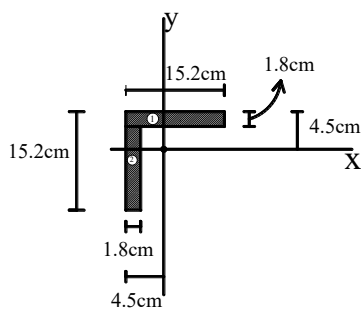
$$I_{xy} = \frac{1}{8} h^2 b^2$$



(شکل 9-39)

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^b x \left(\int_0^{\frac{hx}{b}} y dy \right) dx = \int_0^b x \frac{h^2 x^2}{2b^2} dx = \frac{h^2 x^4}{8b^2} \Big|_0^b = \frac{h^2 b^2}{8}$$

مثال: $I_{xy} = ?$



(شکل 9-40)

$$\bar{I}_{x'y'} = 0$$

به خاطر قرینه بودن هر قسمت

$$I_{xy} = \sum \bar{I}_{x'y'} + \sum \bar{x}\bar{y}A = \sum \bar{x}\bar{y}A$$

$$I_{xy} = \sum \bar{X}\bar{Y}A = 653 \text{ cm} = 6.53 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \Rightarrow$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \Rightarrow$$

	$A(\text{cm}^2)$	$\bar{X}(\text{cm})$	$\bar{Y}(\text{cm})$	$\bar{X}\bar{Y}A$
①	27.4	3.1	3.6	306
②	24.1	-3.6	-4.0	347
Σ	55.5	-5.0	-0.4	653

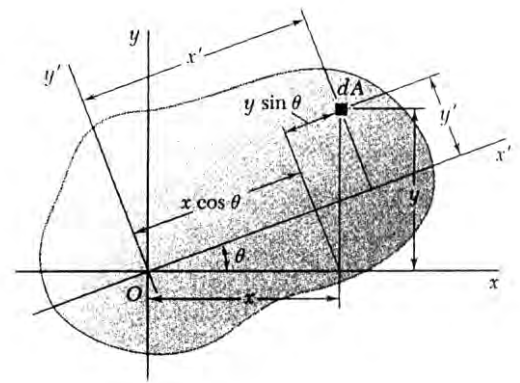
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

محورهای اصلی اینرسی

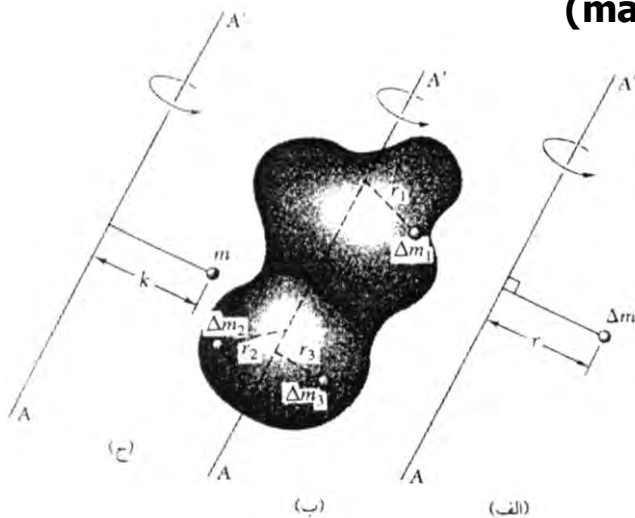
$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$



(شکل 9-41)

ممان اینرسی جرم (mass moments of inertia)



(شکل 9-42)

مانند سطح یک جرم Δm را در فاصله r^2 ضرب کنیم بصورت $r^2 \Delta m$ می‌توانیم آنرا ممان اینرسی جرم طول محور AA' بنامیم.

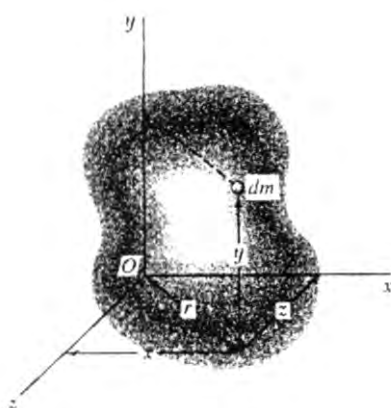
$$r_1^2 \Delta m_1 + r_1^2 \Delta m_2 + \dots = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

$$I_n^m = \int r^2 dm$$

ممان اینرسی جرم

(واحد kg.m^2)

ممان اینرسی جرم نمایانگر مقاومت از سیستم در مقابل هر نوع حرکت از جرم می‌باشند.



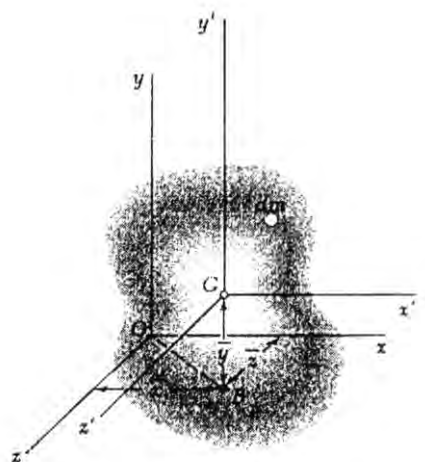
(شکل 9-43)

$$I_y^m = \int r^2 dm = \int (z^2 + x^2) dm$$

$$I_x^m = \int r^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_t^m = \int (x^2 + y^2) dm$$

دستگاه در مرکز ثقل جسم $ox'y'z'$
(مرکز ثقل جسم) **G**



(شکل 9-44)

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$x = \bar{x} + x'$$

$$y = \bar{y} + y'$$

$$z = \bar{z} + z'$$

$$I_n^m = \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm$$

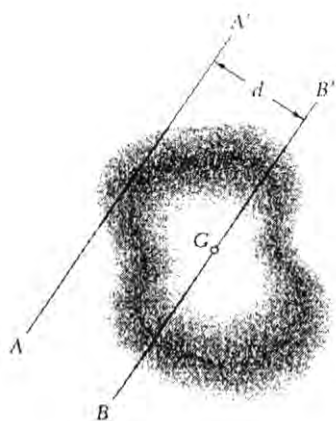
قانون تئوری محورها موازی

$$I_x^m = \bar{I}_{x'}^m + m(\bar{y}^2 + \bar{x}^2)$$

$$I_y^m = \bar{I}_{y'}^m + m(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)$$

$$I_t^m = \bar{I}_{t'}^m + m(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)$$

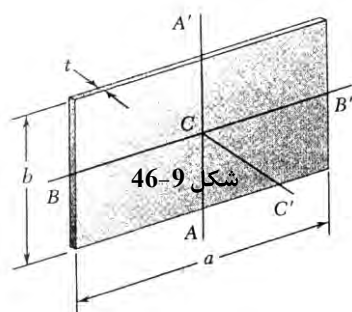
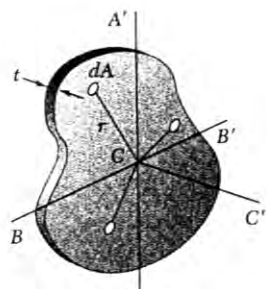
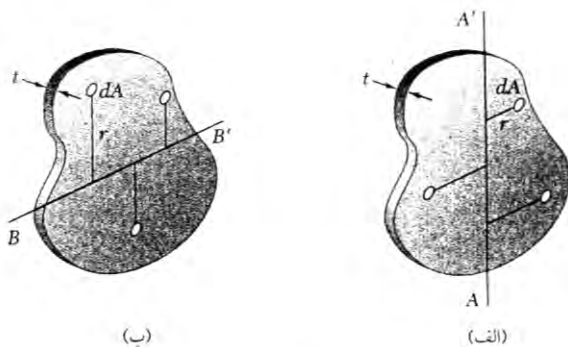
$$I^m = \bar{I}^m + md^2$$



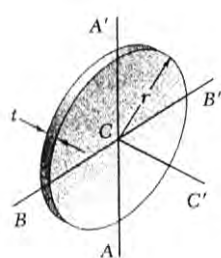
(شکل 9-45)

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + md^2$$

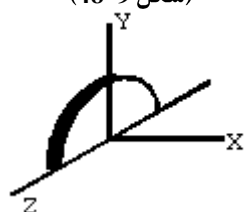
$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$



(شکل 9-47)



(شکل 9-48)



(شکل 9-49)

ممان اینرسی صفحات نازک:

برای جرم‌های همگن و ممان و با یک ضخامت

$$I_{AA'}^m = \int r^2 dm \quad dm = \rho t dA$$

$$\rho = \text{جرم مخصوص} \quad \frac{\text{جرم}}{\text{داده حجم}} = \frac{m}{V}$$

$$I_{AA'}^m = \rho t \int r^2 dA$$

$$I_{AA'}^m = \rho t I_{AA'}$$

$$I_{BB'}^m = \rho t I_{BB'}$$

$$I_{CC'}^m = \rho t J_c = \rho t (I_{AA'} + I_{BB'})$$

ورق مستطیلی

$$I_{AA'}^m = \rho t I_{AA'} = \rho t \left(\frac{1}{12} a^3 b \right)$$

$$I_{BB'}^m = \rho t I_{BB'} = \rho t \left(\frac{1}{12} a b^3 \right)$$

اما $\rho t a b = m = \text{جرم}$

$$I_{AA'}^m = \frac{1}{12} m a^2$$

$$I_{BB'}^m = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I_{CC'}^m = I_{AA'}^m + I_{BB'}^m = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

ورق دایره‌ای

$$I_{AA'}^m = \rho t I_{AA'} = \rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^4 \right)$$

$$\rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^2 \right) = m = \text{جرم}$$

$$I_{AA'}^m = I_{BB'}^m = \frac{1}{4} m r^2$$

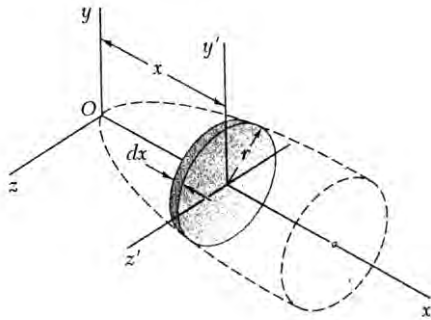
$$I_{CC'}^m = I_{AA'}^m + I_{BB'}^m = \frac{1}{2} m r^2$$

$$I_x^m = \rho t I_x = \rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^2 \right)$$

$$= \rho t \pi \frac{r^2}{2} \left(\frac{r^2}{4} \right) = \frac{1}{2} m r^2$$

- ممان اینرسی جرمی اجسام سه بعدی توسط روش انتگرالگیری :

اگر جسم همگن باشد انتگرالگیری دوبله یا سوبله داریم.



(شکل 9-50)

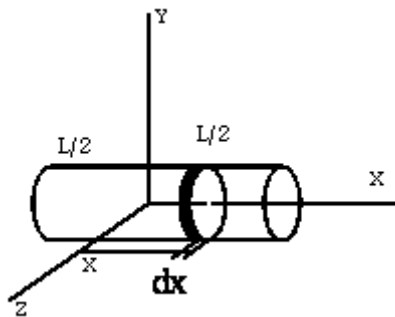
$$dm = \rho \pi r^2 dx$$

$$dI_x^m = \frac{1}{2} r^2 dm$$

$$dI_y^m = dI_{y'}^m + x^2 dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$$

$$dI_z^m = dI_{z'}^m + z^2 dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$$

مثال: $I_y^m = ?$



(شکل 9-51)

$$dm = \rho dV = \rho \pi a^2 dx$$

$$dI_y^m = \left(\frac{1}{4} a^2 + x^2\right) dm = \left(\frac{1}{4} a^2 + x^2\right) (\rho \pi a^2 dx)$$

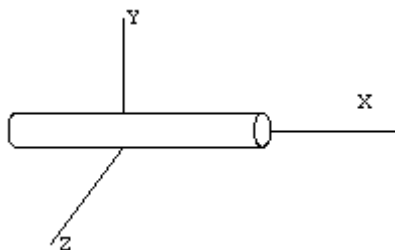
$$I_y^m = \int dI_y^m = \int \left(\frac{1}{4} a^2 + x^2\right) \rho \pi a^2 dx$$

$$= \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{4} \rho \pi a^2 dx + \int_{-l/2}^{l/2} \rho \pi a^2 x^2 dx = \frac{1}{4} \rho \pi a^4 l + \frac{1}{12} \rho \pi a^2 l^3$$

$$= \frac{1}{12} \rho \pi a^2 l (3a^2 + l^2)$$

$$m = \rho V = \rho \pi a^2 l \Rightarrow I_y^m = \frac{1}{12} m (3a^2 + l^2)$$

$$I_x^m = \frac{1}{2} m a^2$$



(شکل 9-52)

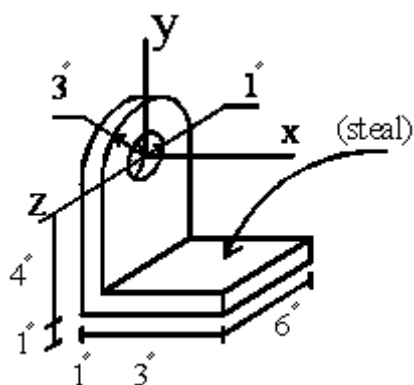
میله ی نازک

$$I_y^m = \frac{m}{12} (0 + l^2) = \frac{ml^2}{12} = I_z^m$$

$$I_x^m \approx 0$$

- ممان اینرسی اجسام مرکب

مثال: $I_x^m = ?$

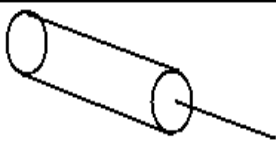
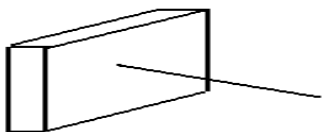
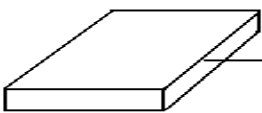


(شکل 9-53)

$$\rho = 0.000734 \frac{\text{lb.s}^2}{\text{in}^4}$$

$$\delta = 490 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$$

$$\rho = \frac{490}{32.2} \left(\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \right) \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} \right)^4 = 0.000734 \frac{\text{lb.s}^2}{\text{in}^4}$$

	m	I_x^m
	$\rho \frac{\pi}{2} (3)^2 (1)$ $= 14.14\rho$	$I_x^m = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} (14.14\rho)(3)^2$ $= 63.62\rho$
	$-\rho\pi(1)^2(1)$ $= -3.14\rho$	$I_x^m = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} (-3.14\rho)(1)^2$ $= -1.57\rho$
	$\rho(4)(6)(1)$ $= 24\rho$	$I_x^m = \frac{1}{12} (24\rho)(4^2 + 6^2) + (24\rho)(2)^2$ $= 200\rho$
	$\rho(4)(6)(1)$ $= 24\rho$	$I_x^m = \frac{1}{12} (24\rho)(1^2 + 6^2) + 24\rho(4.5)^2$ $= 560\rho$
Σ	59ρ	822ρ

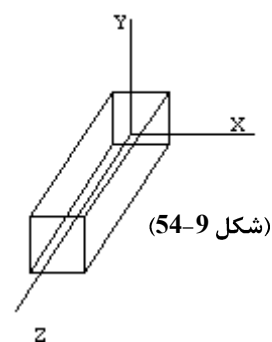
$$I_x^m = 822\rho = 822(0.000734) = 0.6033 \text{ lb.in.s}^2$$

$$h_x^m = \sqrt{\frac{I_x^m}{m}} = 3.73''$$

$$I_x = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$$

$$I_z = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$



(شکل 9-54)

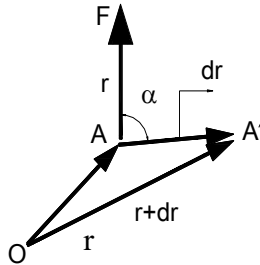
فصل دهم

روش کار مجازی

METHOD OF VIRTUAL WORK

روش کار مجازی

کار نیرو:



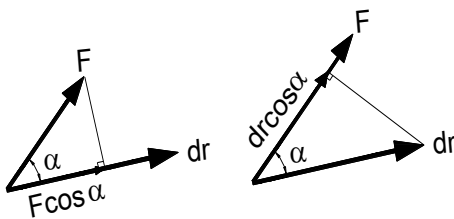
$$du = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

کار ناشی از اثر یک نیرو در یک نقطه $du = F dr \cos \alpha$

$$\begin{aligned} du &> 0 & \text{if } 0 < \alpha < 90^\circ \\ du &< 0 & \text{if } 90 < \alpha < 180^\circ \\ du &= 0 & \text{if } \alpha = 90 \end{aligned}$$

واحد کار:

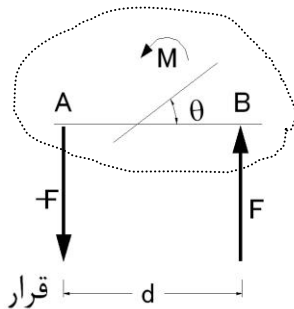
(joule = N.m)



شکل 1-10

$$du = (F \cos \alpha) dr = F (dr \cos \alpha)$$

بعضی از نیروها کار انجام نمی دهند و $du=0$ مانند عکس العمل های داخل pin بدون اصطکاک که بدنه اصلی توسط آن نگه داشته شده است به دور pin دوران کند، مانند عکس العمل روی سطح بدون اصطکاک که جسم متصل به آن سطح روی سطح حرکت کند، مانند نیروی واقع در تکیه گاه ثابت، مانند نیروی وزن که خود جسم به سمت افقی حرکت می کند، مانند عکس العمل روی یک غلتک و غیره.

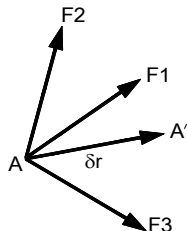


شکل 2-10

کار ناشی از دوران جسم توسط یک کوپل یا گشتاور : $M = Fd$
 $du = Md\theta$

اصل کار مجازی : فرض کنیم که نقطه A تحت تاثیر نیروهای F_1 و F_2 و F_3

گرفته و فرض کنیم که نقطه A به نقطه A' تغییر مکان بدهد این تغییر مکان ممکن است که اتفاق بیافتد و ممکن است که اتفاق نیافتد. پس این تغییر مکان بصورت مجازی فرض شده است.



جابجایی مجازی $\delta =$

مشتق درجه اول r است و آنرا برای تشخیص جابجایی مجازی dr بکار می برند.
 برای جابجایی حقیقی $d =$ برای جابجایی مجازی $\delta =$ operators $\rightarrow$

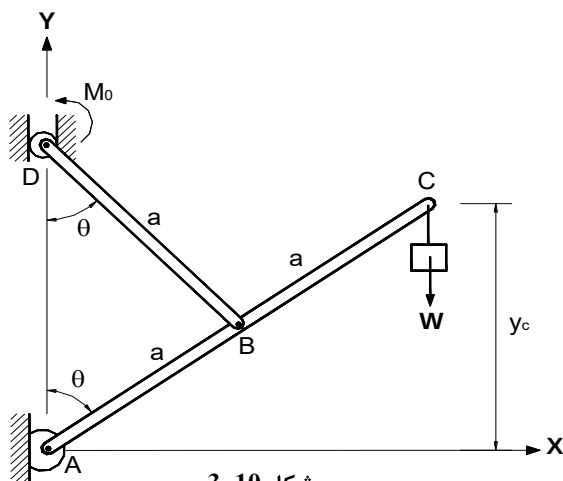
$$\delta u = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r} + \dots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) \delta \vec{r}$$

$$\delta u = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

تئوری کار مجازی می گوید که اگر نقطه ای در تعادل باشد جمع کل کارهای مجازی نیروهای وارد بر آن، نقطه برای تمام تغییر مکانهای مجازی آن نقطه صفر خواهد بود.

$$\left. \begin{aligned} \delta u = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow \text{اگر تعادل} \Rightarrow \text{لازم} \\ \Rightarrow \delta u = 0 \Rightarrow R \cdot \delta r = 0 \Rightarrow R = 0 \Rightarrow \text{کافی} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \text{لازم و کافی}$$

همچنین تئوری کار مجازی برای یک جسم صلب می گوید که اگر جسمی در تعادل باشد، جمع کل کارهای مجازی نیروهای خارجی وارد بر آن جسم برای هر تغییر مکان مجازی صفر خواهد بود.



شکل 3-10

مثال: با استفاده از روش کار مجازی نیروی کوپل M_0 را طوری بدست آورید که سیستم روبرو در تعادل باشد.

حل: عکس العمل ها در نقطه A کار انجام نمی دهند. زیرا تکیه گاه است. عکس العمل در نقطه D افقی است در حالیکه حرکت می تواند در جهت عمودی باشد پس کار در آنجا نیز صفر خواهد بود. همینطور در نقطه B نیروهای داخلی کارشان صفر است چون دو عضو همدیگر را خنثی خواهند کرد.

$$\delta u = 0 \Rightarrow M_0 \delta \theta - W y_c = 0$$

$$\delta \theta =$$

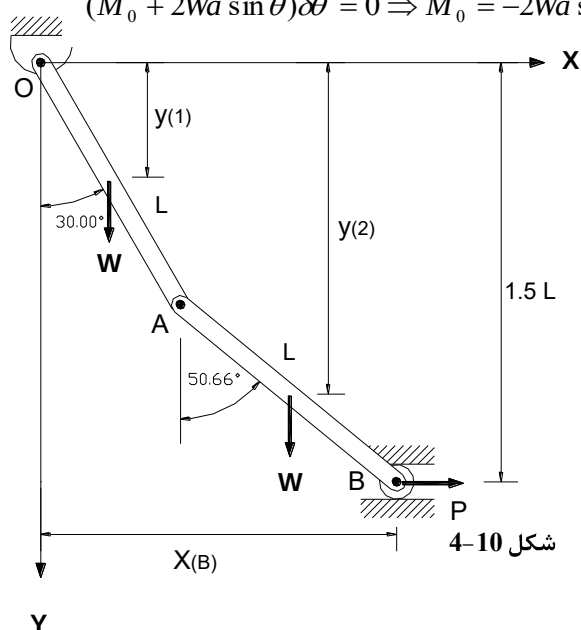
دوران مجازی عضو BD

تغییر مکان مجازی نقطه C

$$y_c = 2a \cos \theta \Rightarrow \delta y_c = \frac{dy_c}{d\theta} \delta \theta = -2a \sin \theta (\delta \theta)$$

$$\delta u = 0 \Rightarrow M_0 \delta \theta - W(-2a) \sin \theta (\delta \theta) = 0$$

$$(M_0 + 2Wa \sin \theta) \delta \theta = 0 \Rightarrow M_0 = -2Wa \sin \theta$$



شکل 4-10

مثال: دو میله OA و AB هر کدام به وزن W و طول L به یکدیگر در نقطه A لولا شده اند. مقدار لازم P را برای تعادل این سیستم در حالتیکه $\theta = 30^\circ$ بدست بیاورید.

$$y_1 = \frac{L}{2} \cos \theta_1 \quad y_2 = L \cos \theta_1 + \frac{L}{2} \cos \theta_2$$

$$\delta y = W \delta y_1 + W \delta y_2 + P \delta x_b = 0$$

$$l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 = 1.5l \Rightarrow \cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 1.5 \quad \theta_1 = 30^\circ \Rightarrow \theta_2 = 50.66^\circ$$

$$\delta y_1 = \frac{dy_1}{d\theta_1} \delta \theta_1 = -\frac{l}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 = -0.25l \delta \theta_1$$

$$\delta y_2 = \frac{dy_2}{d\theta_1} \delta \theta_1$$

$$y_2 = l \cos \theta_1 + \frac{l}{2} \cos \theta_2 = l \cos \theta_1 + \frac{l}{2} (1.5 - \cos \theta_1)$$

$$y_2 = \frac{l}{2} \cos \theta_1 + 0.25l$$

$$\delta y_2 = -\frac{l}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 = -0.25l \delta \theta_1$$

$$x_B = l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2$$

$$\delta x_B = \frac{\delta x_B}{\delta \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\delta x_B}{\delta \theta_2} \delta \theta_2 = l \cos \theta_1 \delta \theta_1 + l \cos \theta_2 \delta \theta_2$$

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 1.5$$

از روابط قبل $\delta \theta_2$ را بر حسب $\delta \theta_1$ به دست می آوریم. $\Leftarrow$

$$\frac{\delta}{\delta \theta_1} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \delta \theta_1 + \frac{\delta}{\delta \theta_2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \delta \theta_2 = 0$$

$$-\sin \theta_1 \delta \theta_1 - \sin \theta_2 \delta \theta_2 = 0 \Rightarrow \delta \theta_2 = -\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \delta \theta_1$$

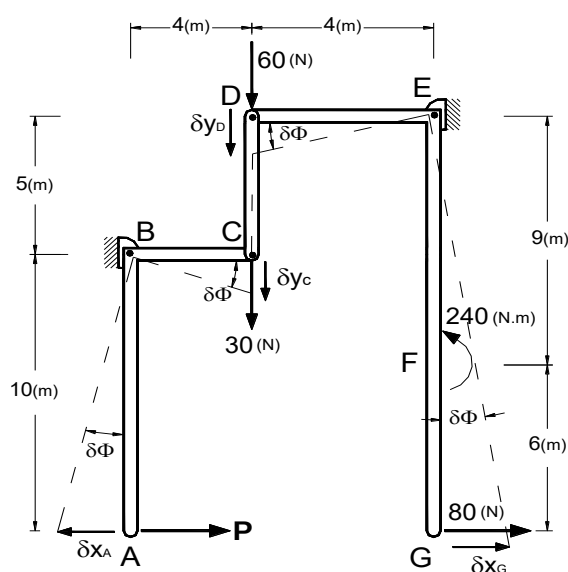
$$\delta x_B = l \cos \theta_1 \delta \theta_1 + l \cos \theta_2 \left(\frac{-\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \right) \delta \theta_1$$

$$\text{برای } \theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 50.66^\circ \Rightarrow \delta x_B = 0.456l \delta \theta_1$$

$$\delta u = 0 \Rightarrow W(-0.25l \delta \theta_1) + W(-0.25l \delta \theta_1) + P(0.456l \delta \theta_1) = 0$$

$$(-0.5W + 0.456P) \delta \theta_1 = 0$$

$$\delta \theta_1 \neq 0 \Rightarrow P = 1.096W$$



شکل 5-10

مثال: بدست بیاورید مقدار نیروی افقی P لازم در نقطه A تا سیستم مقابل را به تعادل برساند. (اندازه ها بر حسب اینچ)

حل: فرض کنیم که در نقطه B عضو به اندازه $\delta \theta$ می چرخد.

$$\delta x_A = 10 \delta \theta \leftarrow$$

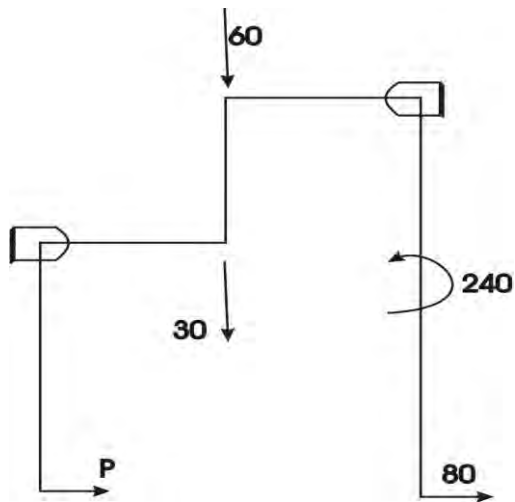
$$\delta y_C = 4 \delta \theta \downarrow$$

$$\delta y_D = \delta y_C = \delta \theta \downarrow$$

$$\delta \phi = \frac{\delta y_D}{6} = \frac{2}{3} \delta \theta$$

$$\delta x_G = 15 \delta \phi = 15 \left(\frac{2}{3} \right) \delta \theta = 10 \delta \theta$$

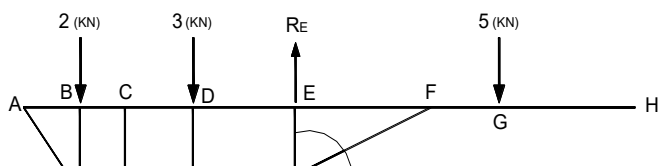
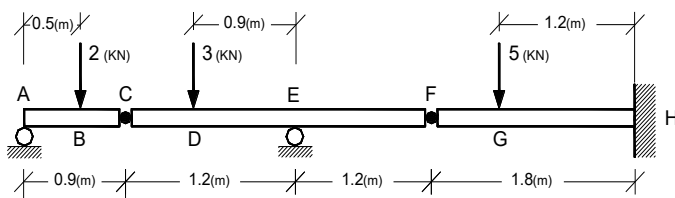
$$\delta u = 0 \Rightarrow -P \delta x_A + 30 \delta y_C + 60 \delta y_D + 240 \delta \phi + \delta x_G = 0$$



$$-P(10\delta\theta) + 30(4\delta\theta) + 60(4\delta\theta) + 240\left(\frac{2}{3}\delta\theta\right) + 80(10\delta\theta) = 0$$

$$P = 132.0(lb)$$

مثال: در تیر مقابل از روش کار مجازی مقدار عکس العمل در نقطه E را بدست آورید.



$$\delta y_C = \frac{2.7}{1.2} \delta y_E = 2.25 \delta y_E$$

$$\delta y_C = \frac{2.7}{1.2} \delta y_E = 2.25 \delta y_E$$

$$\delta y_B = \frac{0.5}{0.4} \delta y_E = 1.25 \delta y_E$$

$$\delta u = 0 \Rightarrow 2\delta y_B + 3\delta y_D - R_E \delta y_E = 0$$

$$[2(1.25) + 3(1.75) - R_E] \delta y_E = 0$$

$$\delta y_E \neq 0 \Rightarrow R_E = 7.25 \text{ kN} \uparrow$$

فصل ۱: مقدمه‌ای بر استاتیک

موضوع علم مکانیک به طور کلی به دو دسته تقسیم‌بندی می‌شود:

- الف) استاتیک: این قسمت با تعادل اجسام تحت تأثیر نیروها سروکار دارد
- ب) دینامیک: این قسمت حرکت اجسام را بررسی می‌کند.

۱-۱ مفاهیم بنیادی:

در این قسمت برخی از تعاریف بنیادی مورد نیاز در درس استاتیک به صورت خلاصه بیان می‌شود

- ۱- فضا (Space): ناحیه‌ای هندسی است که توسط اجسام اشغال می‌شود. وضعیت این جسم نیز با اندازه‌گیری‌های خطی و زاویه‌ای نسبت به دستگاه مختصات بررسی می‌شود. در مسائل دو بعدی، ۲ و در سه بعدی ۳ مختصه مستقل وجود دارد.
- ۲- زمان (Time): اندازه‌گیری توالی رویدادهاست که یکی از کمیت‌های مهم در دینامیک بوده و در استاتیک به طور صریح وارد نمی‌شود.
- ۳- جرم (Mass): اندازه‌گیری لختی (اینرسی) یک جسم است و مقاومت جسم را در برابر تغییر سرعت نشان می‌دهد.
- ۴- نیرو (Force): عکس‌العمل یک جسم بر جسم دیگر است. نیرو گرایش دارد جسم را در جهت کنش خود به حرکت در آورد. کنش یک نیرو با مقدار و جهت آن مشخص می‌شود از این رو نیرو به صورت برداری بیان می‌شود.
- ۵- ذره (Particle): جسمی با ابعاد ناچیز است. از نظر ریاضی، ذره جسمی است که ابعادهای نزدیک صفرند به طوری که آن را به صورت جرمی که در نقطه‌ای متمرکز شده باشد می‌توان در نظر گرفت.
- ۶- جسم صلب (Rigid Body): اگر تغییر فاصله بین هر دو نقطه دلخواه از جسمی برای منظوره‌ای بررسی ناچیز باشد، جسم را صلب می‌گویند؛ به عبارت دیگر جسمی را صلب گویند که تغییر شکل ندهد.

۱-۲ کمیت‌های اسکالر و برداری

در علم مکانیک دو نوع کمیت به طور گسترده استفاده می‌شوند که عبارت‌اند از کمیت‌های اسکالر و کمیت‌های برداری.

کمیت اسکالر: کمیت‌هایی هستند که فقط با یک مقدار مشخص می‌شوند مانند زمان، حجم، چگالی، انرژی و جرم.

کمیت‌های برداری: کمیت‌هایی هستند که دارای جهت و مقدار هستند و از قانون جمع متوازی‌الاضلاع پیروی می‌کنند مانند جابجایی، سرعت، شتاب، نیرو، گشتاور و اندازه حرکت.

بردارهایی که کمیت‌های فیزیکی را نشان می‌دهند به بردارهای آزاد، لغزان و ثابت دسته‌بندی می‌شوند.

۱- **بردار آزاد (Free Vector):** برداری است که خط اثر آن یک خط یکتا در فضا نیست مثلاً اگر

جسمی بدون چرخش حرکت کند، حرکت یا تغییر مکان هر نقطه از جسم را به عنوان یک بردار می‌توان در نظر گرفت. این بردار، جهت و مقدار تغییر مکان هر نقطه از جسم را توصیف می‌کند لذا تغییر مکان چنین جسمی را با بردار آزاد نمایش می‌دهند.

۲- **بردار لغزان (Sliding Vector):** برداری است با خط اثر یکتا در فضا اما نقطه اثر آن یکتا نیست

مثلاً وقتی یک نیروی خارجی بر جسم صلبی اثر می‌کند این نیرو را می‌توان در هر نقطه‌ای واقع در امتداد خط اثر آن وارد نمود بدون آنکه تأثیر آن بر جسم به عنوان یک کل تغییر کند و لذا یک بردار لغزان خواهد بود

۳- **بردار ثابت (Fixed Vector):** برداری است که نقطه اثر آن یکتا است. عکس‌العمل نیروی وارد بر

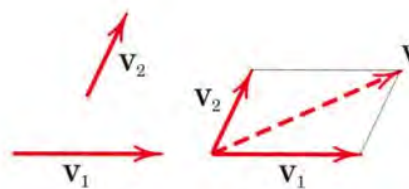
یک جسم تغییر شکل‌پذیر را باید با یک بردار ثابت در نقطه اثر نیرو مشخص نمود. در این حالت نیروها و تغییر شکل‌های داخل جسم به نقطه اثر نیرو و نیز مقدار و خط اثر آن بستگی دارد.

۳-۱ قراردادهای نمایش بردارها

کمیت برداری مانند وی را به یکی از دو صورت V یا $\vec{V}$ نمایش می‌دهند. جهت این بردار با علامت پیکان و اندازه آن به صورت $|V|$ نمایش داده می‌شود.

۴-۱ عملیات برداری

یکی از روش‌های جمع دو کمیت برداری استفاده از روش متوازی‌الاضلاع است. در شکل ۱-۱ نحوه این جمع نمایش داده شده است.

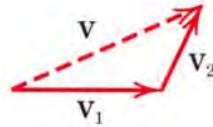


شکل ۱-۱: جمع برداری به روش متوازی‌الاضلاع

جمع برداری را به صورت رابطه‌ای به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}$$

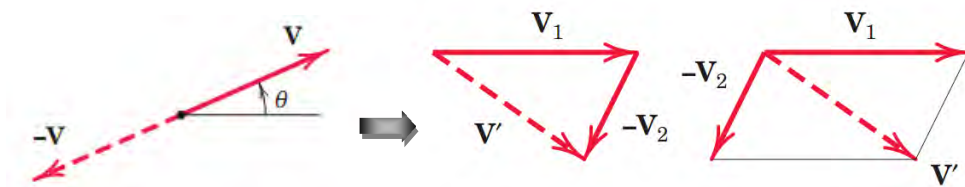
یکی دیگر از روش‌های جمع دو بردار روش مثلث می‌باشد که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.



شکل ۴-۱: جمع دو بردار به روش مثلث

در هر دو روش جمع برداری باید به این نکته توجه داشت که باید حداقل یکی از دو بردار جمع شونده بردار آزاد باشد.

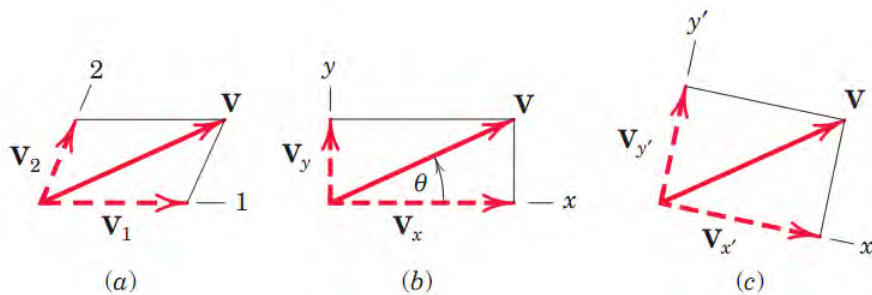
اگر در مسئله‌ای نیاز باشد که دو بردار را از یکدیگر کم نماییم تنها کافی است راستای بردار کم شونده را معکوس کرده و سپس با بردار اولیه جمع کنیم.



شکل ۴-۱: نمایشی از معکوس کردن و تفریق دو بردار از یکدیگر

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}' \Rightarrow \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2) = \vec{V}'$$

دو یا چند بردار که جمع برآیندی آن‌ها یک بردار مشخص باشد را **مؤلفه‌های بردار** می‌نامند. در شکل ۴-۱ نمایشی از مؤلفه‌های برداری مشاهده می‌شود. در شکل a دو مؤلفه بردار بر یکدیگر نمود نمی‌باشند. از این رو آن‌ها را با V_1 و V_2 نمایش می‌دهیم. در شکل b دو مؤلفه بر یکدیگر عمود هستند و یکی افقی و دیگری عمودی است. این نوع تجزیه در استاتیک کاربرد فراوان دارد. در شکل c مؤلفه‌های بردار بر هم عمود بوده اما به صورت افقی و یا عمودی نمی‌باشند.



شکل ۴-۱: انواع تجزیه بردارها

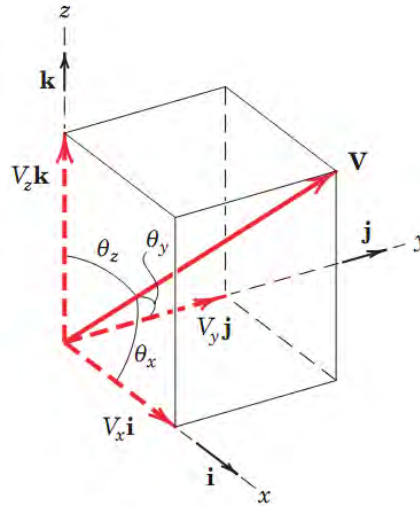
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{V_y}{V_x} \right)$$

در مختصات دو بعدی اگر بخواهیم برداری را با استفاده از مؤلفه‌های یک نمایش دهیم آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}$$

$$\begin{cases} V_x = V \cos \theta \\ V_y = V \sin \theta \end{cases}$$

در حالت نمایش سه بعدی یک بردار نیز مؤلفه‌های آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.



شکل ۵-۱: نمایش مؤلفه‌های سه بعدی یک بردار

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

$$\begin{cases} V_x = lV \\ V_y = mV \\ V_z = nV \end{cases}, \quad \begin{cases} l = \cos \theta_x \\ m = \cos \theta_y \\ n = \cos \theta_z \end{cases}, \quad |V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

در عبارت بالا l, m, n را کسینوس‌های هادی مربوط به بردار V می‌نامند. توجه داشته باشید که همواره:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

۵-۱ قوانین نیوتن

نیوتن سه قانون مهم را بیان نمود که عبارت‌اند از:

قانون اول:

اگر هیچ نیروی غیر صفری به یک ذره وارد نگردد، این ذره در صورت ساکن بودن به طور همیشگی ساکن باقی خواهد ماند و اگر با سرعت ثابت در حرکت باشد با همان سرعت حرکت خواهد نمود.

قانون دوم:

شتاب یک ذره با برآیند نیروی‌های وارده بر آن متناسب و هم‌جهت آن‌ها می‌باشد. این قانون به صورت رابطه زیر بیان می‌شود.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

قانون سوم:

نیروی عمل و عکس‌العمل که میان دو جسم اثر می‌کند با یکدیگر برابر و در خلاف جهت یکدیگر می‌باشند.

۱-۶ آحاد

کمیت‌های مهم در استاتیک را می‌توان در دو سیستم آحاد SI و سیستم انگلیسی گنجانده. در شکل ۱-۶ این آحاد برای کمیت‌های اصلی مکانیک در هر دو سیستم نمایش داده شده است.

QUANTITY	DIMENSIONAL SYMBOL	SI UNITS		U.S. CUSTOMARY UNITS	
		UNIT	SYMBOL	UNIT	SYMBOL
Mass	M	Base units	kilogram	slug	—
Length	L		meter	foot	ft
Time	T		second	second	sec
Force	F		newton	pound	lb

شکل ۱-۶: کمیت‌های اصلی در مکانیک و آحاد آن‌ها

واحد نیرو N بوده و به سبب آنکه از نام نیوتن برداشته شده است آن را با حرف بزرگ نمایش می‌دهند. این واحد را می‌توان با سه واحد اصلی یعنی جرم، طول و زمان به صورت زیر نمایش داد.

$$\text{force (N)} = \text{mass (kg)} \times \text{acceleration (m/s}^2\text{)}$$

$$N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

$$W(N) = m(\text{kg}) \times g(\text{m/s}^2)$$

به عبارت دیگر یک نیوتن عبارت است از مقدار نیرویی که باید به یک کیلوگرم جرم داده شود تا به آن شتابی معادل ۱ متر بر مجذور ثانیه داده شود.

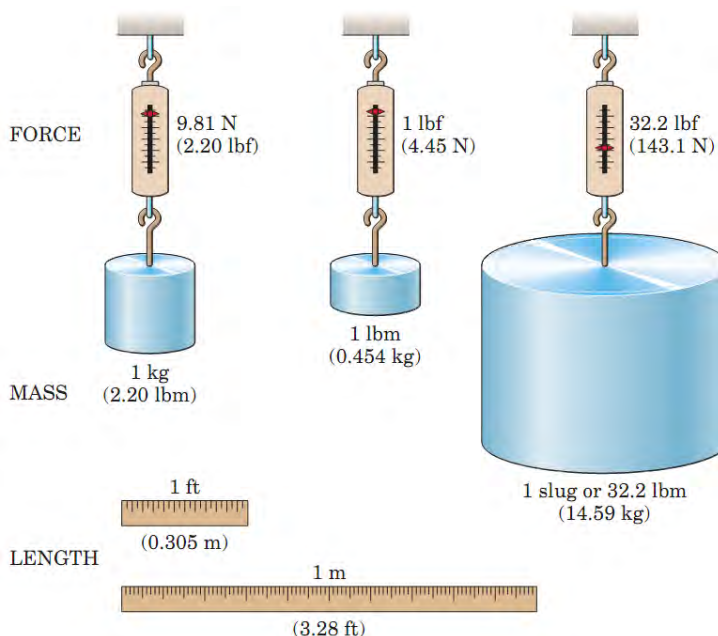
شتاب گرانش که در استاتیک به صورت گسترده استفاده می‌شود در هر کدام از دو سیستم آحاد استاندارد مقدار به خصوصی دارد که برابر است با:

$$\text{SI units} \quad g = 9.806\,65 \text{ m/s}^2$$

$$\text{U.S. units} \quad g = 32.1740 \text{ ft/sec}^2$$

در شکل ۱-۷ نمایی از تبدیل آحاد SI و انگلیسی را مشاهده می‌نمایید.

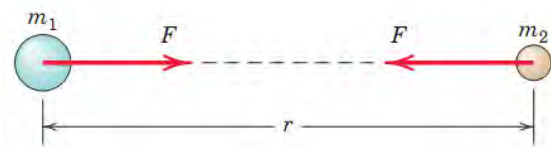
⊗ به طور کاربردی خوب است بدانیم که یک پوند در حدود نیم کیلو و هر سه فوت در حدود یک متر است.



شکل ۷-۱: نمایی از تبدیل واحدهای SI و انگلیسی

۷-۱ قانون گرانش

قانون جاذبه یا گرانش توسط نیوتن بیان شده است. این قانون به صورت رابطه زیر بیان می‌شود. هر گاه دو ذره m_1 و m_2 در فاصله r (فاصله از مرکز ذرات) از یکدیگر قرار داشته باشند، نیرویی معادل F در خلاف جهت به یکدیگر وارد می‌کنند.



شکل ۸-۱: نمای نیروی جاذبه بین دو ذره

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

G ثابت عمومی جاذبه (6.673×10^{-11}) ، واحد چیست؟

مثال ۱: دو ذره به جرم‌های ۱۰ و ۲۰ کیلوگرم در فاصله ۱ متری هم قرار دارند نیروی جاذبه بین آن‌ها را محاسبه کنید.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{(6.673 \times 10^{-11}) \times 10 \times 20}{1^2} = 1.3346 \times 10^{-8} \text{ N}$$

مثال ٢:

Use Newton's law of universal gravitation to calculate the weight of a 70-kg person standing on the surface of the earth. Then repeat the calculation by using $W = mg$ and compare your two results. Use Table D/2 as needed.

Solution. The two results are

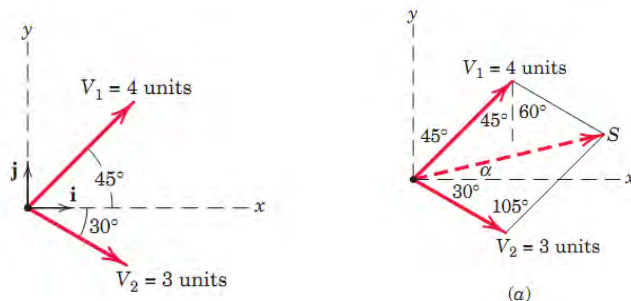
$$W = \frac{Gm_em}{R^2} = \frac{(6.673 \cdot 10^{-11})(5.976 \cdot 10^{24})(70)}{[6371 \cdot 10^3]^2} = 688 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

$$W = mg = 70(9.81) = 687 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

مثال ٣:

For the vectors $\mathbf{V}_1$ and $\mathbf{V}_2$ shown in the figure,

- determine the magnitude S of their vector sum $\mathbf{S} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$
- determine the angle α between $\mathbf{S}$ and the positive x -axis
- write $\mathbf{S}$ as a vector in terms of the unit vectors $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$ and then write a unit vector $\mathbf{n}$ along the vector sum $\mathbf{S}$
- determine the vector difference $\mathbf{D} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$



Solution (a) We construct to scale the parallelogram shown in Fig. *a* for adding $\mathbf{V}_1$ and $\mathbf{V}_2$. Using the law of cosines, we have

$$S^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4) \cos 105^\circ$$

$$S = 5.59 \text{ units} \quad \text{Ans.}$$

- 1 (b) Using the law of sines for the lower triangle, we have

$$\frac{\sin 105^\circ}{5.59} = \frac{\sin(\alpha + 30^\circ)}{4}$$

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = 0.692$$

$$(\alpha + 30^\circ) = 43.8^\circ \quad \alpha = 13.76^\circ \quad \text{Ans.}$$

(c) With knowledge of both S and α , we can write the vector $\mathbf{S}$ as

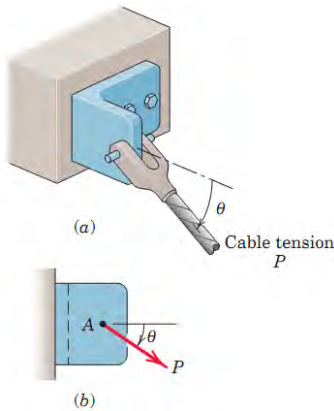
$$\mathbf{S} = S[\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha]$$

$$= 5.59[\mathbf{i} \cos 13.76^\circ + \mathbf{j} \sin 13.76^\circ] = 5.43\mathbf{i} + 1.328\mathbf{j} \text{ units} \quad \text{Ans.}$$

فصل ۲: دستگاه‌های نیرو

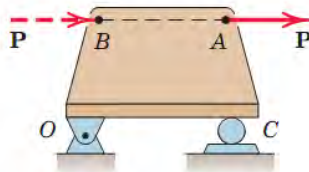
۱-۲ نیرو

نیرو عبارت است از اثر یک جسم بر روی جسم دیگر. نیرو یک کمیت برداری است و با اندازه و جهت مشخص می‌شود. مثلاً در شکل ۱-۲ یک نیرو در راستای کابل وارد می‌شود.



شکل ۱-۲: اثر نیرویی یک کابل متصل به لچکی

از آنجا که نیرو یک بردار لغزان است از این رو می‌توان آن را در راستای خط اثرش منتقل نمود شکل ۲-۲. فرض لغزان بودن نیرو تنها به واسطه فرض اعمال بر جسم صلب توجیه می‌شود. در این درس تمامی اجسام به صورت صلب در نظر گرفته می‌شود.

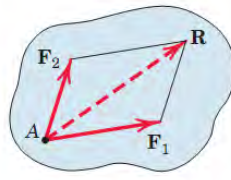


شکل ۲-۲: مثالی از جابجایی نیرو در راستای خط اثرش

نیروهای به طور کلی به دو دسته **نیروهای تماسی** و **نیروهای جسمی** تقسیم‌بندی می‌شوند. نیروهای تماسی از طریق تماس فیزیکی مستقیم میان دو جسم تولید می‌شوند. نیروهای جسمی نیز به نیروهایی گویند که از دور بر جسم اثر می‌کنند مانند نیروی جاذبه و نیرو الکترومغناطیس.

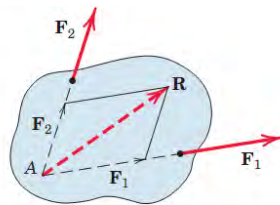
نیروها یا به صورت متمرکز اعمال می‌شوند و یا به صورت گسترده. در کل هر نیرویی در واقعیت به یک سطح اعمال می‌شود که آن را نیروی گسترده می‌نامند. حال اگر سطح اثر نیرو کم شود می‌توان به صورت تقریبی نیرو را متمرکز در نظر گرفت.

دو نیروی متلاقی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد



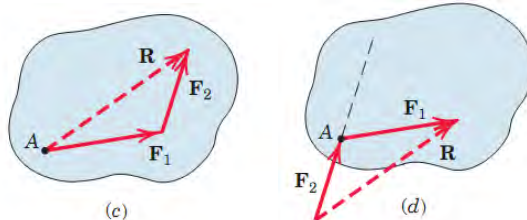
(a)

در این حالت می‌توان به راحتی و با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع مقدار نیروی برآیند را به دست آورد.



(b)

گاهی می‌توانند نیروها یک دیگر را در یک نقطه قطع نکنند بلکه به گونه‌ای در یک صفحه باشند که اگر در راستای خط اثرشان انتقال پیدا کردند، بتوان آن‌ها را با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع با یکدیگر جمع نمود. اگر بخواهیم دو نیروی بالا را با استفاده از روش مثلث با یکدیگر جمع کنیم، می‌بایست حتماً خط اثر یکی از نیروها را تغییر داد در این حالت با وجود آنکه اندازه و جهت بردار برآیند ثابت مانده است اما به دلیل آنکه خط اثرش تغییر پیدا کرده نباید از این روش برای جمع دو بردار استفاده نمود.

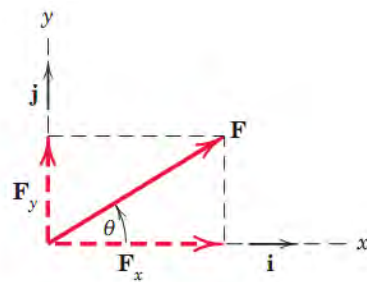


(c)

(d)

۲-۱-۱ تجزیه متعامد نیروها

این روش متداول‌ترین روش تجزیه نیروهاست. این روش بر پایه جمع متوازی‌الاضلاع شکل گرفته است اما در آن محورها بر یکدیگر عمود می‌باشند.



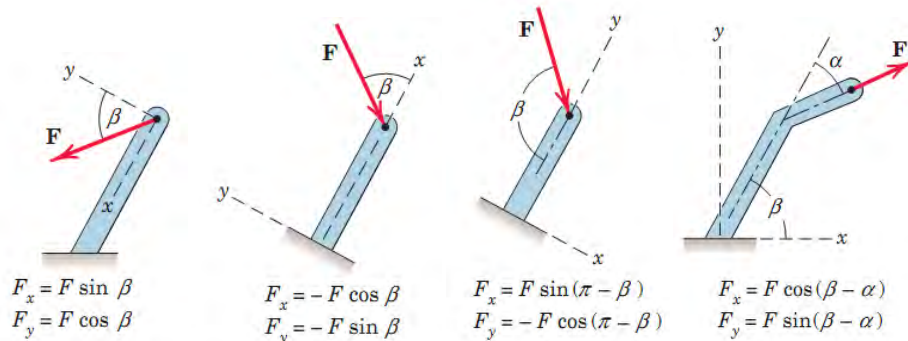
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$F_x = F \cos \theta \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

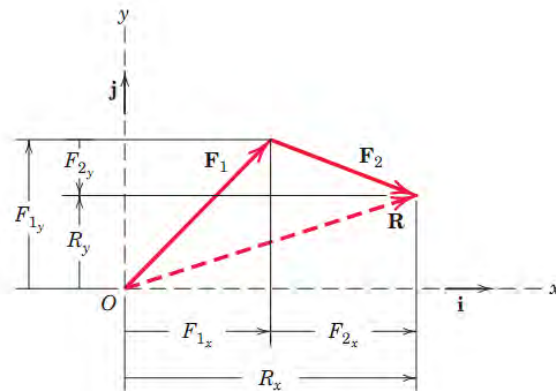
$$F_y = F \sin \theta \quad \theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x}$$

توصیه اکید می‌شود در هر مسئله اگر محور مختصات داده نشده بود، دانشجو یک محور مختصات را در نظر گیرد. در شکل ۳-۲ انواع تجزیه نیرویی دیده می‌شود.



شکل ۳-۲: انتخاب دستگاه‌های مختصات گوناگون و تجزیه نیرو در راستای هر کدام

یک روش دیگر برای جمع دو بردار، جمع مؤلفه‌های آن است. این کار در استاتیک به طور گسترده استفاده می‌گردد. در شکل ۴-۲ جمع دو نیرو با این روش نشان داده شده است.



شکل ۴-۲: جمع مؤلفه‌ای نیروها

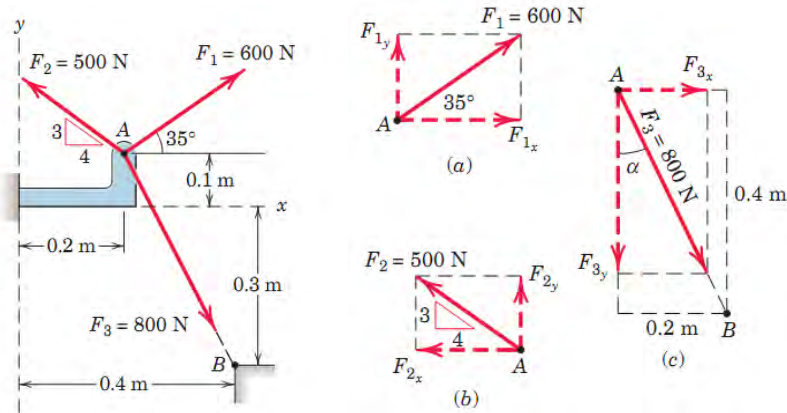
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}) + (F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j})$$

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = (F_{1x} + F_{2x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y})\mathbf{j}$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = \Sigma F_x$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = \Sigma F_y$$

مثال ۱: با توجه به شکل، نیروهای F_1 ، F_2 و F_3 همگی به نقطه A وارد می‌شود. مؤلفه‌های هر کدام از نیروها را محاسبه کنید.



Solution. The scalar components of F_1 , from Fig. a , are

$$F_{1x} = 600 \cos 35^\circ = 491 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

$$F_{1y} = 600 \sin 35^\circ = 344 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

The scalar components of F_2 , from Fig. b , are

$$F_{2x} = -500\left(\frac{4}{5}\right) = -400 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

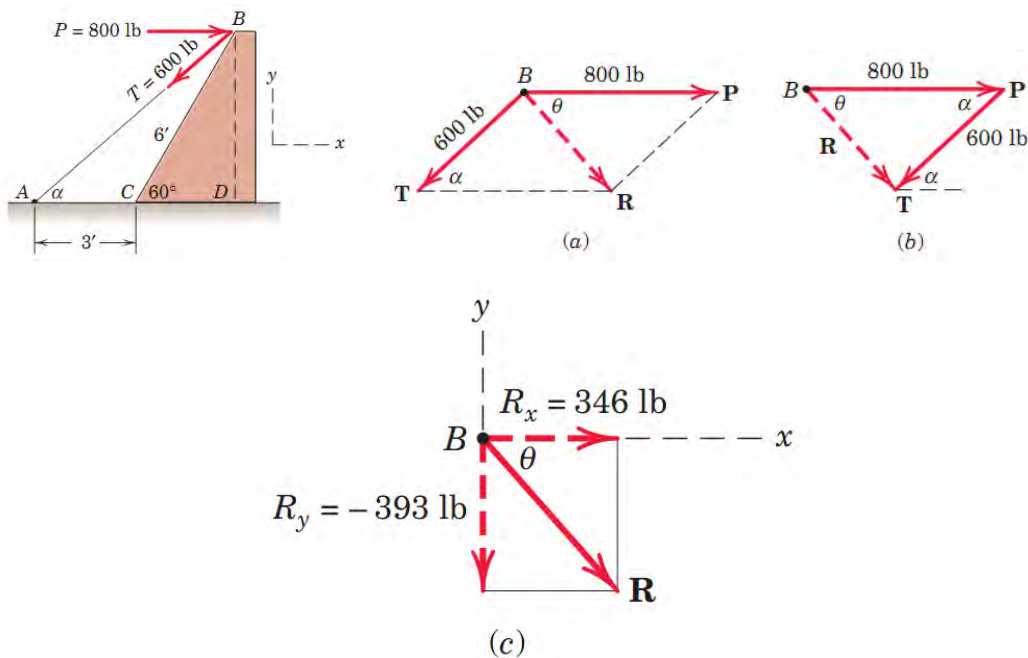
$$F_{2y} = 500\left(\frac{3}{5}\right) = 300 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\frac{0.2}{0.4} \right] = 26.6^\circ$$

$$F_{3x} = F_3 \sin \alpha = 800 \sin 26.6^\circ = 358 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

$$F_{3y} = -F_3 \cos \alpha = -800 \cos 26.6^\circ = -716 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

مثال ۲: با توجه به شکل نیروی برابند را به صورت مؤلفه‌های یک‌به دست آورید.



$$\tan \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{6 \sin 60^\circ}{3 + 6 \cos 60^\circ} = 0.866 \quad \alpha = 40.9^\circ$$

Algebraic solution. By using the x - y coordinate system on the given figure, we may write

$$R_x = \Sigma F_x = 800 - 600 \cos 40.9^\circ = 346 \text{ lb}$$

$$R_y = \Sigma F_y = -600 \sin 40.9^\circ = -393 \text{ lb}$$

The magnitude and direction of the resultant force $\mathbf{R}$ as shown in Fig. c are then

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(346)^2 + (-393)^2} = 524 \text{ lb} \quad \text{Ans.}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{|R_y|}{|R_x|} = \tan^{-1} \frac{393}{346} = 48.6^\circ \quad \text{Ans.}$$

The resultant $\mathbf{R}$ may also be written in vector notation as

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} = 346 \mathbf{i} - 393 \mathbf{j} \text{ lb} \quad \text{Ans.}$$

قانون کسینوسها: به صورت زیر بیان می‌شود. θ زاویه بین دو بردار زمانی که مانند قانون مثلث در امتداد یکدیگر رسم می‌شود و α زاویه بین دو بردار زمانی که مانند قانون متوازی‌الاضلاع از یک نقطه رسم می‌شوند.

از این قانون برای اندازه بردار برآیند استفاده می‌شود.

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

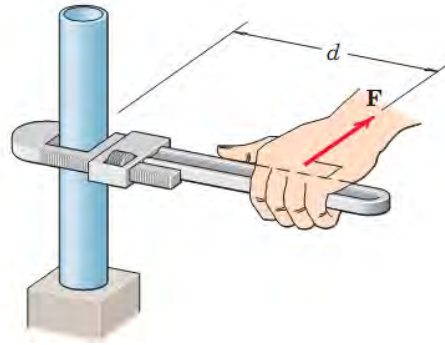
$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha$$

قانون سینوسها: این قانون برای یافتن زاویه بردار برآیند است. این قانون بیان می‌کند که طول هر ضلع از یک مثل به سینوس زاویه مقابل آن مقدار ثابتی است.

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

۲-۲ گشتاور

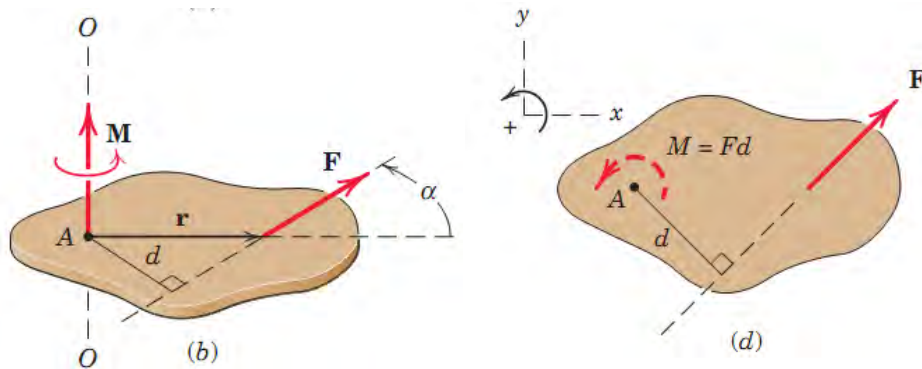
نیرو علاوه بر آنکه تمایل به حرکت دادن جسم در امتداد خط اثرش دارد، ممکن است موجب دوران جسم حول یک محور نیز شود. هر محور غیر متقاطع و نامتوازی با خط اثر یک نیرو می‌تواند محور دوان جسم باشد. تمایل نیرو به گرداندن جسم را گشتاور گویند. به طور مثال آچار برای باز کردن پیچ شکل ۲-۵.



شکل ۲-۵: نمایی از یک آچار برای نمایش مفهوم گشتاور

در شکل ۲-۶ یک جسم دو بعدی نمایش داده شده است. مقدار گشتاور نیروی F حول محور OO عبارت است از مقدار نیروی F در فاصله عمودی نیرو و محور که با d نمایش داده شده است. در استاتیک d را بازوی گشتاور می‌نامند. در این صورت گشتاور به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M = F.d$$



شکل ۲-۶: تعریف گشتاور در دو بعد

با استفاده از رابطه بالا مقدار گشتاور به دست آمد اما چون گشتاور یک بردار است بنابراین نیاز به جهت نیز می‌باشد. اگر نیروها در صفحه دو بعدی xy به جسم وارد شود آنگاه گشتاور حتماً در امتداد محور z خواهد بود. جهت گشتاور نیز به استفاده از قانون دست راست به سادگی قابل تشخیص است.

یک راه ساده برای تشخیص + یا - بودن گشتاور این است که اگر جهت چرخش نیرو حول محور پاد ساعت گرد CCW بود مقدار گشتاور + و اگر ساعت گرد CW بود مقدار گشتاور - خواهد بود.

واحد گشتاور همان‌گونه که از رابطه محاسبه آن آشکار است، $N.m$ است.

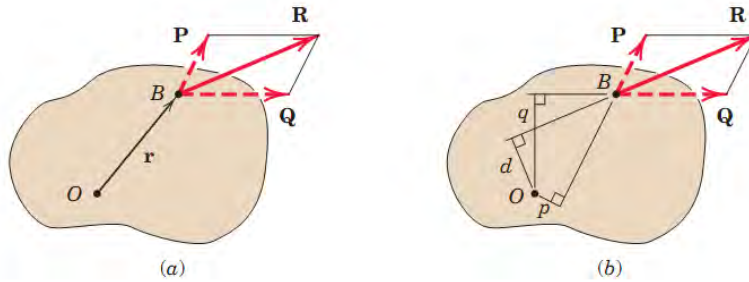
روش دیگری نیز برای محاسبه گشتاور وجود دارد که بیشتر در مسائل سه بعدی کاربرد دارد. گشتاور برای نیروی F با بردار وضعیت r (برداری که محور را به نقطه اثر نیرو متصل می‌کند) به صورت زیر تعریف می‌شود. به شکل ۲-۶ نگاه کنید.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

قضیه وارینیون (Varignon's Theorem):

این قضیه یکی از مفیدترین اصول مکانیک را تشکیل می‌دهد. طبق این قضیه گشتاور یک نیرو حول هر محور برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن حول همان محور.

اثبات:



شکل ۷-۲: اثبات قضیه وارینیون

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R}$$

از طرفی

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

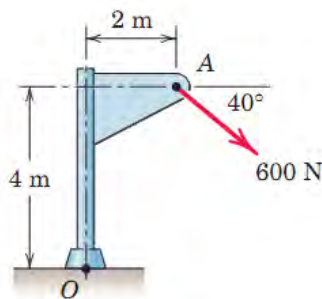
بنابراین

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times (\vec{P} + \vec{Q}) = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{Q}$$

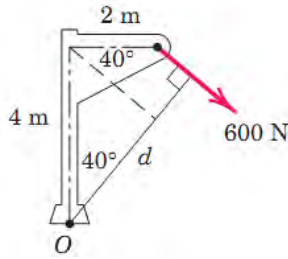
رابطه اخیر به صورت کلی بیان شد. حال برای حالت ساده دو بعدی با توجه به شکل ۷-۲ می‌توان نوشت:

$$M_O = R.d = -pP + qQ$$

مثال ۳: مقدار گشتاور نیروی وارده بر سازه مقابل را حول محور گذرنده از نقطه O به دست آورید.



روش اول:



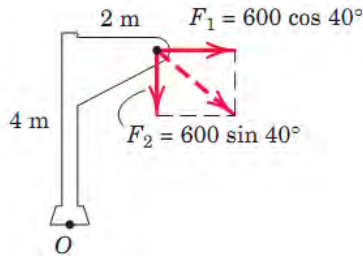
Solution. (I) The moment arm to the 600-N force is

$$d = 4 \cos 40^\circ + 2 \sin 40^\circ = 4.35 \text{ m}$$

① By $M = Fd$ the moment is clockwise and has the magnitude

$$M_O = 600(4.35) = 2610 \text{ N}\cdot\text{m}$$

*روش دوم:



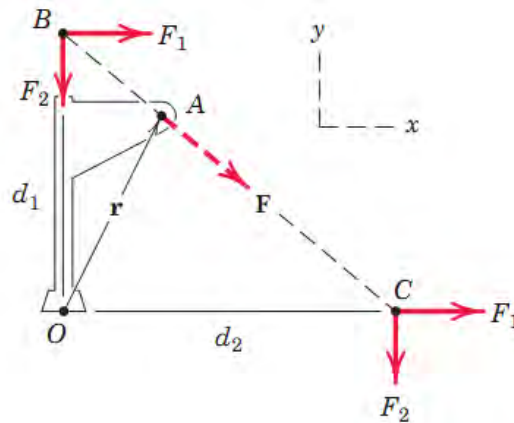
(II) Replace the force by its rectangular components at A,

$$F_1 = 600 \cos 40^\circ = 460 \text{ N}, \quad F_2 = 600 \sin 40^\circ = 386 \text{ N}$$

By Varignon's theorem, the moment becomes

$$M_O = 460(4) + 386(2) = 2610 \text{ N}\cdot\text{m}$$

روش سوم:



(III) By the principle of transmissibility, move the 600-N force along its line of action to point B, which eliminates the moment of the component F_2 . The moment arm of F_1 becomes

$$d_1 = 4 + 2 \tan 40^\circ = 5.68 \text{ m}$$

and the moment is

$$M_O = 460(5.68) = 2610 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Ans.}$$

(IV) Moving the force to point C eliminates the moment of the component F_1 . The moment arm of F_2 becomes

$$d_2 = 2 + 4 \cot 40^\circ = 6.77 \text{ m}$$

and the moment is

$$M_O = 386(6.77) = 2610 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Ans.}$$

روش چهارم:

(V) By the vector expression for a moment, and by using the coordinate system indicated on the figure together with the procedures for evaluating cross products, we have

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \times 600(\mathbf{i} \cos 40^\circ - \mathbf{j} \sin 40^\circ) \\ &= -2610\mathbf{k} \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

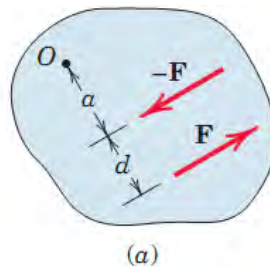
The minus sign indicates that the vector is in the negative z -direction. The magnitude of the vector expression is

$$M_O = 2610 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Ans.}$$

توجه شود که تنها در روش چهارم مستقیماً علامت گشتاور توسط رابطه بیان شد این در حالی است که در سه روش قبلی باید بر اساس CW یا CCW بودن جهت تشخیص داده می‌شد.

۲-۳ کوپل

گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی، مخالف و نا هم خط اثر را کوپل می‌نامند. با توجه به شکل زیر مشاهده می‌شود که دو نیروی F و $-F$ یکدیگر را خنثی می‌کنند و تنها اثری به صورت چرخش در جسم ایجاد می‌کنند که تحت عنوان کوپل شناخته می‌شود. محوری که گشتاور حاصل از کوپل حول آن است در بین دو نیرو قرار دارد.

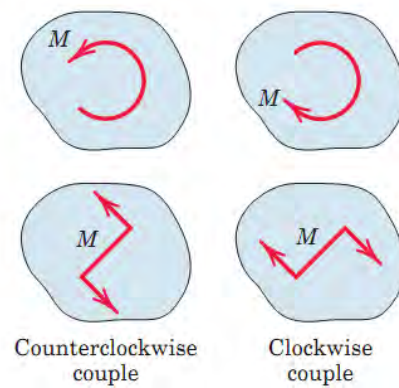


شکل ۲-۸: نمایش یک زوج نیرو

$$M = F(a + d) - Fa$$

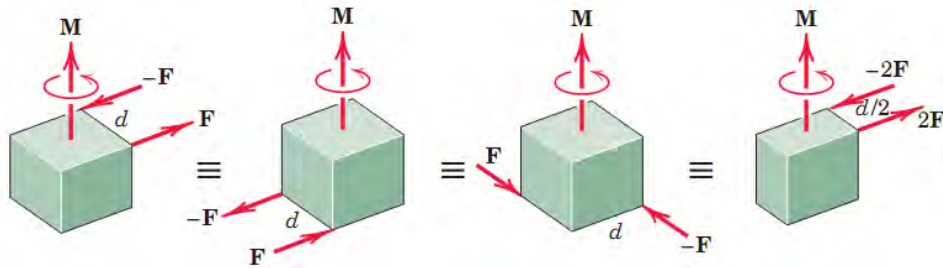
$$M = Fd$$

در عبارت فوق d مقدار فاصله عمودی بین دو نیرو می‌باشد. جهت کوپل‌ها نیز مانند گشتاورها می‌باشد که در شکل ۲-۹ مشاهده می‌شود.



شکل ۹-۲: جهت و علامت کوپل

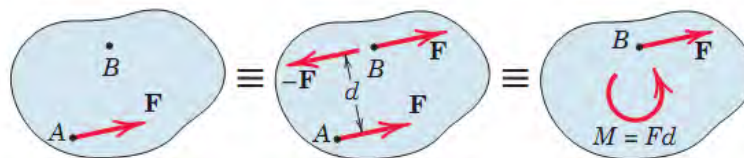
یکی از خواص مهم در کوپل‌ها آن است که می‌توان حالات مختلف یکسانی در آن‌ها با یکدیگر معادل نمود. در شکل ۱۰-۲ حالات معادل کوپل نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۲: معادل‌سازی انواع کوپل

۲-۴ سیستم‌های نیرو کوپل

یکی از کاربردهای مهم کوپل در هنگامی است که به دلیلی می‌خواهیم خط اثر یک نیرو را جابجا کنیم بدون آنکه اثر نیرو روی جسم تغییر نکند. به عنوان مثال در شکل ۱۱-۲ حالات معادل نیرو و کوپل آمده است.

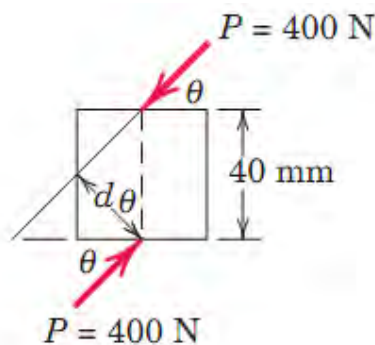
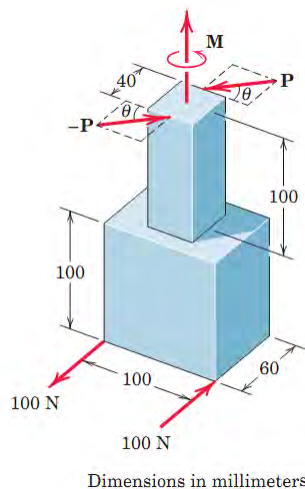


شکل ۱۱-۲: سیستم کوپل و نیرو

در شکل ۱۱-۲ مشاهده می‌شود که نیروی گذرنده از نقطه A وجود دارد. می‌خواهیم این نیرو را به نقطه B منتقل کنیم. کافی است یکی نیرو به موازات F در جهت و خلاف جهت آن در نقطه B اضافه کنیم. سپس مشاهده می‌شود یک کوپل و یک نیرو حاصل شده است؛ بنابراین هر گاه بخواهیم خط اثر یک نیرو را تغییر دهیم باید یک کوپل نیز به سیستم اضافه نماییم تا اثر هر دو نیرو یکسان شوند.

مثال ۴: در شکل زیر زاویه θ را طوری بیابید که کوپل حاصل از نیروهای ۱۰۰ نیوتنی به کوپل حاصل از

نیروی P به مقدار ۴۰۰ نیوتن برابر باشد.



$$[M = Fd]$$

$$M = 100(0.1) = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

The forces $\mathbf{P}$ and $-\mathbf{P}$ produce a counterclockwise couple

$$M = 400(0.040) \cos \theta$$

Equating the two expressions gives

$$10 = (400)(0.040) \cos \theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{10}{16} = 51.3^\circ$$

Ans.

برای استفاده در حالت کلی از برآیند نیروها از رابطه زیر استفاده می کنند.

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \Sigma \mathbf{F}$$

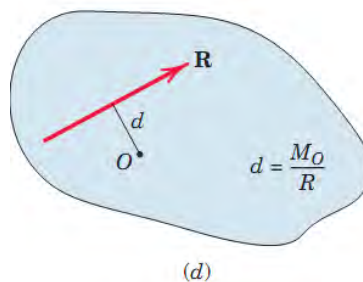
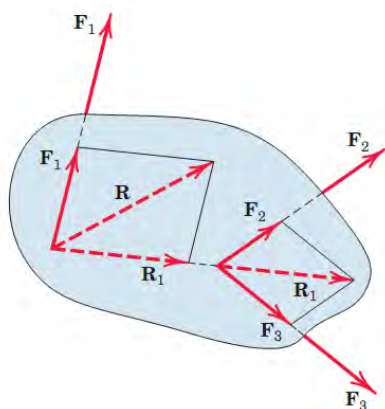
$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

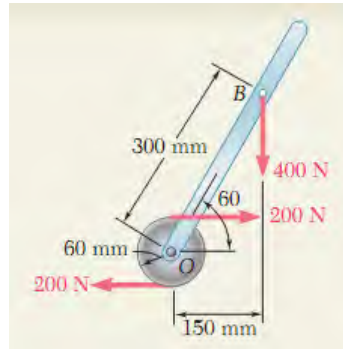
$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

$$M_O = \Sigma M = \Sigma (Fd)$$

$$Rd = M_O$$

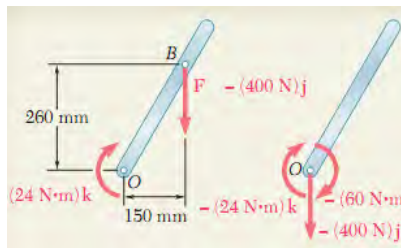


مثال ۵: در شکل زیر نیرو و کوپل موجود را با یک نیرو جایگزین در نقطه O نمایید. فرض کنید نیرو از نقطه C روی اهرم گذر کند در این صورت طول OC را بیابید.



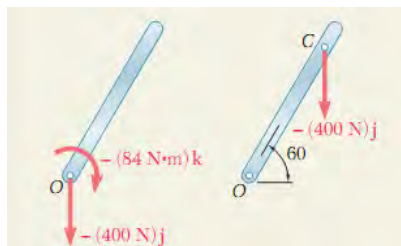
$$M_{Couple} = -200 \times (120 \times 10^{-3}) = -24 \text{ N.m}$$

$$\begin{aligned} M_F &= -400 \times (300 \times 10^{-3}) \cos 60 \\ &= -400 \times (150 \times 10^{-3}) = -60 \text{ N.m} \end{aligned}$$



بنابراین در نقطه O یک نیرو و یک گشتاور داریم. حال فرض می‌کنید نیرو به نقطه C منتقل شده است. در این حالت مقدار OC را به صورت زیر می‌یابیم.

$$-400 \times (OC) \cos 60 = -84 \Rightarrow OC = 420 \text{ mm}$$



۲-۵ تمرین:

کتاب مریام ویرایش ۷ فصل ۲

۱۰۰-۷۱-۶۶-۶۲-۵۸-۵۲-۴۹-۴۳-۴۰-۳۷-۳۶-۳۵-۲۸-۲۰-۱۳-۶

فصل ۳: تعادل

علم استاتیک اصولاً با توصیف شرایط نیرویی لازم و کافی برای برقراری تعادل سازه‌های صنعتی سروکار دارد؛ بنابراین در این فصل به تعادل که مهم‌ترین بخش در استاتیک می‌باشد پرداخته خواهد شد.

وقتی جسمی در حال تعادل است، برآیند تمام نیروهای وارده بر آن صفر است. لذا نیروی برآیند R و گشتاور بر آیند M هر دو صفر می‌باشند؛ بنابراین معادلات تعادل در حالت کلی عبارت‌اند از:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$$
$$\vec{M} = \sum \vec{M} = 0$$

توجه شود که شروط فوق، شرایط لازم و کافی برای تعادل می‌باشند. معادلات بالا به صورت برداری می‌باشند؛ بنابراین این معادلات در دو بعد به ۳ معادله مستقل و در سه بعد به شش معادله مستقل تفکیک می‌شوند.

برای مسائل دو بعدی:

$$\sum \vec{F}_x = 0$$
$$\sum \vec{F}_y = 0$$
$$\sum \vec{M}_z = 0$$

برای مسائل سه بعدی:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \sum \vec{M}_x = 0$$
$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad \sum \vec{M}_y = 0$$
$$\sum \vec{F}_z = 0 \quad \sum \vec{M}_z = 0$$

بدیهی است که با توجه به تعداد معادلات می‌توان دریافت که در حالت دو بعدی تنها می‌توان ۳ مجهول و در حالت سه بعدی ۶ مجهول را از معادلات فوق یافت.

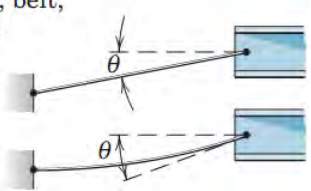
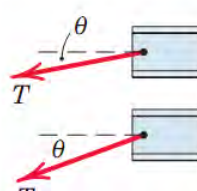
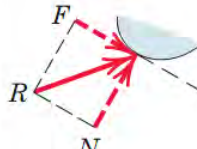
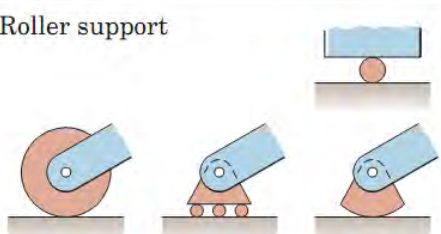
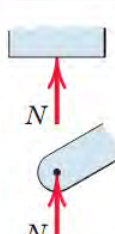
نکته بسیار مهم در تمامی مسائل استاتیک آن است که قبل از استفاده از معادلات تعادل باید تمامی نیروهای وارده بر جسم به طور مفصل تحلیل شده و ترسیم شوند. فقدان حتی یک نیرو منجر به نادرست شدن پاسخ خواهد شد.

زمانی که می‌خواهیم جسم و یا ترکیبی از اجسام را تحلیل کنیم باید جسم یا اجسام مذکور را در ابتدا از تمامی اجسام دیگر جدا کنیم. این جداسازی توسط نمودار جسم آزاد جسم (Free Body Diagram) انجام می‌شود؛ که در ادامه برای سهولت از آن به عنوان نمودار آزاد یاد می‌شود.

نکته: ترسیم یک نمودار آزاد درست و کامل مهم‌ترین گام در حل مسائل مکانیکی است.

۳-۱ مدل‌سازی عکس‌العمل نیروها

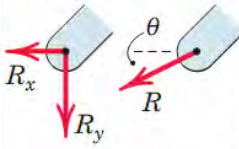
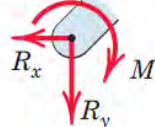
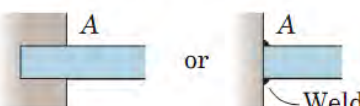
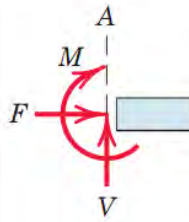
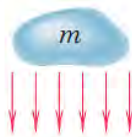
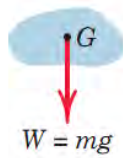
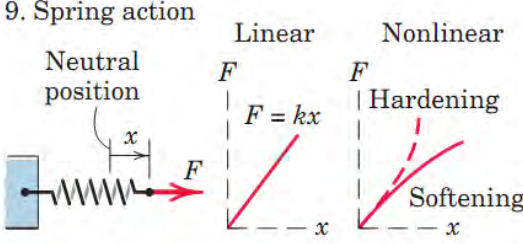
در شکل ۳-۱ انواع گوناگون مدل‌سازی نیروها نمایش داده شده است.

MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS	
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
1. Flexible cable, belt, chain, or rope Weight of cable negligible Weight of cable not negligible 	 Force exerted by a flexible cable is always a tension away from the body in the direction of the cable.
2. Smooth surfaces 	 Contact force is compressive and is normal to the surface.
3. Rough surfaces 	 Rough surfaces are capable of supporting a tangential component F (frictional force) as well as a normal component N of the resultant contact force R.
4. Roller support 	 Roller, rocker, or ball support transmits a compressive force normal to the supporting surface.
5. Freely sliding guide 	 Collar or slider free to move along smooth guides; can support force normal to guide only.

شکل ۳-۱: انواع گوناگون مدل‌سازی نیروها

توجه شود که هر گاه جسمی حذف می‌شود، اثر آن باید به صورت نیرو یا نیروهایی بر جسم نشان داده شود.

در تمامی موارد فوق باید به قانون سوم نیوتن نیز توجه کافی نمود.

MODELING THE ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS (cont.)	
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
6. Pin connection 	Pin free to turn A freely hinged pin connection is capable of supporting a force in any direction in the plane normal to the pin axis. We may either show two components R_x and R_y or a magnitude R and direction θ.  Pin not free to turn components R_x and R_y or a magnitude R and direction θ. A pin not free to turn also supports a couple M. 
7. Built-in or fixed support 	 A built-in or fixed support is capable of supporting an axial force F, a transverse force V (shear force), and a couple M (bending moment) to prevent rotation.
8. Gravitational attraction 	 The resultant of gravitational attraction on all elements of a body of mass m is the weight $W = mg$ and acts toward the center of the earth through the center mass G.
9. Spring action 	 Spring force is tensile if spring is stretched and compressive if compressed. For a linearly elastic spring the stiffness k is the force required to deform the spring a unit distance.

ادامه شکل ۳-۱: انواع گوناگون مدل سازی نیروها

۳-۲ ترسیم نمودار آزاد اجسام

روش کلی برای ترسیم نمودار جسم آزاد را می توان به صورت زیر خلاصه نمود:

- ۱- ابتدا مشخص کنید کدام سیستم را می خواهید جدا کنید. سیستم انتخابی باید معمولاً شامل یک یا تعداد بیشتری از مجهولات باشد.

۲- با ترسیم نموداری که مرز سیستم را نشان می‌دهد آن را جدا کنید. این مرحله بسیار مهم است و قبل از رفتن به مرحله بعد اطمینان حاصل کنید که سیستم کاملاً جدا شده است.

۳- تمام نیروهایی که از اجسام حذف شده بر جسم اثر می‌کند را مشخص کنید و در جهت درست اعمال نمایید.

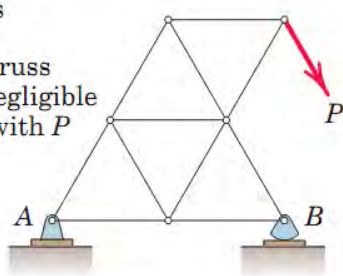
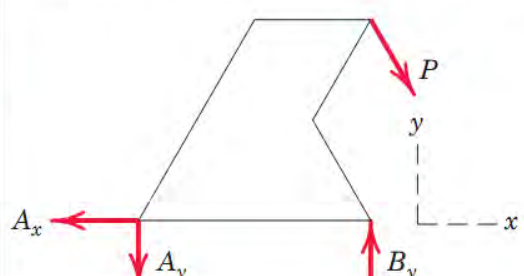
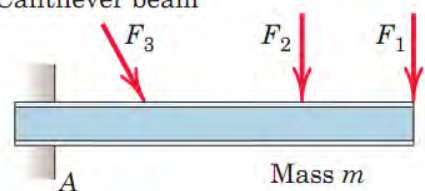
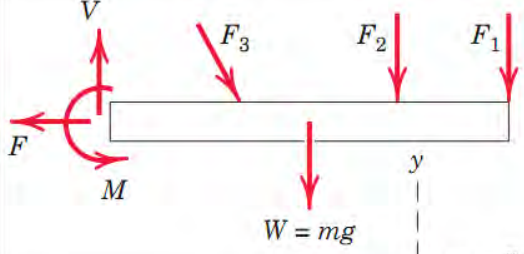
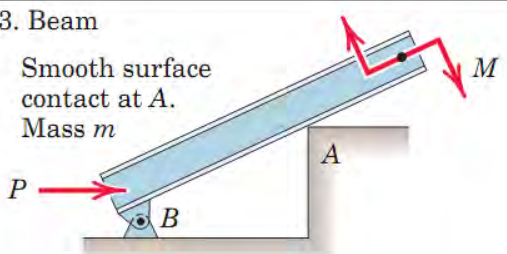
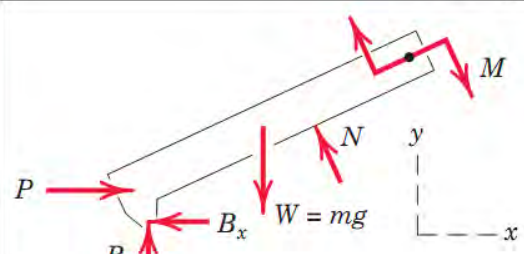
در این مرحله نیروهای حجمی مانند وزن را نیز می‌توانید اضافه نمایید.

تمامی نیروهای معلوم را در جهت و مقدار درست خود ترسیم کنید.

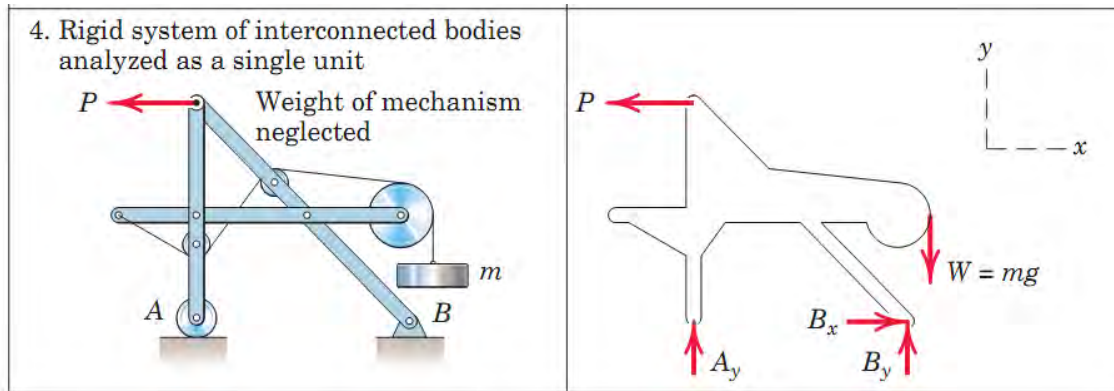
برای نیروهای مجهول نیز جهتی را به صورت اختیاری فرض کنید. اگر جهت بردار نیرو نیز مجهول است آن را نیز فرضی لحاظ کنید. اگر در انتهای حل مقدار نیرو + به دست آمده یعنی جهت درست و در غیر این صورت یعنی معکوس بوده است.

۴- محورهای مختصات انتخابی را بر روی سیستم نشان دهید.

۳-۳ نمونه‌هایی از نمودار جسم آزاد

SAMPLE FREE-BODY DIAGRAMS	
Mechanical System	Free-Body Diagram of Isolated Body
1. Plane truss Weight of truss assumed negligible compared with P 	
2. Cantilever beam 	
3. Beam Smooth surface contact at A. Mass m 	

شکل ۳-۳: نمونه‌ای از نمودار جسم آزاد



ادامه شکل ۲-۳: نمونه‌ای از نمودار جسم آزاد

توجه شود که در تمامی نمودارهای شکل ۲-۳ هر چهار مرحله انجام شده است.

توجه شود که در این درس جرم اجسام ناچیز در نظر گرفته می‌شود مگر آنکه در صورت مسئله برای جسم مدنظر جرم داده شده باشد.

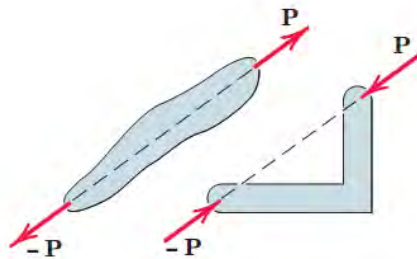
در حالت کلی می‌توان حالت‌های تعادل نیروها را به صورت زیر دسته‌بندی نمود:

CATEGORIES OF EQUILIBRIUM IN TWO DIMENSIONS		
Force System	Free-Body Diagram	Independent Equations
1. Collinear		$\Sigma F_x = 0$
2. Concurrent at a point		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
3. Parallel		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_y = 0$

۳-۴ عضوهای د و نیرویی و سه نیرویی

دو حالت تعادل را که اغلب روی می‌دهد را باید مورد توجه قرارداد.

حالت اول، تعادل یک جسم تحت تأثیر تنها دو نیرو است. دو نمونه از این اعضا را می‌توان در شکل ۳-۳ مشاهده نمود.

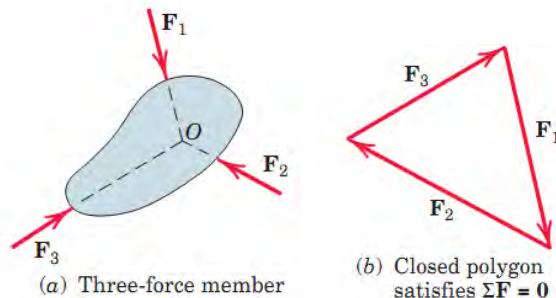


شکل ۳-۳: نمونه‌هایی از اعضای دو نیرویی

در اعضای دو نیرویی باید هر دو نیرو دارای یک خط اثر و همچنین دارای مقدار برابر ولی در راستاهای معکوس باشند. نکته مهم آن است که شکل عضو تأثیری در این شرط ندارد. توجه شود این حالت تنها زمانی رخ خواهد داد که از جرم جسم صرف‌نظر شده باشد. این حالت اغلب در خرپاها رخ خواهد داد.

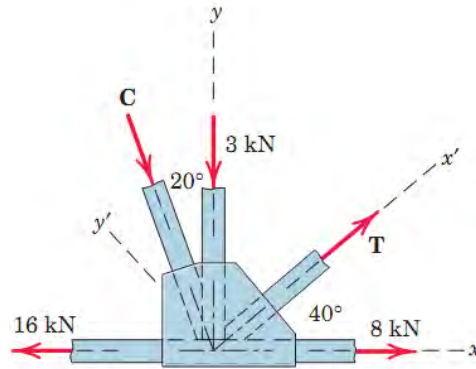
حالت دوم، عضو سه نیرویی است یعنی عضوی که تحت تأثیر سه نیرو باشد. در شکل ۴-۳ نمایی از یک عضو سه نیرویی نمایش داده شده است. یک شرط بسیار مهم در اعضای سه نیرویی وجود دارد که عبارت است از آنکه هر سه نیرو بایستی یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند. تنها استثناء زمانی است که سه نیرو باهم موازی باشد.

این اعضا مهم‌ترین کاربردها را دارند که می‌توان به راحتی سه نیرو را به صورت مثلث ترسیم نمود. در این حالت هیچ گشتاوری توسط نیروها به وجود نمی‌آید. سپس با استفاده از قضیه سینوس ها به راحتی می‌توان مقادیر و یا زوایای مجهول را محاسبه نمود.



شکل ۴-۳: نمایش یک عضو سه نیرویی

مثال ۱: مقدار نیروهای C و T را که در مفصل خرپای زیر نشان داده شده است را بیابید.



1 Solution. The given sketch constitutes the free-body diagram of the isolated section of the joint in question and shows the five forces which are in equilibrium.

Solution 1 (scalar algebra). For the x - y axes as shown we have

$$[\Sigma F_x = 0] \quad 8 + T \cos 40^\circ + C \sin 20^\circ - 16 = 0$$

$$0.766T + 0.342C = 8 \quad (a)$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad T \sin 40^\circ - C \cos 20^\circ - 3 = 0$$

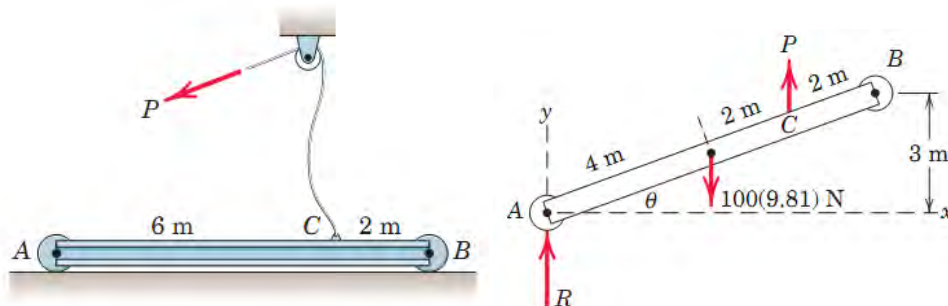
$$0.643T - 0.940C = 3 \quad (b)$$

Simultaneous solution of Eqs. (a) and (b) produces

$$T = 9.09 \text{ kN} \quad C = 3.03 \text{ kN} \quad \text{Ans.}$$

توجه شود که بردار به دلیل ذات خود همواره دو مجهول دارد. یکی مقدار و دیگری راستای آن است. در مثال اخیر راستاهای هر دو بردار معلوم بود و تنها مقدار آن‌ها مجهول، از این رو با نوشتن تنها دو معادله از معادلات تعادل مسئله حل شد.

مثال ۲: تیر I شکلی به جرم ۱۰۰ کیلوگرم ابتدا توسط غلتک‌های انتهایی در A و B روی سطح افقی قرار دارد. می‌خواهیم با کابلی که در نقطه C به تیر متصل است، انتهای B را به ارتفاع ۳ متر بالای انتهای A بیاوریم. کشش P لازم، واکنش در A و زاویه θ تیر با افق را بیابید.



Solution. In constructing the free-body diagram, we note that the reaction on the roller at A and the weight are vertical forces. Consequently, in the absence of other horizontal forces, P must also be vertical. From Sample Problem 3/2 we see immediately that the tension P in the cable equals the tension P applied to the beam at C.

Moment equilibrium about A eliminates force R and gives

$$\textcircled{1} [\Sigma M_A = 0] \quad P(6 \cos \theta) - 981(4 \cos \theta) = 0 \quad P = 654 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

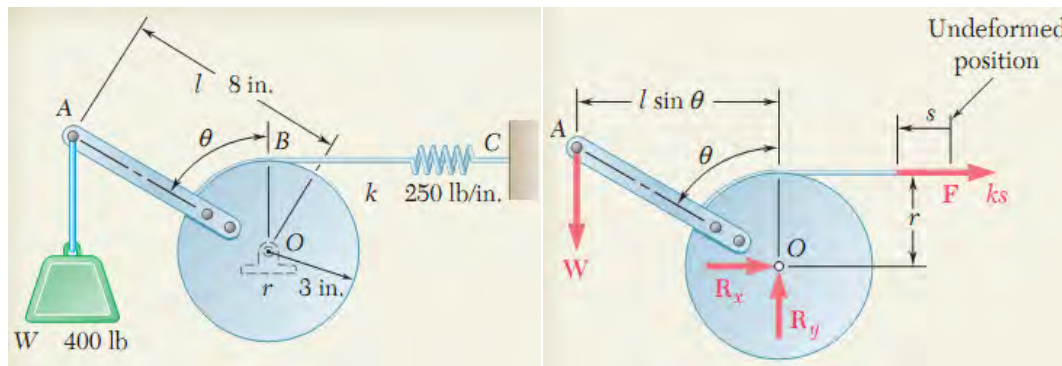
Equilibrium of vertical forces requires

$$[\Sigma F_y = 0] \quad 654 + R - 981 = 0 \quad R = 327 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

The angle θ depends only on the specified geometry and is

$$\sin \theta = 3/8 \quad \theta = 22.0^\circ \quad \text{Ans.}$$

مثال ۳: یک وزنه ۴۰۰ پندی (lb) در نقطه A با سازه زیر متصل است. اگر سختی فنر $k = 250 \text{ lb/in}$ باشد و فرض شود در زمان $\theta = 0$ فنر اصلاً کشیده نشده باشد، زاویه θ در حالت تعادل را بیابید.



SOLUTION

Free-Body Diagram. We draw a free-body diagram of the lever and cylinder. Denoting by s the deflection of the spring from its undeformed position, and noting that $s = r\theta$, we have $F = ks = kr\theta$.

Equilibrium Equation. Summing the moments of $\mathbf{W}$ and $\mathbf{F}$ about O, we write

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = 0; \quad Wl \sin \theta - r(kr\theta) = 0 \quad \sin \theta = \frac{kr^2}{Wl} \theta$$

Substituting the given data, we obtain

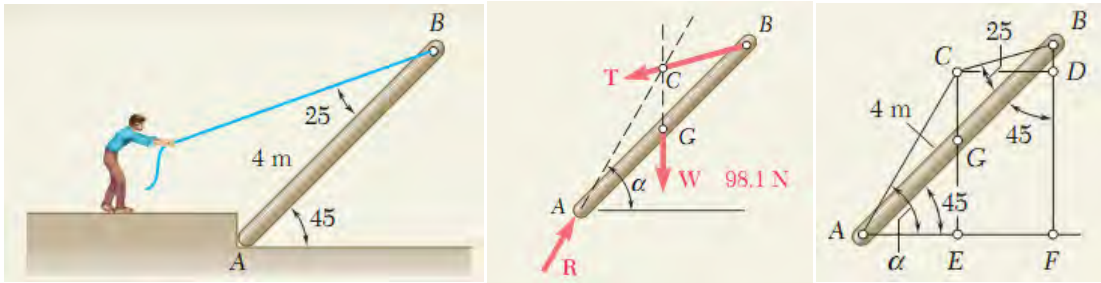
$$\sin \theta = \frac{(250 \text{ lb/in.})(3 \text{ in.})^2}{(400 \text{ lb})(8 \text{ in.})} \theta \quad \sin \theta = 0.703 \theta$$

Solving by trial and error, we find

$$\theta = 0 \quad \theta = 80.3^\circ$$

مثال ۴: شخصی می‌خواهد تیری را به جرم ۱۰ کیلوگرم و طول ۴ متر را با طنابی که به انتهای آن متصل

است در وضعیت زیر نگه دارد. مقدار کشش طناب و عکس‌العمل تکیه‌گاه را بیابید.



$$W = mg = (10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$$

Three-Force Body. Since the joist is a three-force body, the forces acting on it must be concurrent. The reaction $\mathbf{R}$, therefore, will pass through the point of intersection C of the lines of action of the weight $\mathbf{W}$ and the tension force $\mathbf{T}$. This fact will be used to determine the angle α that $\mathbf{R}$ forms with the horizontal.

Drawing the vertical BF through B and the horizontal CD through C , we note that

$$AF = BF = (AB) \cos 45^\circ = (4 \text{ m}) \cos 45^\circ = 2.828 \text{ m}$$

$$CD = EF = AE = \frac{1}{2}(AF) = 1.414 \text{ m}$$

$$BD = (CD) \cot (45^\circ + 25^\circ) = (1.414 \text{ m}) \tan 20^\circ = 0.515 \text{ m}$$

$$CE = DF = BF - BD = 2.828 \text{ m} - 0.515 \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

We write

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313 \text{ m}}{1.414 \text{ m}} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ$$

We now know the direction of all the forces acting on the joist.

Force Triangle. A force triangle is drawn as shown, and its interior angles are computed from the known directions of the forces. Using the law of sines, we write

$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1 \text{ N}}{\sin 38.6^\circ}$$

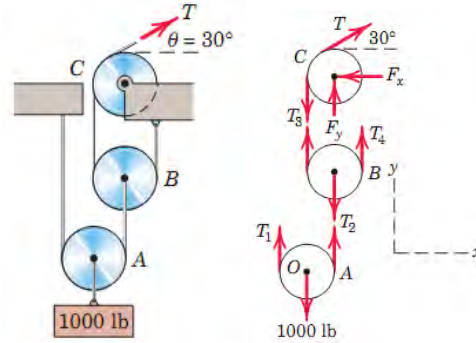
$$T = 81.9 \text{ N}$$

$$R = 147.8 \text{ N}$$

تمرین: مثلث نیروها را رسم و زوایای را به دست آورید. نیروی تکیه‌گاهی را تجزیه و سپس مسئله را حل

نمودار و با پاسخ به دست آمده مقایسه کنید.

مثال ۵: دیاگرام آزاد هر سه پولی زیر را رسم کنید. سپس کشش طناب و عکس العمل تکیه‌هایی را محاسبه نمایید.



Solution. The free-body diagram of each pulley is drawn in its relative position to the others. We begin with pulley A, which includes the only known force. With the unspecified pulley radius designated by r , the equilibrium of moments about its center O and the equilibrium of forces in the vertical direction require

$$\begin{aligned} [\Sigma M_O = 0] \quad T_1 r - T_2 r = 0 \quad T_1 &= T_2 \\ [\Sigma F_y = 0] \quad T_1 + T_2 - 1000 &= 0 \quad 2T_1 = 1000 \quad T_1 = T_2 = 500 \text{ lb} \end{aligned}$$

From the example of pulley A we may write the equilibrium of forces on pulley B by inspection as

$$T_3 = T_4 = T_2/2 = 250 \text{ lb}$$

For pulley C the angle $\theta = 30^\circ$ in no way affects the moment of T about the center of the pulley, so that moment equilibrium requires

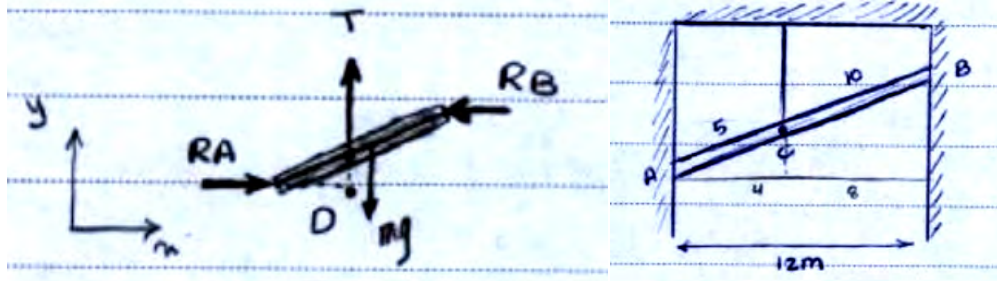
$$T = T_3 \quad \text{or} \quad T = 250 \text{ lb} \quad \text{Ans.}$$

Equilibrium of the pulley in the x - and y -directions requires

$$\begin{aligned} [\Sigma F_x = 0] \quad 250 \cos 30^\circ - F_x &= 0 \quad F_x = 217 \text{ lb} \\ [\Sigma F_y = 0] \quad F_y + 250 \sin 30^\circ - 250 &= 0 \quad F_y = 125 \text{ lb} \\ [F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}] \quad F &= \sqrt{(217)^2 + (125)^2} = 250 \text{ lb} \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

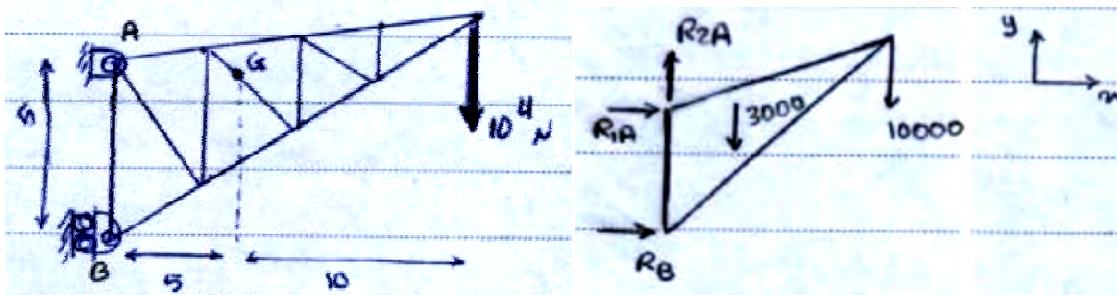
نکته: حل این مسئله و پاسخ‌های آن مستقل از شعاع پولی است.

مثال ۶: در شکل زیر نیروی کشش طناب و عکس العمل تکیه‌گاهی را بدست آورید. جرم میله ۱۵۰ کیلوگرم است.



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow R_A - R_B = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow T - mg = 0 \Rightarrow T = mg = 150(9.81) = 1471.5 \text{ N} \Rightarrow T = 1471.5 \text{ N} \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow T(4) - mg(6) + R_B(\sqrt{15^2 - 12^2}) \\ R_B &= 327 \text{ N} \quad , \quad R_A = 327 \text{ N}\end{aligned}$$

مثال ۷: عکس العمل تیکه گاهی را در سازه زیر بیابید. وزن سازه ۳۰۰۰ نیوتن است.



$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \Rightarrow R_B(5) - 3,000(5) - 10,000(15) = 0 \Rightarrow R_B = 33,000 \text{ N} \\ \sum F_x &= 0 \Rightarrow R_{1A} + R_B = 0 \Rightarrow R_{1A} = -33,000 \text{ N} \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow R_{2A} - 3,000 - 10,000 = 0 \Rightarrow R_{2A} = 13,000 \text{ N}\end{aligned}$$

همانگونه که در رابطه بالا مشاهده می شود R_{1A} مقداری منفی بدست آمد. این موضوع نشان می دهد که جهت نیرو برعکس فرض شده است.

۳-۵ قیدها و تعیین استاتیکی

معادلات تعادل شروط لازم و کافی برای تعادل می باشند. ولی آنها تمام اطلاعات لازم برای محاسبه تمام نیروهای مجهول بر یک جسم دارای تعادل را نمی دهند. جواب آنکه این معادلات برای حل مسئله کافی است، مشخصه های قیدهای تکیه گاهی است. محدودیت های حرکت را قید می نامند.

یک جسم صلب یا ترکیبی از آنها که شامل تکیه گاه های خارجی و بیش از حد مورد نیاز برای حفظ تعادل باشد را نامعین استاتیکی می نامند. به تکیه گاه هایی که می توان آنها بدون آنکه به وضعیت تعادل جسم لطمه ای وارد شود حذف نمود را تکیه گاه اضافی می نامند.

تعداد تکیه‌گاه‌های مازاد را درجه نامعینی استاتیکی می‌گویند؛ به عبارت دیگر تعداد مجهولات منهای تعداد معادلت درجه نامعینی را تعیین می‌کند.

ردیف	تکیه‌گاه مفصلی	تکیه‌گاه غلتکی	مجهولات	معادلات	درجه نامعینی
۱	۱	۱	۳	۳	۰
۲	۱	۲	۴	۳	۱
۳	۲	۱	۵	۳	۲
۴	۲	۲	۶	۳	۳

۳-۶ خلاصه

- ۱- کمیت‌های معلوم و مجهول را به خوبی مشخص و تعیین نمایید.
- ۲- جسم و یا اجسامی که باید جدا شوند را به وضوح مشخص نموده و جدا نمایید. سپس نمودار جسم آزاد را همراه تمامی نیروهای معلوم و مجهول ترسیم نمایید
- ۳- یک محور به عنوان مرجع انتخاب نمایید.
- ۴- معادلات سه‌گانه تعادل را بنویسید. سعی کنید معادله گشتاور را حول محوری بنویسید که بیش‌ترین تعداد نیرو مجهول از آنجا عبور نموده باشد.
- ۵- در انتها حتماً چک کنید که پاسخ به دست آمده مقداری کاملاً منطقی خواهد داشت.

۳-۷ تمرین

کتاب ویرایش ۷ مریام

۱- ۵- ۷- ۱۲- ۱۶- ۲۰- ۲۶- ۳۵- ۴۸- ۵۷- ۱۰۴- ۱۰۵

فصل ۴: سازه‌ها

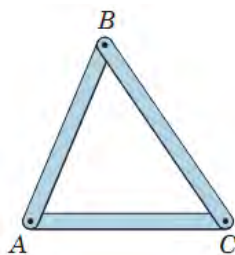
۴-۱ مقدمه

در این فصل به بررسی سازه‌های مکانیکی و به طور خاص خرپاها خواهیم پرداخت. توجه داشته باشید که در این فصل تمامی سازه‌ها را به صورت معین استاتیکی در نظر می‌گیریم. پایه این فصل در فصل گذشته یعنی تعادل قرار دارد و بر اساس آن تحلیل‌ها صورت می‌پذیرد.

قاب متشکل از عضوهایی که از انتها به هم متصل هستند و سازه صلبی را تشکیل می‌دهند را خرپا می‌گویند. پل‌ها، تکیه گاه‌های سقف‌ها، دکل‌ها از سازه‌های رایج خرپا هستند. اعضای خرپا که معمولاً به کار می‌روند از تیرهایی با مقاطع I شکل، ناودانی و یا نبشی است که با در انتهای آن‌ها به وسیله پیچ و مهره و یا جوش به هم متصل شده‌اند.

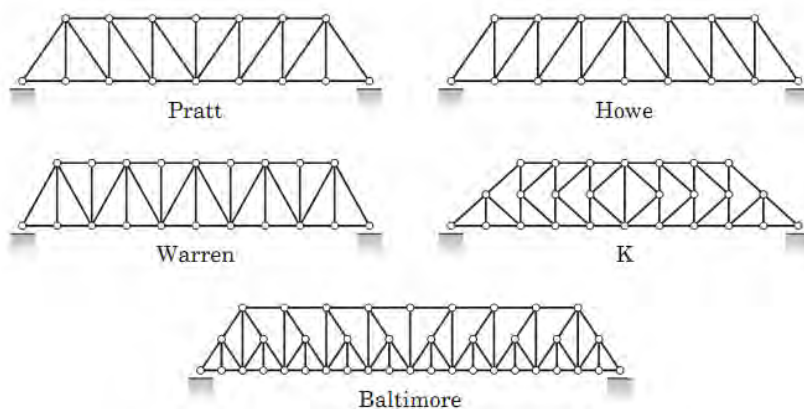
۴-۲ عضو خرپایی

کوچک‌ترین عنصر یک خرپا به صورت یک مثلث است که از سه المان تشکیل شده است. در شکل ۴-۱ نمونه‌ای از این عنصر نشان داده شده است.

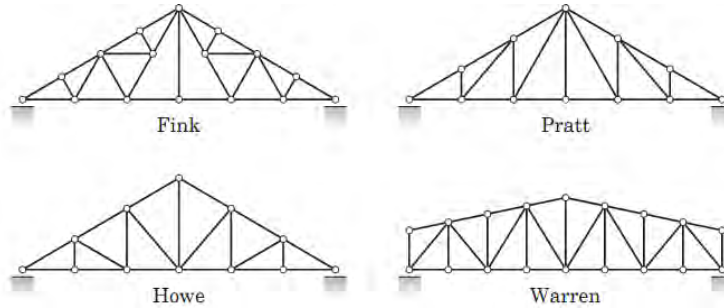


شکل ۴-۱: نمونه‌ای از کوچک‌ترین عضو یک خرپا

در شکل ۴-۲ نمونه‌ای از خرپاهای مورد استفاده در پل‌ها و در شکل ۴-۳ نمونه‌ای از خرپاهای مورد استفاده در سقف‌ها را می‌توانید مشاهده نمایید.

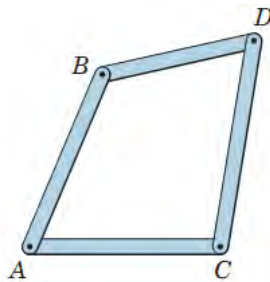


شکل ۴-۲: خرپاهای رایج در ساخت پل‌ها



شکل ۴-۳: خرپاهای رایج در ساخت سقفها

واژه صلب در خرپاها به آن معنی است که خرپا نمی تواند حرکت کند. در مقابل این واژه مکانیزم قرار دارد که توانایی حرکت دارد. در شکل ۴-۴ نمونه‌ای از یک مکانیزم نشان داده شده است.

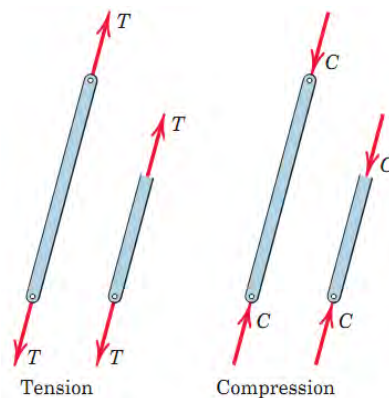


شکل ۴-۴: نمونه‌ای از یک مکانیزم چهار میله‌ای

یک نکته بسیار مهم در خرپاها وجود دارد، نیرو تنها به مفصل‌ها وارد می‌شود و به هیچ عنوان نباید نیرویی در محلی بجز مفاصل وارد شود. این نکته از آن جهت مهم است که اگر چنین اتفاقی بیفتد، سازه مذکور دیگر خرپا نبوده و به یک قاب تبدیل می‌شود. البته فرض فوق در اغلب سازه‌ها ذاتاً صادق است.

اگر در مسئله‌ای نیاز بود جرم اعضا و یا اثر باد در نظر گرفته شود باید به صورت تقریبی مقادیر این نیروها تنها در مفاصل لحاظ گردد.

تاکید بالا بیانگر آن است که تمامی اعضای خرپاها اعضای دو نیرویی می‌باشند که تنها می‌توانند نیرو در راستای خود تحمل کنند که این نیرو می‌تواند کششی و یا فشاری باشد. به شکل ۴-۵ توجه نمایید.

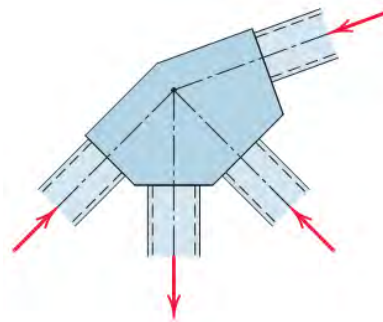


شکل ۴-۵: نیروهای کششی و فشاری در اعضای خرپا

توجه شود در شکل ۴-۵، T به معنای نیروی کششی و C به معنای نیروی فشاری می‌باشد. در تمامی حل‌ها فرض بر آن است که جرم اعضای خرپایی ناچیز در نظر گرفته شده است. اگر در مسئله‌ای برای عضوی از خرپا جرم داده شد، باید مقدار نیروی $mg/2$ را در جهت منفی محور y به هر دو مفصل انتهایی عضو اضافه نمایید.

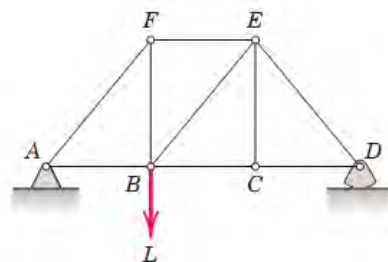
۴-۲-۱ اتصالات و تکیه‌گاه‌های اعضای خرپا

معمولاً در واقعیت اعضای خرپایی توسط جوش و یا پرچ (برخی موارد پیچ) به یکدیگر متصل می‌شوند. اما در مسائل موجود در استاتیک تمامی اتصالات را به صورت پین فرض می‌نماییم به صورتی که امتداد تمامی نیروها از یک نقطه عبور کرده که همان مکان قرارگیری پین است به شکل ۴-۶ توجه کنید.



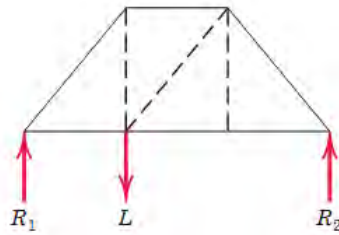
شکل ۴-۶: نمایی از اتصال چند عضو یک خرپا

به سبب انجام تحلیل‌های استاتیکی سازه‌هایی خرپایی، معمولاً تنها از یک تکیه‌گاه مفصلی و یک تکیه‌گاه غلتکی استفاده می‌کنند. به این نوع خرپا در اصطلاح خرپای ساده (Simple truss) می‌نامند. در شکل ۴-۷ نمونه‌ای از خرپای ساده را مشاهده می‌کنید.



شکل ۴-۷: نمونه‌ای از یک خرپای ساده

حال اگر نمودار جسم آزاد را برای خرپای نشان داده شده ترسیم کنیم خواهیم داشت: شکل ۴-۸



شکل ۴-۸: نمایی از نمودار جسم آزاد یک خرپای ساده

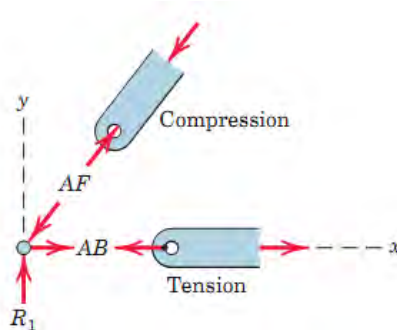
توجه شود در شکل ۴-۸ برای تکیه‌گاه مفصلی نیروی افقی لحاظ نشده است زیرا اگر لحاظ شده بود مقدار آن برابر صفر به دست می‌آمد از این رو ترسیم نشده است. همان‌گونه که در گذشته نیز اشاره شد هدف از تحلیل سازه‌های خرابایی در استاتیک به دست آوردن نیروی داخلی تمامی اعضای خرپا می‌باشد. برای این منظور به طور کلی دو روش وجود دارد.

الف) روش مفصل

ب) روش مقطع

۴-۲-۲ تحلیل خرپا به روش مفصل

این روش بر پایه محاسبه نیروهای وارده به هر کدام از اعضا بر اساس معادلات تعادل در مفاصل است. در خرپاها اگر پین را به عنوان یک عضو مجزا در نظر بگیریم، آنگاه نیروهای وارده بر آن را می‌توان به صورت شکل ۴-۹ نمایش داد.



شکل ۴-۹: نمایی از نیروهای عمل و عکس‌العمل در یک مفصل

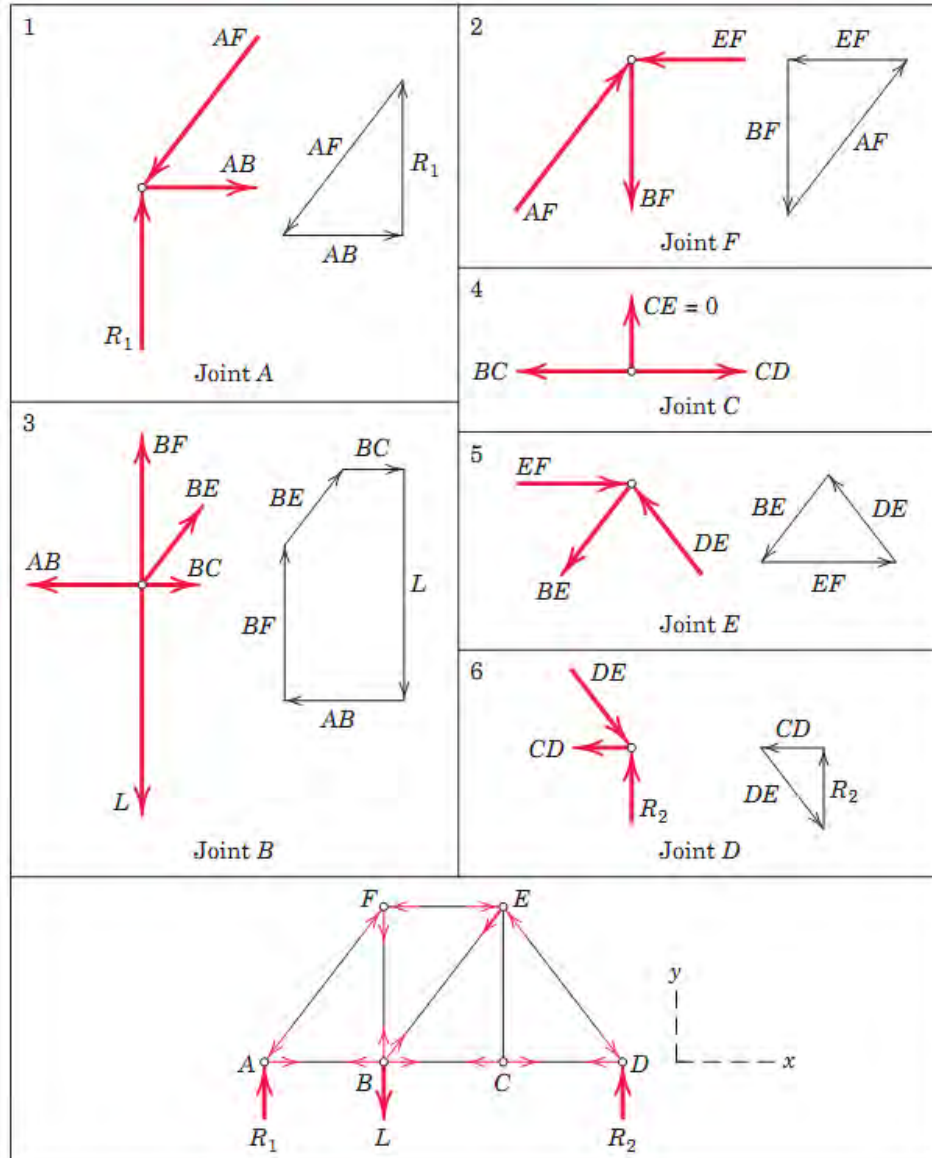
همان‌گونه که مشاهده می‌شود شکل ۴-۹ مربوط به تکیه‌گاه مفصلی شکل ۴-۷ است.

گام اول در حل مسائل خرپا به روش مفصل، رسم دیاگرام جسم آزاد کلی خرپا و به دست آوردن عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های آن است.

در گام دوم از مفصلی شروع به حل می‌نماییم که تنها دو نیروی مجهول در آن وجود داشته باشد. این به آن دلیل است که در روش مفصل برای هر کدام از مفاصل تنها مجاز به استفاده از معادلات تعادل نیرویی در جهات x و y خواهیم بود.

گام سوم: حل‌ها را به همین ترتیب برای مفاصل دیگر نیز ادامه می‌دهیم تا در نهایت تمام نیروها محاسبه شوند.

به شکل ۴-۱۰ توجه کنید.



شکل ۴-۱۰: مراحل چند گانه حل یک خرپای ساده

حالت‌های خاص

در تحلیل مسائل خرپا بعضاً حالت‌های خاصی به وجود می‌آید که در ادامه به آن‌ها پرداخته خواهد شد.

الف) اگر اعضای خرپایی به صورت شکل زیر قرار داشته باشند، آنگاه بر اساس معادلات تعادل می‌بایست (شکل ۴-۱۱ الف):

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = 0$$

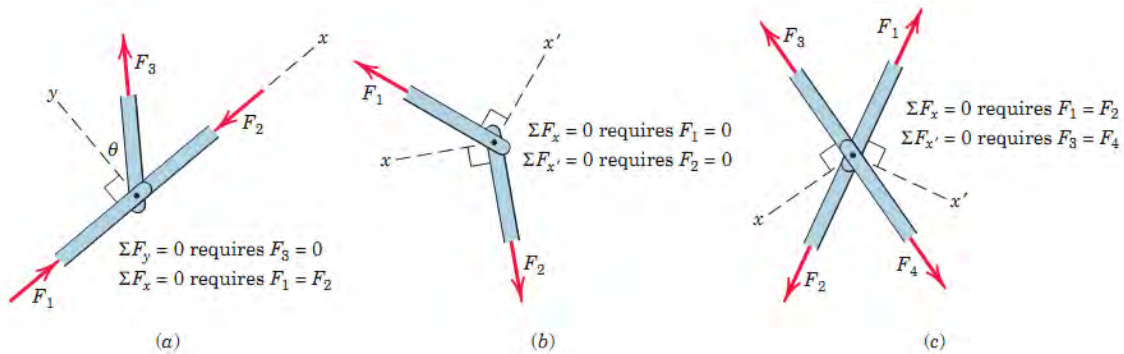
(ب) دو عضو خربایی به صورت زاویه‌دار نسبت به هم باشند. در این حالت می‌توان نوشت (شکل ۱۱-۴ ب):

$$F_1 = F_2 = 0$$

(ج) چهار عضو خربایی به صورت دو به دو در یک امتداد قرار داشته باشند (شکل ۱۱-۴ ج):

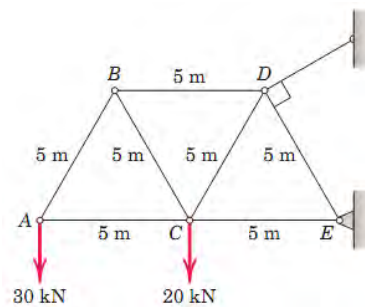
$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = F_4$$

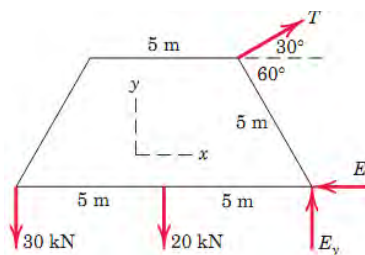


شکل ۱۱-۴: حالت‌های خاص اعضای خربایی

مثال ۱: عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها و نیروهای داخلی را در خربای زیر بیابید.



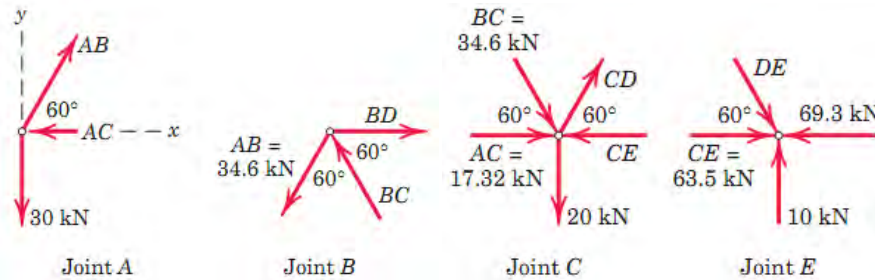
گام ۱) بدون در نظر گرفتن اعضای داخلی، عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را با در نظر گرفتن دیاگرام آزاد مناسب محاسبه کنید.



$[\Sigma M_E = 0]$	$5T - 20(5) - 30(10) = 0$	$T = 80 \text{ kN}$
$[\Sigma F_x = 0]$	$80 \cos 30^\circ - E_x = 0$	$E_x = 69.3 \text{ kN}$
$[\Sigma F_y = 0]$	$80 \sin 30^\circ + E_y - 20 - 30 = 0$	$E_y = 10 \text{ kN}$

گام ۲) به ترتیب از مفاصل A، B، C و E

توجه شود بعد از مقدار هر نیرو می بایست کششی و یا فشاری بودن آن مشخص شود.



Joint A

$[\Sigma F_y = 0]$	$0.866AB - 30 = 0$	$AB = 34.6 \text{ kN } T$	<i>Ans.</i>
$[\Sigma F_x = 0]$	$AC - 0.5(34.6) = 0$	$AC = 17.32 \text{ kN } C$	<i>Ans.</i>

Joint B

$[\Sigma F_y = 0]$	$0.866BC - 0.866(34.6) = 0$	$BC = 34.6 \text{ kN } C$	<i>Ans.</i>
$[\Sigma F_x = 0]$	$BD - 2(0.5)(34.6) = 0$	$BD = 34.6 \text{ kN } T$	<i>Ans.</i>

Joint C

$[\Sigma F_y = 0]$	$0.866CD - 0.866(34.6) - 20 = 0$		
	$CD = 57.7 \text{ kN } T$		<i>Ans.</i>
$[\Sigma F_x = 0]$	$CE - 17.32 - 0.5(34.6) - 0.5(57.7) = 0$		
	$CE = 63.5 \text{ kN } C$		<i>Ans.</i>

Joint E

$[\Sigma F_y = 0]$	$0.866DE = 10$	$DE = 11.55 \text{ kN } C$	<i>Ans.</i>
--------------------	----------------	----------------------------	-------------

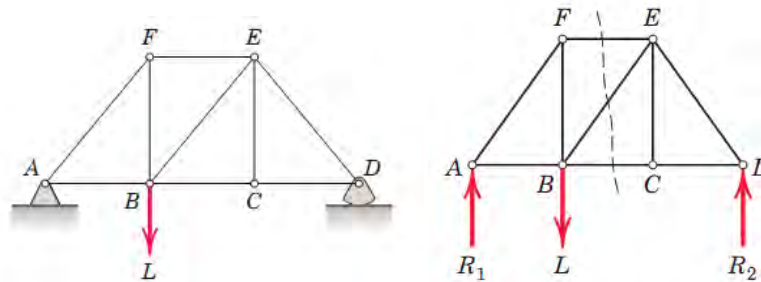
۴-۲-۳ روش مقطع در حل مسائل خرپا

یکی از مشکلات روش مفصل آن است که برای بدست آوردن نیروهای داخلی اعضا ملزم به محاسبه تمامی مفصل ها خواهیم بود. این کار به دلیل آنکه زمان بر می باشد امری مناسب نیست به خصوص زمانی که تعداد اعضای خرپا زیاد باشد. در روش مقطع میتوان به صورت مستقیم نیروی داخلی عضو مد نظر را بدست آورد.

در این روش اعضای خرپا برش خرده می شود بنابراین تنها در حالتی میتوان نیروها را محاسبه نمود که

حداکثر نیروی سه عضو مجهول باشد.

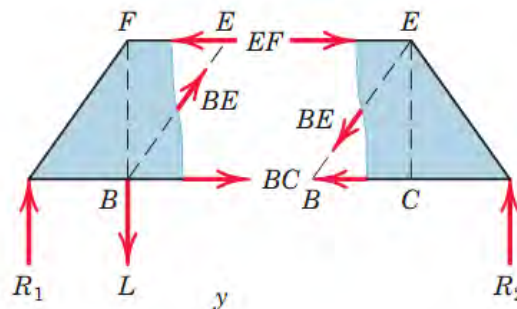
نحوه عملکرد این روش به صورت زیر است.



فرض کنید بخواهیم در در شکل بالا نیروی داخلی عضو BE را بدست آوریم. در روش مفصل می بایت در ابتدا از مفاصلی شروع می کردیم که تنها ۲ مجهول می داشت لذا فرایند محاسبه طولانی می شد.

در روش مقطع همانگونه که در شکل مشخص است، برشی را به صورت نشان داده شده در خرپا ترسیم می‌کنیم.

حال خرپا به دو قسمت تقسیم شده است.



شکل ۴-۱۲: نمایی از تقسیم خرپا به روش مقطع

توجه شود که نیرو هایی بر روی هر کدام از میله ها قرار میگیرد بایستی در خلاف جهت یکدیگر اثر نمایند. به عبارت دیگر میله ای که به آن نیروی فشاری وارد می‌شود در هر دو قسمت نیروی فشاری تحمل کند و برعکس.

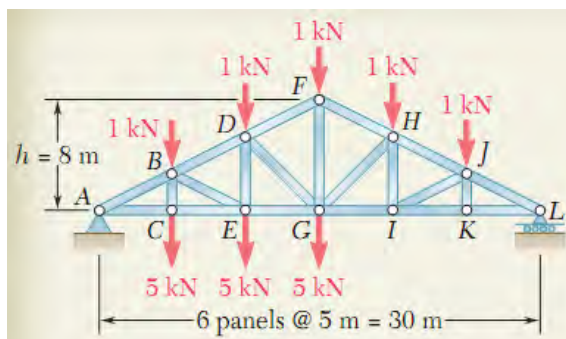
هر کدام از دو قسمت نشان داده شده در شکل ۴-۱۲ دارای تعادل استاتیکی می‌باشد. از این رو میتوان هر سه معادله تعادل را برای هر کدام از قسمت ها استفاده نمود. بنابراین میتوان در هر برش تنها سه مجهول را بدست آورد.

بهتر است در ابتدا نیروهای تکیه گاهی محاسبه شوند اما بنابر برش زده شده میتوان بدون محاسبه آنها نیز مسئله را حل نمود.

نکته: توجه داشته باشد که حتماً برش مربوطه تنها از میله های گذر نماید و هیچ مفصلی را قطع نکند.

نکته: اجباری در آن نیست که خط برش متقیم باشد میتوان یک منحنی باشد مثلاً یه منحنی سینوسی.

مثال ۲: در خرپای شکل زیر نیروهای داخلی FH، GH، GI را بیابید.



بهترین روش برای حل این مسئله روش مقطع می باشد. در ابتدا عکس العمل تکیه گاهی و زاویه آلفا را بدست می آوریم.

Free Body: Entire Truss. From the free-body diagram of the entire truss, we find the reactions at A and L:

$$A = 12.50 \text{ kN} \uparrow \quad L = 7.50 \text{ kN} \uparrow$$

We note that

$$\tan \alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 0.5333 \quad \alpha = 28.07^\circ$$

Force in Member GI. Section *nn* is passed through the truss as shown. Using the portion *HLI* of the truss as a free body, the value of F_{GI} is obtained by writing

$$+\circlearrowleft \Sigma M_H = 0: \quad (7.50 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) - F_{GI}(5.33 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GI} = +13.13 \text{ kN} \quad F_{GI} = 13.13 \text{ kN T}$$

Force in Member FH. The value of F_{FH} is obtained from the equation $\Sigma M_G = 0$. We move F_{FH} along its line of action until it acts at point *F*, where it is resolved into its *x* and *y* components. The moment of F_{FH} with respect to point *G* is now equal to $(F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m})$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0: \quad (7.50 \text{ kN})(15 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m}) = 0$$

$$F_{FH} = -13.81 \text{ kN} \quad F_{FH} = 13.81 \text{ kN C}$$

Force in Member GH. We first note that

$$\tan \beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5 \text{ m}}{\frac{2}{3}(8 \text{ m})} = 0.9375 \quad \beta = 43.15^\circ$$

The value of F_{GH} is then determined by resolving the force F_{GH} into *x* and *y* components at point *G* and solving the equation $\Sigma M_L = 0$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_L = 0: \quad (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) + (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{GH} \cos \beta)(15 \text{ m}) = 0$$

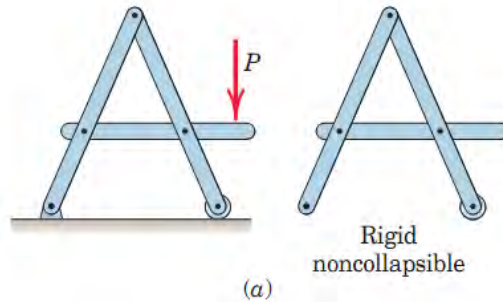
$$F_{GH} = -1.371 \text{ kN} \quad F_{GH} = 1.371 \text{ kN C}$$

تمرین خرپا:

۴-۵-۷-۱۱-۲۲-۲۴-۳۱-۳۳-۳۸-۴۸

۴-۳ قاب و ماشین:

سیستمی را قاب گویند که حداقل یک عضو آن چند نیرویی باشد. عضو چند نیرویی عضوی است که بیش از دو نیرو به آن وارد شود. در شکل ۴-۱۳ نمونه ای از یک قاب مشاهده می شود.



شکل ۴-۱۳: نمایی از یک قاب

روش حل مسائل قاب به صورت زیر است.

۱- عکس العمل تکیه گاه ها را بدست آورید.

۲- سپس اجزای قاب را از هم جدا نموده و برای هر کدام دیاگرام آزاد رسم کنید

توجه: قانون سوم نیوتن را در هنگام جدا کردن اجزا لحاظ نمایید.

۳- از عضوی که حداکثر سه مجهول دارد شروع به حل کنید.

توجه: ممکن است بعضی از اجزا دو نیرویی باشد.

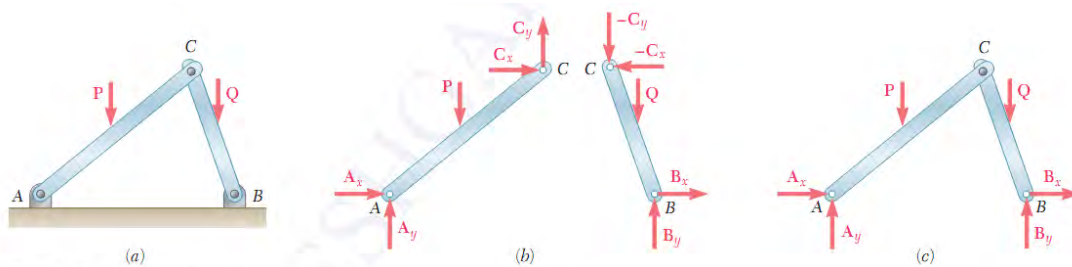


Fig. 6.20 (repeated)

مثال ۲:

SAMPLE PROBLEM 6.4

In the frame shown, members ACE and BCD are connected by a pin at C and by the link DE . For the loading shown, determine the force in link DE and the components of the force exerted at C on member BCD .

SOLUTION

Free Body: Entire Frame. Since the external reactions involve only three unknowns, we compute the reactions by considering the free-body diagram of the entire frame.

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad A_y - 480 \text{ N} = 0 & A_y = +480 \text{ N} & \quad A_y = 480 \text{ N} \uparrow \\
 +\uparrow \Sigma M_A = 0: & \quad -(480 \text{ N})(100 \text{ mm}) + B(160 \text{ mm}) = 0 & B = +300 \text{ N} & \quad B = 300 \text{ N} \rightarrow \\
 \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad B + A_x = 0 & 300 \text{ N} + A_x = 0 & \quad A_x = -300 \text{ N} & \quad A_x = 300 \text{ N} \leftarrow
 \end{aligned}$$

Members. We now dismember the frame. Since only two members are connected at C , the components of the unknown forces acting on ACE and BCD are, respectively, equal and opposite and are assumed directed as shown. We assume that link DE is in tension and exerts equal and opposite forces at D and E , directed as shown.

Free Body: Member BCD . Using the free body BCD , we write

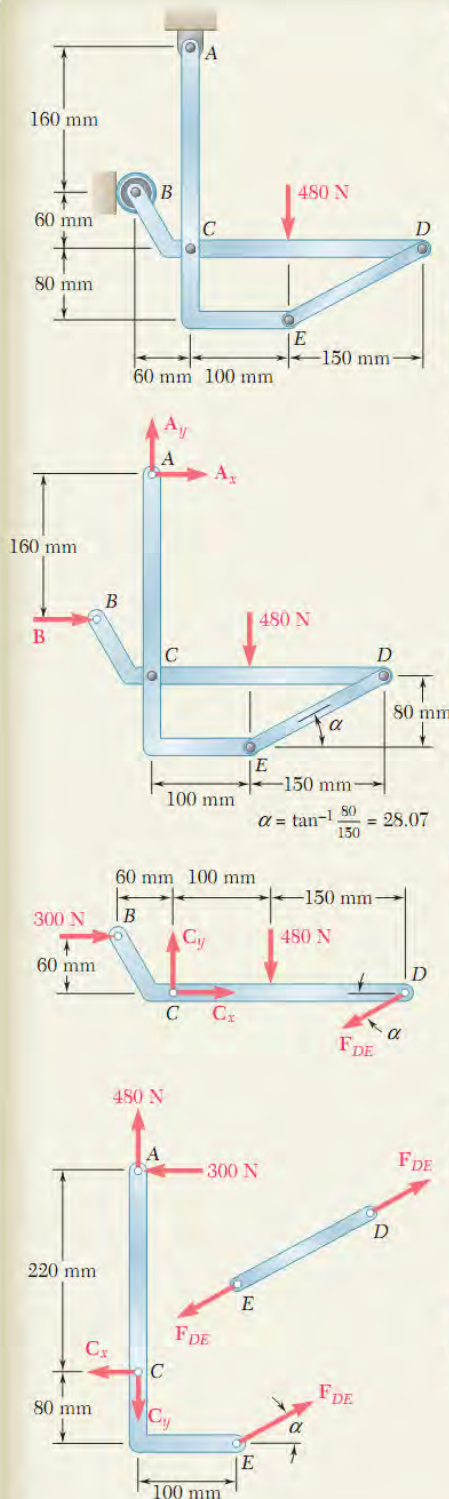
$$\begin{aligned}
 +\downarrow \Sigma M_C = 0: & \quad (F_{DE} \sin \alpha)(250 \text{ mm}) + (300 \text{ N})(80 \text{ mm}) + (480 \text{ N})(100 \text{ mm}) = 0 \\
 & \quad F_{DE} = -561 \text{ N} & F_{DE} = 561 \text{ N} \text{ C} \\
 \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad C_x - F_{DE} \cos \alpha + 300 \text{ N} = 0 \\
 & \quad C_x - (-561 \text{ N}) \cos 28.07^\circ + 300 \text{ N} = 0 & C_x = -795 \text{ N} \\
 +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad C_y - F_{DE} \sin \alpha - 480 \text{ N} = 0 \\
 & \quad C_y - (-561 \text{ N}) \sin 28.07^\circ - 480 \text{ N} = 0 & C_y = +216 \text{ N}
 \end{aligned}$$

From the signs obtained for C_x and C_y we conclude that the force components C_x and C_y exerted on member BCD are directed, respectively, to the left and up. We have

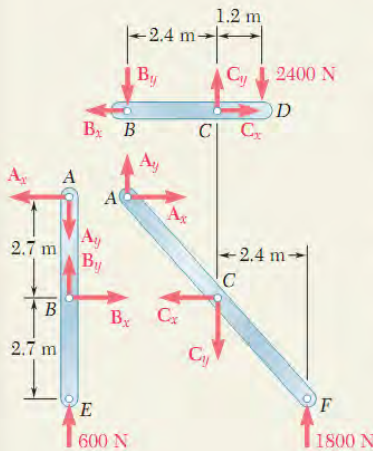
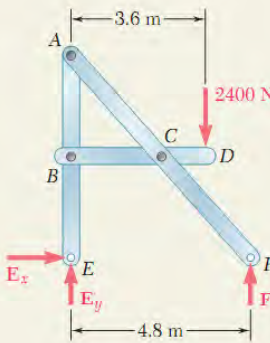
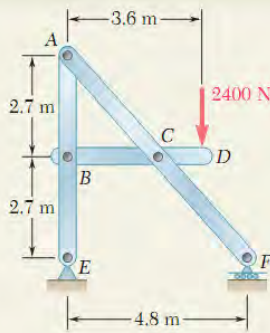
$$C_x = 795 \text{ N} \leftarrow, C_y = 216 \text{ N} \uparrow$$

Free Body: Member ACE (Check). The computations are checked by considering the free body ACE . For example,

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M_A &= (F_{DE} \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (F_{DE} \sin \alpha)(100 \text{ mm}) - C_x(220 \text{ mm}) \\
 &= (-561 \cos \alpha)(300) + (-561 \sin \alpha)(100) - (-795)(220) = 0
 \end{aligned}$$



مثال ٣:



SAMPLE PROBLEM 6.5

Determine the components of the forces acting on each member of the frame shown.

SOLUTION

Free Body: Entire Frame. Since the external reactions involve only three unknowns, we compute the reactions by considering the free-body diagram of the entire frame.

$$\begin{aligned}
 +\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: & \quad -(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + F(4.8 \text{ m}) = 0 & F = 1800 \text{ N} \uparrow \\
 +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad -2400 \text{ N} + 1800 \text{ N} + E_y = 0 & E_y = 600 \text{ N} \uparrow \\
 \rightarrow \Sigma F_x = 0: & & E_x = 0
 \end{aligned}$$

Members. The frame is now dismembered; since only two members are connected at each joint, equal and opposite components are shown on each member at each joint.

Free Body: Member BCD

$$\begin{aligned}
 +\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: & \quad -(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + C_y(2.4 \text{ m}) = 0 & C_y = +3600 \text{ N} \\
 +\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: & \quad -(2400 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + B_y(2.4 \text{ m}) = 0 & B_y = +1200 \text{ N} \\
 \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad -B_x + C_x = 0
 \end{aligned}$$

We note that neither B_x nor C_x can be obtained by considering only member BCD. The positive values obtained for B_y and C_y indicate that the force components B_y and C_y are directed as assumed.

Free Body: Member ABE

$$\begin{aligned}
 +\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: & \quad B_x(2.7 \text{ m}) = 0 & B_x = 0 \\
 \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad +B_x - A_x = 0 & A_x = 0 \\
 +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad -A_y + B_y + 600 \text{ N} = 0 & -A_y + 1200 \text{ N} + 600 \text{ N} = 0 & A_y = +1800 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Free Body: Member BCD. Returning now to member BCD, we write

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0 \quad 0 + C_x = 0 \quad C_x = 0$$

Free Body: Member ACF (Check). All unknown components have now been found; to check the results, we verify that member ACF is in equilibrium.

$$\begin{aligned}
 +\circlearrowleft \Sigma M_C &= (1800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) - A_y(2.4 \text{ m}) - A_x(2.7 \text{ m}) \\
 &= (1800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) - (1800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) - 0 = 0 \quad (\text{checks})
 \end{aligned}$$

تمرین قاب:

فصل ۵: نیروهای گسترده

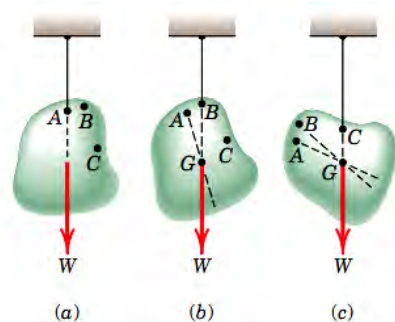
۵-۱ مقدمه

نیروهای گسترده دسته ای از نیرو ها هستند که میتواند بر روی یک خط، سطح یا حجم گسترده شده باشند. اگر نیرویی در یک خط گسترده باشد واحد آن N / m و اگر در یک سطح یا حجم گسترده شده باشد، به ترتیب N / m^2 و N / m^3 خواهد بود.

نیروی گسترده خطی مانند وزن یک کابل یا نیروی وارده بر یک تیر. نیروی گسترده سطحی مانند نیروی وارده از طرف آب به یک سد و نیروی حجمی مانند وزن یک جسم که به کل آن وارد میگردد.

۵-۲ مرکز جرم یک جسم

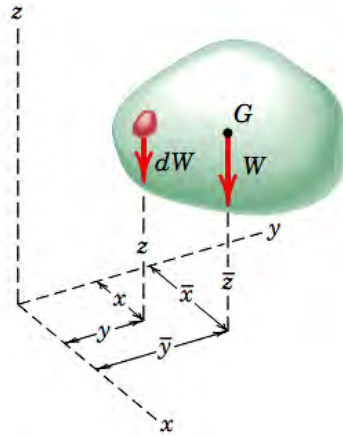
روش های تجربی یافتن مرکز جرم متنوع می باشند اما یکی از معروف ترین راه های یافتن آن آویزان نمودن جسم در دو راستا است که بعد از تعادل محل برخورد دو راستا مرکز جرم را نشان خواهد داد. نمونه ای از کاربرد این روش در شکل ۵-۱ آمده است.



شکل ۵-۱: یافتن مرکز جرم به صورت تجربی

جهت یافتن مرکز جرم به صورت تحلیلی نیز روشی بر پایه ریاضی وجود دارد که در ادامه توصیف خواهد شد.

روش یافتن مرکز جرم بر مبنای اصل گشتاور است به این صورت که می بایست گشتاو حاصل از مجموع جز نیرو های وزن حول هر کدام از محور ها برابر گشتاور کل وزن در مرکز جرم باشد. به شکل زیر توجه کنید



بنابراین میتوان روابطی را به صورت زیر استخراج نمود.

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W} \quad \bar{y} = \frac{\int y dW}{W} \quad \bar{z} = \frac{\int z dW}{W}$$

حال اگر در رابطه بالا $W = mg \Rightarrow dW = g \times dm$ را جایگذاری کنیم داریم

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{m} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{m} \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{m}$$

با استفاده از روابط بالا میتوان مکان مرکز جرم که عبارت است از $G = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ را بدست آورد.

حال اگر در رابطه بالا $dm = \rho dV$ را جایگذاری کنیم، میتوان نوشت:

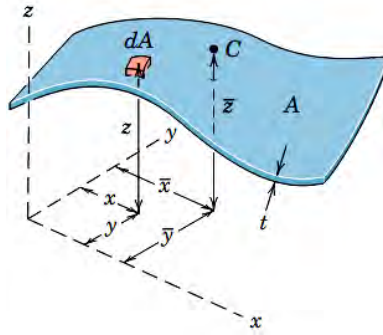
$$\bar{x} = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV} \quad \bar{y} = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV} \quad \bar{z} = \frac{\int z \rho dV}{\int \rho dV}$$

بنابراین میتوان مرکز حجم، سطح و طول را با استفاده از روابط فوق بدست آورد.

مرکز حجم:

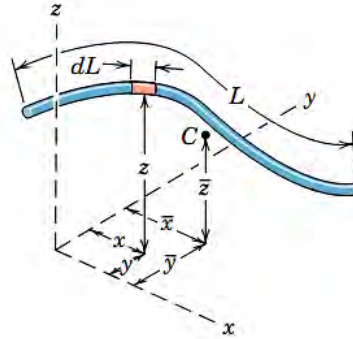
$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V} \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V} \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$$

مرکز سطح:



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

مرکز خط:



$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$$

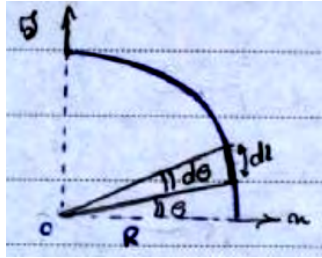
نکته: اگر جسمی دارای محور تقارن باشد آنگاه مرکز ثقل و جرم آن بر روی محور تقارن قرار خواهد داشت.

نکته: بنابر شرایط یک مسئله ممکن است از مختصات استوانه ای برای یافتن مرکز جرم استفاده شود.

نکته: اگر جسمی دو محور تقارن داشته باشد، حتماً مرکز جرم روی محل تلاقی دو خط تقارن قرار دارد.

این انتخاب کنیم به هر روشی که آن را بدست می آوریم هر شکل را به سه scan کنند.

مثال ۱: مرکز کمان زیر را بدست آورید.



در ابتدا می بایست یک دستگاه مختصات را در نظر بگیریم. سپس المانی را مشخص کنیم.

$$\bar{x} = \frac{\int x_e . dl}{\int dl} , \quad \bar{y} = \frac{\int y_e . dl}{\int dl}$$

به جهت سهولت در حل، از مختصات قطبی استفاده میکنیم بنابراین تغییر متغیر هایی به صورت زیر در نظر میگیریم.

$$x_e = R \cos \theta$$

$$y_e = R \sin \theta$$

$$dl = R d\theta$$

حال با جایگذاری داریم:

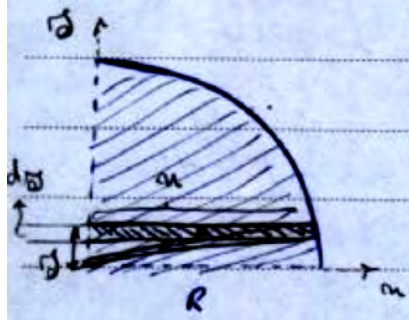
$$\bar{x} = \frac{\int x_e . dl}{\int dl} = \frac{\int (R \cos \theta) . d(R\theta)}{\int d(R\theta)} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta}{R \int_0^{\pi/2} d\theta} = R \frac{\sin \theta_0^{\pi/2}}{\theta_0^{\pi/2}} = R \frac{1}{\pi/2}$$

$$\bar{x} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y_e . dl}{\int dl} = \frac{\int (R \sin \theta) . d(R\theta)}{\int d(R\theta)} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta}{R \int_0^{\pi/2} d\theta} = R \frac{-\cos \theta_0^{\pi/2}}{\theta_0^{\pi/2}} = R \frac{1}{\pi/2}$$

$$\bar{y} = \frac{2R}{\pi}$$

مثال ۲: مرکز سطح یک صفحه ربع دایره ای را بیابید.



ابتدا یک المان سطح را به صورت بالا در مظر میگیریم. ضخامت این المان dy و فاصله آن از محور x ، y همچنین طول آن x می باشد. برای حل این مسئله داریم:

$$\bar{x} = \frac{\int x_e . dA}{\int dA} , \quad \bar{y} = \frac{\int y_e . dA}{\int dA}$$

منظور از x_e و y_e مرکز المان در نظر گرفته شده است.

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

از طرفی

$$x_e = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{2}$$

حال خواهیم داشت:

$$\bar{x} = \frac{\int x_e . dA}{\int dA} \xrightarrow{dA=xdy} \bar{x} = \frac{\int x_e x dy}{A} = \frac{1}{2} \frac{\int \left(\sqrt{R^2 - y^2} \right)^2 dy}{\frac{\pi R^2}{4}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{\int \left(\sqrt{R^2 - y^2} \right)^2 dy}{\frac{\pi R^2}{4}} = 2 \frac{\int_0^R (R^2 - y^2) dy}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi R^2} \left[R^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^R$$

$$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$$

همچنین به طریق مشابه خواهیم داشت:

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

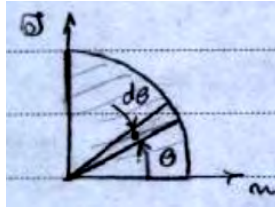
روش ۲:

$$\bar{x} = \frac{\int x_e dA}{A}$$

$$dA = x dy = (R \cos \theta)^2 d\theta$$

$$x_e = \frac{1}{2} R \cos \theta$$

روش ۳: المانی به صورت مقابل در نظر گیرید.

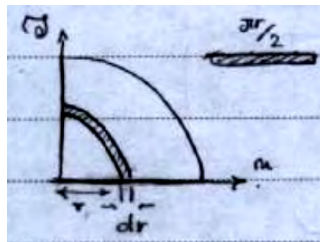


$$\bar{x} = \frac{\int x_e dA}{A}$$

$$dA = \frac{1}{2} (R d\theta) (R) = \frac{1}{2} R^2 d\theta$$

$$x_e = \frac{2}{3} R \cos \theta$$

روش ۴: المانی به صورت مقابل در نظر گیرید.

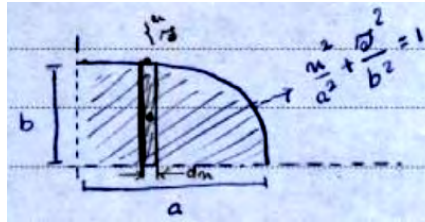


$$\bar{x} = \frac{\int x_e dA}{A}$$

$$dA = \frac{\pi r}{2} dr$$

$$x_e = \frac{2r}{\pi}$$

مثال ۳: مرکز سطح شکل زیر را بیابید:



$$\bar{x} = \frac{\int x_e dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y_e dA}{A}$$

$$y_e = \frac{y}{2}, \quad x_e = x, \quad dA = y dx$$

$$\bar{x} = \frac{\int xy dx}{\frac{\pi}{4} ab} = \frac{\int x \left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx}{\frac{\pi}{4} ab} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4}{\pi a} \int_0^a x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

راهنمایی:

$$\int x \sqrt{ax+b} dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2} \sqrt{(ax+b)^3}$$

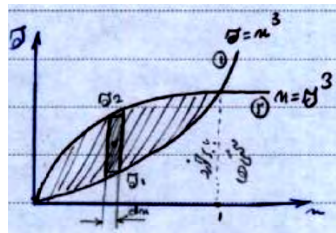
$$\frac{x}{a} = \sin \theta \Rightarrow x = a \sin \theta \rightarrow$$

$$0 = a \sin \theta \rightarrow \theta = 0, x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

و به همین ترتیب

$$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$$

مثال ۴: مرکز سطح محصور زیر را بیابید.



$$dA = (y_2 - y_1) dx, \quad x_e = x, \quad y_e = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x(y_2 - y_1) dx}{\int (y_2 - y_1) dx} = \frac{\int_0^1 x(x^{1/3} - x^3) dx}{\int_0^1 (x^{1/3} - x^3) dx} = \frac{\left. \frac{3}{7} x^{7/3} - \frac{1}{5} x^5 \right|_0^1}{\left. \frac{3}{4} x^{4/3} - \frac{1}{4} x^4 \right|_0^1} \Rightarrow \bar{x} = 0.48$$

$$\int (y_2 - y_1) dx = A$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\int \left[(y_2 - y_1)/2 \right] (y_2 - y_1) dx}{A} = \frac{\int_0^1 x(x^{1/3} - x^3) dx}{A} = \frac{1}{2A} \int (y_2^2 - y_1^2) dx = \frac{1}{2A} \int (x^{2/3} - x^6) dx \\ &= \frac{1}{2A} \left[\frac{3}{5} x^{5/3} - \frac{1}{7} x^7 \right]_0^1 \Rightarrow \bar{y} = 0.43 \end{aligned}$$

مثال ۵:

۵-۳ مرکز جرم اجسام مرکب

در این قسمت مرکز جرم برای اجسامی که به صورت مرکبی از چند شکل می باشند توضیح داده خواهد شد. در این روش جسم ابتدا به شکل هایی که مرکز جرم آنها مشخص می باشد تجزیه خواهد شد و سپس با استفاده از اصل گشتاور میتوان روابط مربوطه را به دست آورد.

به عبارت دیگر در اجسام مرکب به جای استفاده از عملگر انتگرال کافی است از عملگر سیگما به صورت زیر استفاده نماییم.

$$\bar{x}W = \bar{x}_1W_1 + \bar{x}_2W_2 + \bar{x}_3W_3 + \dots$$

$$\bar{x}W = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i W_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i W_i}{W}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i m_i}{\sum m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i m_i}{\sum m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum \bar{z}_i m_i}{\sum m_i}$$

همانگونه که مشاهده می شود تنها تفاوت این روابط در جایگزینی سیگما به جای انتگرال است.

نکته: دستگاه مختصات باید در ابتدا انتخاب شود و در طی حل مسئله تغییر نکند و مرکز اجسام بر اساس دستگاه مذکور سنجیده شود.

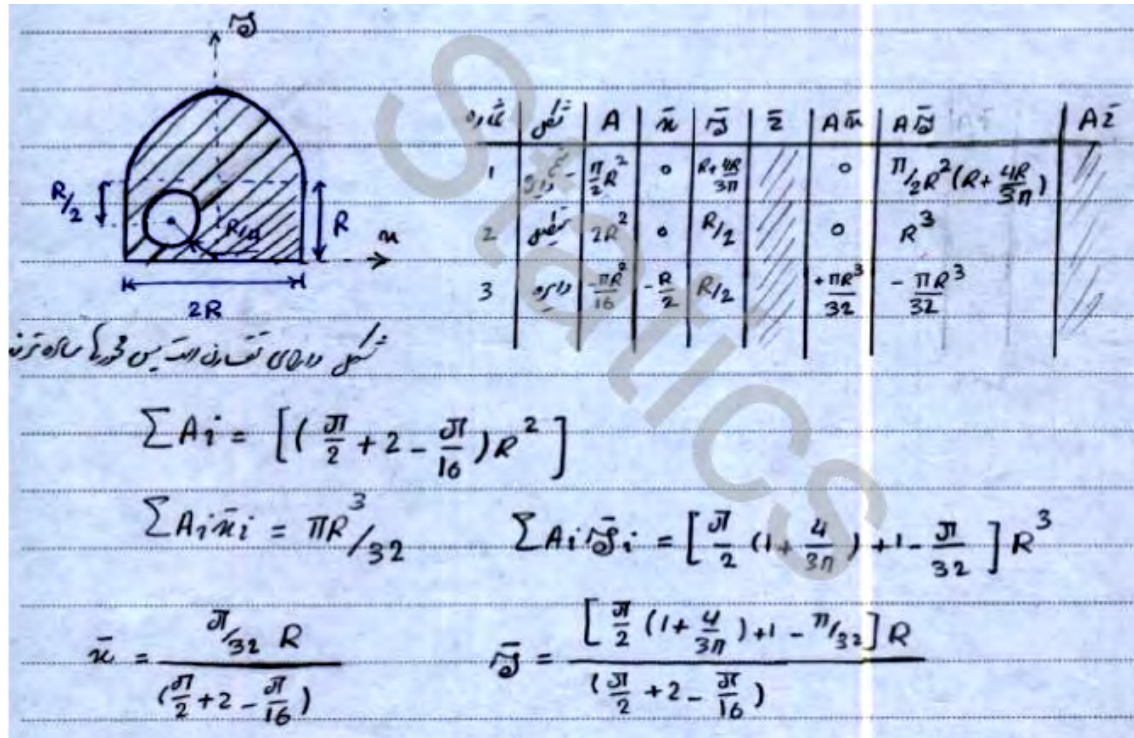
نکته: اگر شکلی دارای حفره یا قسمت تو خالی بود تنها کافی است به جای جرم، سطح یا طول آن قسمت مقدار منفی در نظر بگیریم.

نکته: اگر تعداد اجزا از دو بیشتر بود بهتر است جدولی مشابه زیر ترسیم شود.

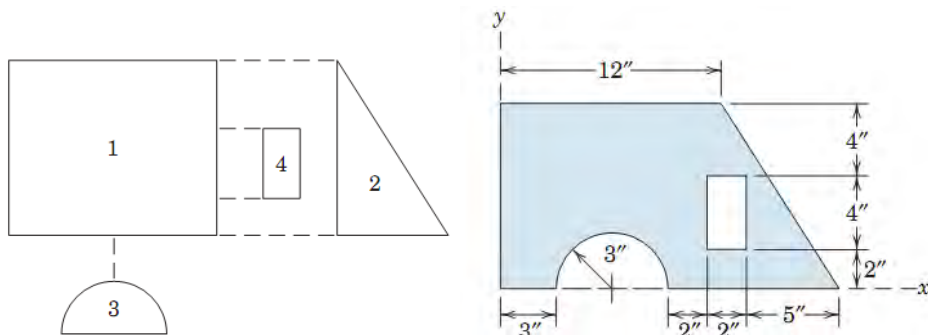
ردیف	شکل	(kg)	m	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$m\bar{x}$	$m\bar{y}$	$m\bar{z}$
1	مربع	...	...	...	...	...	...	...	...
2	دایره	-200	...	...	...	...	...	...	...
			$\sum m_i$						

سعی شود تعداد اجزا کمترین حالت باشد زیرا با افزایش تعداد اجزا دقت بیشتری در محاسبات لازم است.

مثال: مرکز سطح شکل زیر را بیابید.



مثال: مرکز سطح شکل زیر را بیابید.



PART	A in. ²	$\bar{x}$ in.	$\bar{y}$ in.	$\bar{x}A$ in. ³	$\bar{y}A$ in. ³
1	120	6	5	720	600
2	30	14	10/3	420	100
3	-14.14	6	1.273	-84.8	-18
4	-8	12	4	-96	-32
TOTALS	127.9			959	650

$$\left[\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} \right]$$

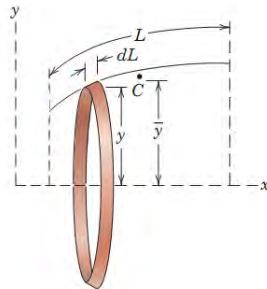
$$\bar{X} = \frac{959}{127.9} = 7.50 \text{ in.}$$

$$\left[\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} \right]$$

$$\bar{Y} = \frac{650}{127.9} = 5.08 \text{ in.}$$

۵-۴ قضیه پاپوس

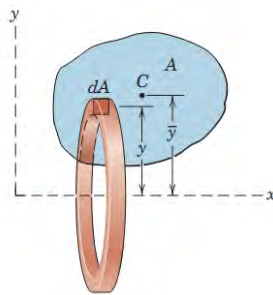
برای یافتن حجم و یا سطح دوار میتوان از این قضیه استفاده نمود. اثبات این قضیه ساده بوده و می توان انرا از کتاب مطالعه نمود. برای آنکه سطح دورای را بتوان به دست آور کافی است از رابطه زیر استفاده شود.



$$A = 2\pi\bar{y}L$$

$$A = \theta\bar{y}L$$

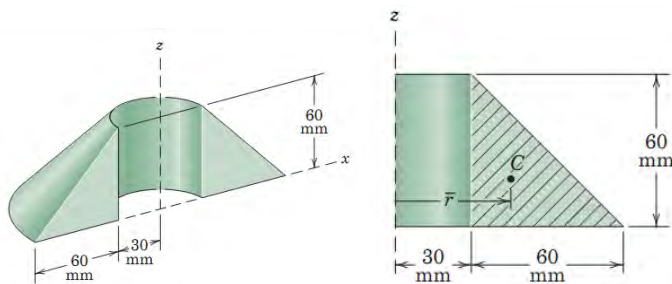
و برای آنکه بتوان حجم دورای را بدست آورد کافی است به صورت زیر عمل نمود.



$$V = 2\pi\bar{y}A$$

$$V = \theta\bar{y}A$$

مثال: حجم زیر را با اسفاده از قضیه پاپوس محاسبه نمایید.



Solution. With the angle of revolution $\theta = 180^\circ$, Eq. 5/9a gives

$$V = \theta\bar{r}A = \pi[30 + \frac{1}{3}(60)][\frac{1}{2}(60)(60)] = 2.83(10^5) \text{ mm}^3 \quad \text{Ans.}$$

The mass of the body is then

$$m = \rho V = \left[7830 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] [2.83(10^5) \text{ mm}^3] \left[\frac{1 \text{ m}}{1000 \text{ mm}} \right]^3 = 2.21 \text{ kg} \quad \text{Ans.}$$

نیروی دشت و در کسم و حبس نه برکت دارد پس در آن شکل، دستور تاج که داریم که
محل دستور Max و Min پیدا کنیم در همان داده بچکان داشته.
در به خط دستور نیروی پرسی (برای ۱۷)، رنگ فنی (برای ۱۲) در طول تیر قرارند

Diagram of a beam with a pin support at A, a roller support at C, and a downward point load $P = 2000\text{ N}$ at B. The distance from A to B is 2 m , and from B to C is 5 m . A dashed line indicates the beam's deflection shape.

① ریحان در ماه خرداد

⑤ می سہری عکس العمل سے مراد

$$\sum F_M = 0 \Rightarrow A_H = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -2000(2) + C_D(5) = 0 \Rightarrow C_D = 800 \text{ N}$$

$$\Sigma F_{\text{H}} = 0 \Rightarrow A_{\text{H}} + 800 - 2000 = 0 \Rightarrow A_{\text{H}} = 1200 \text{ N}$$

(۳) بخش دهم سه بخش «فصلنامه پژوهش» «مطالعات علمی» و «مطالعات کاربردی» است.

④ زخار کینه ز حقیقت جدا شد و رسم بیک طرف آوردن

۵) می سبب نزدیکی و رفع بار سنگین از دوش دولت می شود

① ψ_0 : $\sum P_{0i} = 0 \rightarrow \rho = 0$

$$\sum F_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow A \cdot g - V = 0 \Rightarrow A \cdot g = V$$

مثبت شد $[V = 1200 \text{ N}]$ و در این حالت AB عمود است

$$\sum M_i = 0 \Rightarrow -A_{\text{rot}}(u) + M = 0 \Rightarrow M = 1200 \text{ N.m}$$

④ تکرار علی ستاره رحمت مبارک

② $\mathcal{F}_\infty^{\vee} : \Sigma F_n = \cdot \Rightarrow \rho = \cdot$

$$\sum F_m = 0 \Rightarrow p = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - F - V = 0 \Rightarrow V = -800 \text{ N}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -A_{\text{Hoj}}(u) + F(u-2) + M = 0 \Rightarrow M = -800u + 4000$$

شرائط تعادل: $\sum F_{x=0} \Rightarrow P = 0$ $\sum F_{y=0} \Rightarrow V + 800 = 0 \Rightarrow V = -800 \text{ N}$

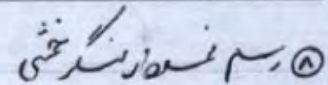
$$I_{M2} = 0 \Rightarrow C_{M2}(\sqrt{5} - 1) - m = 0 \Rightarrow I_{M2} = 4000 - 800m$$



⑤ رسم محسوسه سزوی رشی

« روزی که در آنجا بودم با پدرم و عمویم شام درخت و نار را»

Year. _____ Month. _____ Date. _____ (54)


$$M_1 = 1200 \text{ m}$$

↖ $(2 \leq n \leq 5)$

نتیجہ : $\frac{1}{2}$ تک ہے

«بِتَقِيهِ مَعْصُومٌ لَمْ يَشَأْ رَحْمَةً مِنْهُ وَفِي عَذَابٍ مُتَسَاوِينَ»

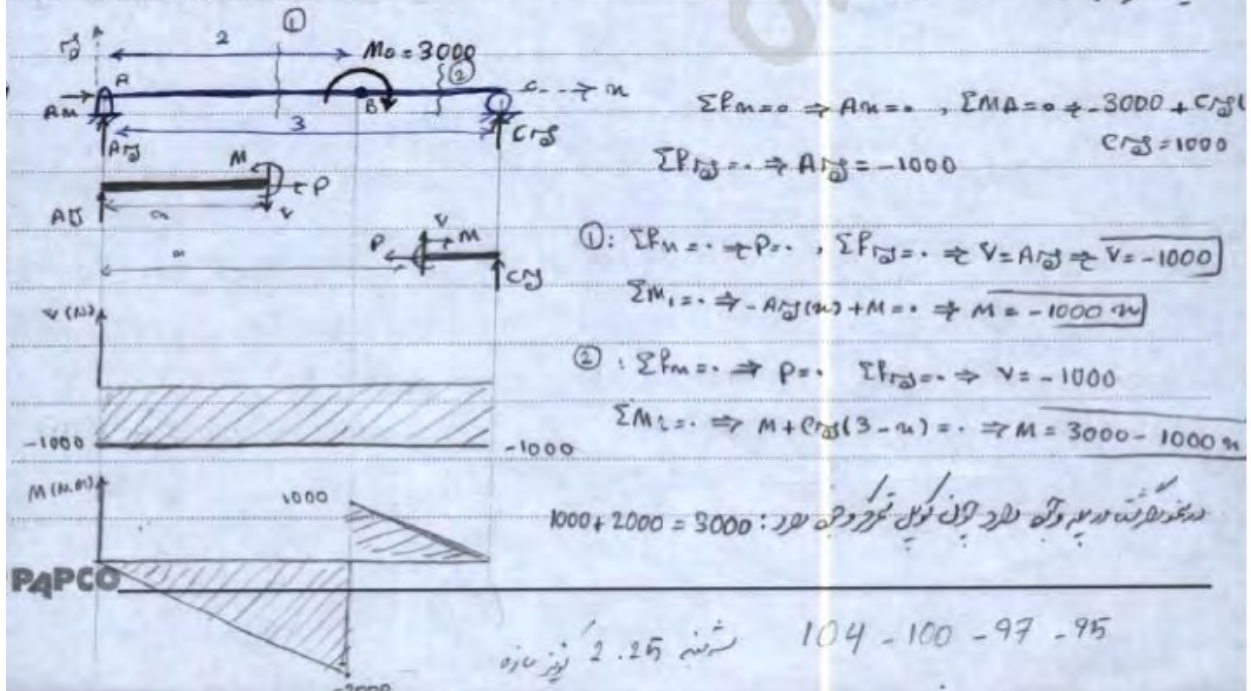
شکل هم نشانی دهد» «او علیک در آنها نیاید و خداوند در هر صورت»

«نقطه نایزده به نمودار شد max, که در است»

« سہت پز شغل روز = سگر 2400 » « روز تہ روز سگر در ہفتہ مع جری سہت در شغل کا سہت کا درم »

۷۶ هر که از سیر ما معذور و غایب باشد در غیبت خود بگوید. در اول وقت و معذور و غایب باشد در غیبت خود بگوید.

لوگوں کے اندر



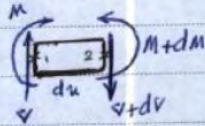
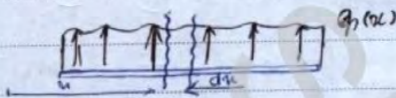
در مجموع هزینه در هر ماه $1000 + 2000 = 3000$ ریال می شود.

شماره 2.25 / 95-97-100-104

Subject: _____
 Year: _____ Month: _____ Date: 155

نیروی تحت بارهای گسترده

می بینیم که بار گسترده را می توانیم به بار متمرکز در یک جسم تبدیل کنیم.
 وقتی در مقطع در یک نقطه و ارتفاع h یک بار گسترده q داریم و می خواهیم آن را به یک بار متمرکز M تبدیل کنیم.
 در شکل که خط نیرو x در آن مقطع نیرو q را به یک بار متمرکز M تبدیل می کنیم.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - (V + dV) + q dx = 0$$

$$-dV + q dx = 0$$

$$dV = q \cdot dx$$

$$q(x) = \frac{dV}{dx}$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} q \cdot dx \Rightarrow V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} q \cdot dx$$

تحت حالت = مساحت زیر نمودار بار گسترده
 تفاوت دو نیروی V

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -M - V dx + M + dM - q dx \left(\frac{dx}{2} \right) = 0$$

$$-V dx + dM - \frac{q}{2} (dx)^2 = 0$$

از آنجایی که dx در حد صفر است پس $(dx)^2$ را می توانیم نادیده بگیریم.

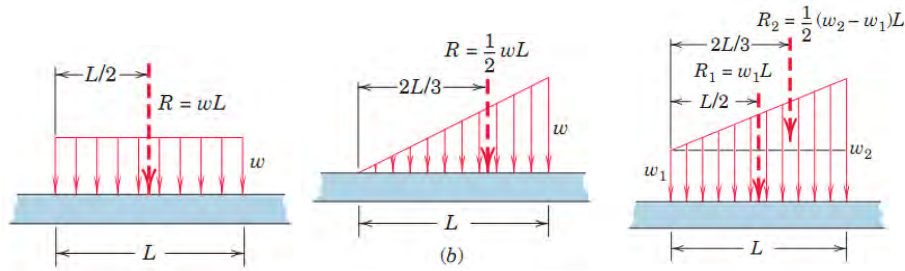
$$V dx = dM \Rightarrow V = \frac{dM}{dx}$$

شدت نیروی برشی V

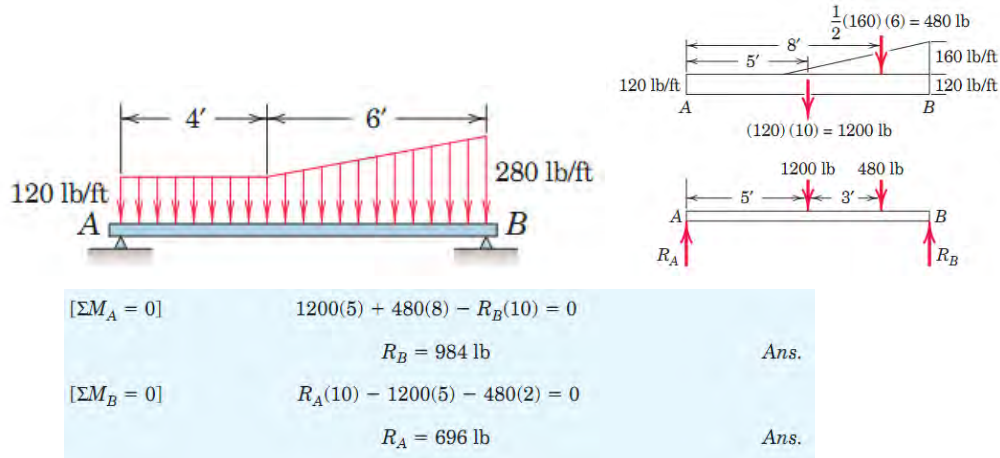
$$dM = V dx$$

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

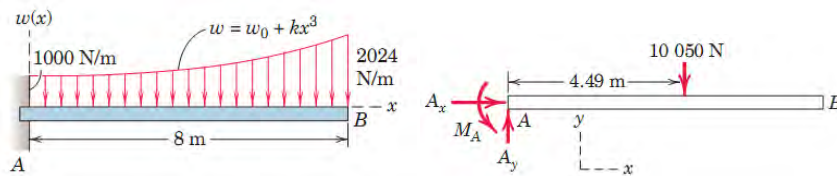
مساحت زیر نمودار نیروی برشی



مثال: عکس العمل؟



مثال:



- Solution.** The constants in the load distribution are found to be $w_0 = 1000$ N/m and $k = 2$ N/m⁴. The load R is then

$$R = \int w \, dx = \int_0^8 (1000 + 2x^3) \, dx = \left(1000x + \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^8 = 10\,050 \text{ N}$$

- 2 The x -coordinate of the centroid of the area is found by

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int xw \, dx}{R} = \frac{1}{10\,050} \int_0^8 x(1000 + 2x^3) \, dx \\ &= \frac{1}{10\,050} \left(500x^2 + \frac{2}{5}x^5 \right) \Big|_0^8 = 4.49 \text{ m} \end{aligned}$$

From the free-body diagram of the beam, we have

$$[\Sigma M_A = 0] \quad M_A - (10\,050)(4.49) = 0$$

$$M_A = 45\,100 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad A_y = 10\,050 \text{ N} \quad \text{Ans.}$$

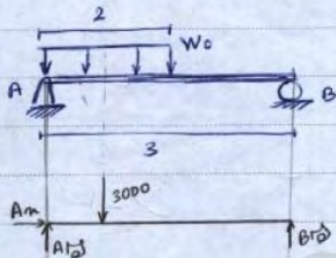
Note that $A_x = 0$ by inspection.

Subject:

Year: Month: Date: 156

همیشه منظور از گشت ۲ درجه و ۷ یک درجه از درجه ۹ است

گوشه گسترده نشین ۷ خط ثابت باشد (مستقیم)



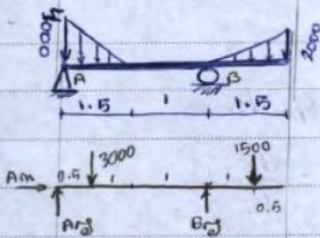
عکس العمل گشت ۲ درجه گسترده نشین $w_0 = 1500 \text{ N/m}$

! برای گشت عکس العمل ۲ درجه گسترده نشین!

$$\sum F_m = 0 \Rightarrow A_m = 0 \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow -3000(1) + B_v(3) = 0$$

$$B_v = 1000$$

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow B_v + A_v - 3000 = 0 \Rightarrow A_v = 2000$$



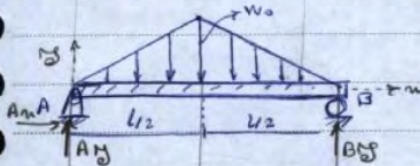
« نیرو در مساحت مثلث ۳ درجه گسترده نشین »

« در نقطه ۱.۵ به حاصل ۲ از ۳ درجه گسترده نشین »

$$\sum F_m = 0 \Rightarrow A_m = 0 \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow -3000(0.5) + B_v(2.5) - 1500(1.5) = 0 \Rightarrow B_v = 2700 \text{ (N)}$$

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow A_v + B_v - 3000 - 1500 = 0$$

$$A_v = 1500 \text{ (N)}$$



مستطیل گشتی و ۲ درجه گسترده نشین

$$w_0 \left(\frac{l}{2} \right) = w_0 \frac{l}{2}$$

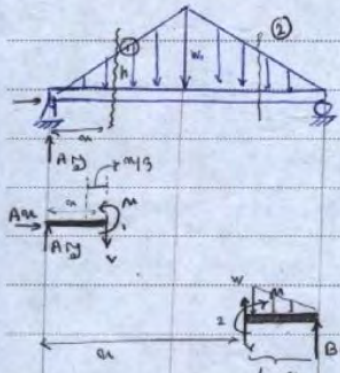
$$\sum F_m = 0 \Rightarrow A_m = 0 \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow -w_0 \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} \right) + B_v(l) = 0$$

$$B_v = w_0 \frac{l}{4}$$

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow A_v = B_v = w_0 \frac{l}{4} \quad \text{تساوی}$$

Subject:

Year: Month: Date: ۱۵۷



$$\textcircled{1} \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - V - \left(\frac{2w_0 u}{L} \right) \left(\frac{u}{2} \right) = 0$$

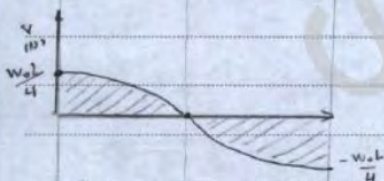
$$\left\| \frac{u}{L/2} = \frac{h}{w_0} \Rightarrow h = \frac{w_0 u}{L/2} = \frac{2w_0 u}{L} \right\|$$

$$V = \frac{w_0 L}{4} - \frac{w_0 u^2}{L}$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow -A_y u + M + \left(\frac{w_0 u^2}{2L} \right) \left(\frac{u}{3} \right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{w_0 L}{4} u + M + \frac{w_0 u^3}{3L} = 0 \Rightarrow M =$$

$$\left\| V = \frac{w_0 L}{4} - \frac{w_0 u^2}{L} \right\| \textcircled{1} \quad \text{و} \quad M = \frac{w_0 L}{4} u - \frac{w_0 u^3}{3L} \left\| \textcircled{2} \right.$$



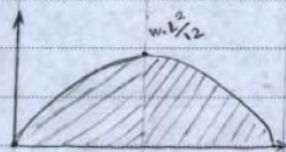
$$\textcircled{2} \sum F_x = 0 \Rightarrow V + B_y - \frac{w_0}{2} (L-u)^2 = 0$$

$$\left\| \frac{w}{w_0} = \frac{L-u}{L/2} \rightarrow w = 2 \left(1 - \frac{u}{L} \right) \right\|$$

$$\textcircled{3} \left\| V = \frac{w_0}{L} (L-u)^2 - \frac{w_0 L}{4} \right\|$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -M + \frac{w_0 L}{4} (L-u) - \frac{w_0}{L} \frac{(L-u)^3}{3} = 0$$

$$\left\| M = \frac{w_0 L}{4} (L-u) - \frac{w_0}{3L} (L-u)^3 \right\| \textcircled{4}$$

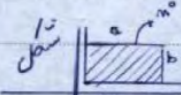
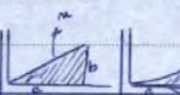


نقاط بحرانی نمودارهای مستطی و مثلثی

تیب نمودارهای مستطی و مثلثی: « نقاط شروع، انتها، اعظم، و افت درجه یک »

• نمودارهای تیب در مستطی و مثلثی در یک نقطه ... و با نمودارهای مستطی و مثلثی

• تیب M در نقطه تغییر بار با نمودار V همخوانی دارد

				
C	$\frac{a}{2}$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{3}{4}a$	$\frac{4}{5}a$
A	$a \cdot b$	$\frac{1}{2}ab$	$\frac{1}{3}ab$	$\frac{1}{4}ab$

شماره ۲۹۹ ۲۰۲۹

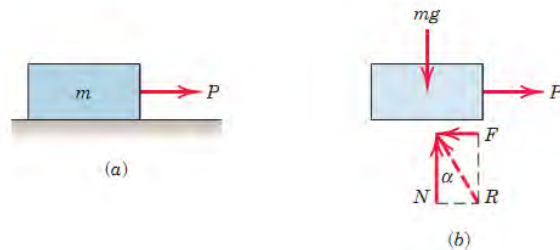
۱۳۵ ، ۱۳۱ ، ۱۲۷ ، ۱۲۲ ، ۱۱۸ ، ۱۱۳ ، ۱۱۲ ، ۱۱۰ ، ۱۰۶ ، ۱۰۳ ، ۹۷ ، ۹۳

9-10-23-51-53-60-61-73-89-93-104-105-106-110-113-117-128-130-133-137-145-151-

فصل ۶: اصطکاک

۶-۱ تعریف اصطکاک

نیروی اصطکاک و ضریب آن نیز مانند تمامی نیروها تنها بین دو جسم تعریف می‌شود. اصطکاک در همه مسائل وجود خواهد داشت اما گاهی برای سهولت در حل و یا مقدار اندک آن، از اصطکاک صرف نظر می‌شود. سیستمی که اصطکاک نداشته باشد را ایده آل می‌نامند. توجه شود که نیروی اصطکاک همواره در خلاف جهت حرکت اثر خواهد کرد. به شکل زیر توجه نمایید.



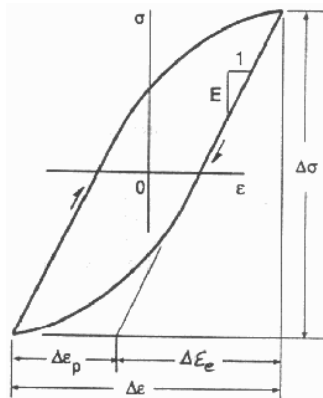
شکل ۶-۱: همواره نیروی اصطکاک در خلاف حرکت عمل می‌کند.

همواره نیروی اصطکاک موجب تلف شدن انرژی خواهد شد توجه شود که در اغلب مواقع این اتلاف خود را به صورت گرما نشان خواهد داد.

اصطکاک دو نوع می‌باشد که عبارت است از:

الف) **اصطکاک خشک (کولمب):** این اصطکاک بین دو جسم جامد به وجود می‌آید. علت این اصطکاک زبری بین سطوح است.

ب) **اصطکاک تر:** این اصطکاک در بین ذرات سیال رخ می‌دهد که عامل موثر در آن لزجت سیال است. نوع دیگری از اصطکاک وجود دارد که می‌توان آن را جز دسته اول تقسیم‌بندی نمود و آن اصطکاک داخلی است که در اثر بارگذاری سیکلیک در یک نمونه به وجود خواهد آمد و مقدار انرژی تلف‌شده در این حالت برابر سطح محصور در منحنی تنش کرنش ماده است که آن را منحنی هیستریزیس می‌نامند.



شکل ۶-۲: نمونه‌ای از یک منحنی هیستریزیس

در این درس تنها به اصطکاک خشک پرداخته می‌شود و مباحث مربوط به اصطکاک تر در درس مکانیک سیالات به تفصیل توضیح داده خواهد شد.

در زمان وجود اصطکاک در هنگام حرکت جسم سه مرحله وجود دارد که عبارت‌اند از: قیل از آستانه حرکت، آستانه حرکت و جسم در حال حرکت.

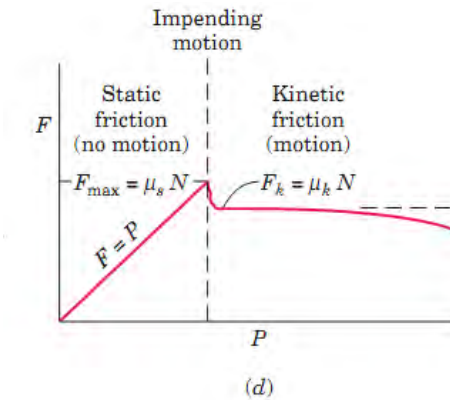
برای محاسبه نیروی اصطکاک در حالات بیان‌شده به جدول زیر توجه کنید.

قبل از آستانه حرکت بر اساس رابطه تعادل

$$F_f = \mu_s N \quad \text{آستانه حرکت}$$

$$F_f = \mu_k N \quad \text{در هنگام حرکت}$$

توجه شود که مقدار نیروی اصطکاک در آستانه حرکت برابر بیشینه نیرو تا قبل از آن است سپس با افت مقدار حالت بعد از حرکت شروع می‌شود به شکل زیر نگاه کنید.



شکل ۶-۳: منحنی نیروی اصطکاک بر اساس نیروی اعمالی

۶-۲ ضریب اصطکاک

حاصل تقسیم نیروی اصطکاک به نیروی عمودی سطح وارده را نیروی اصطکاک می‌نامیم.

$$\mu = \frac{F_f}{N}$$

ضریب اصطکاک تا قبل از آستانه حرکت متفاوت خواهد بود اما در آستانه حرکت آن را با μ_s (ضریب اصطکاک ایستایی) و در حین حرکت با μ_k (ضریب اصطکاک جنبشی) نمایش می‌دهند. مقدار μ_s از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mu_s = \frac{F_{f(\max)}}{N}$$

روش تشخیص نوع اصطکاک به صورت زیر است:

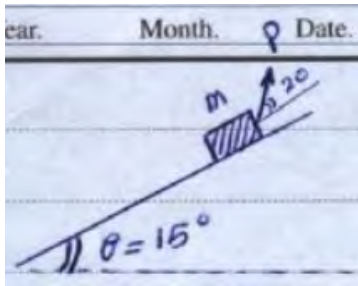
ابتدا با استفاده از معادله تعادل، نیرو اصطکاک را محاسبه می‌کنیم. یکی از سه حال زیر بروج می‌کند:

(الف) $F < \mu_s N$: آنگاه جسم قبل از آستانه لغزش است و مقدار اصطکاک برابر F است.

(ب) $F = \mu_s N$: آنگاه جسم در آستانه حرکت است. در این حالت نیز نیرو اصطکاک برابر F خواهد بود.

(ج) $F > \mu_s N$: جسم در حال حرکت بوده و نیروی اصطکاک جنبشی وجود دارد بنابراین $F = \mu_k N$ خواهد بود.

مثال: در شکل زیر اگر $m = 100 \text{ kg}$ ، $\mu_k = 0.2$ و $\mu_s = 0.3$ باشد به موارد زیر پاسخ دهید.

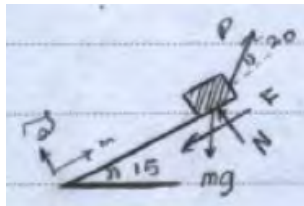


(الف) اگر $P = 200 \text{ N}$ باشد نیروی اصطکاک را به دست آورید.

(ب) مقدار نیروی P را بر آنکه حرکت آغاز شود محاسبه کنید.

(ج) اگر $P = 600 \text{ N}$ باشد آنگاه نیروی اصطکاک را به دست آورید.

پاسخ:



(الف)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -f + P \cos 20 - mg \sin 15 = 0$$

$$f = -66 \text{ N}$$

با توجه به آنکه مقدار منفی به دست آمد می‌توان دریافت که جسم قبل از آستانه حرکت و همچنین به سمت پایین بوده است.

(ب)

$$f_{\max} = \mu_s N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -f + P \cos 20 - mg \sin 15 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos 15 + P \sin 20 = 0$$

$$\therefore P = 516.33 \text{ N}, \quad N = 770.98 \text{ N}$$

ج)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -f + P \cos 20 - mg \sin 15 = 0 \Rightarrow f = 310 \text{ N}$$

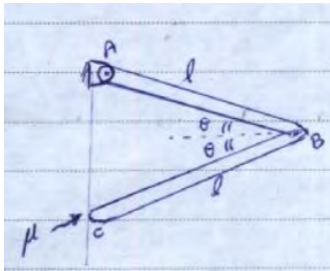
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos 15 + P \sin 20 = 0 \Rightarrow N = 742 \text{ N}$$

$$f_{\max} = \mu_s N = 0.3 \times 742 = 222.6 \text{ N}$$

با توجه به آنکه $f > f_{\max}$ به دست آمد پس جسم در حال حرکت است بنابراین:

$$f = \mu_k N = 0.2 \times 742 = 148.4 \text{ N}$$

مثال ۲: در سازه زیر اگر طول هر دو میله l و جرم آن‌ها m باشد آنگاه مقدار μ را طوری به دست آورید تا حرکت در $\theta > 10^\circ$ آغاز شود.



پاسخ:

$\sum M_A = 0 \Rightarrow +N(2l \sin \theta) - 2mg(l/2 \cos \theta) = 0$
 $N = \frac{1}{2} mg \cot \theta$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow N(l \sin \theta) - F(l \cos \theta) + mg(l/2 \cos \theta) = 0 \Rightarrow F = mg$

$F_{s \max} / N = \mu_s \Rightarrow F / N = \mu_s \Rightarrow \frac{2}{\cot 10} = \mu_s \Rightarrow \mu_s = 0.35$

SAMPLE PROBLEM 6/5

The three flat blocks are positioned on the 30° incline as shown, and a force P parallel to the incline is applied to the middle block. The upper block is prevented from moving by a wire which attaches it to the fixed support. The coefficient of static friction for each of the three pairs of mating surfaces is shown. Determine the maximum value which P may have before any slipping takes place.

Solution. The free-body diagram of each block is drawn. The friction forces are assigned in the directions to oppose the relative motion which would occur if no friction were present. There are two possible conditions for impending motion. Either the 50-kg block slips and the 40-kg block remains in place, or the 50- and 40-kg blocks move together with slipping occurring between the 40-kg block and the incline.

The normal forces, which are in the y -direction, may be determined without reference to the friction forces, which are all in the x -direction. Thus,

$$[\Sigma F_y = 0] \quad (30\text{-kg}) \quad N_1 - 30(9.81) \cos 30^\circ = 0 \quad N_1 = 255 \text{ N}$$

$$(50\text{-kg}) \quad N_2 - 50(9.81) \cos 30^\circ - 255 = 0 \quad N_2 = 680 \text{ N}$$

$$(40\text{-kg}) \quad N_3 - 40(9.81) \cos 30^\circ - 680 = 0 \quad N_3 = 1019 \text{ N}$$

We will assume arbitrarily that only the 50-kg block slips, so that the 40-kg block remains in place. Thus, for impending slippage at both surfaces of the 50-kg block, we have

$$[F_{\max} = \mu_s N] \quad F_1 = 0.30(255) = 76.5 \text{ N} \quad F_2 = 0.40(680) = 272 \text{ N}$$

The assumed equilibrium of forces at impending motion for the 50-kg block gives

$$[\Sigma F_x = 0] \quad P - 76.5 - 272 + 50(9.81) \sin 30^\circ = 0 \quad P = 103.1 \text{ N}$$

We now check on the validity of our initial assumption. For the 40-kg block with $F_2 = 272 \text{ N}$ the friction force F_3 would be given by

$$[\Sigma F_x = 0] \quad 272 + 40(9.81) \sin 30^\circ - F_3 = 0 \quad F_3 = 468 \text{ N}$$

But the maximum possible value of F_3 is $F_3 = \mu_s N_3 = 0.45(1019) = 459 \text{ N}$. Thus, 468 N cannot be supported and our initial assumption was wrong. We conclude, therefore, that slipping occurs first between the 40-kg block and the incline. With the corrected value $F_3 = 459 \text{ N}$, equilibrium of the 40-kg block for its impending motion requires

$$[\Sigma F_x = 0] \quad F_2 + 40(9.81) \sin 30^\circ - 459 = 0 \quad F_2 = 263 \text{ N}$$

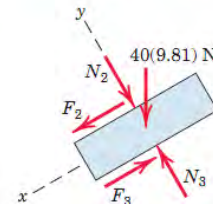
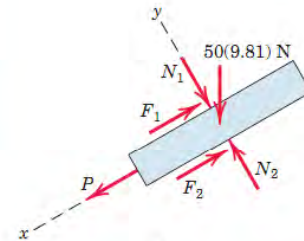
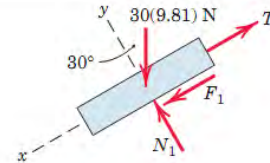
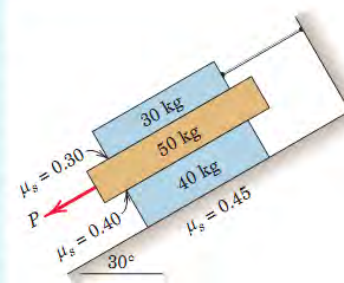
Equilibrium of the 50-kg block gives, finally,

$$[\Sigma F_x = 0] \quad P + 50(9.81) \sin 30^\circ - 263 - 76.5 = 0$$

$$P = 93.8 \text{ N}$$

Ans.

Thus, with $P = 93.8 \text{ N}$, motion impends for the 50-kg and 40-kg blocks as a unit.

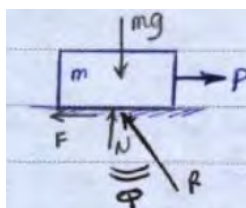


Helpful Hints

1 In the absence of friction the middle block, under the influence of P , would have a greater movement than the 40-kg block, and the friction force F_2 will be in the direction to oppose this motion as shown.

2 We see now that F_2 is less than $\mu_s N_2 = 272 \text{ N}$.

با توجه به شکل زیر داریم:

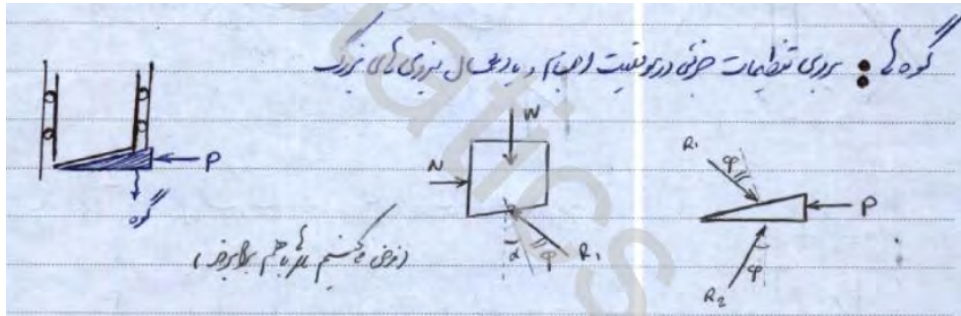


$$\tan \varphi_{\max} = \mu_s$$

$$\tan \varphi_k = \mu_k$$

φ زاویه اصطکاک داخلی (زاویه اصطکاک) با (نسبت قائم)

۳-۶ گوه‌ها



برای بالا رفتن:

برای جسم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 \cos(\alpha + \varphi) - w = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{W}{\cos(\alpha + \varphi)}$$

برای گوه:

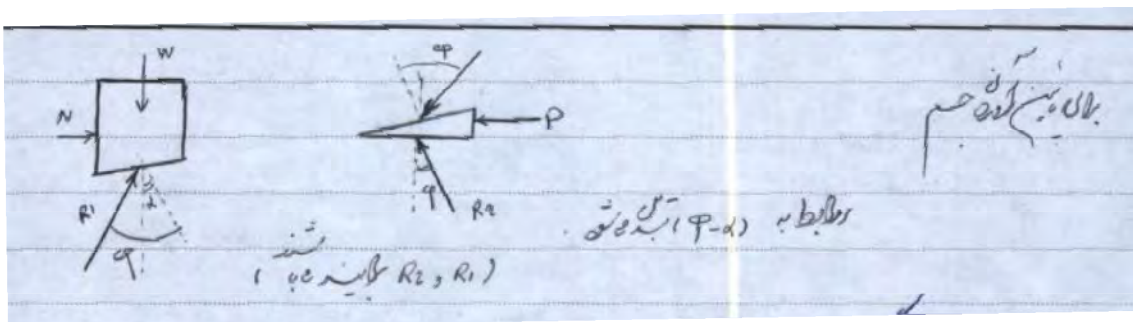
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_1 \cos(\alpha + \varphi) + R_2 \cos \varphi = 0$$

$$R_2 = \frac{W}{\cos \varphi}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P + R_1 \sin(\alpha + \varphi) + R_2 \sin \varphi = 0$$

$$-P + w \tan(\alpha + \varphi) + w \tan \varphi = 0 \Rightarrow P = w \left[\underbrace{\tan \varphi}_{\mu} + \tan(\alpha + \varphi) \right]$$

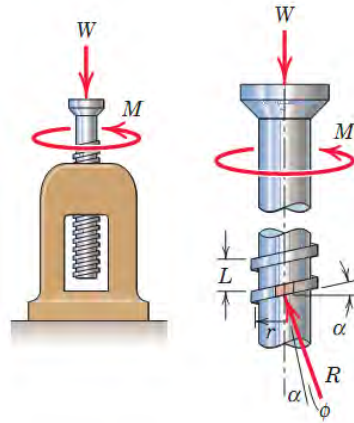
برای پایین آوردن:



$$R_1 = \frac{W}{\cos(\alpha - \varphi)} \quad R_2 = \frac{W}{\cos \varphi} \quad P = w \left[\underbrace{\tan \varphi}_{\mu} + \tan(\alpha - \varphi) \right]$$

۴-۶ پیچ‌ها

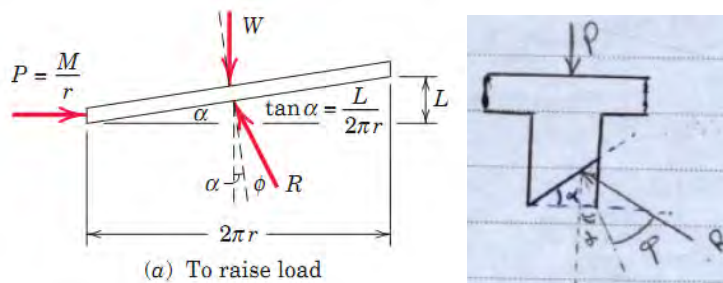
برای دو منظور به کار می‌روند مورد اول اتصال و مورد دوم انتقال قدرت می‌باشد. پیچ‌هایی که برای انتقال قدرت به کار می‌روند معمولاً دارای دندانه مربعی هستند. مانند پیچ مورد استفاده در جک‌ها.



شکل ۴-۶: نمونه‌ای از یک پیچ و زوایای آن

در شکل بالا α را زاویه پیچ می‌نامند. در این بخش هدف آن است که به عنوان مثال چه گشتاوری به پیچ وارد کنیم تا بتواند نیروی W را بالا ببرد.

برای بالا رفتن:

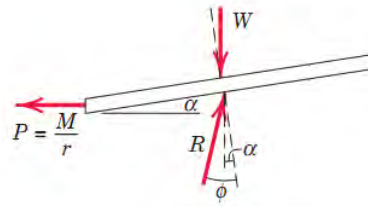
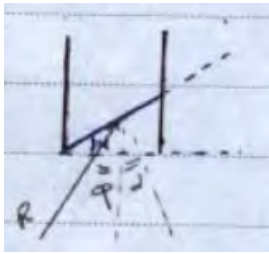
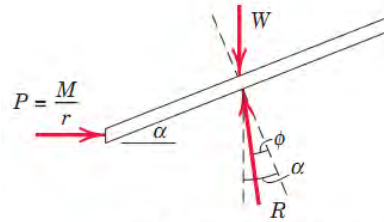


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R \cos(\alpha + \varphi) = P \Rightarrow R = \frac{P}{\cos(\alpha + \varphi)}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow R \sin(\alpha + \varphi) r = M \Rightarrow M = Pr \tan(\alpha + \varphi)$$

با توجه به رابطه بالا مشاهده می‌شود هر چه α بزرگ‌تر باشد، گشتاور بیشتری نیاز است. اما این نکته مد نظر باشد که انرژی مصرفی ثابت است به این معنا که اگر گشتاور اعمالی زیاد باشد جابجایی وزنه بیشتر و برعکس خواهد بود.

برای پایین آوردن:

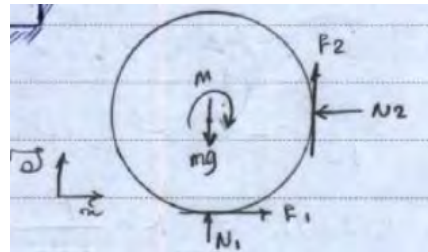
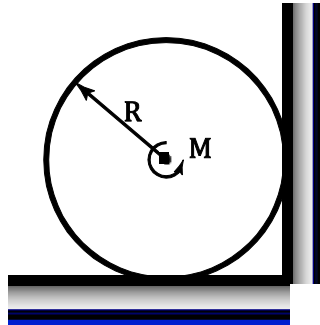

 (b) To lower load ($\alpha < \phi$)

 (c) To lower load ($\alpha > \phi$)

$$M = Pr \tan(\phi - \alpha)$$

اگر $\alpha < \phi$ باشد آنگاه سیستم خود قفل شونده خواهد بود.

بنابراین اگر $\mu = 0.1$ باشد آنگاه $\phi = 5.71^\circ$ خواهد بود پس اگر $\alpha < 5.71^\circ$ باشد، آنگاه پیچ خود قفل شونده خواهد بود.

مثال: اگر در استوانه زیر $m = 60\text{kg}$ ، $R = 0.3\text{m}$ و $\mu = 0.4$ باشد، آنگاه گشتاور لازم برای آنکه جسم دوران کند را به دست آورید.



$$f_1 = \mu N_1, \quad f_2 = \mu N_2$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_1 - N_2 = 0 \Rightarrow f_1 = \frac{f_2}{\mu}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 - mg + f_2 = 0 \Rightarrow \frac{f_1}{\mu} + f_2 = mg$$

$$f_2 = mg - \frac{f_1}{\mu} = mg - \frac{1}{\mu} \left(\frac{f_2}{\mu} \right) \Rightarrow f_2 = \frac{mg}{(1 + \mu^2)}$$

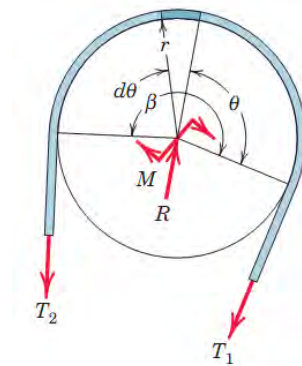
$$f_1 = \frac{f_2}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{mg}{(1 + \mu^2)} \right]$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow f_2 \cdot R + f_1 \cdot R - M = 0$$

$$M = 85.3 \text{ N.m}$$

۶-۵ اصطکاک تسمه و پولی

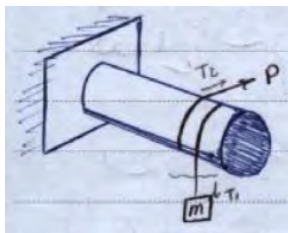
با توجه به شکل زیر می‌توان رابطه زیر را بین کشش طناب و اصطکاک به صورت زیر نوشت:



$$T_2 = T_1 e^{\mu \beta}$$

توجه شود در رابطه بالا، β بر حسب رادیان است.

مثال: در شکل زیر اگر $P = 5mg$ و طناب $1\frac{1}{4}$ دور زده باشد، μ را محاسبه کنید.



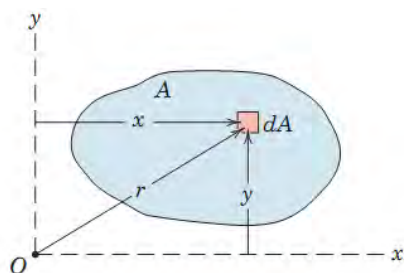
$$T_2 = T_1 e^{\mu \beta} \Rightarrow 5mg = mge^{\mu \left(2\pi \frac{5}{4} \right)} \Rightarrow \ln(5) = \mu \left(2\pi \frac{5}{4} \right) \Rightarrow \mu = 0.205$$

2-5-9-15-17-21-47-55-59-97-115-133

گشتاور ماند

۷-۱ تعریف

گشتاور ماند یکی از خواص هندسی سطح می باشد که در اغلب مسائل مکانیکی به خصوص مقاومت مصالح کاربرد دارد. همانگونه که از نام آن میتوان دریافت به نوعی گشتاور المان سطح است. بنابراین میتوان به رابطه گشتاور ماند را به صورت زیر بیان نمود. این خاصیت مانند گشتاور حول محور ها تعریف میشود بنابراین برای شکل زیر داریم:



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

از طرفی گشتاور ماند قطبی را نیز می توان به صورت زیر بیان نمود.

$$I_z = \int r^2 dA$$

با توجه به رابطه زیر

$$x^2 + y^2 = r^2$$

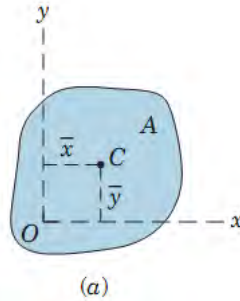
میتوان بدست آورد که

$$I_z = I_x + I_y$$

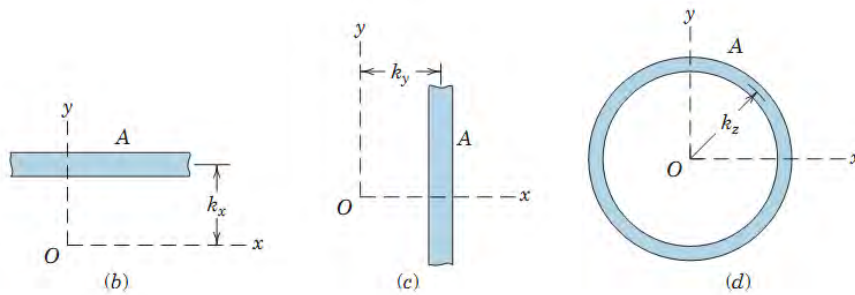
همانگونه که مشاهده میشود واحد گشتاور ماند طول به توان چهارم است.

۷-۲ شعاع ژیراسیون

اگر در شکل زیر گشتاور سطح را در نظر بگیریم میتوان مفهوم شعاع ژیراسیون را بیان نمود. اصل بر آن است که شکل را به صورت نوار باریک مسنطیلی موازی محور گشتاورگیری انتخاب نمود.



برای شکل با میتوان حول دو محور x و y گشتاور ماند را محاسبه نمود. حال اگر شکل بالا را به سه شکل زیر تبدیل کنیم میتوان شعاع ژیراسیون را به صورت روابط زیر بیان نمود.



$$I_x = k_x^2 A$$

$$I_y = k_y^2 A$$

$$I_z = k_z^2 A$$

or

$$k_x = \sqrt{I_x/A}$$

$$k_y = \sqrt{I_y/A}$$

$$k_z = \sqrt{I_z/A}$$

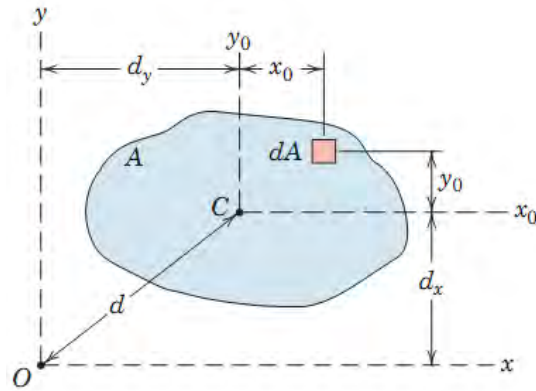
این مفهوم جهت ساده سازی بدست آوردن گشتاور ماند برای شکل های پیچیده است به این صورت که برای یک شکل پیچیده میتوان به داشتن شعاع ژیراسیون و مساحت آن، گشتاور ماند را محاسبه نمود. توجه شود رابطه زیر برای شعاع ژیراسیون نیز صادق است.

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$$

توجه شود مقدار گشتاور سطح همواره مثبت بوده و مقدار آن حول هر محور متفاوت خواهد بود.

۷-۳ جابجایی محورها

به دلیل ماهیت انتگرال گشتاور سطح محاسبه آن حول مرکز جرم اغلب آسانتر می باشد. اما گاهی نیاز است مقدار آن حول محور های غیر از آنکه از مرکز جرم عبور میکند محاسبه شود. در این موارد نیازی به محاسبه دوباره انتگرال نیست بلکه میتوان با استفاده از رابطه زیر محاسبات را انجام داد.



$$dI_x = (y_0 + d_x)^2 dA$$

$$I_x = \int y_0^2 dA + 2d_x \int y_0 dA + d_x^2 \int dA$$

بنابراین

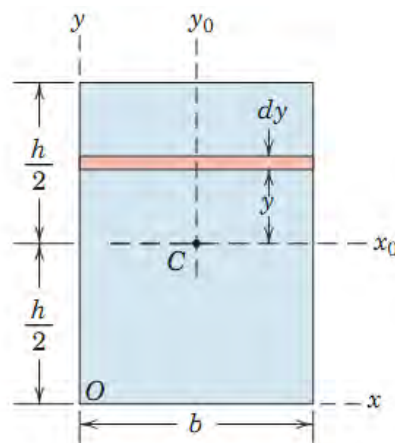
$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_x + Ad_x^2 \\ I_y &= \bar{I}_y + Ad_y^2 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب

$$I_z = \bar{I}_z + Ad^2$$

علامت (بار) در روابط بالا نشانگر گشتاور ماند حول محور های گذرنده از مرکز جرم است.

مثال ۱: گشتاور اینرسی را ابتدا حول محور های گذرنده از مرکز سطح و سپس محور های گذرنده از گوشه شکل زیر را بدست آورید.



$$[I_x = \int y^2 dA] \quad \bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{1}{12} b h^3 \quad \text{Ans.}$$

By interchange of symbols, the moment of inertia about the centroidal y_0 -axis is

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} h b^3 \quad \text{Ans.}$$

The centroidal polar moment of inertia is

$$[\bar{I}_z = \bar{I}_x + \bar{I}_y] \quad \bar{I}_z = \frac{1}{12} (b h^3 + h b^3) = \frac{1}{12} A (b^2 + h^2) \quad \text{Ans.}$$

By the parallel-axis theorem the moment of inertia about the x -axis is

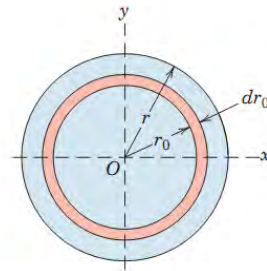
$$[I_x = \bar{I}_x + A d_x^2] \quad I_x = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b h^3 = \frac{1}{3} A h^2 \quad \text{Ans.}$$

We also obtain the polar moment of inertia about O by the parallel-axis theorem, which gives us

$$[I_z = \bar{I}_z + A d^2] \quad I_z = \frac{1}{12} A (b^2 + h^2) + A \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_z = \frac{1}{3} A (b^2 + h^2) \quad \text{Ans.}$$

مثال ۲: گشتاور ماند و شعاع ژیراسون را برای شکل زیر بیابید.



$$[I_z = \int r^2 dA] \quad I_z = \int_0^r r_0^2 (2\pi r_0 dr_0) = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2} A r^2 \quad \text{Ans.}$$

The polar radius of gyration is

$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}} \right] \quad k_z = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{Ans.}$$

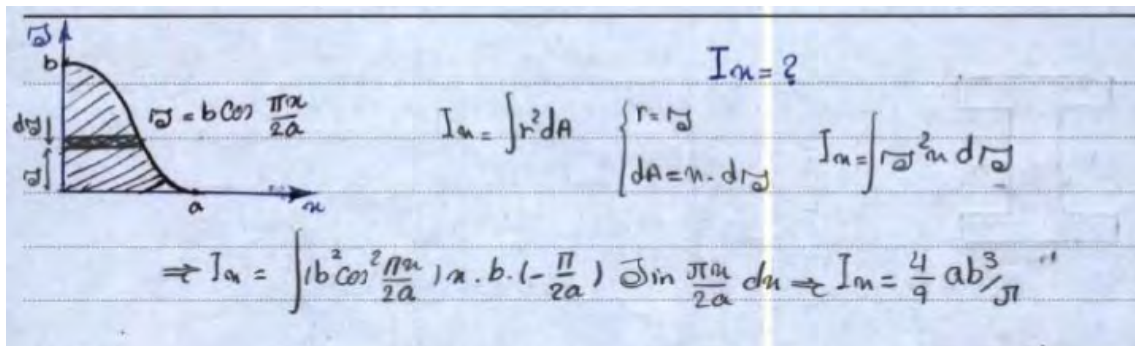
By symmetry $I_x = I_y$, so that from Eq. A/3

$$[I_z = I_x + I_y] \quad I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{1}{4} A r^2 \quad \text{Ans.}$$

The radius of gyration about the diametral axis is

$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}} \right] \quad k_x = \frac{r}{2} \quad \text{Ans.}$$

مثال ۳:



۷-۴ گشتاور ماند سطوح مرکب

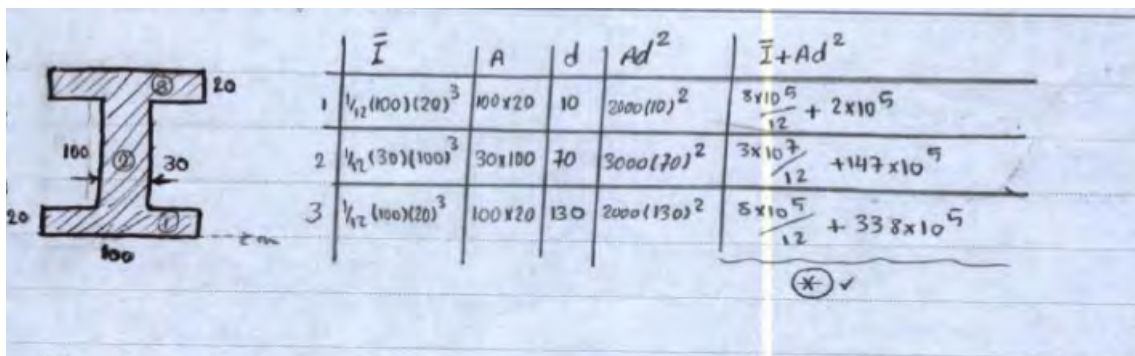
مانند یافتن مرکز سطح در فصل پنجم میتوان گشتاور ماند را نیز برای اجسام مرکب به صورت تبدیل انتگرال به مجموع محاسبه نمود.

Part	Area, A	d_x	d_y	Ad_x^2	Ad_y^2	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$
Sums	ΣA			ΣAd_x^2	ΣAd_y^2	$\Sigma \bar{I}_x$	$\Sigma \bar{I}_y$

$$I_x = \Sigma \bar{I}_x + \Sigma Ad_x^2$$

$$I_y = \Sigma \bar{I}_y + \Sigma Ad_y^2$$

تمامی نکات مربوط به اجسام مرکب در مورد یافتن مرکز سطح در مورد گشتاور اینرسی نیز صادق است. به مثال زیر توجه کنید.



۷-۵ حاصلضرب ماند

این خاصیت سطح به صورت زیر بیان میگردد.

$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

رابطه انتقال برای حاصلضرب ماند نیز برابر است با:

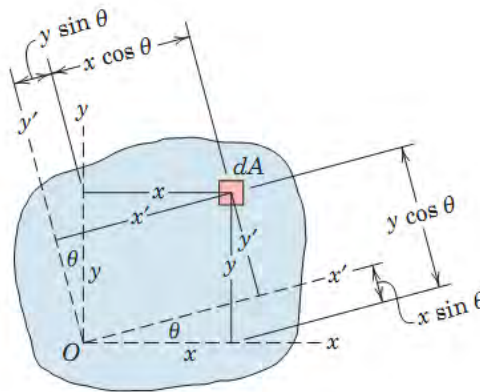
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A$$

توجه شود این مورد میتواند مثبت، منفی و حتی صفر نیز بدست آید.

اگر حداقل یکی از محور ها، محور تقارن باشد آنگاه گشتاور سطح صفر خواهد بود.

۷-۶ دوران محورهای مختصات

گاهی نیاز است مقدار گشتاور ماند حول محور هایی نسبت به محور اولیه دوران یافته است بدست آید در آن حالت میتوان با استفاده از رابطه زیر مقدار گشتاور ماند را حول محور دوران یافته بدست آورد.



$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

در بین تمامی محور ها، محوری وجود دارد که گشتاورهای ماند حول آن بیشینه است این محور ها را محور اصلی می نامند. در محور های اصلی، حاصلضرب ماند برابر صفر است. مقدار گشتاورهای ماند بیشینه به

صورت زیر محاسبه میشود.

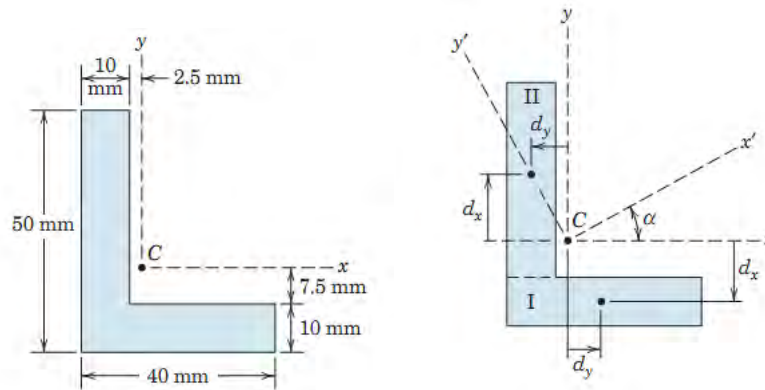
$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

زاویه دورا بحرانی نیز برای یافتن محور های بیشینه به صورت زیر بدست می آید.

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

مثال:



Products of Inertia. The product of inertia for each rectangle about its centroidal axes parallel to the x - y axes is zero by symmetry. Thus, the product of inertia about the x - y axes for part I is

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \quad I_{xy} = 0 + (-12.5)(+7.5)(400) = -3.75(10^4) \text{ mm}^4$$

where $d_x = -(7.5 + 5) = -12.5 \text{ mm}$

and $d_y = +(20 - 10 - 2.5) = 7.5 \text{ mm}$

Likewise for part II,

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \quad I_{xy} = 0 + (12.5)(-7.5)(400) = -3.75(10^4) \text{ mm}^4$$

where $d_x = +(20 - 7.5) = 12.5 \text{ mm}$, $d_y = -(5 + 2.5) = -7.5 \text{ mm}$

For the complete angle,

$$I_{xy} = -3.75(10^4) - 3.75(10^4) = -7.5(10^4) \text{ mm}^4$$

Moments of Inertia. The moments of inertia about the x - and y -axes for part I are

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \quad I_x = \frac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(12.5)^2 = 6.58(10^4) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(10)(40)^3 + (400)(7.5)^2 = 7.58(10^4) \text{ mm}^4$$

and the moments of inertia for part II about these same axes are

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \quad I_x = \frac{1}{12}(10)(40)^3 + (400)(12.5)^2 = 11.58(10^4) \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(40)(10)^3 + (400)(7.5)^2 = 2.58(10^4) \text{ mm}^4$$

Thus, for the entire section we have

$$I_x = 6.58(10^4) + 11.58(10^4) = 18.17(10^4) \text{ mm}^4$$

$$I_y = 7.58(10^4) + 2.58(10^4) = 10.17(10^4) \text{ mm}^4$$

Principal Axes. The inclination of the principal axes of inertia is given by Eq. A/10, so we have

$$\left[\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right] \quad \tan 2\alpha = \frac{2(-7.50)}{10.17 - 18.17} = 1.875$$

$$2\alpha = 61.9^\circ \quad \alpha = 31.0^\circ \quad \text{Ans.}$$

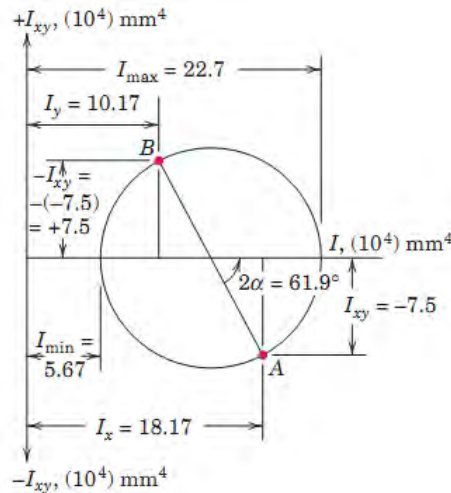
We now compute the principal moments of inertia from Eqs. A/9 using α for θ and get $I_{\max}$ from $I_{x'}$ and $I_{\min}$ from $I_{y'}$. Thus,

$$I_{\max} = \left[\frac{18.17 + 10.17}{2} + \frac{18.17 - 10.17}{2} (0.471) + (7.50)(0.882) \right] (10^4)$$

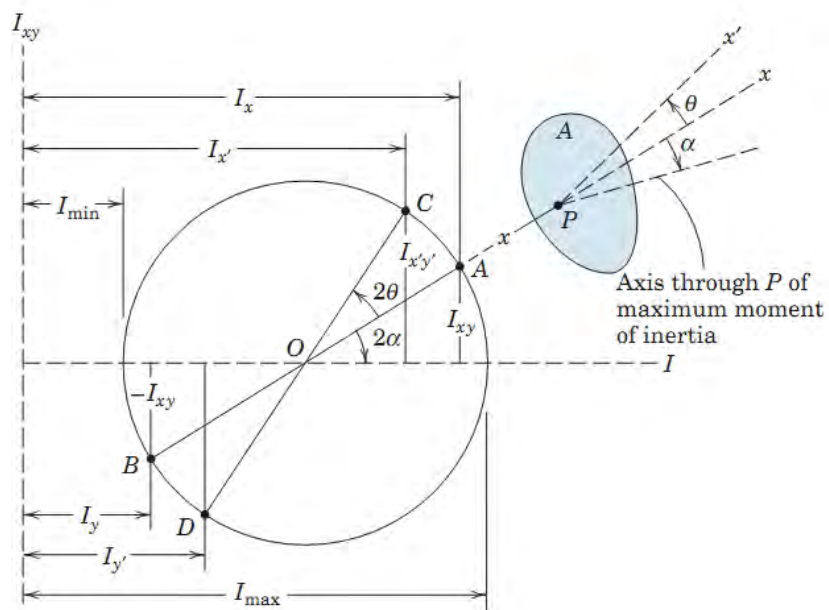
$$= 22.7(10^4) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans.}$$

$$I_{\min} = \left[\frac{18.17 + 10.17}{2} - \frac{18.17 - 10.17}{2} (0.471) - (7.50)(0.882) \right] (10^4)$$

$$= 5.67(10^4) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans.}$$



۷-۷ دایره موهر



$$(1) \left| \begin{matrix} I_x \\ I_{xy} \end{matrix} \right|, \quad (2) \left| \begin{matrix} I_y \\ -I_{xy} \end{matrix} \right|$$