

جزوه

انتقال حرارت

- ✓ شامل جزوات آموزشی درس انتقال حرارت
- ✓ ویژه آزمون های استخدامی و اخذ مدرک

لینک های مفید آزمون های استخدامی

خرید سوالات بانکدار ساختمان (مکانیک) بانک سینا	سوالات رایگان بانک سینا با پاسخنامه
خرید سوالات مکانیک بانک رفاه	سوالات رایگان بانک رفاه با پاسخنامه
خرید سوالات بانک سینا	خرید سوالات بانک رفاه
شبکه های اجتماعی ایران عرضه (فایل های رایگان + تخفیفات هفتگی + اخبار)	

(برای مشاهده هر بخش روی آن بزنید )

فهرست مطالب

- ❖ فصل اول: خلاصه انتقال حرارت ۱ - صفحه ۴
- ❖ فصل دوم: خلاصه انتقال حرارت به کوشش کاظم زاده - صفحه ۱۱۴
- ❖ فصل سوم: خلاصه فرمول های انتقال حرارت به کوشش خداکرمی - صفحه ۲۱۹



جزوه درس انتقال حرارت (I)

Heat and Mass Transfer

سرفصل‌ها:

- Chapter(1): مقدمه
- Chapter(2): رسانش
- Chapter(3): رسانش یک بعدی در حالت پایا
- Chapter (4): معادله حرارتی حالت دو بعدی
- Chapter(5): رسانش گذرا
- Chapter(6): جابه‌جایی
- Chapter(7): جریان خارجی
- Chapter(8): جریان داخلی
- Chapter(11): مبدل‌های حرارتی

به نام خدا

References:

منابع:

- 1) Introduction to meat Transfer Incropera
- 2) Basic of Heat Transfer y.A.cengel
- 3) Meat Transfer Holman

نمره شامل دو قسمت:

1) مفهومی (تعاریف - استنباطی - نتیجه گیری) 8 نمره

2) مسائل (12 نمره)

3) 2 نمره تشویق تحقیقاتی در زمینه های:

- 1) TEMA
- 2) EES: Engineering Equation Solver حل کننده معادلات مهندسی نرم افزار
- 3) Ansys
- 4) Aspen B.jac

Chapter 1

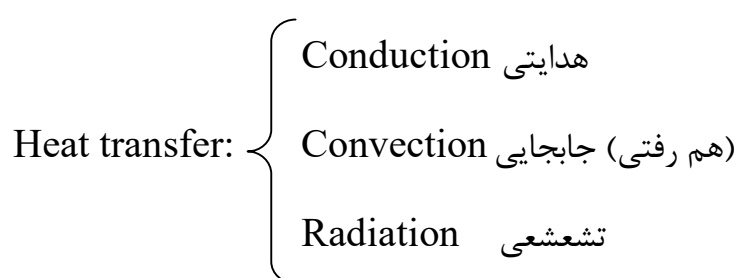
تفاوت ترمودینامیک با انتقال حرارت:

در ترمودینامیک در مورد سیستم‌های در حال تعادل بحث می‌کند و بحثی در مورد نرخ و یا مکانیزم را به ما نمی‌دهد. ولی در انتقال حرارت هم در مورد نرخ و هم در مورد مکانیزم بحث می‌شود.

چه موقع انتقال حرارت بوجود می‌آید؟

وقتی بین دو نقطه یا دو ماده اختلاف دمایی وجود داشته باشد یا اصطلاحاً گرادیان دما بوجود می‌آورند مثل اینکه در سیالات جریان در اختلاف فشار بوجود می‌آید.

انواع مکانیزم انتقال حرارت:

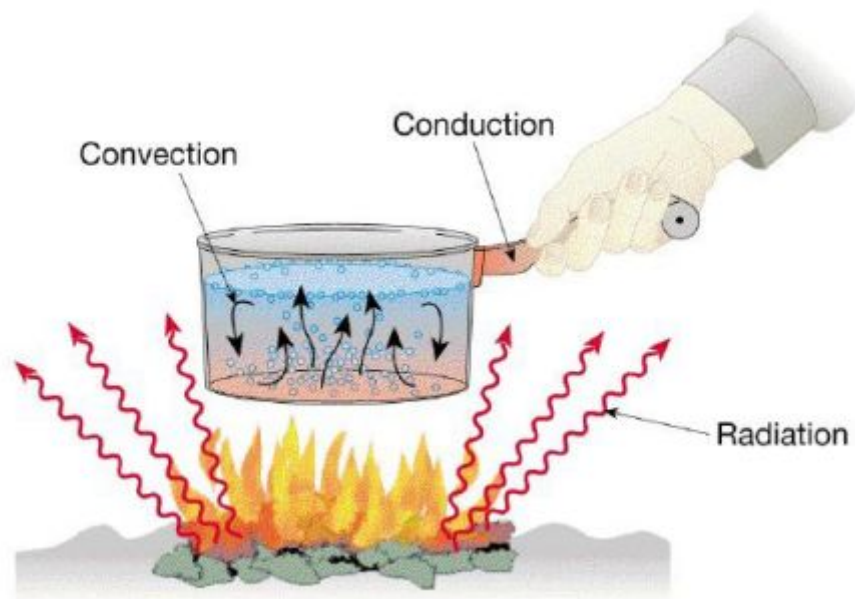


Conduction: در جامدات و سیالات ساکن بوجود می‌آیند پس نیاز به محیط مادی دارد.

Convection: زمانی بوجود می‌آید که یک سیالی متحرکی روی یک سطحی حرکت کند.

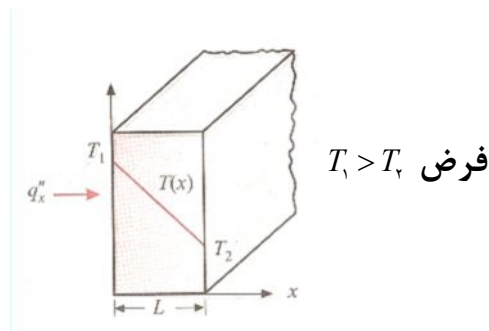
و نیاز به محیط مادی دارد.

Radiation: بین هر دو سطح که اختلاف دما دارند همیشه تشعشع صورت می گیرد و نیاز به محیط مادی واسطه ندارد و مکانیزم آن به صورت امواج الکترومغناطیسی است یا photon.



انتقال حرارتی هدایتی: Conduction

طبق قانون دوم ترمودینامیک (نظریه کلازیوس) که همیشه انتقال حرارت از دمای بیشتر به دمای کمتر اتفاق می افتد.



انتقال گرمای رسانشی یک بعدی (پخش انرژی)

$$\dot{q} = \alpha A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

A: cross sectional Area (سطح عمود بر جهت جریان) رابطه مستقیم

ΔT : با اختلاف دما رابطه مستقیم

Δx : با فاصله رابطه عکس:

K : Thermal conductivity ($\frac{W}{m.K}$)

k منفی بخاطر اینکه $\Delta T, \Delta x$ از نظر علامت مختلف علامت هستند می گذاریم:

$$q_x = -KA \frac{dT}{dx} \quad (\text{kw}) \quad \text{قانون فوریه}$$

$\dot{q}_x$ = Rate of Heat transfer in x Direction x جهت در حرارت

$\frac{dT}{dx}$: گرادیان دما در جهت x

اگر عمود نباشد پس مؤلفه‌ای دارد که انتقال حرارت در آن از برهان خلف مؤلفه وجود ندارد پس همیشه انتقال حرارت عمود بر سطوح ایزوترم است.

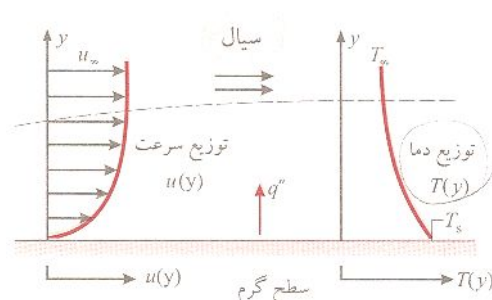
$$q'' = \frac{q_x}{A} \quad , \quad q'' = \frac{q}{A} \left(\frac{kw}{m^2} \right) \quad q'': \text{Heat flux} \quad \text{شار حرارتی}$$

$$\text{Assumption } k = \text{constant} \Rightarrow q'' = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} i + \frac{\partial T}{\partial y} j + \frac{\partial T}{\partial z} k \right)$$

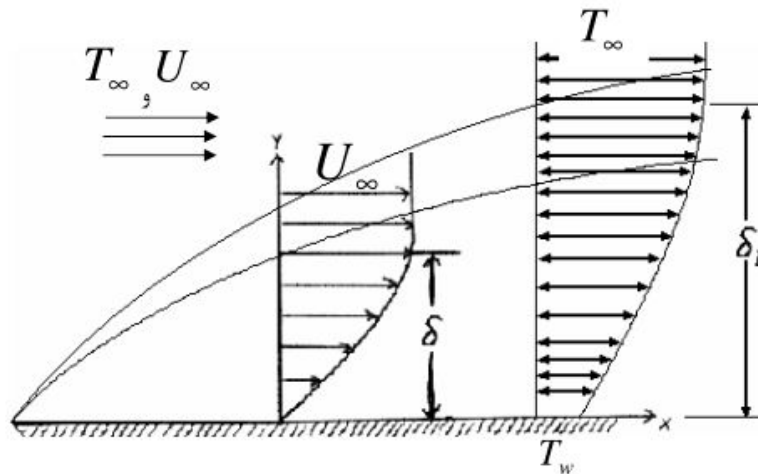
↑ شکل سه بعدی قانون فوریه

$$q'' = -k \vec{\nabla} T = -k \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

جابجایی: $Convection$



گسترش لایه مرزی در انتقال گرمای جابه‌جایی



انتقال حرارت جابجایی

انواع جابه‌جایی:

Convection: {
 Forced convection
 Free (Natural) Convection

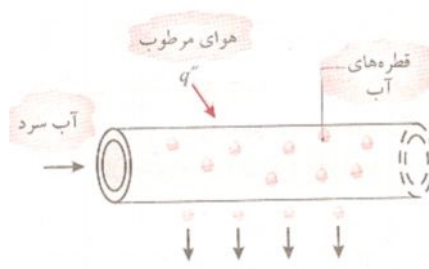
Forced convection: زمانی بوجود می‌آید که جابجایی توسط یک عامل خارجی مثل فن

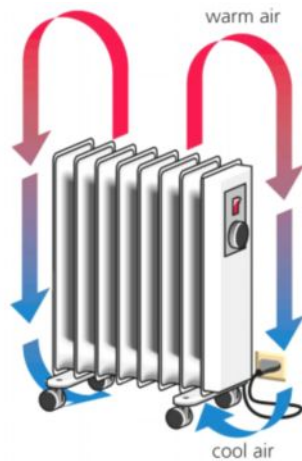
یا پمپ یا باد ایجاد شود مثل رادیاتور ماشین، خنک کردن تجهیزات کامپیوتر.

Free convection: انتقال به شکل طبیعی یا آزاد در اثر تغییرات چگالی و یا نیروی

شناوری بوجود می‌آید مثل شومافز

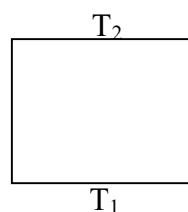
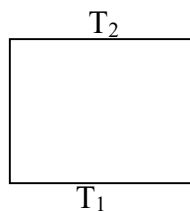
وقتی یک سیال گرم می‌شود چگالی آن کم می‌شود و سبک می‌شود و بالا می‌رود.





گرمایش هوا بوسیله نوعی بخاری برقی (مثالی از جابجایی آزاد)

اگر لباس را روی شوفاژ بگذاریم جلوی حرکت سیال را می گیرد و انتقال حرارت را پائین می آورد.



$T_1 > T_2$ *free convection*

condction

$T_2 > T_1$

چون $T_2 > T_1$ و سیال گرم تمایل دارد به سمت بالا برود در نتیجه به محفظه برخورد می کند.

چون $T_2 < T_1$ است سیال گرم پایین است و به راحتی به سمت بالا حرکت می کند.

همیشه انتقال حرارت Force به وسیله عامل خارجی از Free خیلی بیشتر است.

مثال: کولر گازی

نقطه شبنم: (dew point)

دمایی که تحت آن در طی یک فرآیند فشار ثابت سرد بشود اولین نقطه ای که آب چگالیده

می شود نقطه شبنم است.

انتقال حرارت در جوشش و چگالش به شدت بالاست.

انتقال حرارت توسط قانون سرمایش نیوتن بیان می شود (Newton's law of cooling)

$$q \propto A(T_w - T_\infty)$$

$$\dot{q} = hA(T_w - T_\infty) \text{ ضریب انتقال حرارت جابجایی}$$

$$h: \begin{cases} \text{Geometry, Roughness} & \text{به شکل هندسی و زبری سطح} \\ \text{fluid properties} & \text{خواص سیال مثل } \rho, \mu, C_p, K \\ \text{flow condition} & \text{شرایط جریان} \end{cases}$$

* مقدار h (ضریب جابه جایی) برای انتقال حرارت بوسیله عامل خارجی (force) در مقایسه با حالت آزاد (free) خیلی بیشتر است.

$$h_{forced\ conr} > h_{free\ conrec}$$

$$h_{Boiling, condensation} > h_{forced\ cew.}$$

$$h: \text{film coefficient}$$

Heat transfer

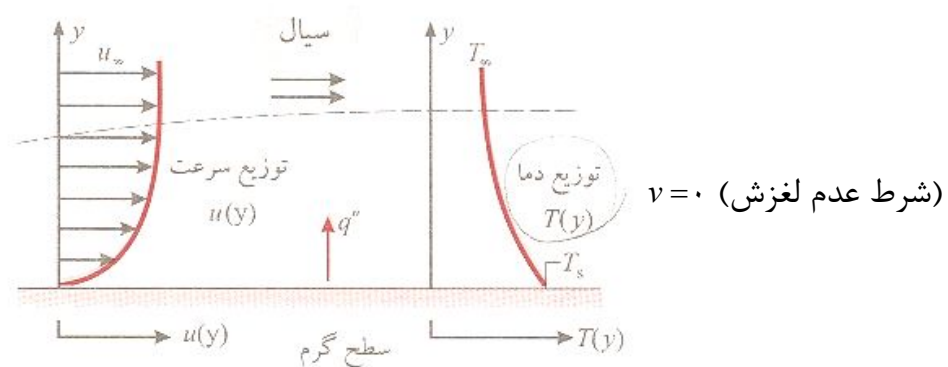
* conduction:

	(سیالات ساکن)	Diffusion (پخش مولکولی)
$\begin{cases} \text{gas \& fluid :} \\ \text{solid :} \end{cases}$		
	1. lattice vibration :	(ارتعاش شبکه ای)
	2. free electrons :	(الکتردهای آزاد)

* اگر سیال روی سطحی حرکت کند لایه مرزی به وجود می آید.

* Convection:

* برای انتقال حرارت جا به جایی حتماً باید سیال متحرکی داشته باشیم.



* در نزدیک سطح سرعت صفر است و انتقال حرارت توسط مکانیزم رسانش است.

convection { Diffusion: $(v = 0)$ نزدیک سطح
Bulk motion (Advection): حرکت توده‌ای سیال

نکات قانون فوریه:

1) قانون فوریه یک معادله برداری است و این معادله برای هر ماده‌ای صادق است حتی اگر شرایط مسئله غیرپایدار باشد.

$$q'' = -k \vec{\nabla} T \quad \text{قانون فوریه}$$

2) از مشاهده تجربی به دست آمده

3) حتی اگر منبع حرارتی وجود داشته باشد معادله صادق است.

* از لحاظ مکانیزم سرعت سریع‌ترین نوع انتقال حرارت Radiation می‌باشد. و این انرژی توسط امواج Electromagnetic (Photon) منتقل می‌شود.

$$\text{قانون Stefan-Boltzmann: } Q''_{emit, max} = \sigma T_s^4$$

* دما باید حتماً باید به صورت مطلق باشد یعنی کلوین یا رانکین:

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

$Q'' = \varepsilon \sigma T_s^e$: انرژی یک سطح واقعی صادر می کند ε : emissivity of surface

ماده ای که ماکزیمم انرژی را از خود صادر کند. $\Rightarrow$ (جسم سیاه) : Black Body

$$\varepsilon = 1$$

به عبارت دیگر جسم سیاه جسمی است که تمام انرژی داده شده به آن را جذب می کند.

$$q_{1-2} = \sigma \varepsilon A_1 F_{12} (T_1^e - T_2^e)$$
 : انرژی تشعشعی که از جسم 1 به جسم 2 می رسد.

F_{12} : shape(view) factor

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \iint_{A_1} \iint_{A_2} \frac{\cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_j \cdot dA_i$$

K: ضریب هدایت گرمایی:

$$q'' = -k \vec{\nabla} T \quad k : \text{Thermal conductivity}$$

در حالت کلی: $K_{solid} > K_{liquid} > K_{gas}$

n: تعداد مولکول ها بر واحد حجم

c: سرعت متوسط مولکول های گاز

$$k_{gas} \propto n \bar{C} \lambda$$

λ : متوسط فاصله ای که مولکولها به هم برخورد می کنند.

$$c, \mu, k \propto \sqrt{T} \quad C = \sqrt{KRT}$$

(1) k با جرم مولکولی نسبت عکس دارد.

$$K_{Hz} > K_{He} > K_{Air} > K_{R-12}$$

(2) k_{gas} با فشار ارتباطی ندارد چون λ کم می شود و n بالا می رود و این دو اثر هم را خنثی

می کنند.

مقایسه k مربوط به بعضی از گازها:

(3) k مایعات مانند k گازها تحلیل می شوند.

(4) k گازها و مایعات با افزایش دما افزایش می یابد.

k: مواد جامد به ارتعاش شبکه مولکول و الکترون های آزاد بستگی دارد.

$$K_{solid} \begin{cases} lattice\ vib(k_l) \\ free\ elect:(k_e) \end{cases} k_{solid} = k_l + k_e$$

(5) هر چه شبکه مولکولی منظم تر باشد k بیشتری دارد. بالاترین k موجود k الماس است.

	$k(w/m.k)$
Diamond	2300
Copper	430
Iron	80.2
water	0.613
Air	0.02

$$K_{crystal\ diamond} > K_{Pure\ metal} > K_{Alloy\ metal} > K_{liquid} > K_{insulation} > k_{gas}$$

در حالت کلی

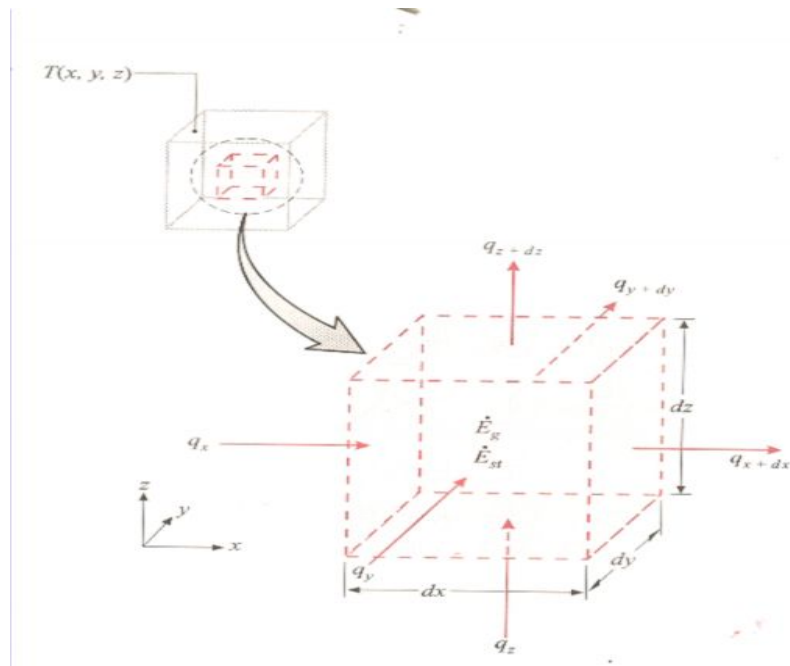
$$k_{روغن} > k_{آب}$$

در مایع ها

مقایسه k مربوط به فلزها

$$k_{copper} > k_{al\ min\ am} > k_{carbon\ steel} > k_{stainless\ steel}$$

Heat conduction Equation:



حجم کنترل دیفرانسیلی $dx dy dz$ برای تحلیل رسانش در مختصات کارتزین

$\dot{E}_G$: انرژی تولیدی بر واحد حجم مثلاً انرژی الکتریکی، شیمیایی یا هسته‌ای به انرژی حرارتی تبدیل شود.

* روش به دست آوردن معادله انتقال حرارت هدایتی

The first law of Thermodynamic (conservation of Energy principle):

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \Delta \dot{E}_{system} \quad (1)$$

$$\dot{E}_{in} = \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z, \quad \dot{E}_{out} = \dot{q}_{x+dx} + \dot{q}_{y+dy} + \dot{q}_{z+dz}$$

$$= \left(\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \right) + \left(\dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy \right) + \left(\dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz \right)$$

$$\dot{E}_G = \dot{q}_G \cdot d_x d_y d_z \quad \dot{q}_G = \text{Heat Generation : per unit volume} \quad \text{انرژی تولیدی بر واحد حجم}$$

$$\Delta \dot{E}_{sys} = m C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho C_p d_x d_y d_z \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$C_v = C_p \quad (\text{جسم جامد})$$

$$\dot{q}_x = -k d_y d_z \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \dot{q}_y = -k d_x d_z \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \dot{q}_z = -k d_x d_y \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz + \dot{q}_G \cdot d_x d_y d_z = \rho c_p dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t}$$

معادله انتقال حرارت در مختصات دکارتی (با مشتقات جزئی)

Assumption: $K = \text{constant} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \left(\alpha \uparrow = \frac{k \uparrow}{(\rho c_p) \downarrow} \right)$$

α : Thermal diffusivity (پخشندگی گرمایی)

ρc_p : (ظرفیت گرمایی حجمی)

α بالا: یعنی گرما سریع در ماده پخش می شود و ماده سریع تحت تأثیر تغییر دما قرار

می گیرد.

* گازها برای ذخیره انرژی مواد مناسبی نیستند چون α آنها کم است.

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{Div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\text{Div } (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{Laplasion}(T): \text{Div } [\vec{\text{grad}}(T)]$$

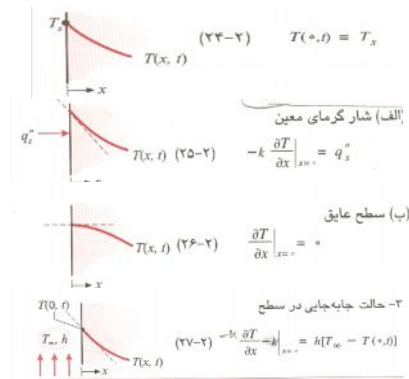
$$\Rightarrow \text{معادله انتقال گرما: } \nabla^2 T + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (k = \text{cte})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{q}_G = 0, \quad \nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} & \text{Fourier Equation (معادله فوریه)} \\ \text{steady} \Rightarrow \nabla^2 T + \frac{\dot{q}_G}{k} = 0 & \text{poisson Equation (معادله پواسون)} \\ \text{steady}, \dot{q}_G = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = 0 & \text{(معادله لاپلاس)} \end{array} \right.$$

$$\text{One-Dimensional: } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Boundary conditions:} \\ \text{Initial condition:} \end{array} \right.$$

$$\text{Boundary condition: } \begin{cases} 1 = \text{Dirichlet Condition} \\ T(0, t) = T_1 \\ 2 = \text{Newmann condition} \\ q''_{(0,t)} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \text{special case:} \\ q'' = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$



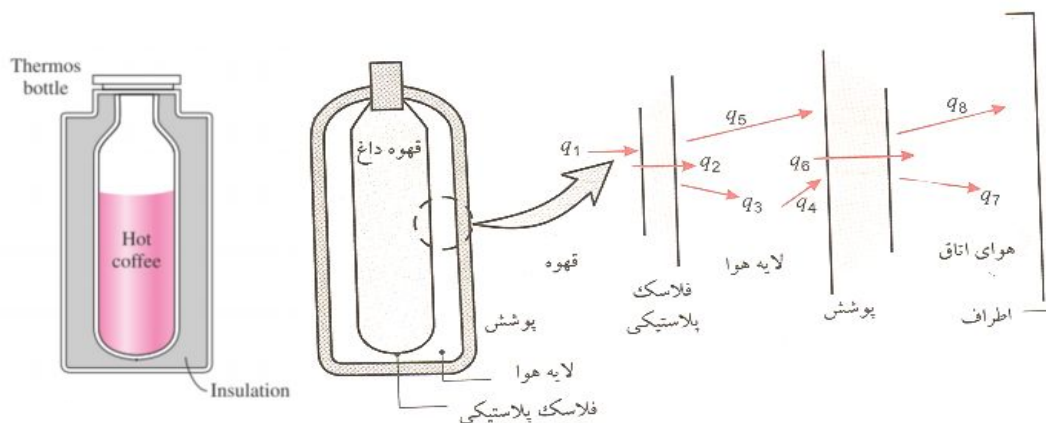
$$\begin{cases} \text{3} = \text{convection} \\ h(T_{\infty} - T_{conv,t}) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \text{4} = \text{radiation} \\ \epsilon \sigma (T_{\infty}^4 - T^4) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{cases}$$

(5) دو سطح در تماس با هم باشند.

$$\begin{cases} T_A(x, t) = T_B(x, t) \\ -k_A \frac{\partial T_A(x, t)}{\partial x} = -k_B \frac{\partial T_B(x, t)}{\partial x} \end{cases}$$

یک سطح نمی تواند انرژی را در خود حفظ کند قدر انرژی وارد می شود خارج می شود.
* اگر k_A و k_B با هم برابر باشند مشتق آنها با هم برابر است و مماس بر منحنی در نقطه مشترک آنها با هم برابرند.

مکانیزم انتقال حرارت از فلاسک چای به هوای بیرون:



$\dot{q}_1 = \text{natural Free convection (from tea to surface 1)}$ جابه جایی

رسانش از سطح 1 به سطح 2

$\dot{q}_2 : \text{conduction (through surface 1 to 2)}$ جابه جایی

تشعشع از سطح (2) به سطح (3)

$\dot{q}_3 : \text{Radiation (from surface 2 to surface 3)}$ جابه جایی

جابه جایی از سطح (2) به هوا (Air1)

$\dot{q}_4 : \text{natural convection (from surface 2 to Air 1)}$ جابه جایی

جابه جایی از Air1 به سطح (3)

$\dot{q}_5 : \text{natural convection (from Air 1 to Surface 3)}$ جابه جایی

رسانش از سطح (3) به سطح (4)

$\dot{q}_6 = \text{Conduction (through surface 3 to 4)}$ جابه جایی

تشعشع از سطح (4) به سطح (5)

$\dot{q}_7 : \text{Re diation from surface 4 to surface 5)}$ جابه جایی

جابه جایی از سطح (4) به Air2

$\dot{q}_8 : \text{Natural convection from surface 4 to Air 2}$

One-Dimensional: Heat conduction Equation:

In Cartesian:
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

In cylindrical:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

In spherical:
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \begin{cases} r = x, n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \end{cases}$$

*1) هدف از حل معادلات انتقال گرما بدست آوردن توزیع دما در زمان و مکان‌های مختلف

است و توزیع دما به ما کمک می‌کند که نرخ انتقال حرارت را به دست آوریم. $(\dot{q}, q'')$

2) با به دست آمدن توزیع دما تنش‌های حرارتی نیز به دست می‌آیند (Thermal stress)

3) با توزیع دما جابه‌جایی‌ها و کمانش را می‌توان حساب کرد. Displacement,

Buckling

4) به دست آوردن عایق مناسب: insulator:

5) انتخاب چسب‌های صنعتی Coating:

* حل معادله انتقال حرارت در مختصات دکارتی (کارتزین):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\xRightarrow[\text{no heat Generation}]{\text{steady state:}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

فرضیات: (1- یک بعدی، 2- پایدار، 3- بدون منبع حرارتی)

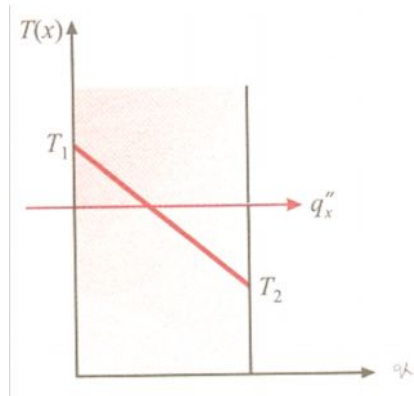
A: ثابت

K: ثابت

$$\frac{dT}{dx} = \text{constant} = C, \quad \dot{q}_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_x = \text{constant} \Rightarrow q_x'' = \frac{\dot{q}_x}{A} = \text{constant}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$



رابطه بین دستگاه مختصات، جهت جریان گرما و شیب دما در یک بعد

$$\text{قانون اول: } \dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{q}_x = \dot{q}_{x+dx} = \text{cte}$$

$$\frac{dT}{dx} = C \Rightarrow T = C_1 x + C_2 \Rightarrow \text{توزیع دما خطی است}$$

$$\text{قانون فوریه: } \dot{q}_x = -kA \frac{dT}{dx} \Rightarrow \dot{q}_x dx = -kA dT$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \dot{q}_x dx = \int_{T_1}^{T_2} -kA dT \Rightarrow \dot{q}_x (x_2 - x_1) = -kA (T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_x = \frac{kA(T_1 - T_2)}{\Delta x} \Rightarrow \dot{q}_x = \frac{T_1 - T_2}{\frac{l}{kA}}$$

* مقایسه جریان الکتریکی با جریان حرارتی:

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

R_t : Thermal Resistance

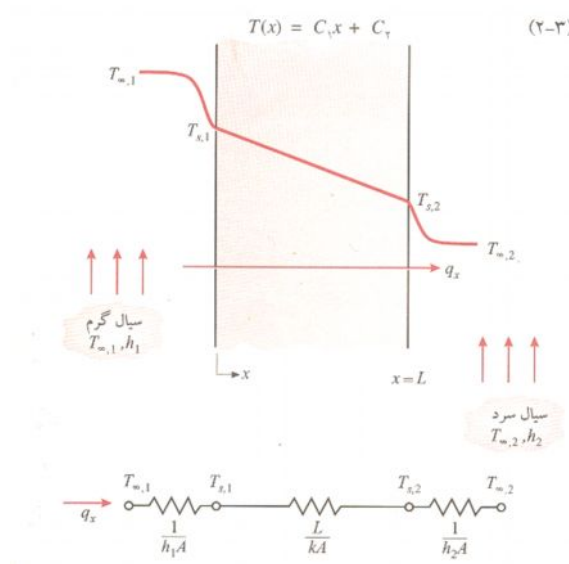
$$\begin{cases} \Delta V, I, R \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \Delta T, q, R_t \end{cases} \quad R_{t,cond} = \frac{l}{KA}$$

$$\text{Convection: } \dot{q} = hA\Delta T \rightarrow \dot{q} = \frac{\Delta T}{\left(\frac{1}{hA}\right)} \quad R_{t,conv} = \frac{1}{hA}$$

$$\text{Radiation: } q = \varepsilon\sigma A(T_{surr}^* - T_s^*) = \left[\varepsilon\sigma(T_{surr}^* + T_s^*)(T_{surr} + T_s) \right]^* A(T_{surr} - T_s)$$

$$R_{t,rad} = \frac{1}{hA_{rad}}$$

تحلیل مسئله:



انتقال گرما در دیوار مسطح (الف) توزیع دما (ب) مدار گرمایی معادل

$$R_1 = \frac{1}{h_1A}, R_2 = \frac{L}{kA}, R_3 = \frac{1}{h_2A}$$

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 \quad \text{Series Resistances}$$

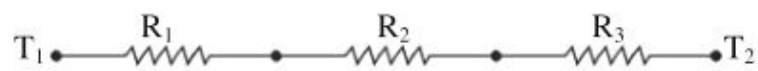
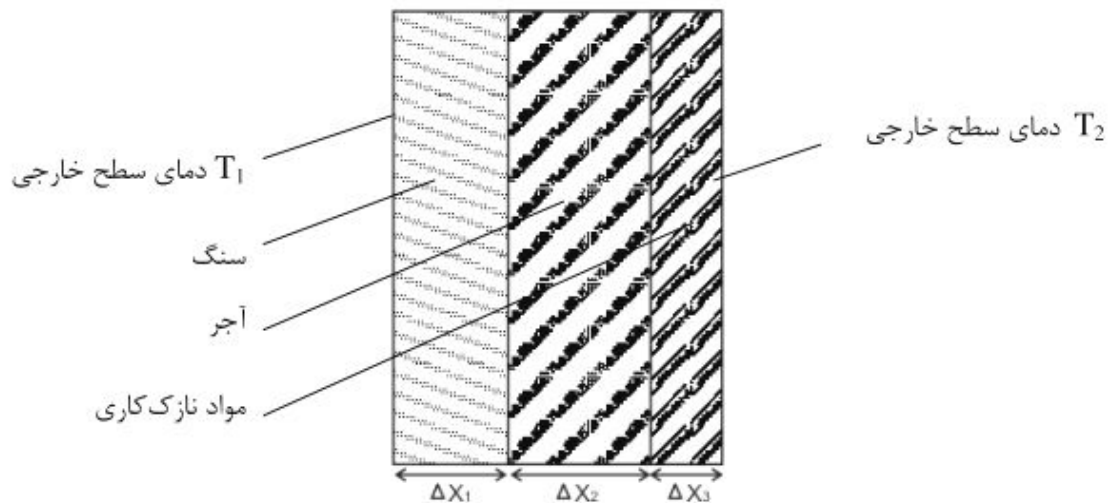
$$\dot{q}_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{tot}} = \frac{T_{\infty,1} - T_1}{R_1 + R_2} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \dots$$

Parallel Resistance:

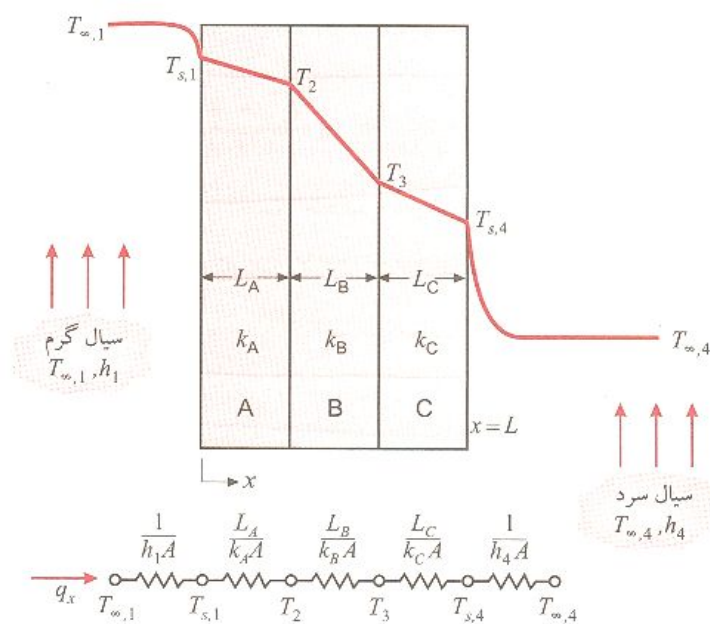
$$\dot{q} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \quad \dot{q} = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

دیوار مرکب:



انتقال حرارت از دیواره چند لایه

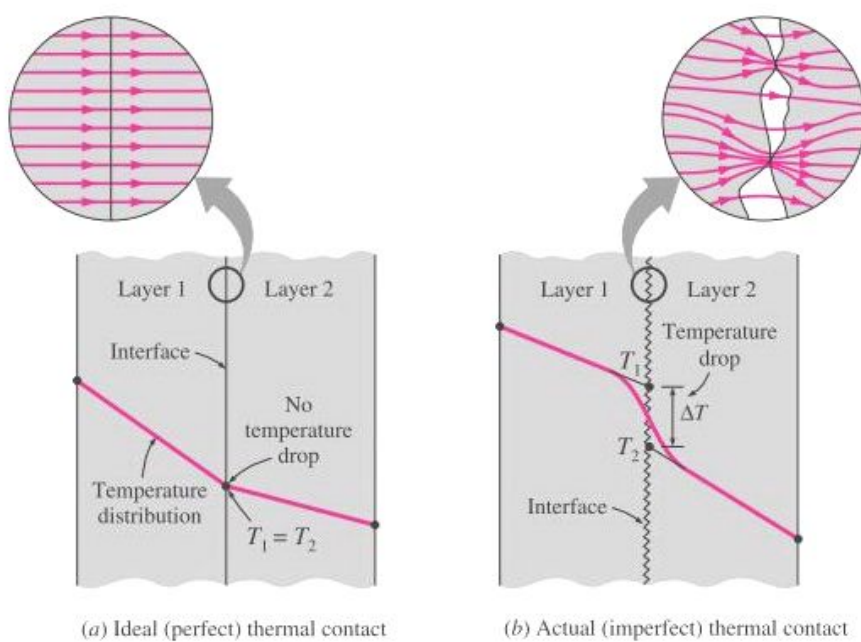
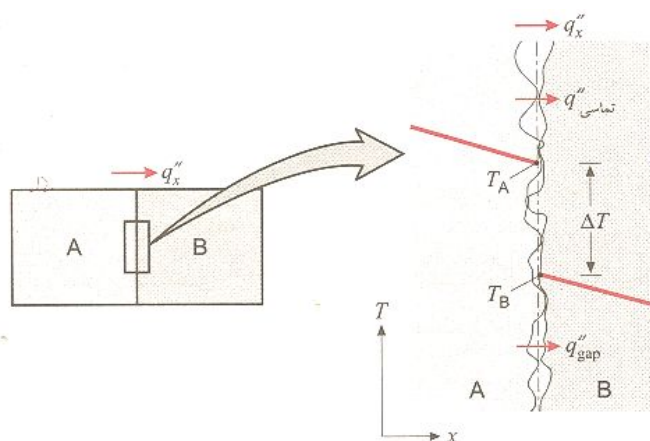


مدار گرمایی معادل برای دیوار مرکب سری

$$\dot{q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_t} \quad R_t = R_1 + R_r + R_r + R_r + R_\delta$$

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_r + R_r + R_r}$$

Thermal contact Resistance: مقاومت حرارتی سطح تماس



افت دما بر اثر مقاومت تماسی گرمایی

مقاومت سطح تماس به عوامل زیر وابسته است :

1- نوع سیال

2- زبری سطح

3- فشار

* هرچه زبری بیشتر باشد افت دما بیشتر می شود.

(1) در حالت واقعی چون بین دو سطح تماس سیالی وجود دارد و خود سیال مقاومت دارد بنابراین انتقال حرارت را کم می کند و از طرف دیگر k جامد همیشه از k سیال بیشتر است در نتیجه انتقال حرارت کمتر می شود.

(2) هرچه زبری دو سطح بیشتر باشد افت دما بیشتر می شود. چون مقاومت بیشتر می شود.

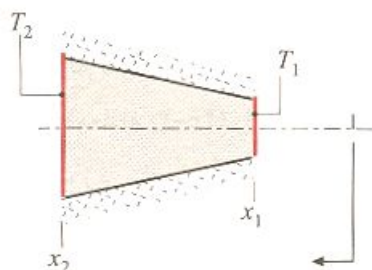
(3) هر چه سیال بین دو سطح دارای k کمتری باشد افت دما بیشتر می شود. (مقاومت بیشتر است) و افت دما بیشتر می شود.

(4) هرچه فشار سیال کمتر شود، Convection کمتر می شود در نتیجه افت دما بیشتر می شود.

$$R_{c,H_2} < R_{c,He} \Leftrightarrow k_{H_2} > k_{He}$$

$$k_{Air} < k_{oil} \Leftrightarrow R_{c,Air} > R_{c,oil}$$

سوال : اگر سیال که بین فصل مشترک قرار دارد اکسیژن باشد افت دما بیشتر وجود دارد یا نیتروژن؟



تابع توزیع دما در دیوار با سطح متغیر:

فرضیات: (1) بدون منبع حرارتی

(2) حالت پایدار

(3) دور آن عایق کاری شده است.

برای المان قانون اول را می نویسیم:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{dE}{dt}$$

$$\dot{q}_x = \dot{q}_{x+dx} \Rightarrow \dot{q}_x = constant, \quad \downarrow q'' = \frac{\dot{q}_x}{A} \uparrow$$

$$\downarrow q'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \downarrow$$

$$\dot{q}_x = -kA \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{\dot{q}_x \cdot dx}{A} = -k dT$$

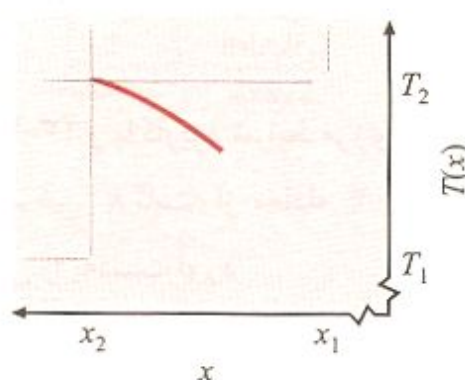
$$\Rightarrow \int_{x_1}^x \frac{\dot{q}_x \cdot dx}{A} = \int_T^{T_1} -k dT, \quad A = \frac{\pi d^2}{4}, d = ax$$

$$\frac{d_1}{x_1} = \frac{d_2}{x_2} = \frac{d}{x} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4} a^2 x^2$$

$$\Rightarrow \dot{q}_x / \pi a^2 \int_{x_1}^x \frac{dx}{x^2} = -k(T_1 - T)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{q}_x}{k \pi a^2} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} \right) = T - T_1$$

$$\Rightarrow T = T_1 + \frac{\dot{q}_x}{k \pi a^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} \right) \text{ تابع توزیع دما}$$

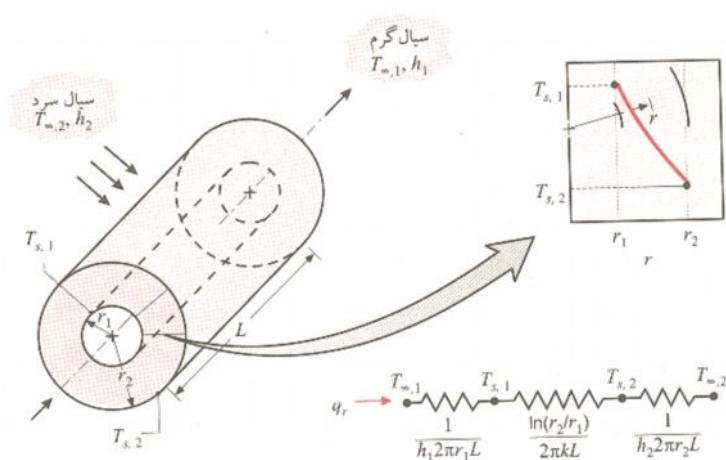


* با افزایش x ، شیب کم می شود. **Heat conduction in cylinder:**

معادله انتقال حرارت در استوانه ها:

Assumption: one-dimensional; no Heat Generation, steady states

انتقال حرارت فقط در راستای شعاع است.



استوانه توی خالی با شرایط جابه جایی در سطح

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}_G}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = C_1 \Rightarrow dT = \frac{C_1}{r} dr$$

$$\Rightarrow T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

* دما در سیستمهای استوانه‌ای براساس شعاع به شکل تابع لگاریتمی تغییر می‌کند. (توزیع

دما لگاریتمی است).

A: مساحت جانبی استوانه:

$$\dot{q}_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(\pi r l) \frac{dT}{dr} \Rightarrow \dot{q} = \text{constant}$$

نرخ انتقال حرارت ثابت است.

* یا افزایش شعاع شار حرارتی کم می‌شود.

$$\text{ثابت نیست} \rightarrow \frac{\dot{q}_r}{A} = q_r'' : \text{شار حرارتی}$$

* با افزایش شعاع، گرادیان دمایی کم می‌شود.

$$\uparrow r \frac{dT}{dr} = \text{constant}$$

$$r \Rightarrow \frac{dT}{dr} \text{ (کاهش) } \Rightarrow \text{افزایش } r$$

برای حل معادله توزیع دما دو ثابت داریم پس نیاز r دو شرط مرزی داریم:

$$B.C: \begin{cases} T = T_i \Rightarrow C_1 \ln r_i + C_2 \\ T = T_o \Rightarrow C_1 \ln r_o + C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{T_o - T_i}{\ln \frac{r_o}{r_i}}, C_2 = \frac{T_o - T_i}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} \ln r_o$$

$$\Rightarrow \text{توزیع دما} \Rightarrow T(r) = \frac{T_o - T_i}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} \ln r + T_o - \frac{T_o - T_i}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} \ln r_o =$$

$$= T_o + \frac{T_o - T_i}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} \ln \left(\frac{r}{r_o} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = -k(\pi r l) \frac{T_o - T_i}{r \left[\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) \right]} = \frac{T_o - T_i}{\frac{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)}{\pi k l}}$$

روش دوم: استفاده از قانون فوریه:

$$\text{راه دوم: } \dot{q}_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(\pi r l) \frac{dT}{dr}$$

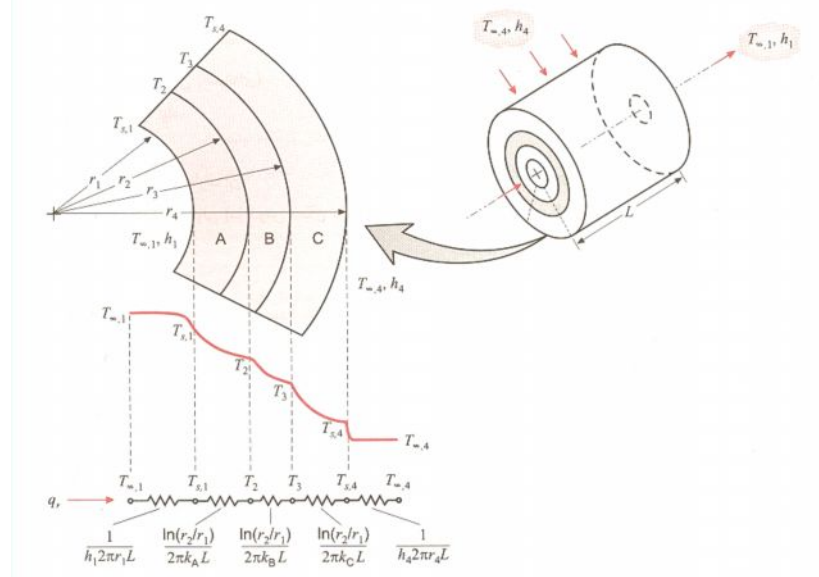
$$\int_{r_i}^{r_o} \dot{q}_r \frac{dr}{r} = \int_{T_i}^{T_o} -\pi k l dT \Rightarrow \dot{q}_r \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) = \pi k l (T_i - T_o)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \frac{\pi k l (T_i - T_o)}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)}$$

$$R_{t,cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k l} \text{ (For cylinder)}$$

* بررسی مقاومت حرارتی در سیستم استوانه‌ای: (∞_i, ∞_o)

Radiation = • فرضی



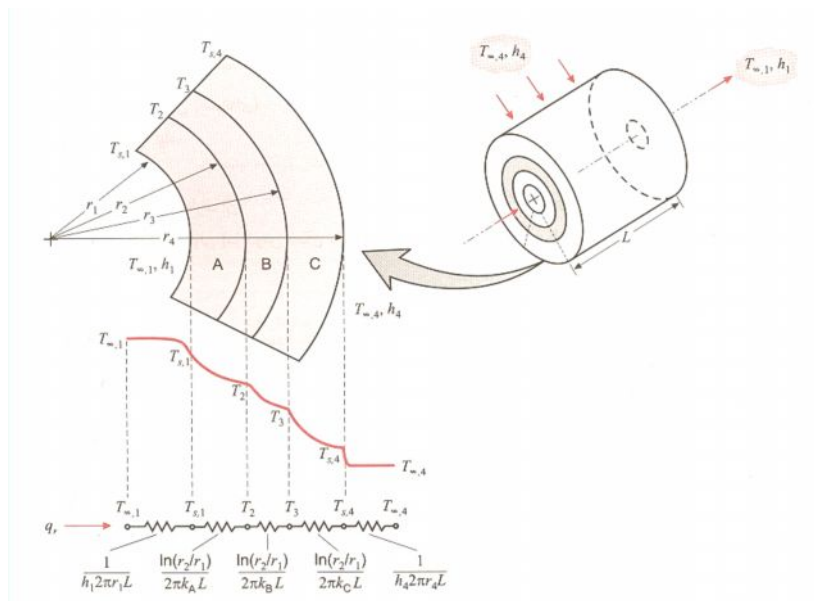
توزیع دما برای دیواره مرکب استوانه‌ای

$$R_i = R_{Conv} = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i (2\pi r_i l)}$$

$$R_r = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k l} = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o (2\pi r_o l)}$$

$$R_{\Sigma} = R_{conv} = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o (2\pi r_o l)}$$

استوانه‌های چندلایه: multi layers Cylinder:



توزیع دما برای دیواره مرکب استوانه‌ای

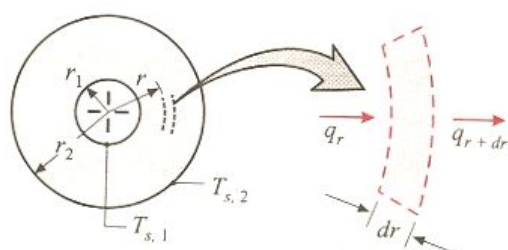
$$R_i = R_{conv} = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i (\pi r_i l)}, \quad R_r = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_r}{r_i}\right)}{\pi k_r l}$$

$$R_r = R_{cond} = \frac{\ln(r_r / r_i)}{\pi k_r l}, \quad R_f = R_{cond} = \frac{\ln(r_f / R_r)}{\pi k_f l}$$

$$R_o = R_{conv} = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o (\pi r_o l)}$$

$$R_t = R_i + R_r + R_r + R_f + R_o \Rightarrow \dot{q}_r = \frac{T_{\infty i} - T_{\infty o}}{R_{total}} = \frac{T_i - T_f}{R_i + R_r + R_f} = \dots\dots$$

Heat conduction in sphere:



* معادله انتقال حرارت در کره:

دو روش وجود دارد: فقط روش دوم را بررسی می کنیم

Assumption: one-Dimensional , steady state, no Heat Generation

فرضیات:

بدون منبع حرارتی

شرایط پایدار

یک بعدی

* در راستای θ نمی توانیم حرارت انتقال داشته باشیم، انتقال حرارت در جهت شعاع داریم . (اگر دور بزنیم کاهش و یا افزایش دما وجود ندارد.)

* خطوط شعاع ثابت ، خطوط دما ثابت نیز هستند

* انتقال حرارت فقط در راستای شعاع اتفاق می افتد. در نتیجه هر سطح شعاع ثابت یک

سطح دما ثابت است.

First law of thermo:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_Q - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v} \Rightarrow \dot{q}_r = \dot{q}_{r+dr}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \dot{q}_r + \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial r} dr \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial r} = 0 \Rightarrow \dot{q}_r = \text{const}$$

$$\uparrow q_r'' = \frac{\dot{q}_r}{A} \downarrow$$

* نرخ انتقال حرارت در سه نوع دیواره (تخت- استوانه‌ای- کره‌ای) ثابت است.

* شار حرارتی فقط در دیوار تخت ثابت است ولی در دیواره استوانه‌ای و کروی ثابت نیست و با افزایش شعاع کم می‌شود.

* در دیواره کروی گرادیان دمایی $\left(\frac{dT}{dr}\right)$ با افزایش شعاع کم می‌شود.

$$\text{حل از راه قانون فوریه: } \dot{q}_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(\pi r^2) \frac{dT}{dr} = \text{cte}$$

$$\int_{r_i}^{r_o} \dot{q}_r \frac{dr}{r^2} = \int_{T_i}^{T_o} -\pi dT \Rightarrow \dot{q}_r \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right) = \pi k (T_i - T_o)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = \frac{T_i - T_o}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right) \pi k}$$

$$\Rightarrow R_{t,cond} = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}{\pi k} \text{ for sphere} \quad T(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

توزیع دما:

سوال:

* شار حرارتی در استوانه کمتر است یا در کروی؟

* کاهش شیب در استوانه بیشتر است یا در کره؟

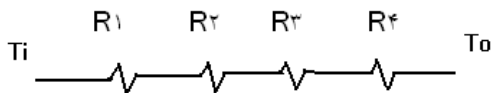
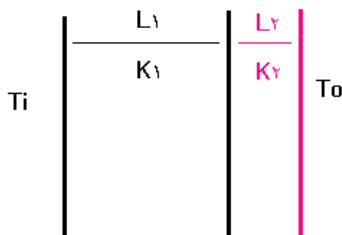
شعاع بحرانی عایق: Critical Radius of insulation

$$R_1 = \frac{L_1}{K_1 A}, R_2 = \frac{l_2}{k_2 A}, R_3 = \frac{1}{h_o A}$$

$$\downarrow \dot{q}_x = \frac{T_1 - T_\infty}{R_1 + R_2 + R_3} \uparrow$$

شعاع بحرانی عایق :

(1) صفحه تخت:



$$R_{conv} = \frac{1}{h_i A_i} = cte$$

$$R_1 = \frac{L_1}{K_1 A} = cte$$

$$R_{ins} = \frac{L_2}{K_{ins} A}$$

$$\downarrow q = \frac{T_i - T_o}{R_{tot}} \uparrow$$

$$R_{conv} = \frac{1}{h_o A} = cte$$

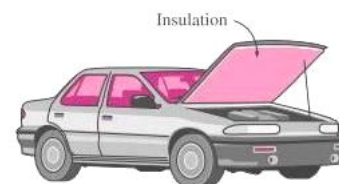
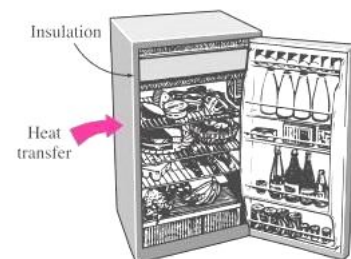
$$\uparrow R_{tot} = R_{conv} + R_1 + \underset{\uparrow}{R_{ins}} + R_{conv}$$

* در صفحه تخت باید عایق را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مجموع مقاومتها زیاد شود

هرچه طول (ضخامت) عایق را بیشتر انتخاب کنیم انتقال حرارت به همان نسبت کم

می‌شود چون مقاومت کل افزایش پیدا می‌کنیم (کلیه مقادیر ثابت‌اند فقط می‌توانیم 1 عایق را تغییر دهیم).

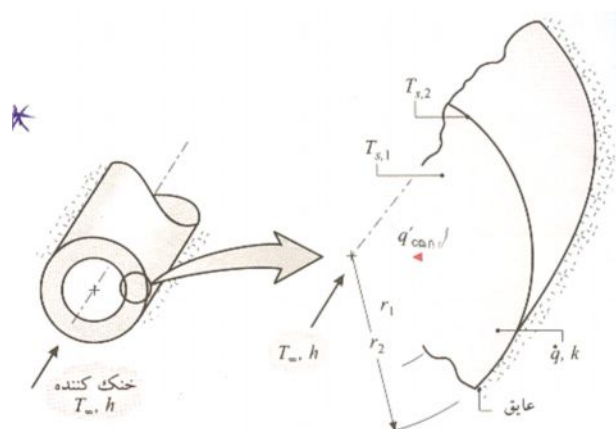
* در صفحه تخت شعاع بحرانی عایق نداریم و هر چه ما را بیشتر کنیم مقاومت بیشتر می‌شود.



* در دیواره ی تخت هر چه ضخامت عایق را بیشتر کنیم نرخ انتقال حرارت کمتر می‌شود.

* در دیواره ی تخت با افزایش عایق مقاومت هدایتی افزایش پیدا می‌کند ولی مقاومت جابه جایی کاهش پیدا می‌کند.

* دیواره استوانه‌ای:



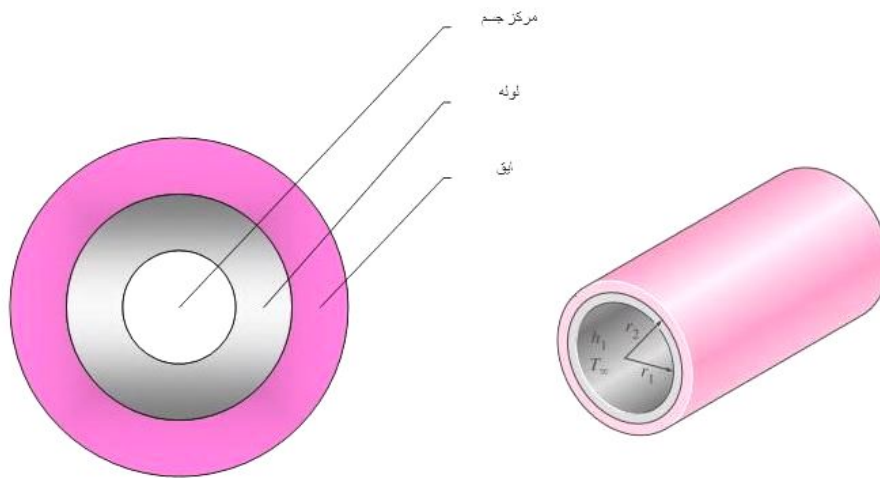
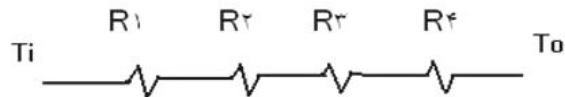
$$\uparrow R_1 = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k_{in} l}, \quad \downarrow R_2 = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o 2\pi r_o l} \uparrow$$

$$\dot{q}_r = \frac{T_1 - T_{\infty o}}{R_1 + R_2}$$

* گاهی اوقات کاهش مقاومت جابه جایی به افزایش مقاومت هدایتی غلبه می کند که در این حالت نه تنها افزایش عایق باعث کاهش انتقال حرارت نمی شود بلکه به افزایش انتقال حرارت نیز می انجامد.

* با افزایش عایق مقاومت جابه جایی کم ولی مقاومت رسانش زیاد می شود. در نتیجه باید شعاع بهینه را بیابیم:

می خواهیم شعاع بهینه را پیدا کنیم:



$$R_1 = \frac{1}{h_i A} = cte$$

$$R_2 = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi l k} = Cte$$

$$\uparrow R_3 = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_1}\right)}{2\pi l k_{ins}}$$

$$RL_1 \downarrow = \frac{1}{h_o A_o} \uparrow$$

پیدا کردن شعاع بحرانی:

شعاعی است که در آن شعاع max انتقال حرارت را داریم .

قبل از rcr اضافه کردن عایق باعث افزایش انتقال حرارت و بعد از rcr اضافه کردن عایق سبب کاهش انتقال حرارت می شود.

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_{tot}} = R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{1}{h_i 2\pi k} + \frac{\ln(\frac{r_1}{r_i})}{2\pi l k_1} + \frac{\ln(\frac{r_o}{r_1})}{2\pi l k_{ins}} + \frac{1}{h_o 2\pi l r_o}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r_o} = 0$$

$$\frac{\partial R_{tot}}{\partial r_o} = 0$$

$$\frac{\partial R_{tot}}{\partial r_o} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{r_o}}{2\pi l k_{ins}} - \frac{1}{2 h_o \pi l r_o^2} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi l k_{ins} r_o} = \frac{1}{2\pi h_o l r_o^2} \rightarrow r_{cr} = \frac{k_{ins}}{h}$$

برای پیدا کردن max و min بودن یکبار دیگر مشتق می گیریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_{tot}}{\partial r_o} &= -\frac{1}{2\pi k_{ins} l r_o^2} + \frac{1}{h_o \pi l r_o^3} = \\ &= \frac{-1}{2\pi l^{k_{ins}} (\frac{k_{ins}}{h_o})^2} + \frac{1}{h_o \pi (\frac{k_{ins}}{h_o})^3} = \frac{-1}{2\pi k_{ins}^3} \frac{L}{h_o^2} + \frac{1}{\pi k_{ins} l} \frac{1}{h_o^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi k_{ins}^3} \frac{l}{h_o^2} > 0 \frac{\partial^2 R_{tot}}{\partial r_o^2} > 0 \end{aligned}$$

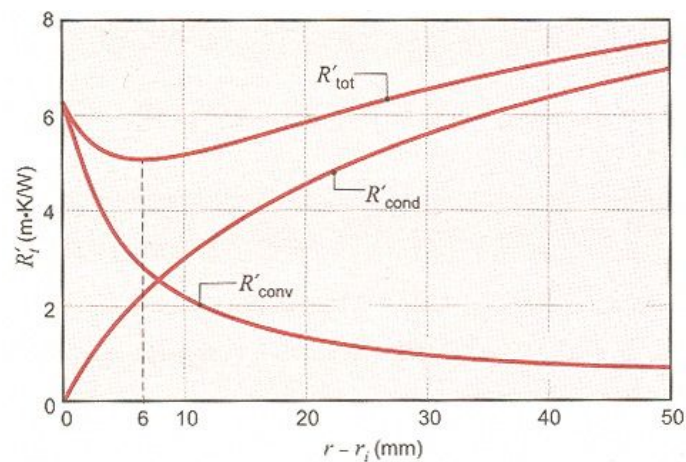
$$\begin{aligned}
 R_t &= R_i + R_r \\
 \text{باید } \frac{d\dot{q}_r}{dr_o} &= 0 \quad \text{یا} \quad \frac{dR_{tot}}{dr_o} = 0 \\
 \Rightarrow R_{tot} &= R_i + R_r, \frac{dR_t}{dr_o} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi k_{in} l} + \frac{-1}{h_o 2\pi l r_o^2} = 0 \Rightarrow \\
 \frac{1}{r_o 2\pi l} \left[\frac{1}{k_{in}} - \frac{1}{h_o r_o} \right] &= 0 \\
 \frac{1}{k_{in}} &= \frac{1}{h_o r_o} = 0 \Rightarrow r_{ocr} = \frac{k_{in}}{h_o} \\
 \frac{d^* R_t}{dr_o^*} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\pi k_{in} l r_o^*} + \frac{2}{h_o 2\pi l r_o^*} = -\frac{1}{2\pi \frac{k_{in}^*}{h_o^*}} + \frac{2}{2\pi l \frac{k_{in}^*}{h_o^*}} \\
 &= \frac{1}{2\pi l \frac{k_{in}^*}{h_o^*}}
 \end{aligned}$$

شعاع بحرانی کره:

$$r_{cr} = \frac{2k}{h_o}$$

* پس شعاع بحرانی شعاعی است که در آن مقاومت می‌نیمم در نتیجه انتقال حرارت ماکزیمم است.

* شعاع بحرانی عایق برای مسائلی اهمیت دارد که قطر لوله کم باشد. و h_o کم باشد.



* با توجه به نمودار برای افزودن عایق فقط باید در ناحیه مشخص شده اقدام کرد. اگر در

$r > r_{o_{cr}}$ عایق اضافه کنیم. انتقال حرارت به اندازه همان $\dot{q}_{base}$ است.

سوال:

* شعاع بحرانی برای لوله های با شعاع کم دارای اهمیت است یا شعاع های زیاد؟

در لوله های با شعاع زیاد ماهواره بعد از rcr هستیم پس با اضافه کردن عایق انتقال

حرارت کم می شود ولی شعاع بحرانی برای لوله های با شعاع کم دارای اهمیت است .

* rcr در محیط هایی که h زیاد است با اهمیت است یا h کم است ؟ در جاهایی که

h کم است باید دقت کنیم و دارای اهمیت است چون ضریب انتقال حرارت کم است و

دلیل بالا

کروی	استوانه	دیوار تخت	
$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dT}{dr}) = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr}) = 0$	$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$	: معادله
$T = \frac{C_1}{r} + C_2$	$T = C_1 \ln r + C_2$	$T = C_1 X + C_2$ خطی	: توزیع دما
$\frac{1}{ri} - \frac{1}{ro}$ $\frac{4\pi k}{}$	$\frac{\ln(\frac{ro}{ri})}{2\pi k}$	$\frac{L}{KA}$	: مقاومت حرارتی
$\frac{2Kins}{h}$	$\frac{Kins}{h}$	-	: شعاع بحرانی

مسئله: لوله‌ای به طول 50m داریم دمای هوای اطراف لوله $15^{\circ}C$ است. قطر لوله 10cm

است. در داخل لوله نیز بخار آب جریان دارد. دمای سطح دیرون لوله $150^{\circ}C$ است. ضریب

انتقال حرارت جابه‌جایی بیرون لوله $20 W/m^2 \cdot C$ است.

الف) نرخ انتقال حرارت را بدون عایق بدست آورید.

ب) شعاع بحرانی عایق را در صورتی که از عایقی با $k = 0.035$ استفاده شود. را به دست آورید.

ج) اگر شعاع بیرونی با عایق برابر 69mm باشد چه مقدار از اتلاف انرژی صرفه جویی می‌شود.

$$\dot{q}_{bare} = h_o A (T_s - T_{\infty}) = \frac{20 W}{m^2 \cdot C} \times (\pi D l) (T_s - T_{\infty})$$

$$\dot{q}_{bare} = 20 \times (\pi \times 0.1 \times 50) (150 - 15) = 42412 W$$

$$r_{cr} = \frac{k_{in}}{h_o} = \frac{0.035}{20} \times 1000 = 1.75 mm$$

* در این مسئله شعاع بحرانی عایق از شعاع بیرون بدون عایق لوله کمتر است پس در این

مسئله شعاع بحرانی مطرح نیست یعنی همیشه اضافه کردن عایق انتقال حرارت را کم

می‌کند.

$$r_{cr} = \frac{k_{in}}{h_o} : \text{for cylinder}$$

$$r_{cr} = \frac{2k_{in}}{h_o} : \text{for sphere}$$

$$R_1 = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k_{in} l},$$

$$R_1 = R_{conv} = \frac{1}{h_o A_o} = \frac{1}{h_o 2\pi r_o l}$$

$$\dot{q}_r = \frac{T_s - T_{\infty}}{R_i + R_r} = \frac{150 - 15}{\frac{\ln\left(\frac{69.2}{50}\right)}{2\pi \times 0.035 \times 20}} + \frac{1}{20 \times 2\pi \times (69.2 \times 10^{-3}) \times 50}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_r = 4241W, \dot{q}_{bare} = 42412$$

* ده برابر با اضافه کردن عایق از افت حرارت صرفه جویی کرده ایم.

* تغییرات h با توجه به انواع انتقال حرارت جابه جایی:

Type of convection	h
<i>Free convection of</i> $\begin{cases} \text{gass} \\ \text{liquids} \end{cases}$	$\begin{cases} 2 - 25 \\ 10 - 1000 \end{cases}$
<i>Forced convection</i> $\begin{cases} \text{gasses} \\ \text{liquids} \end{cases}$	$\begin{cases} 25 - 250 \\ 50 - 20000 \end{cases}$
<i>Boiling & condensation</i>	$2500 - 100000$

Heat conduction with internal Heat (Energy) Generation

انتقال حرارت با وجود منبع حرارتی:

$$\begin{cases} \text{Electrical Energy} \\ \text{chemical Energy} \Rightarrow \text{Heat Thermal energy} \\ \text{nuclear Energy} \end{cases}$$

$$\dot{E}_g = RI^2 \quad \dot{q}_G = \frac{\dot{E}_G}{V}$$

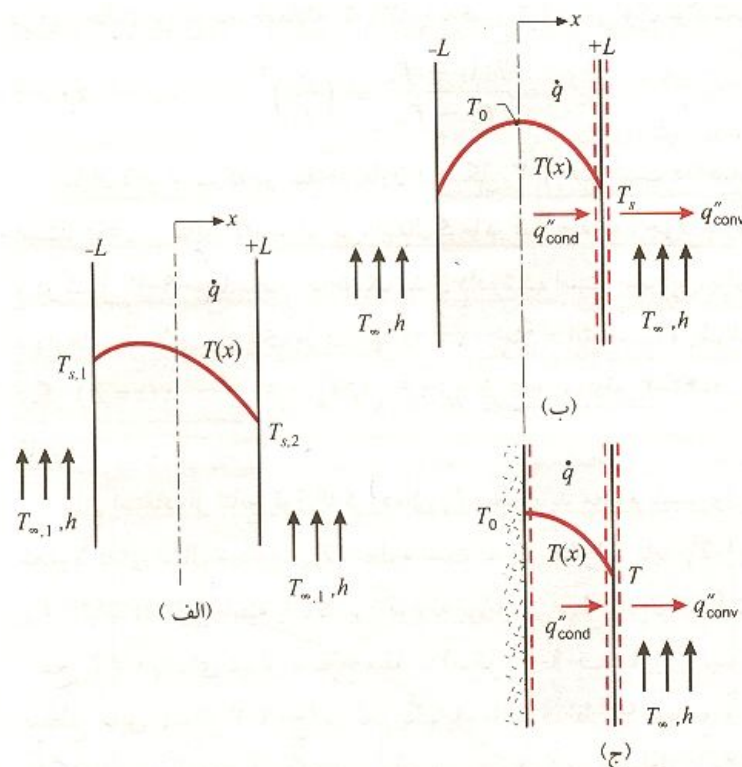
$\dot{q}_G$: Rate of Heat Generation per unit volume نرخ انتقال حرارت بر واحد حجم

1) Plane wall : دیوار مسطح

* Assumption: one- Dimensional, steady state, uniform heat generation

* اگر شرایط دو طرف دیوار برابر باشد آنگاه، $T_{s1} = T_{s2}$ در نتیجه توزیع دما بدین صورت

است:



در جایی که مماس بر منحنی افقی است پس در $x=0$ ، $c_1=0$ ، پس از معادله از نتیجه

می‌گیریم $\frac{dT}{dx}$ برابر صفر است.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{k}, \dot{q} = cte$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k} \rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{-\dot{q}}{k}x + c_1 \Rightarrow$$

توزیع دما در دیوار تخت که به شکل سهمی است $T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$

$$B.C \begin{cases} x = -l : T = T_{s1} \Rightarrow T_{s1} = -\frac{\dot{q}l^2}{2k} - c_1l + C_2 \\ x = l : T = T_{s2} \Rightarrow T_{s2} = -\frac{\dot{q}l^2}{2k} + c_1l + C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2} + \frac{\dot{q}l^2}{2k}, \quad C_1 = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2l}$$

* مماس بر نمودار توزیع دما در $x=0$ افقی است یعنی $\frac{dT}{dx}=0$

* بررسی دیوار با سطح ورودی آدیاباتیک:

First law of thermo:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v}$$

$$\Rightarrow \dot{E}_G = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{q}(Al) = hA(T_{s1} - T_{\infty})$$

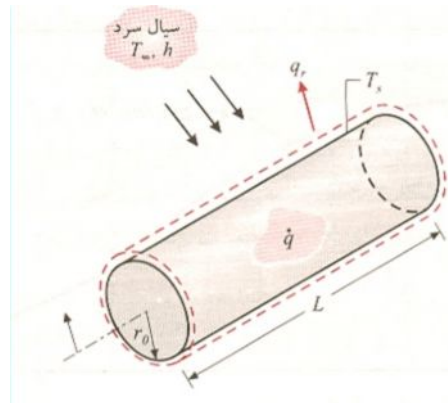
$$T_s = \frac{\dot{q}l}{h} + T_{\infty} \quad \dot{q}(2l_A) = hA(T_{s1} - T_{\infty1}) + h_2A(T_{s2} - T_{\infty2})$$

$$x=0 \Rightarrow T(\cdot) = T_o = C_2 = T_s + \frac{\dot{q}l^2}{2k} \Rightarrow T_o - T_s = \frac{\dot{q}l^2}{2k}$$

(2) دیواره استوانه‌ای:

2. cylindrical wall:

Assumption: one-Dimensional, steady state, uniform heat generation.



رسانش در استوانه توی پر با تولید گرمای یکنواخت

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{-\dot{q}}{k}$$

$$\Rightarrow r \left(\frac{dT}{dr} \right) = \frac{-\dot{q} r^2}{2k} + C_1 \Rightarrow dT = \left(-\frac{\dot{q} r}{2k} + \frac{C_1}{r} \right) dr$$

$$T = -\frac{\dot{q} r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2 \quad \text{B.C.} \begin{cases} r = r_o & T = T_s \\ r = 0 & \frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0$$

با توجه به تقارن مسئله

* در نتیجه توزیع دما در استوانه توپر به صورت سهمی است.

$$r = r_o \Rightarrow T_s = -\frac{\dot{q} r_o^2}{4k} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_s + \frac{\dot{q} r_o^2}{4k}$$

$$\Rightarrow T(r) = T_s - \frac{\dot{q} R^2}{4k} \text{ for cylinder}$$

* برای دیوار کروی ثابت شود:

* first law of thermo $\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v.} \Rightarrow \dot{E}_G = \dot{E}_{out}$

$$\Rightarrow \dot{q}(\pi R^{\vee} l) = h(\mathfrak{r} \pi R l)(T_s - T_{\infty})$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}R}{\gamma h} \text{ for cylinder}$$

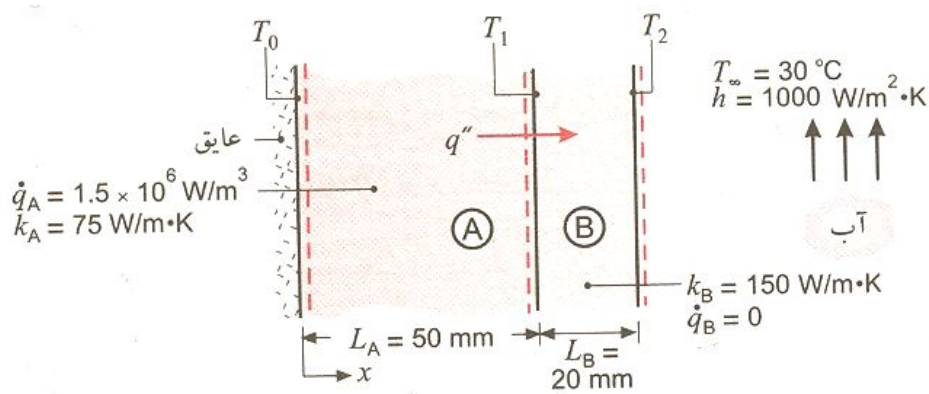
* برای معادلات در دیوارهٔ کروی

$$\text{for sphere: } \dot{q}\left(\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{r}}\pi R^{\mathfrak{r}}\right) = h(\mathfrak{f}\pi R^{\mathfrak{r}})(T_s - T_{\infty}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}l}{\text{r}h} \text{ sphere}$$

$$T_s = T_\infty t \frac{\dot{q}}{h} \text{ plane wall}$$

مسئله حل شده کتاب: مسئله ص 68 منبع: اینکروپرا



الف) توزیع دما را در حالت پایدار رسم کنید.

ب) T_r, T_o را نیز محاسبه کنید.

ج) شار حرارتی را براساس طول دیوار رسم کنید.

1) در T_o شیب مماس بر منحنی دما افقی است چون سطح عایق است.

2) از T_1 تا T_r چون منبع حرارتی نداریم نمودار توزیع دما خطی است.

3) جایی که منبع حرارتی داریم نمی توان مدار رسم کرد چون حرارت ثابت نیست.

* سیستم دیوار B می گیریم:

$$\text{system B} : \dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v.}$$

$$\Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow \dot{q}_A (l_A \cdot A) = hA(T_r - T_\infty)$$

$$\Rightarrow 1.5 \times 10^6 (50 \times 10^{-3} m) = 1000 (T_r - 80) \Rightarrow T_r = 105^\circ C$$

$$T_o - T_1 = \frac{q l_A}{2k_A}$$

* برای به دست آوردن T_1 باید مدار به دست آوریم:

$$R_1 = R_{cond} = \frac{l_B}{k_{B.A}} = \frac{0.02}{150 A}, R_r = \frac{1}{hA} = \frac{1}{1000 A}$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \frac{T_1 - T_r}{R_1} = \frac{T_r - T_\infty}{R_r} \Rightarrow \frac{T_1 - 105}{\frac{0.02}{150A}} = \frac{105 - 80}{\frac{1}{1000A}}$$

$$\Rightarrow T_1 = 115^\circ C \quad T_r - T_1 = \frac{\dot{q}_A l_A}{2k_A} \Rightarrow T_r - 115^\circ = \frac{1.5 \times 10^6 \times (0.05)^2}{2 \times 75}$$

$$\Rightarrow T_r = 140^\circ C$$

حل مسئله:

بخار آب فوق گرم با دمای $575^{\circ}C$ در لوله‌های فولادی ($k = 35 W/m.K$) با قطر داخلی $300mm$ و با ضخامت دیواره $30mm$ از بویلر تا توربین یک نیروگاه الکتریکی حمل می‌شود. برای کاهش دفع گرما به اطراف و برای حفظ دمای قابل لمس در سطح خارجی، لایه‌ای از عایق سیلیکات کلسیم ($k = 0.1 W/m.K$) برای لوله‌ها به کار برده می‌شود. اگر عایق در ورق نازکی از آلومینیوم با گسیلمندی $\varepsilon = 0.2$ پوشیده شود، کیفیت آن کاهش می‌یابد. دمای هوا و دیواره نیروگاه $27^{\circ}C$ است.

(الف) با فرض این که دمای سطح داخلی لوله فولادی با دمای بخار آب برابر است و ضریب جابه‌جایی خارجی برای ورق آلومینیومی $6 W/m^2.k$ است، مینیمم ضخامت عایق کاری مورد نیاز برای این که دما از $50^{\circ}C$ بیش‌تر نشود چقدر است؟
در این حالت، دفع گرما از یک متر طول لوله چقدر است؟

$$r_i = \frac{300}{2} = 150mm$$

$$t_T = 30mm$$

$$k_1 = 35 W/m.k$$

$$k_2 = 0.1 W/m.k$$

$$T_i = T_1$$

$$T_3 = 50$$

$$t_v = ?, \dot{q}_v = ?$$

$$r_i = r_i + t_i = 150 + 30$$

$$R_i = R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k_i l} = \frac{\ln\left(\frac{180}{150}\right)}{2\pi \times 35 l}$$

$$R_v = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k_v l} = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{180}\right)}{2\pi \times 0.1 l}$$

$$R_r = R_{conv} = \frac{1}{h_r A} = \frac{1}{\varphi \times 2\pi r_o l}$$

$$R_r = R_{Rad} = \frac{1}{h_r A} \qquad h_{rad} = \sigma_{\varepsilon} (T_r^{\infty} + T_o^{\infty}) (T_r + T_o)$$

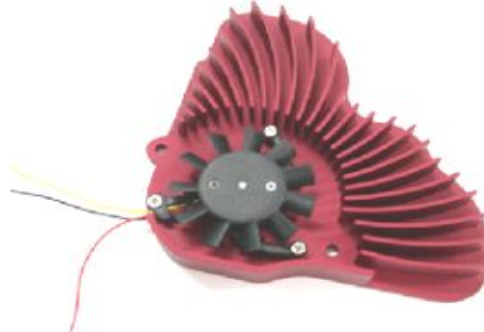
$$h_{rad} = 5.67 \times 10^{-8} (323^4 + 300^4) (323 + 300)$$

$$\frac{T_i - T_r}{R_i + R_v} = \frac{T_r - T_o}{R_o (R_r + R_r)} \Rightarrow r_o =$$

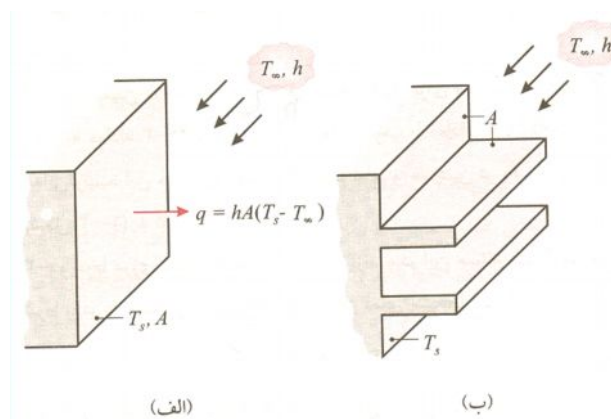
$$r_o = r_i + t_i \Rightarrow t_v = \qquad \Rightarrow \dot{q} = ?$$

Heat Transfer from Extended surface: (fin)

انتقال حرارت از سطوح گسترش یافته:



خنک کردن لوازم الکترونیکی با استفاده از فن (مثالی از جابجایی اجباری)



استفاده از پره‌ها برای تقویت انتقال گرما از دیوار مسطح (الف) سطح بی‌پره. (ب) سطح پره‌دار

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

$$\text{if } T_s = \text{cte}$$

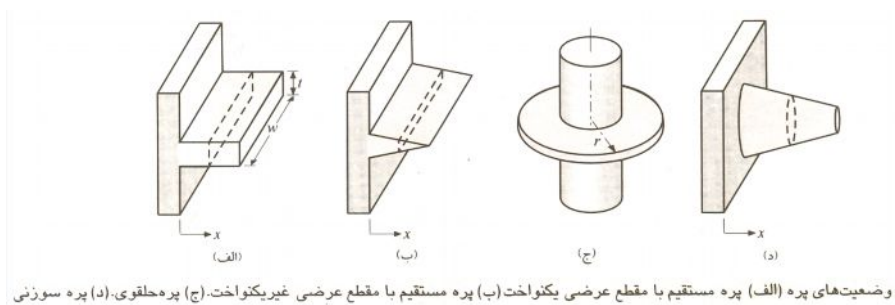
راههای افزایش انتقال حرارت:

(1) یکی از راههای افزایش انتقال حرارت افزایش h است.

(2) کاهش T_∞ ، که معمولاً غیر عملی است.

(3) یکی دیگر از راههای افزایش انتقال حرارت افزایش سطح مقطع (A) می‌باشد.

* هدف اصلی استفاده از fin افزایش انتقال حرارت است

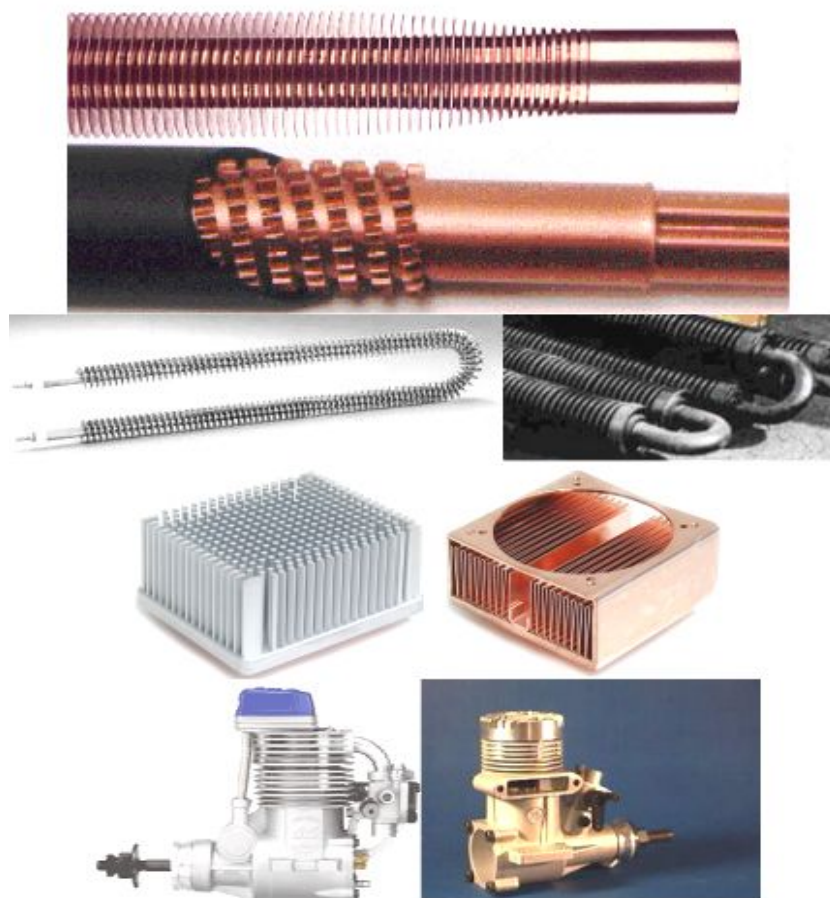


Straight fin of uniform cross sectioned area

fin با سطح مقطع یکنواخت

Straight fin of nonuniform cross sectioned area

* انتقال حرارت فقط در جهت طول فین انجام می‌شود و به صورت رسانش می‌باشد.



شکل کاربردهای متنوع پره‌ها

Fin Analysis:

Assumption: strady state , one , dimensione

$k=cte$, Radiation=0

, No heat Genration $n=1$

, hisuniform from fin surface

قانون بقای انرژی: $\dot{q}_x = \dot{q}_{x+dx} + d\dot{q}_{conv}$

$$\Rightarrow \dot{q}_x = \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx + h dA_s (T - T_\infty), \dot{q}_x = -KA_c \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(-KA_c \frac{dT}{dx} \right) + h(T - T_\infty) dA_s = 0$$

Straight fin of uniform cross sectioned area: پره یکنواخت

$$A_c = wt, p = 2(w + t)$$

$$-KA_c \frac{d^2 T}{dx^2} + h p d_x (T - T_\infty) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hp}{KA_c} (T - T_\infty) = 0$$

معادله خطی، مرتبه 2، همگن با ضرایب ثابت $\Rightarrow T - T_\infty = \theta \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dx^2} = m^2 \theta = 0$ فرض

$$m = \left(\frac{hf}{KA_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$معادله مشخصه: $t^2 - m^2 = 0 \Rightarrow t = m \Rightarrow \theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$$

* بررسی شرایط مختلف مرزی

$$B.C.I \left\{ \begin{array}{l} x=0, T=T_{base} \Rightarrow \theta_b = T_b - T_\infty \\ \end{array} \right.$$

$$B.C.II \left\{ \begin{array}{l} A : \text{very long fin} : T_{fin tip} = T_\infty \\ B : \text{Insulated fin tip} : x=l \quad q_{x=l} = 0 = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=l} \\ C : \text{convection from fin tip} \quad -kA_c \frac{dT}{dx} = hA_c(T_l - T_\infty) \end{array} \right.$$

$$A : \text{Very long fin} : B.C \left\{ \begin{array}{l} x=0 \quad T=T_b \Rightarrow \theta = \theta_b \\ x=l \quad T=T_\infty \Rightarrow \theta = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow \theta_b = C_1 + C_2 \\ x=l \Rightarrow 0 = \lim_{L \rightarrow \infty} (C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = \theta_b \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx} \quad \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = e^{-mx}$$

$$q_{fin} = -kA_c \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = q_b$$

$$q_{fin} = q_b = -kA_c \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \Rightarrow$$

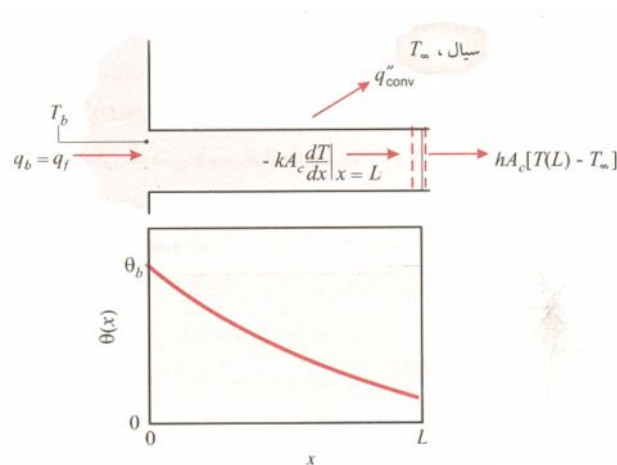
$$q_{fin} = -kA_c \theta_b (-me^{-mx})_{x=0}$$

$$q_f = kA_c \left(\frac{hp}{KA_c} \right)^{\frac{1}{4}} \theta_b$$

$$q_f = (hp kA_c)^{\frac{1}{4}} \theta_b = M = q_{base}$$

$$B \left\{ \begin{array}{l} x=0 \quad T=T_b \Rightarrow \theta = \theta_b \\ x=l \quad -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_b = C_1 + C_2 \\ m(C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml}) = 0 \end{array} \right.$$



رسانش و جابه‌جایی در پره با مقطع عرضی یکنواخت

$$C_1 + C_2 e^{-\gamma ml}$$

$$\theta_b = C_1 (1 + e^{-\gamma ml}) \Rightarrow C_1 = \frac{\theta_b}{1 + e^{-\gamma ml}}$$

$$C_2 = \frac{\theta_b \cdot e^{-\gamma ml}}{1 + e^{-\gamma ml}} = \frac{\theta_b}{1 + e^{\gamma ml}} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = \frac{e^{mx}}{1 + e^{\gamma ml}} + \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-\gamma ml}}$$

$$\text{Review: } \begin{cases} \sinh ml = \frac{e^{ml} - e^{-ml}}{2} \\ \cosh ml = \frac{e^{ml} + e^{-ml}}{2} = \frac{e^{\gamma ml} + 1}{2e^{ml}} \end{cases}$$

$$\gamma \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\frac{e^{mx}}{2e^{ml}}}{\frac{1 + e^{ml}}{2e^{ml}}} + \frac{\frac{e^{-mx}}{2e^{-ml}}}{\frac{1 + e^{-\gamma ml}}{2e^{-ml}}} = \frac{e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}}{2 \cosh ml}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(l-x)}{\cosh ml}$$

نرخ انتقال حرارت:

$$\dot{q}_{fin} = \dot{q}_{base} = -KA_c \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} \Rightarrow \dot{q}_f = -KA_c \frac{\theta_b}{\cosh ml} (-m \sinh m(l-x)) \Big|_{x=0}$$

$$\dot{q}_f = (hpkA_c) \theta_b \tanh ml$$

$$\dot{q}_f = M \tanh ml$$

$$C: \begin{cases} x=0 & T=T_b \Rightarrow \theta=\theta_b \\ x=l & -k \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=l} = h\theta(l) \end{cases}$$

$$\theta_b = C_1 + C_2$$

$$-k(C_1 m e^{ml} - C_2 m e^{-ml}) = h(C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml})$$

* بدین ترتیب C_p, C_f را به دست آورده و با یافتن توزیع دما نرخ انتقال حرارت را حساب می‌کنیم.

عملکرد و کارایی فین: fin Effectiveness

(1) میزان انتقال حرارت با فین به زمانی که انتقال حرارت بدون فین انجام می‌شود را عملکرد و کارایی فین می‌گویند.

$$\varepsilon_f = \frac{q_{fin}}{q_{nofin}}$$

(2) زمانی از فین استفاده می‌کنیم که کارایی 2 باشد.

(3) همیشه فین‌ها باعث انتقال حرارت نمی‌شوند.

For very long fin with straight fin : $q_f = M = (hpkA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b$

$$\varepsilon_f = \frac{(hpkA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b}{hA_c \theta_b} \Rightarrow \varepsilon_f = \left(\frac{kp}{hA_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(4) باید برای فین جنسی باید انتخاب کنیم که دارای k با واتری باشند مانند آلومینیوم و

مس ولی چون آلومینیوم سبکتر و ارزان‌تر است اغلب از آلومینیوم استفاده می‌کنند.

(5) کارایی فین با h نسبت عکس دارد.

$$\varepsilon_f \propto k$$

$$\varepsilon_f \propto \frac{P}{A_c}$$

جایی که h کم باشد کارایی فین زیاد است (جاهایی که با گازها سرو کار داریم)

* اگر سطحی بین دو سیال با h مختلف داشته باشیم فین را باید در قسمتی بگذاریم

که h سیال کمتر است (مانند رادیاتور اتومبیل)

فین را در قسمت با سیال h_1 قرار می‌دهیم.

$$h_1 > h_2$$

راندمان: (بازده): fin Efficiency

انتقال حرارت ماکزیمم زمانی است که دمای سطح دمای base باشد.

$$h_f = \frac{q_{fin}}{q_{max}}$$

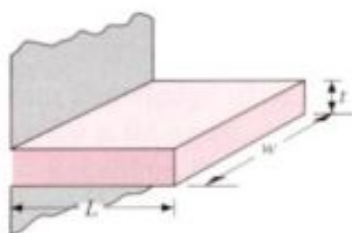
$$\begin{cases} lf \rightarrow 0 & \eta_f \rightarrow 0 \\ l \rightarrow \infty & \eta_f \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$q_{max} = hA_f(T_b - T_\infty) = hA_f\theta_b$$

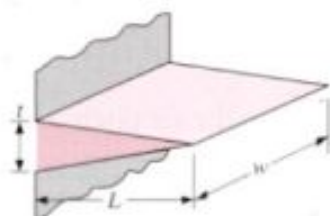
for very long fin: برای فین باطول زیاد:

$$q_{fin} = M = (hpkA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b \quad w \gg t$$

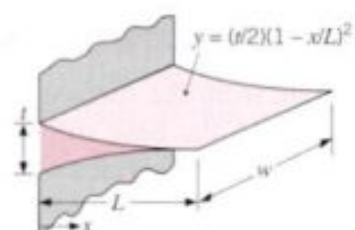
$$\eta_{fin} = \frac{(hpkA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b}{hpl\theta_b} = \frac{1}{l} \left(\frac{kA_c}{hp} \right)^{\frac{1}{2}}$$



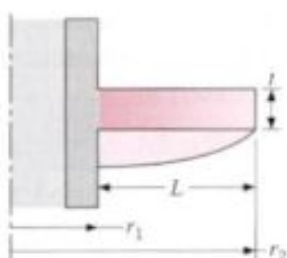
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



$$\eta_f = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

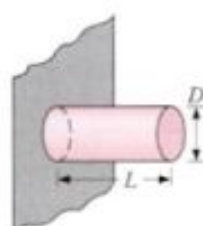


$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

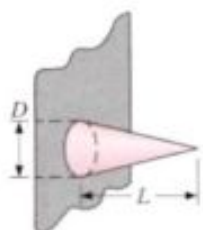


$$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$



$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



$$\eta_f = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$

شکل راندمان پره‌ها با اشکال مختلف [۹]

*** For industrial fin Tip:**

برای فین با انتهای آدیاباتیک

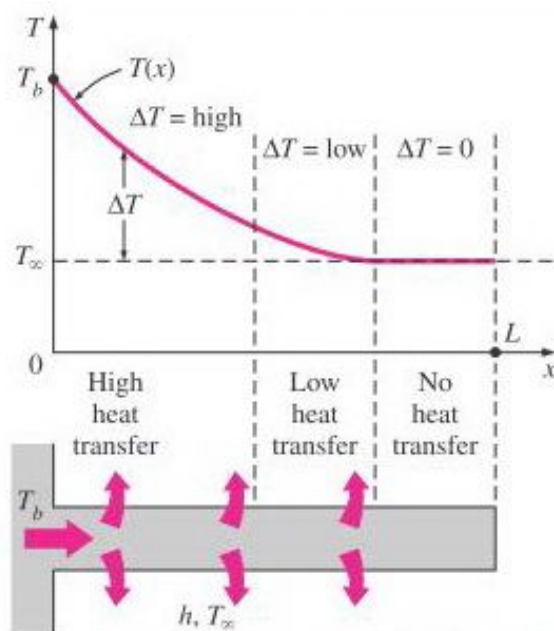
$$q_{fin} = M \tanh ml = (hpkA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b \cdot \tanh ml$$

$$q_{max} = hA_f \theta_b, A_f = pl$$

$$\eta_{fin} = \frac{q_{fin}}{q_{max}} = \frac{(hpkA_c)^{\frac{1}{2}} \theta_b \cdot \tanh ml}{(hpl\theta_b)}$$

$$\eta_{fin} = \frac{\tanh ml}{\left(\frac{hp}{kA_c}\right)^{\frac{1}{2}} l} \Rightarrow \eta_{fin} = \frac{\tanh ml}{ml} \text{ straight of uniform cross section area}$$

L_c : Corrected fin length طول تصحیح شده



همان مساحت تصحیح $A_p =$ شده است با طول تصحیح شد در $A_p = L_c \cdot t$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rectangular fin} \quad A_c = wt \\ \text{if } t \ll w \Rightarrow \quad p = 2w \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_c}{P} = \frac{t}{2} \Rightarrow L_c = L + t/2$$

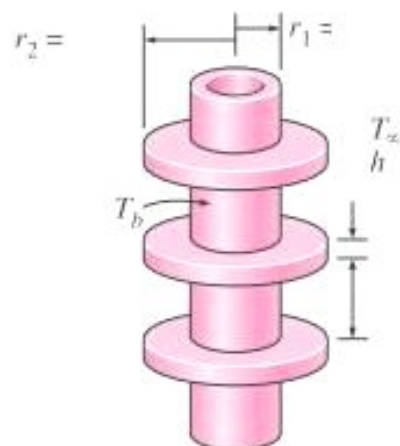
طول تصحیح شده برای دایره:

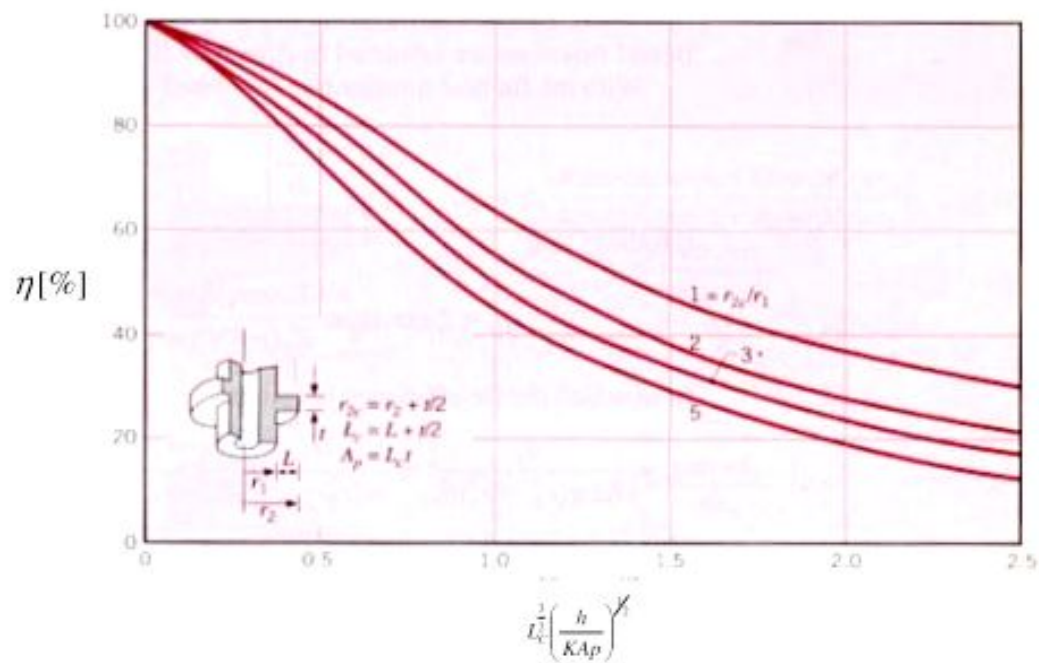
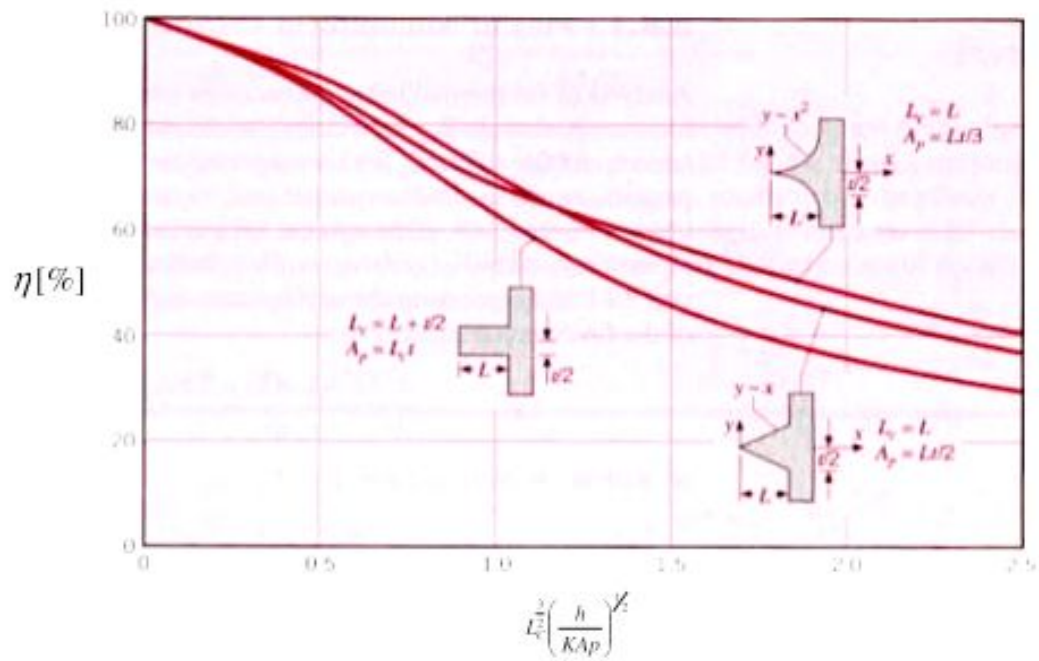
$$\left. \begin{array}{l} A_c = \frac{\pi}{4} D^2 \\ p = \pi D \end{array} \right\} \Rightarrow L_c = L + \frac{\pi/4 D^2}{\pi D} \Rightarrow l_c = l + \frac{D}{4}$$

مسئله کتاب: پره‌های Al شعاعی با مقطع مستطیلی به یک لوله با قطر خارجی 50mm و دمای سطح 200°C سلسیوس وصل شده‌اند. ضخامت پره‌ها 4mm و بلندی آنها 15mm سیستم در هوای محیط با دمای 20°C و ضریب جابجایی $40 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ قرار دارند الف) بازده پره چقدر است؟

ب) اگر در هر متر طول لوله 125 پره نصب شود نرخ گرمای هدر رفته از واحد طول لوله چقدر است؟

در شکل 3-19 راندمان فین‌ها را داده





$$\begin{cases} r_1 = \frac{\delta_0}{\gamma} = 25 \text{ mm} \\ T_b = 200^\circ\text{C} \\ r_1 = r_1 + 15 = 40 \text{ mm} \end{cases}$$

$$T_{\infty} = 20^{\circ}C$$

$$h = 40 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$r_{ec} = r_e + t/2 = 40 + \frac{4}{2} = 42mm$$

$$L_c = L + t/2 = 15 + \frac{4}{2} = 17mm$$

$$A_p = L_c t = 17 \times 4 = 68mm$$

از جدول الف-1 k آلومینیوم در دمای $\frac{200+20}{2} = 110$ که 110 درجه را به اضافه 273

می‌کنیم می‌شود 383k که باید با میان پایی بین 300 و 400k که چون 383k به 400k

نزدیک لیست همان را تقریبی می‌گیریم:

$$K_{AL @ 400K} = 240 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$\Rightarrow L_e^{\frac{r}{2}} \left(\frac{h}{KA_p} \right)^{\frac{1}{2}} = (17 \times 10^{-3} m)^{\frac{r}{2}} \left(\frac{40 \frac{W}{m^2 \cdot K}}{240 \frac{W}{m \cdot K} \times 68 \times 10^{-6} m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0.11$$

$$\frac{r_{ec}}{r_e} = \frac{42}{25} = 1.68$$

حالا از محور افقی 0.11 را پیدا می‌کنیم و بطور عمودی آن را بالا می‌بریم تا خط بین 1 و 2

را که 1.68 است و نزدیک به 2 است قطع کند و پس بطور افقی ادامه می‌دهیم از همان

خط تا η را قطع کند و راندمان را می‌خوانیم. در نتیجه بعد از این کارها

$$\eta = 0.96 \text{ (الف)}$$

$$\text{ب) } \eta_f = \frac{q_{fin}}{q_{max}} \Rightarrow q_{fin} = \eta_{fin} = \eta_f \cdot q_{max}$$

دمای کل فین با دمای پایه فین برابر شود q_{mm} اتفاق می‌افتد.

$$A_f = N [\pi (r_{ec}^2 - r_e^2)] \times 2 = 0.98 m^2$$

طول جانبی اصلاح شده است که یا از مساحت جانبی دایره استفاده می‌شود یا از طول اصلاح شده یعنی r_{vc} استفاده می‌کنیم که ضخامت هم داخل هست.

$$q_{total} = q_{fin} + q_v$$

$$q_v = hA_v \theta_b$$

(مساحت لوله منهای مساحت فین‌هایی که به لوله چسبیده‌اند) $(2\pi r_v t) - 125(2\pi r_v t)$

$$A_v = 2\pi r_v (1 - 125(0.004)) = 2\pi \times 0.025 \text{ m} \times 0.5$$

$$A_v = 0.0785 \text{ m}^2$$

$$q_v = hA_v \theta_b = 40 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K} \times 0.0785 \text{ m}^2 \times (200 - 20)K \Rightarrow q_v = 561.6 \text{ W}$$

$$q_{max} = hA_f \theta_b = 40 \times 0.98 (200 - 20) = 7056$$

$$q_{fin} = \eta_f \cdot q_{max} = 0.96 \times 7056 = 6773.76$$

$$q_{total} = q_{fin} + q_v = 6773.76 + 561.6 = 7335.36 \text{ W}$$

$$\varepsilon_f = ? = \frac{q_{fin}}{q_{no \text{ fin}}}$$

* تعیین طول فین:

$$L = \frac{2}{3} m$$

$$m = [hp / kA_c]^{\frac{1}{3}}$$

Chapter 4

معادله حرارتی حالت دو بعدی:

فرضیات : بدون منبع حرارتی - حالت پایدار - یکبعدی : فرضیات

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0$$

معادله دیفرانسل با مشتقات جزئی (pde) ، مرتبه دو ، خطی ، همگن

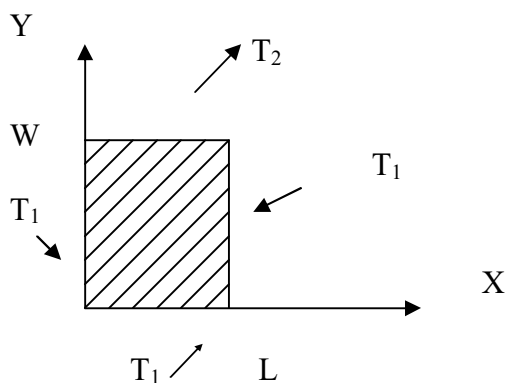
هدف از حل : بدست آوردن توزیع دما (متغیر وابسته).

حل با استفاده از روش جدا سازی متغیرها.

(توزیع دما) : شار حرارتی از قانون فوریه

$$q'' = q''_{x^{il}} + q''_{ij} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial X} li + \frac{\partial T}{\partial Y} ij \right)$$

حل با استفاده از روش جداسازی متغیرها .



شرایط مرزی همگن نیست و نمی توانیم از آن استفاده کنیم و باید شرایط مرزی را همگن کنیم تا بتوانیم از آنها استفاده کنیم. با یک تغییر متغیر (شرایط مرزی را همگن می کنیم).

$$B.S \left[\begin{array}{l} T(O,Y)=T_1 \\ T(L,Y)=T_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} T(X,O)=T_1 \\ T(X,W)=T_2 \end{array}$$

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$B.S \left[\begin{array}{l} \theta(O,Y)=0 \\ \theta(L,Y)=0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \theta(X,O)=0 \\ \theta(X,W)=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow X''Y + Y''X = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = Cte = \left[\begin{array}{l} 0 \\ +\lambda^2 \\ -\lambda^2 \end{array} \right.$$

$$\frac{x''}{x} = -\lambda^2 \Rightarrow x'' + \lambda^2 x = 0$$

$$t^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm i\lambda$$

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$B.C \left[\begin{array}{l} \theta(0,y)=0 \Rightarrow X(0)=0=C_1 \\ \theta(0,Y)=0 \Rightarrow X(L)=0 \quad C_2 \sin \lambda l \Rightarrow \sin \lambda l=0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l} \end{array} \right.$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$X(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$-\frac{y''}{y} = -\lambda^2 \Rightarrow y'' = -\lambda^2 y = 0$$

$$t^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm i\lambda$$

$$Y(y) = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}$$

$$\theta(x, 0) = 0 = X(x)Y(0) = 0$$

$$0 = C_3 + C_4 = C_4 = -C_3$$

$$Y(y) = 2C_3 \left(\frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2} \right) = 2C_3 \sinh \lambda y$$

$$Y(y) = 2C_3 \sinh \left(\frac{n\pi}{l} y \right)$$

$$\theta = X(x)Y(y) \rightarrow \theta = b_n \sinh \left(\frac{n\pi}{l} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$\theta(x, y) = \sum b_n \sinh \left(\frac{n\pi}{l} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \rightarrow \theta(x, w) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh \left(\frac{n\pi}{l} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$\frac{x''}{x} = 0 \Rightarrow x'' = 0 \Rightarrow x' = C_1 \Rightarrow X(0) = C_1 X + C_2$$

$$B.S \left[\begin{array}{l} \theta(0, Y) = 0 = X(0)Y(Y) \Rightarrow X(0) = 0 = C_2 \\ \theta(L, Y) = 0 = X(L)Y(Y) \Rightarrow X(L) = 0 = C_1 L \Rightarrow C_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{X''}{X} = +\lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$t^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm \lambda$$

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

$$B.S \left[\begin{array}{l} \theta(0, y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \\ \theta(L, Y) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \Rightarrow C_1 e^{\lambda L} + C_2 e^{-\lambda L} \end{array} \right.$$

$$C_2 = (-e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda} & e^{-\lambda} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$x(X) = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x''}{x} = 0 \Rightarrow x'' = 0 \quad x' = C_1 \quad X = C_2$$

$$B.C \left\{ \begin{array}{l} \theta(0, Y) = 0 \quad X(0) Y(Y) \Rightarrow X(0) = 0 = C_2 N \\ \theta(L, Y) = 0 \quad X(L) Y(Y) \Rightarrow X(L) = 0 = C_1 L \Rightarrow C_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{X''}{X} = +\lambda^2 \Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$T^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow t = \pm \lambda$$

$$X(X) = C_1 e^{\lambda X} + C_2 e^{-\lambda X}$$

$$\begin{cases} \theta(0,y)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0 \\ \theta(l,y)=0 \Rightarrow X(L) \Rightarrow C_1 e^{\lambda L} + C_2 e^{-\lambda L} = 0 \Rightarrow C_2(-e^{\lambda L} + e^{-\lambda L}) = 0 \end{cases}$$

$$e^{-\lambda l} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$X(X) = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow t^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow T = \pm i\lambda$$

$$x(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$B.C \begin{cases} \theta(0,Y)=0 \Rightarrow X(0)=0=C_1=0 \\ \theta(0,Y)=0 \Rightarrow X(L)=0=C_2 \sin \pi L \Rightarrow \begin{cases} C_2=0 \\ \sin \lambda L \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda L = h \pi X(x) Y(y)$$

$$\lambda = \frac{h \pi}{l} \rightarrow n = 1, 2, 3, \dots$$

$$x(x) C_2 \sin \frac{h \pi}{l} x \rightarrow h = 1, 2, 3, \dots$$

$$-\frac{y''}{y} = -\lambda^2 \Rightarrow y'' - \lambda^2 y = 0$$

$$t^2 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow T = \pm \lambda$$

$$Y(Y) = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}$$

$$\theta(x, 0) = 0 = X(x) Y(0) \Rightarrow y(0) = 0$$

$$0 = C_3 + C_4 \Rightarrow C_4 = -C_3$$

$$\begin{aligned} Y(y) &= 2 C_3 \left(\frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2} \right) = 2 C_3 \sinh \lambda y \\ &= 2 C_3 \sinh \left(\frac{n \pi}{l} y \right) \end{aligned}$$

$$\theta = X(x) Y(y) \Rightarrow \theta = b \sinh \left(\frac{n \pi}{l} y \right) \sin \left(\frac{n \pi}{l} x \right)$$

$$\Rightarrow \theta(x, y) = \sum b_n \sinh \left(\frac{n \pi}{l} y \right) \sin \left(\frac{n \pi}{l} x \right)$$

$$\theta(x, w) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sinh \left(\frac{n \pi}{l} w \right) \sin \left(\frac{n \pi}{l} x \right)$$

$$F(x) = 1$$

$$B_n = b_n \sinh \left(\frac{n \pi}{l} w \right)$$

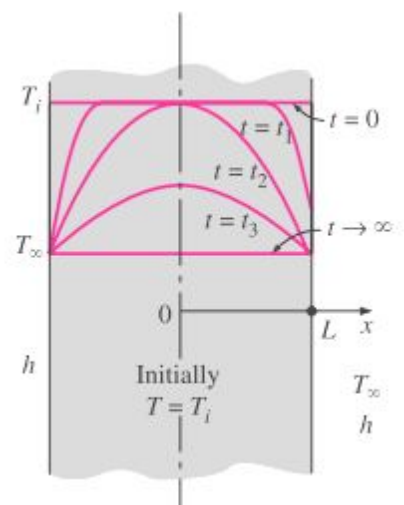
$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l 1 \times \sin \frac{n \pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \frac{-1}{\frac{n \pi}{l}} \cos \frac{n \pi}{l} x \Big|_0^l$$

$$b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l} w\right) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \Rightarrow b_n = \frac{2(1 + (-1)^{n+1})}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{l} w\right)}$$

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{l} y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{l} w\right)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

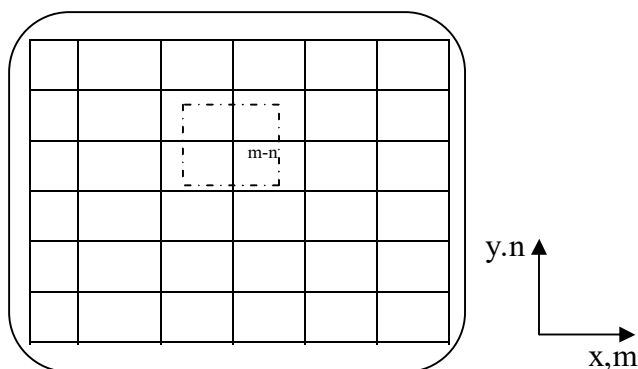
این مثال حل تحلیلی ندارند و با روش عددی حل میشوند.



روش حل معادله دو بعدی (روش عددی برای حل معادله هدایت):

روش اختلاف محدود Finite Difference:

در این روش دمای اطراف ناحیه مورد نظر را ثابت در نظر میگیریم و هر چه تعداد نواحی بیشتر باشد دقت معادله نیز بالاتر خواهد بود ولی در عوض معادلات بیشتری بدست می آید.



روش اول:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{m-\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta X}$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{m+\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta X}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \Big|_{m,n} = \frac{\frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{m+\frac{1}{2},n} - \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta X}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \Big|_{m,n} &= \frac{\frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta X} - \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta X}}{\Delta X} \xrightarrow{\text{فاكتور } \Delta X} \\ &= \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{\Delta X^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{m,n} = \frac{\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m,n+\frac{1}{2}} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m,n+\frac{1}{2}} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{m,n-\frac{1}{2}} = \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{if } \Delta X = \Delta y$$

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

$$T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{4}$$

دمای 1 گره برابر با دمای گره های اطراف تقسیم بر 4.

روش دوم:

روش موازنه انرژی (حالت خاص حجم محدود)

فرضیات:

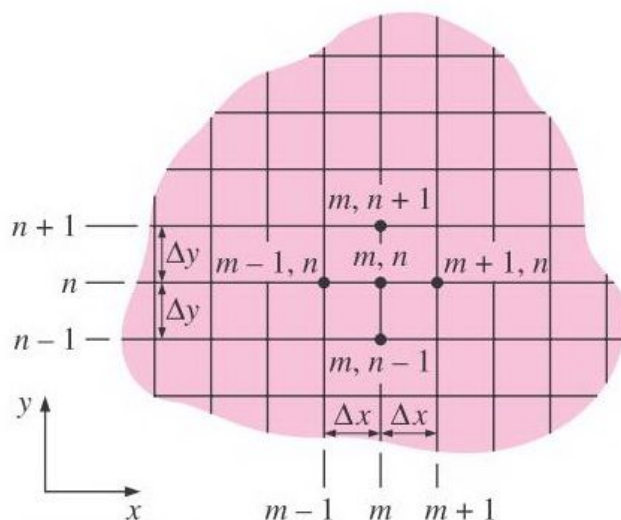
* با استفاده از قانون اول ترمودینامیک است.

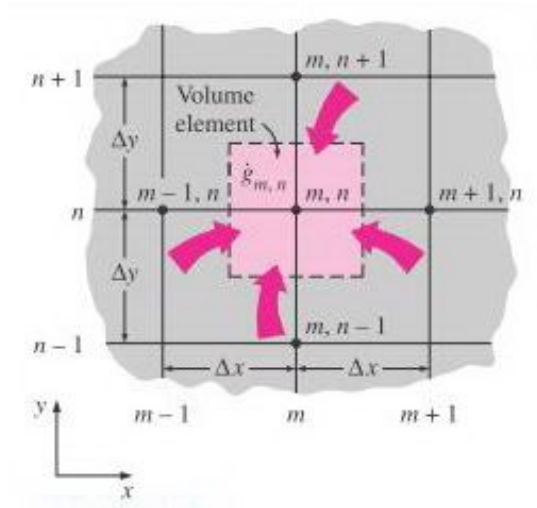
* در این روش منبع حرارتی هم میتوان در نظر گرفت.

* در این روش فرض نداشتن انرژی خروجی فرض درستی است.

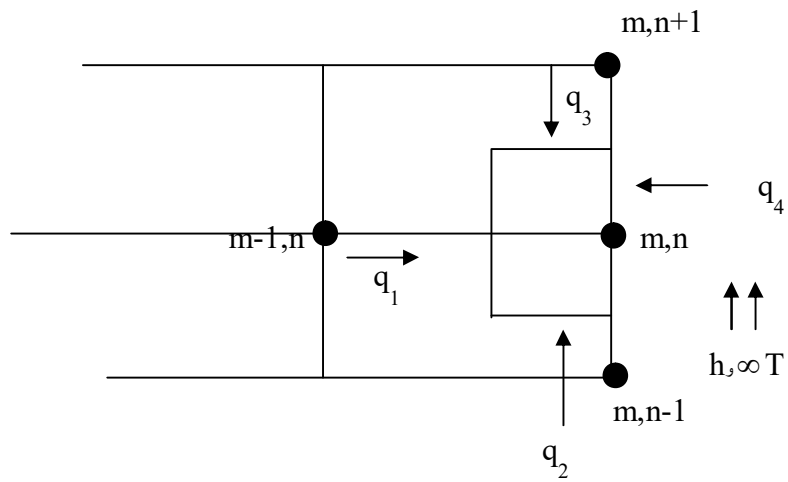
* در این روش المان بعد سوم را صفر در نظر میگیریم و تغییرات X را برابر تغییرات Y.

* k را ثابت در نظر میگیریم.





مثال:



$$q_1 = K(\Delta y) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta X}$$

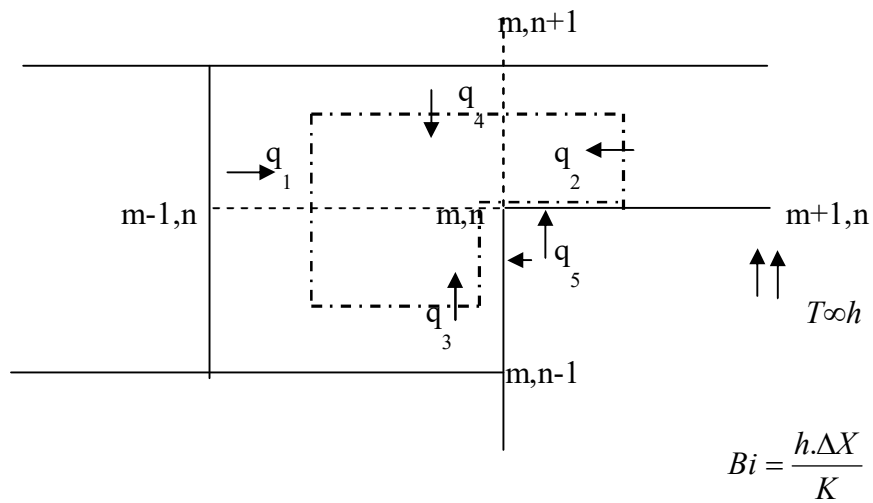
$$q_2 = K\left(\frac{\Delta X}{2}\right) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_3 = K\left(\frac{\Delta X}{2}\right) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_4 = h\Delta y(T_\infty - T_{m,n})$$

$$T_{m-1,n} + \frac{1}{2}(T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{h\Delta x}{K}T_\infty + \frac{q_G(\Delta X)}{2K} - T_{m,n}\left(2 - \frac{h\Delta x}{K}\right) = 0$$

مثال:



$$q_1 = k \Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta X}$$

$$q_2 = k \Delta X \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

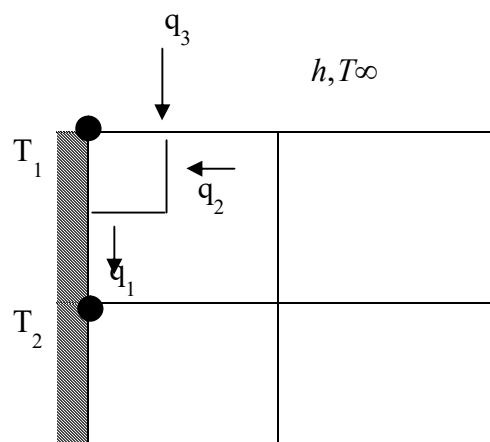
$$q_2 = K \frac{\Delta y}{2} \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta X}$$

$$q_3 = K \frac{\Delta X}{2} \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$q_5 = h \left(\frac{\Delta x}{2} \times 1 \right) (T_{\infty} - T_{m,n}) + h \frac{\Delta y}{2} (T_{\infty} - T_{m,n})$$

$$T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + \frac{1}{2} (T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) - T_{m,n} (3 + Bi) + Bi \cdot T_{\infty} = 0$$

مثال:



$$h = 200$$

$$k = 4 \frac{W}{m, K}$$

$$T_2 = 70^\circ C$$

$$T_3 = 70^\circ C$$

$$T_\infty = 40^\circ C$$

$$\Delta X = \Delta y = 1cm$$

$$T_1 = ?$$

$$q_1 = K \left(\frac{\Delta X}{2} \right) \left(\frac{T_2 - T_1}{\Delta y} \right)$$

$$q_2 = K \left(\frac{\Delta y}{2} \right) \left(\frac{T_3 - T_1}{\Delta X} \right)$$

$$q_3 = h \left(\frac{\Delta X}{2} \times 1 \right) (T_\infty - T_1)$$

$$T_2 + T_3 - T_1 \left(2 + \frac{h \Delta X}{K} \right) + \frac{h \Delta X}{K} \cdot T_\infty$$

$$Bi = \frac{h \Delta X}{K} = \frac{200 \times 0.01}{4} = 0.5$$

$$70 + 70 - T_1 (2 + 0.5) + 0.5 \times 40 = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{160}{2.5} = 64^\circ C$$

Chapter 5

فصل پنجم: رسانش گذرا

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Assumption : One Dimensional- Steady state – No heat generation

: PDE Equation $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$

Initial Condition $T(x,0) = f(x)$

Boundary condition :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0,t) \\ T(L,t)=0 \end{array} \right.$$

$$T(x,t) = X_n T_{(x)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' T = \frac{1}{\alpha} X T' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{T'}{T} = 0 \\ + \lambda^2 \\ - \lambda^2 \end{array} \right.$$

جهت حل مسئله از روش حرارتی فشرده استفاده می شود .

فرض اول :تغییر دما به صورت یکنواخت انجام می شود .

1. باید جسم کوچک فرض شود .

2. K جسم زیاد باشد.

3. h سیال حاوی جسم کمتر باشد .

$$\downarrow B_i = \frac{(\downarrow h)(L \downarrow)}{(K \uparrow)}$$

قانون اول بقای انرژی :

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v}$$

$$-\dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v}$$

$$hA(T - T_{\infty}) = \rho v C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \rho v = m$$

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v}$$

$$\theta = T - T_{\infty} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{hA}{\rho v C_p} \theta \Rightarrow \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^t -\frac{hA}{\rho v C_p} dt$$

$$\theta = T - T_{\infty} = \theta_i$$

$$t = 0 \quad T = T_i$$

$$\ln \frac{\theta}{\theta_i} = -\frac{hA}{\rho v C_p} t$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-\left(\frac{hA}{\rho v C_p}\right)t} \Rightarrow \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\left(\frac{hA}{\rho v C_p}\right)t}$$

$$B_i = \frac{hL_c}{k} = \frac{h(V/A)}{k} \Rightarrow \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-B_i f_0}$$

$$-B_i f_0 = \frac{h}{\rho L_c C_p} t = \frac{hL_c}{k} \cdot f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp(-B_i \cdot F_0)$$

مثال:

ساچمه های فولادی ضدزنگ ها به طور یکنواخت تا دمای $850^{\circ}C$ گرم شده با فرو

بردن در روغن $40^{\circ}C$ درجه خنک می شد قطر ساچمه ها 20mm و ضریب جابه جایی

1000 اگر سرمایش تا زمانی ادامه یابد تا دمای سطح ساچمه به $100^{\circ}C$ برسد مدت

زمان را حساب کنید.

$$T_{\infty} = 40^{\circ}C$$

$$h = 1000 \frac{W}{m^2 K}$$

$$T_1 = 100^{\circ}C$$

جدول 1

$\ell, cp \rightarrow$

مربوط به جسم جامد

$$\begin{cases} \ell = 7900 \frac{kg}{m^3} \\ C C_p = 477 \frac{J}{kg.k} \end{cases}$$

جدول الف-1

$$\frac{100 - 40}{850 - 40} = e^{\frac{-1000 W_{m^2.k}}{7900 \frac{kg}{m^3} \times 0.01 m \times 477 \frac{J}{kg.k}}} \times T$$

$$S = \frac{A}{V} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{60}{810}\right) = -0.079t \Rightarrow T = 32.95 \text{ Sec}$$

Chapter 6: Introduction of convection (fundamental of convection)

$$dq'' = h(T_s - T_\infty) \Rightarrow q = hA_s(T_s - T_\infty)$$

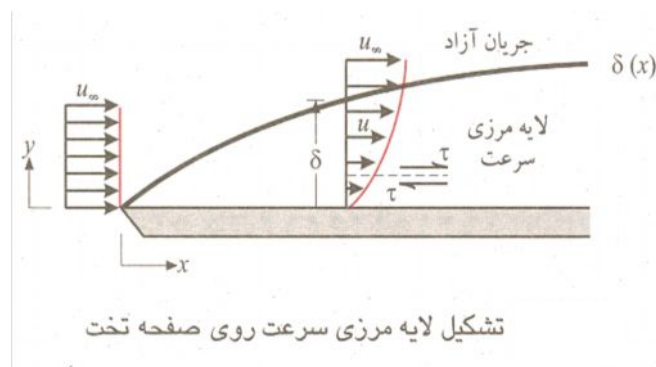
* **h** به پارامترهای زیر بستگی دارد (خواص سیال)

$$h \begin{cases} \text{fluid properties (k, cp, } \mu, \rho) \\ \text{surface Geometry} \end{cases}$$

$$q = \int h(T_s - T_\infty) dA_s = (T_s - T_\infty) \int_{A_s} h dA_s = hA_s(T_s - T_\infty)$$

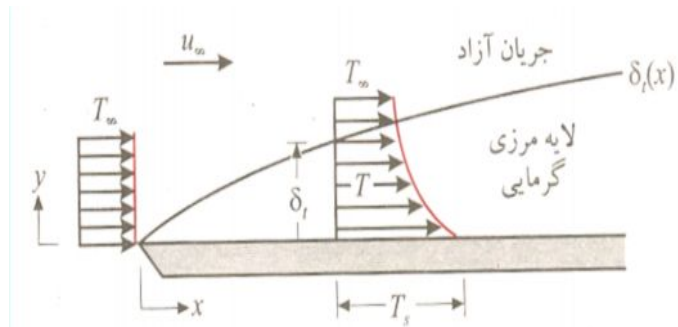
$$h = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h dA_s \quad h = \frac{1}{l} \int_0^l h dx$$

لایه مرزی سرعت: (the velocity Boundary Layer)



* لایه نازکی اطراف سطح موردنظر که تحت تأثیر اصطکاک سطح است را لایه مرزی می گویند. در واقع قسمتی که سرعت در آن از سرعت سطح آزاد کمتر است. جریان در لایه مرزی، جریان ویسکوز و خارج آن جریان غیرویسکوز است.

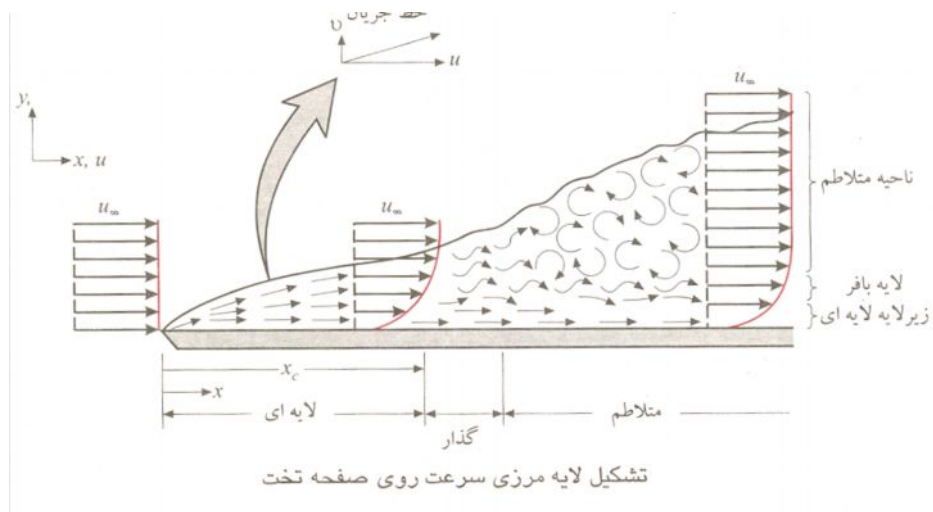
لایه مرزی گرمایی: **The thermal Boundary Layer**



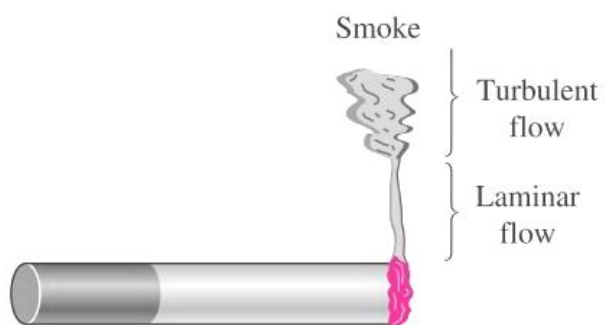
تشکیل لایه مرزی گرمایی روی صفحه تخت تکدما

$$\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = 0.99$$

* رشد لایه مرزی در قسمت turbulent بیشتر است.



تشکیل لایه مرزی سرعت روی صفحه تخت



Laminar and turbulent flow regimes of cigarette smoke.

$$Re = \frac{\rho u_{\infty} x}{\mu} = \frac{U_{\infty} x}{\nu}$$

$$Re_{crit} = 5 \times 10^5 \text{ (for flat plate)}$$

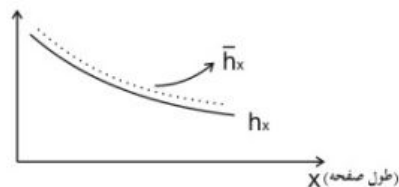
* رینولدز بحرانی به زبری سطح خیلی وابسته است. هر چه زبری سطح بیشتر باشد رینولدز بحرانی کمتر است. یعنی جریان سریعتر بحرانی می‌شود.

* پارامتری که در لایه مرزی سرعت برای ما مهم است ضریب اصطکاک است چون با داشتن ضریب اصطکاک می‌توانیم برشی را حساب کنیم.

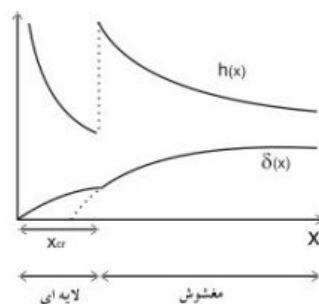
و با داشتن تنش برشی نیروی مقاومت سیال اصطکاک را بدست می‌آوریم.

$$CF = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

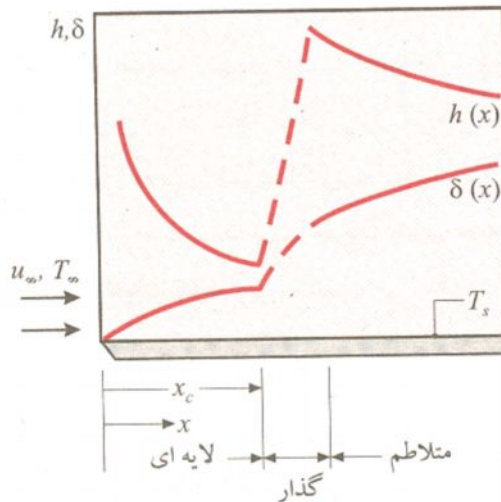
* در لایه مرزی حرارت پارامتر کلیدی ضریب حرارت است (h)



- مقایسه تغییرات لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال حرارت جابجایی در طول یک صفحه:



* نمودار تغییرات h با افزایش x



۵- تغییر ضخامت δ لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال گرمای جابه جایی محلی h برای جریان روی صفحه تخت تک دما

$$\text{لایه اول: } q_{cond}'' = q_{conve}''$$

$$\Rightarrow -k \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_s - T_\infty)$$

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y} \big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

(1) در ابتدای سطح ضخامت لایه مرزی صفر است در نتیجه $\frac{\partial T}{\partial y}$ اندازه بزرگی دارد ولی با

پیش رفتن در جهت ضخامت لایه مرزی بیشتر می شود در نتیجه تغییرات $\frac{\partial T}{\partial y}$ کمتر است و

ناگهانی نیست.

(2) در ناحیه Turbulent چون تغییرات بسیار مغشوش است در نتیجه انتقال حرارت بیشتر

است. به علت انتقال مولکول ها از لایه های پایین به بالا (همیشه مقدار h ناحیه Turbulent

از مقدار h ناحیه laminar بیشتر است.

3) در مورد ناحیه Transition بحث نمی‌شود.

4) برای جریان روی سطح همیشه لایه مرزی سرعت وجود دارد ولی در یک جریان روی سطح لایه مرزی گرمایی زمانی وجود دارد که بین سطح و سیال اختلاف دما داشته باشیم.

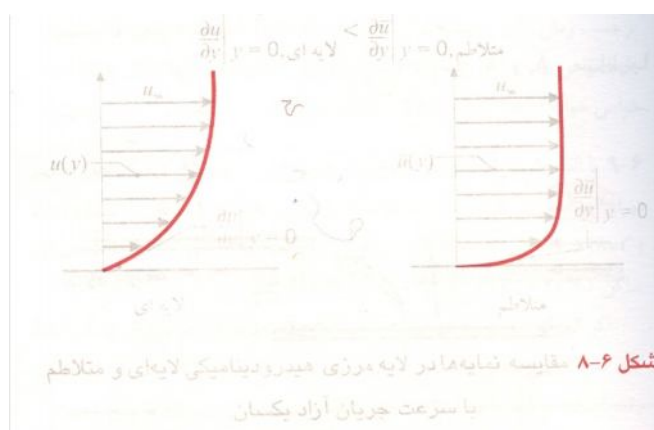
$$S \uparrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial Y} \downarrow \\ PS \downarrow \rightarrow CF \downarrow \end{array} \right.$$

$$St \uparrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial Y} \downarrow \\ h \downarrow \rightarrow q'' \downarrow \end{array} \right.$$

5. در قسمت توربولنت کاهش CF آرامتر از قسمت لمینار است .

6. ضریب اصطکاک در قسمت Turbulent بیشتر از ضریب اصطکاک در قسمت laminar است .

* تغییرات سرعت در قسمت خطی (laminar):



$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

* مقدار $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$ برای لایه laminar کوچکتر از لایه turbulent است در نتیجه چون این

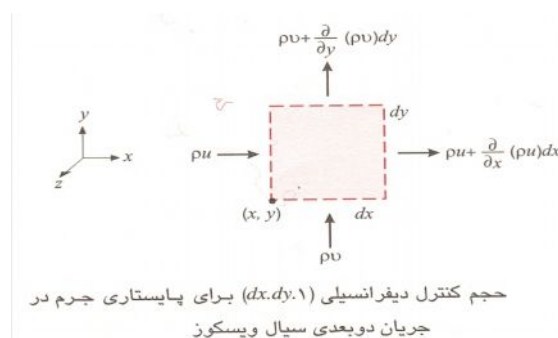
شیب بیشتر است. تنش برش turbulent بیشتر از laminar است.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \tau_{turbulent} \right\rangle \tau_{laminar}$$

* چون کنش برش در سطح آشفته بیشتر است پس C_f ناحیه آشفته از ناحیه خطی:

معادلات لایه مرزی The Boundary Layer Equations

The conservation of mass Equation (معادله بقای جرم)



$$\sum \dot{m}_i - \sum \dot{m}_e = \Delta \dot{m}_{c,v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pu(dx \times 1) + pv(dy \times 1) = \left[pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} dx \right] (dy \times 1) +$$

$$+ \left[pv + \frac{\partial(pv)}{\partial y} dy \right] (dx \times 1) \Rightarrow \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} = 0 \text{ معادله پیوستگی در دو بعد}$$

$$\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} = 0 \text{ معادله پیوستگی در سه بعد}$$

Unsteady:

$$\Delta \dot{m}_{c,v} = \frac{\partial(p d_x d_y d_z)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} \text{ معادله پیوستگی برای حالت ناپایدار}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\overline{P\vec{V}}) = \text{Div}(p\vec{v}) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$p\vec{v} = pui + pvj + pwk$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

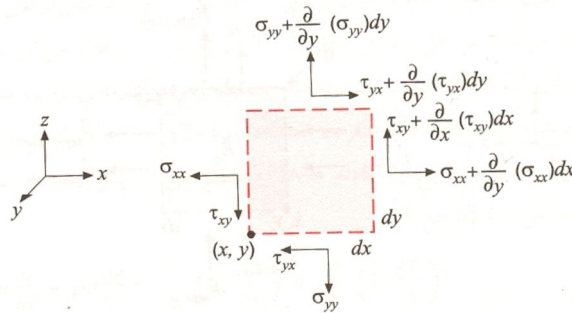
If: $p = \rho e$ (incompressible fluid):

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

معادله پیوستگی برای سیال تراکم ناپذیر

** برای سیال تراکم ناپذیر دیورژانس سرعت برابر صفر است.

Conservation of momentum Equation: (قانون دوم نیوتن): معادله بقای مومنتوم



$$\text{Assumption: } \begin{cases} 1) \text{ دو بعدی (two dimensional)} \\ 2) \text{ تراکم ناپذیر (incompressible)} \\ 3) \text{ شرایط - پایدار (steady)} \\ 4) \text{ خواص سیال ثابت (constant properties)} \end{cases}$$

$$Q_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\delta_m = P(dx \cdot dy)$$

$$\sum F_x = \max \Rightarrow p(dy \times 1) - \left[p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right] (dy \times 1) -$$

$$-\tau(dx \times \mathbf{i}) + \left[\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right] (dx \times \mathbf{i}) + \underbrace{\times (dx dy dz)}_{\text{نیروی حجمی}} = p d_x dy$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + X = p \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{p} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x} + x \right)$$

$$x = 0 \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{x-direction momentum Equation}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \quad y = 0, \quad x - \text{direction}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

* ترم نیروی حجمی فقط در سیالات که سرعت بالاست مانند صورت مدنظر گرفته می شوند.

$$B.C \begin{cases} y = 0 & u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0 \\ y \rightarrow \infty & u(x, \infty) = U_\infty, v(x, \infty) = 0 \\ x = 0 & u(0, y) = U_\infty, v(0, y) = 0 \end{cases} \quad \text{خارج لایه مرزی}$$

$$U \gg v \quad \frac{\partial v}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$$

(1) در خارج لایه مرزی v صفر می باشد و در مرز لایه مرزی سرعت صفر است یعنی $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ صفراند.

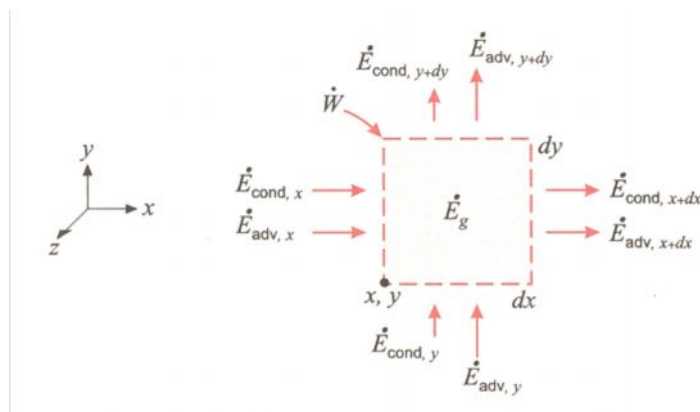
(2) جریان تراکم ناپذیر به جریان می گویند که سرعت آن کمتر از **0.3** سرعت صورت باشد.

$$\text{for flat plate } \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ معادلهٔ مومنوم برای صفر است}$$

3. Conservation of Energy Equation: انرژی برای معادله بقای انرژی for laminar flow

$$\text{Assumption: } \begin{cases} 1. \text{two Dimensional} \\ 2. \text{steady state} \\ 3. \text{in compressible fluid} \\ 4. \text{constant properties} \end{cases}$$



* انرژی از یک سیستم به شکل با محیط خود مبادله می‌شود: کار، حرارت، جرم

$$\begin{aligned} \dot{E}_{in, Heat, x} &= \dot{Q}_x \\ \dot{E}_{out, Heat, x} &= \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx \Rightarrow (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{Heat, x} = -\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} dy \right) dx \end{aligned}$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{Heat, y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} dx \right) dy = -k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{Heat, x} = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy$$

$$\dot{E}_{in, mass, x} = \rho \dot{e}_{stream} u dy$$

$$e_{strem} = utpo + ke + pe = h = CpT$$

$$\dot{E}_{in, mass, x} = pe_{strem} u dy + \frac{\partial(p u dy Cp T)}{\partial x} dx$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by, mass, x} = \frac{-\partial(uT)}{\partial x} Cp dx dy = -p C_p \left(u \frac{dT}{dx} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by, mass, y} = -p C_p \left(v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{by, mass, (x, y)} = -p C_p dx dy \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \text{ معادله پیوستگی (تراکم ناپذیر)}$$

$$\text{قانون اول ترمو: } \dot{E}_{in} + \dot{E}_G - \dot{E}_{out} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{c.v}$$

$$(\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{mass} + (\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out})_{Heat} = 0$$

$$-p C_p dx dy \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] + k dx dy \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{p C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Assumption: Steady , laminar, incompressible flow, with constant

Properties. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ continuity Equation (معادله پیوستگی)

$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ momentum E q.

$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\nu}{C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}_{\text{viscous dissipation } \mu Q}$ Energy Eq.

(1) اگر در رابطه انرژی سرعت صفر باشد یعنی سیال ساکن باشد $u, v = 0$ در نتیجه فقط ترم رسانش در معادله باقی می ماند که بیانگر آن است که انتقال حرارت فقط ناشی از رسانش است.

For flat plate: $\left\{ y > \delta \Rightarrow v = 0, u = u_{\infty} = cte \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0 \right.$

(2) در معادله انرژی از ترم $\frac{u}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ فقط در مواقعی نمی توان صرف نظر کرد که دارای سرعت صورت و یا روغن های با لزجت بالا باشیم. در این معادلات از اتلافات لزجت می توان صرف نظر کرد.

معادلات مومنوم ساده شده $\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} : \text{for flat plate} \right) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} (\text{negligible viscous dissipation}) \end{array} \right.$ مجهولات سرعت (v,u) و دما

* اگر سرعت مشخص باشد می توان تنش برشی و آنگاه نیروی اصطکاک دیواره را حساب کرد.

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow F_s = \tau_{s,A}$$

* چون خواص ثابت‌اند، معادله‌های مومنتوم و پیوستگی قابل حل می‌باشند و مؤلفه‌های سرعت به دست می‌آیند (u, v) ولی تا زمانی که میدان سرعت مشخص نشده باشد. نمی‌توان توزیع دما را به دست آورد.

* با به دست آوردن توزیع دما که از رابطه انرژی به دست می‌آید می‌توان ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی (h) را به دست آورد.

اعداد بدون بعد:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \text{ (for flat plate: } V = u_{\infty} \text{)}$$

L : طول مشخصه

$$R_e = \frac{\text{inertia force}}{\text{viscous force}} = \frac{vl}{\nu}$$

* اگر عدد رینولدز پایین باشد به این مفهوم است که نیروهای ویسکوز بیشتر از نیروهای اینرسی هستند. رینولدز بحرانی، رینولدزی است که جریان را از آرام به آشفته تبدیل می‌کند. * اگر Re بزرگ بود به این معنی است که نیروهای اینرسی بیشتر از نیروهای ویسکوزیته است. مثل ناحیه Turbolent

* هر چه زبری سطح بیشتر باشد، جریان سریعتر آشفته می‌شود یعنی در رینولدزهای پایین‌تری اتفاق می‌افتد.

ضریب بی‌بعد انتقال حرارت:

Nusselt number: (عدد ناسلت)

$$Nu = \frac{h_x \cdot x}{k_f}$$

$$k_f \text{ مربوط به سیال: } T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} \text{ (film temperature)}$$

k_f * باید در دمای τ_f خوانده شود.

عدد ناسلت: شیب بی بعد دما در سطح

3. prandtl number:
$$Pr = \frac{D}{\alpha} = \frac{\mu / p}{k} = \frac{\mu c_p}{k}$$

$$Pr = \frac{\text{پخش مولکولی مومنتوم}}{\text{پخش مولکولی گرمایی}} = \frac{\text{molecular diffusivity of momentum}}{\text{molecular diffusivity of Heat}}$$

* عدد پرانتل جزء خواص سیال است چون تمام مقادیر رابطه آن از خواص سیال می باشند.
پرانتل جز خواص یک سیال است. تنها عدد بدون بعدی است که به نوع سیال بستگی دارد.
اگر $Pr < 1$ یعنی انتقال حرارت سریعتر انجام می شود. در نتیجه لایه مرزی حرارتی بزرگتر از لایه مرزی سرعت است.

عدد پرانتل برای مواد مختلف:

$$Pr_{\text{liquid metal}} \ll 1 \quad 0.004-0.03$$

$$Pr_{\text{gass}} \approx 1 \quad 0.7-1$$

$$Pr_{\text{water}} > 1 \quad 1.3-17$$

$$Pr_{\text{oils}} \gg 1 \quad 50-10^5$$

* $Pr_{\text{gass}} \approx 1$ یعنی لایه مرزی حرارت و سرعت با یکدیگر برابرند.

* برای فلزات مایع $\delta_i > \delta$

* برای روغن ها $\delta > \delta_i$

* فلزات مایع دارای فشار بخار پایین (زود بخار می شوند) و ظرفیت گرمایی بالایی دارند ولی خوردگی ایجاد می کنند و واکنش را هستند.

$$\frac{\delta}{\delta_i} = Pr^{-n} \text{ : برای جریان لایه ای}$$

$$\begin{cases} \text{gasses : } P_r = 1 \quad \delta \approx \delta_t \\ \text{liquid metal : } P_r \ll 1 \quad \delta \ll \delta_t \\ \text{oils : } P_r \gg 1 \quad P_r \gg 1 \quad \delta \gg \delta_t \end{cases}$$

4. Peclet Number:

$$pe = Re \cdot pr$$

$$pe : Re, Pr \Rightarrow \frac{VL}{J} \cdot \frac{J}{X} \Rightarrow \frac{VL}{X}$$

5. Stanton Number: (عدد استانتون) $st = \frac{Nu}{pe}$

$$St : \frac{Nu}{Pe} = \frac{\frac{hl}{kf}}{\frac{vl}{x}} = \frac{h \frac{kf}{pcp}}{kf v} = \frac{h}{pcpv}$$

6. Colburn j factor: (عدد کولبرن) $J = St \cdot pr^{\frac{1}{3}}$

7. Grashof Number: (عدد گراشف) $Gr = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)l^3}{\nu^2} = \frac{\text{Buoyancy force}}{\text{viscous force}}$

8. $Ra : Gr \cdot Pr$

اصلاح شده تشابه Re : (Chilton-Colburn Analogy)

$$\frac{cf}{2} = st \cdot pr^{\frac{2}{3}}$$

$$0.6 \leq pr \leq 60$$

خیلی از سیالات را در بر می گیرد همیشه در صفحه تخت صادق چه در حالت laminar و چه Turbolent این تشابه برای داخل لوله ها در جریان laminar این صادق نیست . ولی برای جریان Turbolent می توانیم به کار ببریم . چون در جریان Turbolent تغییرات فشار در راستای x خیلی کم است (نداریم) ولی در جریان laminar تغییرات فشار در راستای x داریم.

تحلیل ارتباط بین مومنتوم و انتقال حرارت:

Analogies between momentum and Heat transfer:

$$C_f = \frac{\tau_s}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad F_f = T_s \cdot A = C_f \cdot \frac{1}{2} \rho V^2 A$$

$$h, Nu = \frac{h_x \cdot x}{k_f}$$

Reynolds Analogy: For steady, incompressible, laminar flow of a fluid with constant properties (جریان آرام با خواص ثابت)

$$\text{مومنتوم معادله: } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \right)$$

$$\text{معادله انرژی: } u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{negligible}$$

p^*, x^* : طول و فشار بی بد می باشند.

$$p^* = \frac{p}{\rho V^2}, \quad x^* = \frac{x}{l}$$

$$C_f / 2 = st \quad \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0, \quad Pr = 1 \quad (\text{flat plate})$$

chilton – Colburn Analogy:

$$\frac{C_f}{2} = st \cdot pr^{\frac{1}{4}} = j \quad 0.6 \leq pr \leq 60$$

$$st = \frac{Nu}{pe} = \frac{Nu}{Re \cdot pr} = \frac{\frac{hx}{k}}{\frac{vx}{v} \cdot \frac{v}{\alpha}} = \frac{h}{PV_{Cp}} \quad \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0$$

St: عددی بی بعد براساس h می باشد.

* روابط بالا برای جریان آرام و روی صفحه تخت صادق است. ولی برای جریان آرام درون

لوله صادق نیست. $\left(\frac{\Delta p^*}{\Delta x^*} \neq 0 \right)$

Chapter 7

External flow: جریان خارجی

* جریان خارجی، جریان‌هایی هستند که در آنها لایه مرزی بتواند آزادانه رشد کند.

Assumption: steady, laminar, incompressible flow of fluid

With constant properties: , $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (اتلاف ویسکوزیته ناچیز)

فرضیات: جریان پایدار، لایه‌ای، تراکم ناپذیر با خواص ثابت

* استخراج معادلات:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Similarity solution: روش تشابهی

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \Psi: \text{تابع جریان}$$

$$f f''' + f f'' = 0 \quad \text{Blasius Equation (معادله بلازیوس)}$$

$$\text{حل معادله} \quad \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \text{Re} = \frac{Vx}{\nu} = \frac{U_\infty x}{\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}} \Rightarrow \delta \propto x^{\frac{1}{2}} \quad \text{رابطه (1)}$$

نکات:

* در X یکسان ضخامت لایه مرزی سیال با ویسکوزیته بالاتر بیشتر است مثلاً آب و هوا ضخامت لایه مرزی آب بیشتر است. (هرچه ویسکوزیته سیال بیشتر باشد ضخامت لایه مرزی آن بیشتر است)

* رشد لایه مرزی در ناحیه laminar با $\sqrt{x}$ متناسب است.

* هرچه سرعت زیاد شود مخرج رابطه (1) بزرگتر می شود و ضخامت لایه مرزی کمتر می شود (در یک X مساوی)

$$\text{Turbulent: } \frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{\text{Re}_x^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow \delta \propto x^{\frac{4}{5}}$$

* رشد لایه مرزی در قسمت turbulent با $x^{\frac{4}{5}}$ متناسب است و از رشد لایه مرزی در ناحیه laminar بیشتر است.

For flat plate: (برای صفحه تخت)

$$\text{laminar: } \frac{\delta}{x} = \frac{5}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \quad \text{Re}_x = \frac{\rho v x}{\mu} = \frac{v x}{\nu}$$

$$\text{Re} < 5 \times 10^5 \quad C_f = \frac{0.664}{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \delta \propto x^{\frac{1}{2}}$$

From chilton – colburn analogy:

$$\frac{C_f}{2} = \text{St} \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_{x,\text{Pr}}} \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad C_f \propto \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow Nu_x = 0.332 Re_x^{\frac{1}{2}} \cdot pr^{\frac{1}{2}} = \frac{h_x \cdot x}{k} \rightarrow h \propto \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$0.6 \leq pr \leq 60$$

$$Nu_x = 0.565 Pe_x^{\frac{1}{2}} \begin{cases} pr \leq 0.05 \\ pr \geq 100 \end{cases}$$

برای فلزات مایع با عدد pr بسیار کوچک

$$\frac{\delta}{\delta_t} = pr^{\frac{1}{2}} \rightarrow \delta_t = \frac{\delta}{pr^{\frac{1}{2}}}$$

For flat plate & turbulent:

$$5 \times 10^5 < Re_x < 10^9$$

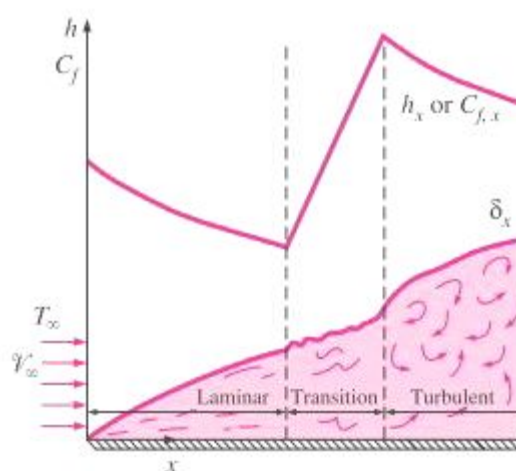
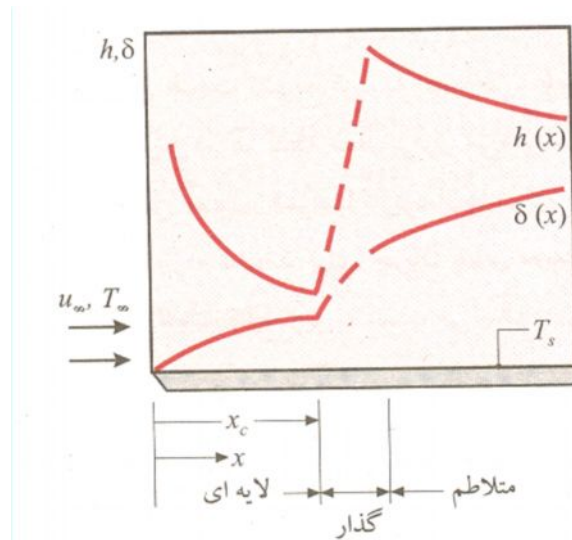
$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.38}{Re_x^{\frac{1}{2}}} \quad C_f = \frac{0.0592}{Re_x^{\frac{1}{2}}} \rightarrow C_f \propto x^{\frac{1}{2}}$$

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{\frac{4}{5}} \cdot pr^{\frac{1}{5}} = \frac{h_x \cdot x}{k} \rightarrow h \propto x^{\frac{1}{5}} \quad \delta \approx \delta_t$$

$$\delta \propto x^{\frac{4}{5}}$$

* رشد لایه مرزی در قسمت laminar از قسمت turbulent بیشتر است.

$laminar = \frac{s}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5}{Re_x^{\frac{1}{2}}}$	$cf_x = \frac{0.664}{Re_x^{\frac{1}{2}}}$	$S \propto X^{\frac{1}{2}}$
$Turbulent = \frac{s}{x} = \frac{0.382}{Re_x^{\frac{1}{5}}}$	$cf_x = \frac{0.0592}{Re_x^{\frac{1}{5}}}$	$S \propto X^{\frac{4}{5}}$



Laminar: $h = \sqrt{h_x}$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} = \frac{h_x \cdot x}{k} \Rightarrow h_x = \text{answer} \Rightarrow h = \text{answer}$$

$$\overline{Nu} = \sqrt{Nu_x} = 0.664 Re_x^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$\overline{C_f} = C_{fx} = \sqrt{\frac{0.664}{Re_x^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1.328}{Re_x^{\frac{1}{2}}}$$

* عدد ناسلت برای حالات مختلف انتقال حرارت ($q = cte, T_s = cte$)

Laminar:

$$q'' = \text{const} \quad \text{tan} \quad t \quad \begin{cases} Nu_x = 0.453 Re_x^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \\ \text{Turbulent} : Nu_x = 0.0308 Re_x^{\frac{4}{5}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad Nu_{q''=cte} > Nu_{T=cte}$$

عدد ناسلت برای حالت سطح با شار حرارت ثابت بیشتر از حالت سطح با دما ثابت است.

$$T_s = cte \quad \begin{cases} \text{laminar} : Nu_x = 0.332 Re_x^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \\ \text{turbulent} : Nu_x = 0.0296 Re_x^{\frac{4}{5}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

سوال:

در قسمت laminar اختلاف بیشتر است یا Turbolent؟ در laminar

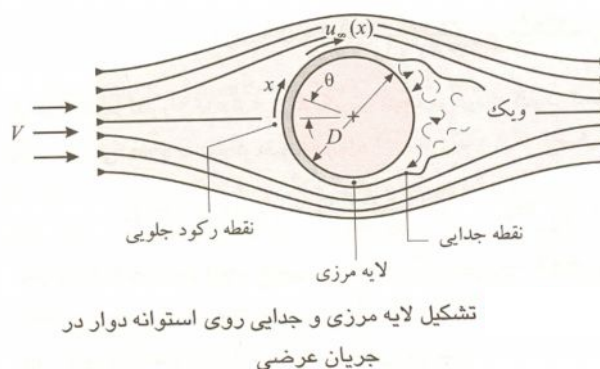
$$\text{la min ar} \frac{Nu_{q''=cte}}{Nu_{T=cte}} = \frac{0.453}{0.332} \cong 1.36 \quad \text{بیشتر } 36\%$$

$$\text{Turbolent} \frac{Nu_{q''=cte}}{Nu_{T=cte}} = \frac{0.0308}{0.0296} \approx 1.04 \quad \text{بیشتر از } 0.04\%$$

* در جریان laminar ضریب انتقال حرارت در شار ثابت 36% بیشتر از دما ثابت است.

و در جریان tubulet ضریب انتقال حرارت در شار ثابت 0.04% بیشتر از دما ثابت است.

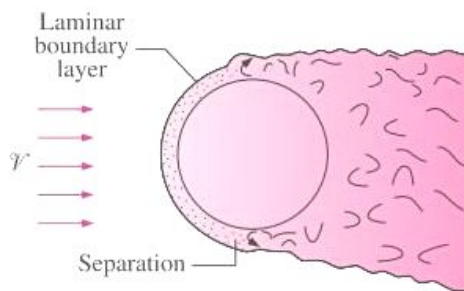
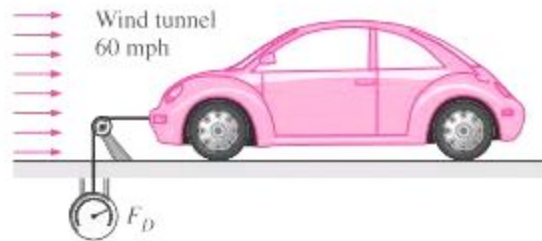
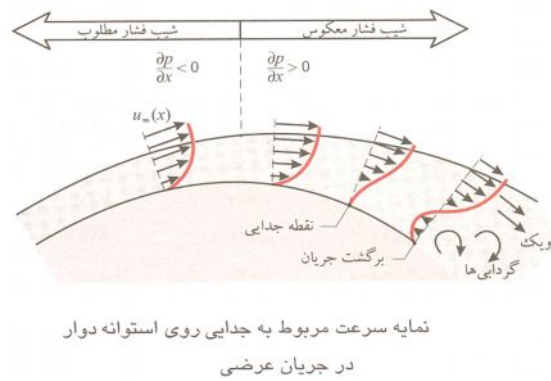
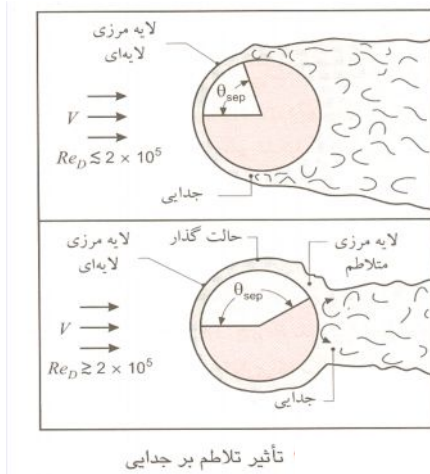
* بررسی حرکت جریان روی لوله استوانه‌ای:



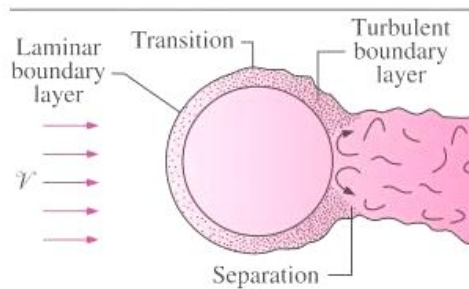
$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = cte \quad \text{برنولی}$$

$$z = cte$$

* در نقطه A با توجه به رابطه برنولی چون سرعت صفر است بیشترین فشار را داریم



(a) Laminar flow ($Re < 2 \times 10^5$)



Laminar: $\theta_{s,p} \approx 8^\circ$

$$Re_D = \frac{PVD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

$$Re_{D_{cr}} = z \times 10^5$$

brug :D

C: نیرویی که به جسم وارد می‌شود.

$$C_D = C_{D, friction} + C_{D, pressure}$$

$$\text{Lurbulet: } \theta_{s.p} \approx 140^\circ$$

Re بحرانی برای صفحه $Re=5.10^5$

Re بحرانی برای استوانه ای و کره $Re=2.10^5$

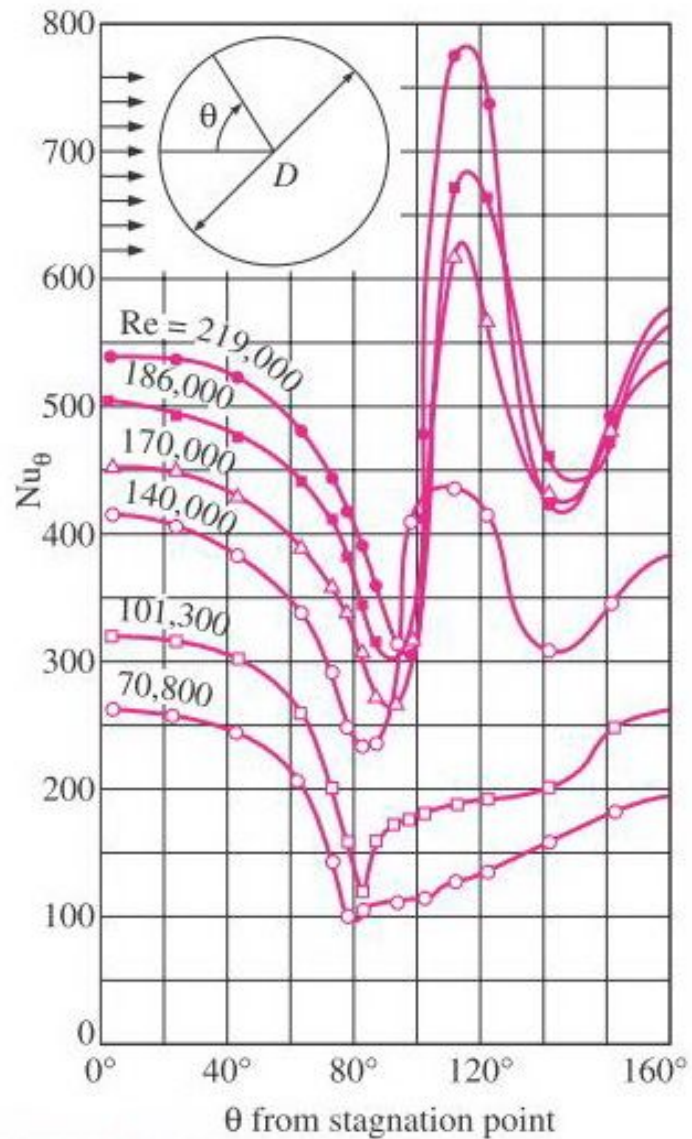
این اعداد به شدت به زبری بستگی دارد چون هر چه سطح زبرتر باشد جریان سریعتر Turbolent می شود و هر چه صافتر باشد در جریان پائین تری جریان Turbolent می شود.

سوال:

*نقطه جدایی به laminar یا Turbolint بودن جریان ربطی دارد یا نه ؟

*در laminar یا در Turbolent ؟ چه عاملی سبب جدایی می شود؟

*چرا توپ های گلف را زبر می سازند؟

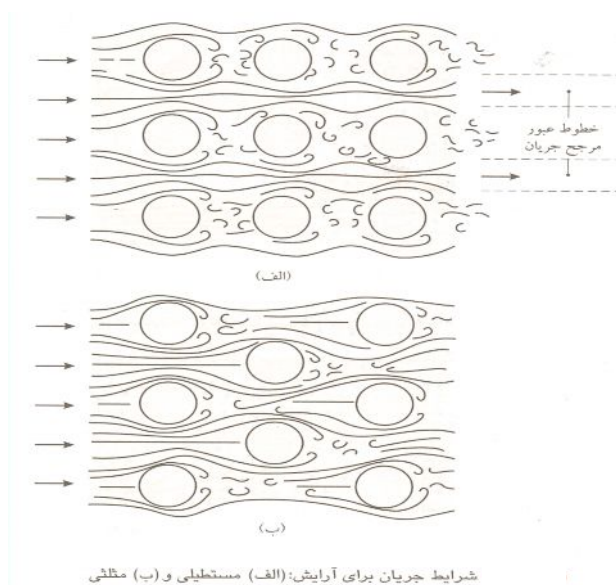


* این نمودار دارای دو نقطه $\min$ است اولین $\min$ به دلیل تبدیل جریان آرام به آشسته است و دومین نقطه $\min$ به دلیل نقطه جدایی است.

* در جریان Turbulent 2 تا $\min$ داریم Min دومی همان نقطه جدایی است $\min$ اولی تبدیل laminar به Turbulent است .

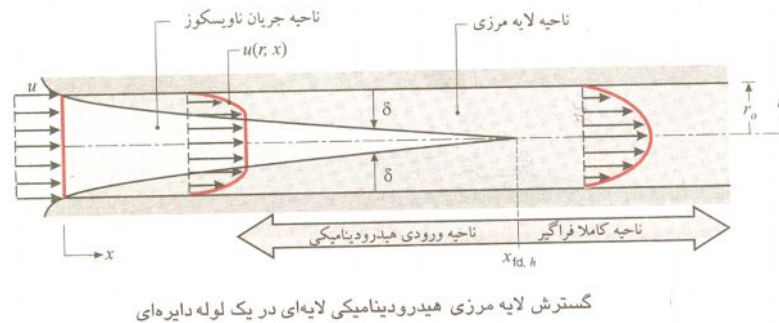
* در صفحه تخت ابتدا گرادیان زیاد است سپس بخاطر رشد لایه مرزی افت داریم و بعد از آن بخاطر تبدیل جریان laminar به Turbulent افزایش داریم و بعد از آن بخاطر رشد لایه مرزی افت داریم .

جریان روی دسته لوله‌ها: *Flow across tube banks*



*در لوله‌های دوم و سوم انتقال حرارت بیشتر است چون در اثر برخورد جریان با لوله اول جریان turbulent ایجاد می‌شود.

Chapter 8: Internal flow: جریان داخلی



$$\begin{cases} \text{Laminar : } \left(\frac{x_{fd, h}}{D} \right)_{low} = 0.05 Re_D \\ \text{turbulent : } 10 \leq \left(\frac{x_{fd, h}}{D} \right)_{turb} \leq 60 \end{cases}$$

Turbulent: $x_{fd, h} \approx 10D$

$$Re_D = \frac{\rho u_m D}{\mu}$$

$$\dot{m} = \rho u_m A = (\rho u_m D) \frac{\pi D}{4}$$

$$Re_D = \frac{4\dot{m}}{\mu \pi D}$$

$$Re_{cir} \approx 2300$$

$Re_{cir} : 10^4$: کاملاً متلاطم

لایه مرزی نمی تواند آزادانه حرکت کند در لوله ها در ناحیه غیر چسبنده سیال هنوز تحت تأثیر ویسکوزیته (چسبندگی قرار نگرفته است.) از طول ورودی سرعت به بعد را جریان کاملاً توسعه یافته می گویند.

سرعت تابعی x هم تابعی از شعاع است.

اگر لوله ما دایره ای شکل نباشد و قطر را نداشتیم از قطر هیدرولیکی استفاده می کنیم.

$$Dh = \frac{4A}{P}$$

$$Dh = \frac{4 \frac{\pi d^2}{4}}{\pi D} = D$$

$$Dh = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$Dh = \frac{4a^2}{4a} = a$$

مقایسه پیشینه در جریان آرام و جریان آشفته:

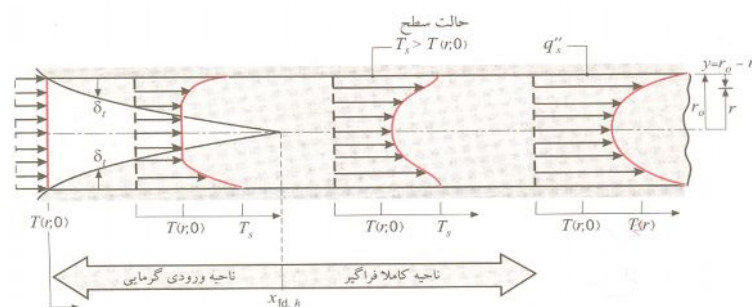
* سرعت در مرکز لوله ($U_{\max}$) در لوله جریان Laminar از لوله با جریان turbulent در صورت ثابت بودن دبی بیشتر است. چون:

$$\dot{m} = cte \Rightarrow \rho u_{m,A} = cte \Rightarrow U_{mlam} = U_{mtur} \Rightarrow U_{\max_{lam}} > U_{\max_{tur}}$$

$$la \min ar : f = \frac{4}{C_f}$$

* جریان سیال وارد لوله می شود فرض کنیم دمای سیال و سطح مساوی نباشد سپس یک لایه مرزی حرارتی بوجود می آید.

* از طول ناحیه گرمایی به بعد جریان کاملاً توسعه نیافته است اگر دمای سطح بیشتر از دمای سیال باشد min دما در مرکز لوله اتفاق می افتد.



گسترش لایه مرزی گرمایی در لوله دایره‌ای گرم شده

$$\begin{cases} \text{laminar : } \left(\frac{x_{fd,t}}{D} \right)_{lam} = 0.05 Re_D \cdot Pr \\ \text{turbulent : } \left(\frac{x_{fd,t}}{D} \right)_{turb} \approx b \Rightarrow x_{fd,t} = 10 \cdot D \end{cases}$$

* در جریان کاملاً فراگیر گرمایی سیالی با خواص ثابت ضریبی جا به جایی محل مستقل از X ثابت است.

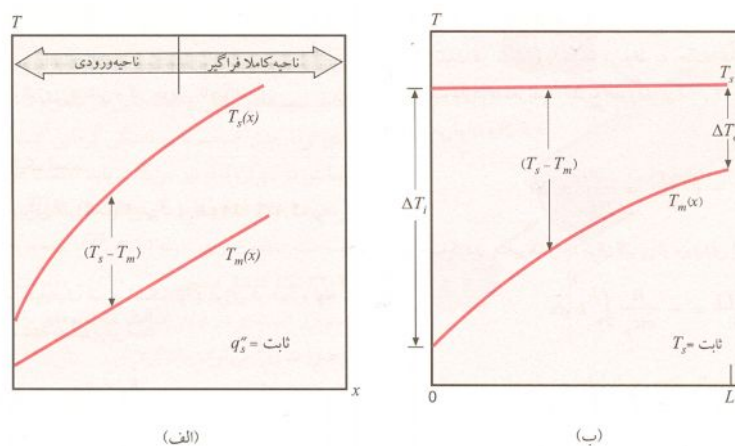
* اگر روغنی در حالت laminar داشتیم کل جریان را می توانیم توسعه یافته در نظر بگیریم
فزاات مایع خیلی سریع جریان توسعه یافته می شود.

در مرز لوله ها $cond = conr$ چون سرعت روی سطح لوله ها صفر است .

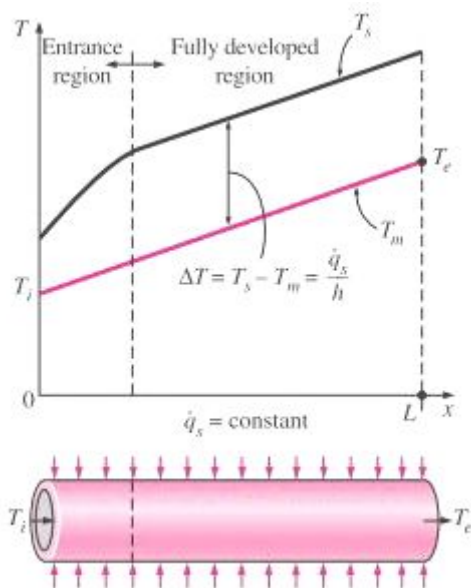
$$h = -k \frac{\partial T}{\partial V} / = h = (T_s - T_m)$$

$$\Rightarrow h = \frac{-kf \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{r=R}}{T_s - T_m}$$

* هنگامی که دمای سطح ثابت باشد شار حرارتی ثابت نیست.



تغییرات محوری دما برای انتقال گرما در لوله. (الف) شار گرمای ثابت در سطح، (ب) دمای ثابت در سطح



$$q'' = h(T_s - T_m)$$

$$q'' = h(T_s - T_m) = cte$$

* در نمودار چون q'' ثابت است هر چه h کمتر باشد باید ΔT بیشتر باشد و با افزایش h مقدار ΔT کاهش می‌یابد.

عدد ناسلت در جریان آشفته:

$$\text{Turbulent: } Nu = 0.023 Re^{0.8} pr^n \quad 0.6 < pr < 160 \quad Re > 10^4$$

$$\begin{cases} \text{Heating } T_s > T_m & n = 0.4 \\ \text{cooling } T_s < T_m & n = 0.3 \end{cases}$$

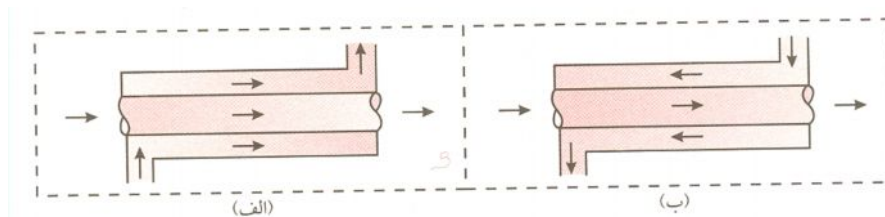
* زمان جریان توسعه یافته است (در جریان که $\frac{l}{D} \geq 10$)

Chapter 11

Heat Exchangers:

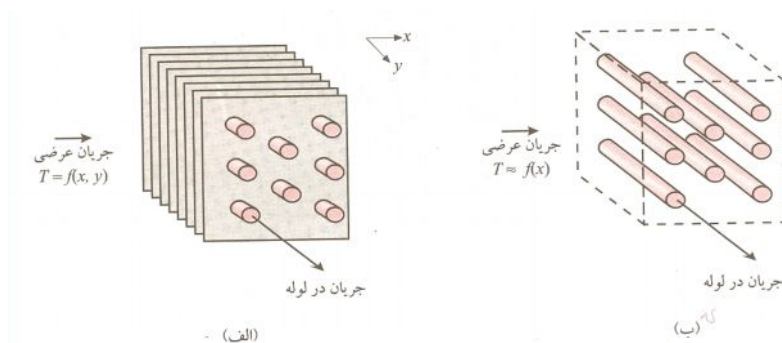
Heat Exchangers Types : $\begin{cases} \text{flow Grrangement} & (\text{آرایش جریان}) \\ \text{Type of construction} & (\text{نوع ساختار}) \end{cases}$

1. Double pipe: (دو لوله‌ای)



مبدل‌های گرمایی لوله‌ای هم‌مرکز. (الف) جریان هم‌سو، (ب) جریان ناهم‌سو

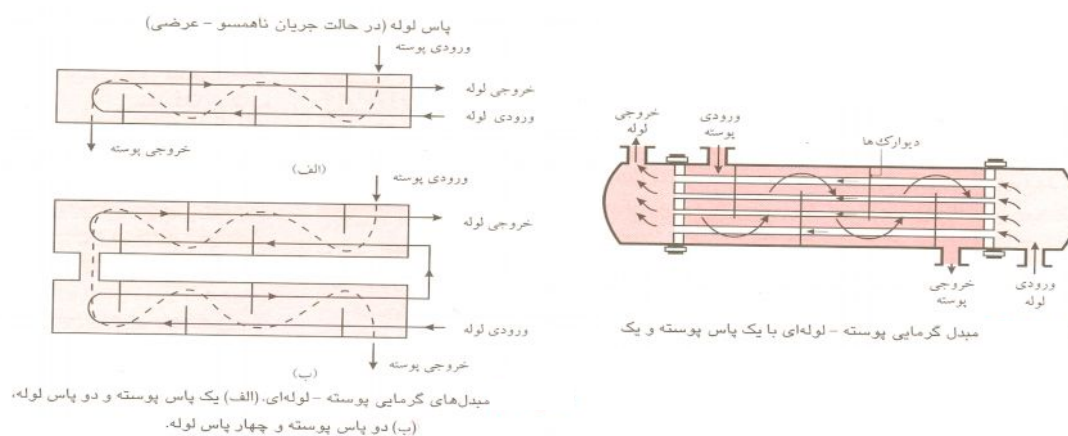
2. جریان عمود بر دسته لوله‌ها



مبدل‌های گرمایی با جریان عرضی. (الف) پرده‌دار که در آن هر دو سیال مخلوط نشده‌اند، و (ب) بدون پرده که در آن یک سیال مخلوط شده با سیال دیگر مخلوط شده است.

* لوله‌ها بدون پرده‌اند و جریان خارج لوله‌ها مخلوط است.

3. shell & Tube Heat Exhonger: مبدل‌های لوله پوسته‌ای



مبدل گرمایی پوسته - لوله‌ای با یک پاس پوسته و یک

مبدل‌های گرمایی پوسته - لوله‌ای. (الف) یک پاس پوسته و دو پاس لوله، (ب) دو پاس پوسته و چهار پاس لوله.

* در مبدل‌های با لوله U شکل به یک sheat نیاز است ولی در شکل بالا دو sheat نیاز است ولی عیب آنها این است که تمیز کردن آنها سخت‌تر از لوله‌های مستقیم است.

4. Compact Heat Exch: مبدل‌های حرارتی فشرده:

* منظور از فشرده بودن این است که در حجم کوچکی تعداد زیادی صفحه قرار داده شده است. compact ها برای زمانی استفاده می‌شوند که ضریب انتقال حرارت خیلی پایین باشد و نیاز به مساحت بالا داشته باشیم.

محاسبات مبدل‌ها:

ضریب کلی انتقال حرارت: U :

$$q = UA\Delta T$$

$$R_i = \frac{1}{h_i A_i}, R_r = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k l}, R_o = \frac{1}{h_o A_o}$$

R_f : ضریب گرفتگی که به سرعت سیال - دمای کارکرد در مدت کارکرد بستگی دارد.

$$A_i = \pi D_i l = 2\pi r_i l$$

$$A_o = \pi D_o l = 2\pi r_o l$$

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_{tot}} \quad R_t = R_i + R_r + R_o = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi k l} + \frac{1}{h_o A_o}$$

$$UA = \frac{1}{R_t}$$

* معادلات حل شده برای زمانی است که در مبدل‌ها رسوب نداشته باشیم.

حل معادلات با در نظر گرفتن رسوب:

- * مقدار رسوب با افزایش دما افزایش می‌یابد. و رسوب باعث کاهش انتقال حرارت می‌شود.
- * لوله‌ها معمولاً از جنسی انتخاب می‌شوند که ضریب انتقال حرارت بالایی (k) داشته باشند مثلاً مس، از طرف دیگر باید در مقابل تنش‌های حرارت مقاوم باشد.
- * در محاسبات معمولاً از مقاومت R_f چون خیلی کوچک است صرف‌نظر می‌شود.

با کم بودن $(r_o - r_i)t$

$$R_f = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi kl}$$

در نتیجه اگر از مقاومت R_f و تأثیر رسوب صرف‌نظر کنیم داریم:

* ضریب کلی انتقال حرارت به h کوچکتر بستگی دارد.

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}}$$

Heat Exchanger thermal Analysis:

شکل

Assumptions: $\Delta KE, \Delta PE \cong 0$ - Adiabatic- constant properties

Constant prppert: $\Rightarrow \Delta h = C_p \Delta T$

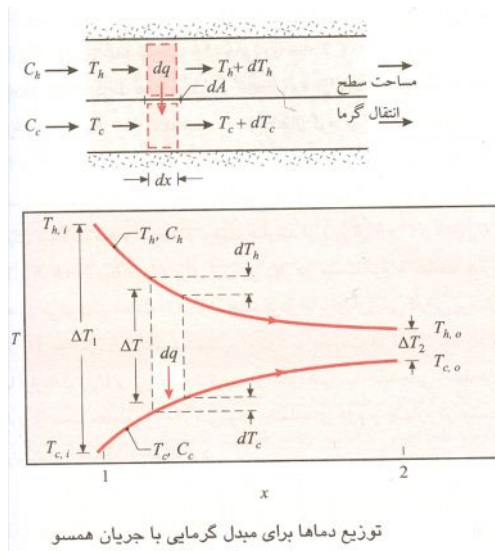
$$\Rightarrow \dot{Q}_C = \dot{m} \Delta h = \dot{m}_c C_{p_c} \Delta T$$

$$= \dot{m}_c c_p (T_{c_o} - T_{c_i})$$

$$\dot{Q}_H = -\dot{m} \Delta h = \dot{m}_h c_{p_h} (T_{h_i} - T_{h_o}) \quad \Rightarrow \dot{m}_c c_{p_c} \Delta T_c = \dot{m}_h c_{p_h} \Delta T_h$$

این رابطه مستقل از نوع مبدل و آرایش جریان است.

Parallel flow:



* در این نمودار ΔT تغییر می کند.

روش های تجزیه و تحلیل مبدل های حرارتی

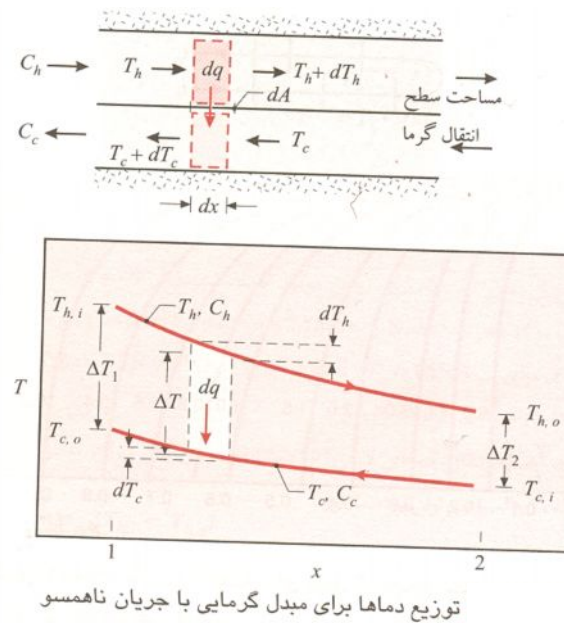
LMTD: log Mean Temperatue Difference

ϵ -NTU: Effectivenss Number of Transfer Unit

$$q = UA\Delta T_{lm}$$

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)}$$

$$\Delta T_{lm,PF} \Rightarrow \begin{cases} \Delta T_1 = T_{h,i} - T_{c,i} \\ \Delta T_2 = T_{h,o} - T_{c,o} \end{cases}$$



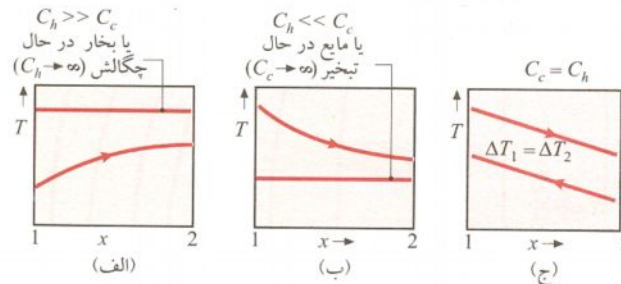
* در این نمودار ΔT تقریباً ثابت است.

$$\text{counter flow : } \begin{cases} \Delta T_1 = T_{h,i} - T_{c,o} \\ \Delta T_2 = T_{h,o} - T_{c,i} \end{cases}$$

$$\Delta T_{lm,cf} > \Delta T_{lm,pE}$$

ΔT در جریان مخالف از ΔT در جریان موازی بیشتر است.

حالات خاص: *Special cases*



شرایط خاص مبدل گرمایی. (الف) $C_h \gg C_c$ یا بخار در حال چگالش ($C_h \rightarrow \infty$) (ب) مایع در حال تبخیر یا $C_h \ll C_c$ ($C_c \rightarrow \infty$) (ج) مبدل گرمایی با جریان ناهمسو و ظرفیت‌های گرمایی برابر ($C_h = C_c$).

$$\dot{Q}_H = \dot{m}_h C_{p_h} \Delta T_h$$

$$\dot{Q}_C = \dot{m}_c c_{p_c} \Delta T_c$$

$$\dot{m}_h c_{p_h} \gg \dot{m}_c c_{p_c}$$

$$c_h \gg C_c$$

* دو نوع مبدل ذکر شده مستقل از آرایش جریان هستند.

Cross flow or multipass flow:

$$q = FUA\Delta T_{lm}$$

F : correction factor

مثل:

مبدل گرمایی پوسته-لوله‌ای برای گرمایش $2/5 \text{ kg/s}$ آب از 15°C تا 85°C طراحی می‌شود. گرمایش یا عبور روغن موتور گرم، با دمای 160°C ، در سمت پوسته مبدل انجام می‌شود. ضریب متوسط جابه‌جایی بین روغن و سطح خارجی لوله‌ها، $h_o = 40 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$. آب از ده لوله داخل پوسته می‌گذرد. لوله‌ها جدار نازک، هر یک به قطر $D = 25 \text{ mm}$ و با هشت پاس در پوسته، هستند. اگر روغن با دمای 100°C از مبدل خارج شود، آهنگ جریان چقدر است؟ برای گرمایش خواسته شده، طول لوله‌ها چقدر باید باشد؟

حل:

$$\dot{Q}_C = \dot{Q}_h$$

$$\dot{m}_c C_{p_c} (T_{c,o} - T_{c,i}) = \dot{m}_h c_{p_h} (T_{h,o} - T_{h,i}) \quad ((1) \text{ رابطه})$$

$$T_{ov,c} = \frac{15 + 85}{2} = 50^\circ C \xrightarrow[A \rightarrow \phi]{\text{جدول}} C_{p_{av}} = 4181 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$T_{av,h} = \frac{160 + 100}{2} = 130^\circ C = 403 K \xrightarrow{\text{جدول}} C_{p_{av,h}} = 2350 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$\xrightarrow{\text{در رابطه (1)}} 2.5 \frac{kg}{s} (4181)(85 - 15) = \dot{m}_h (2350)(160 - 100) \Rightarrow \dot{m}_h = 5.19 \frac{kg}{s}$$

بدست آوردن کل طول لوله‌ها: $q = FUA\Delta T_{lm}$

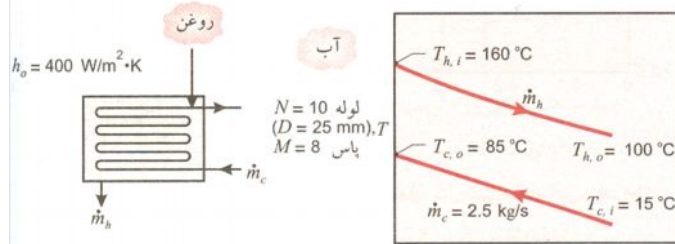
$$q = \dot{m}_c c_{p_c} \Delta T_c = (2.5)(4181)(85 - 15) \Rightarrow q = 731675 W$$

$$= 731.675 kW, \Delta T_{l,m} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)}$$

$$\Delta T_1 = T_{h,i} - T_{c,o} = 160 - 85 = 75^\circ C$$

$$\Delta T_2 = T_{c,o} - T_{c,i} = 100 - 15 = 85^\circ C$$

$$\Rightarrow \Delta T_{lm} = \frac{75 - 85}{\ln\left(\frac{75}{85}\right)} = 79.9^\circ C$$



$$U = \frac{1}{\frac{1}{hi} + \frac{1}{ho}} \quad Re = \frac{\rho \dot{m}}{\mu \pi D}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \Big|_{T=50^\circ C} = 548 \times 10^{-9} \frac{N \cdot s}{m^2} \\ pr \Big|_{T=50^\circ C} = 3.56, k = 643 \times 10^{-2} \end{array} \right.$$

$$\text{لوله} \quad \dot{m} = \frac{\dot{m}_c}{N} = \frac{2.5}{10} = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Re = \frac{4 \times 0.25}{548 \times 10^{-9} \times \pi \times 0.025} \Rightarrow Re = 23234 > 10000 \text{ جريان را می‌توان توربولنت فرض کرد.}$$

$$Nu = 0.023 \cdot Re^{0.8} \cdot pr^{0.4} \Rightarrow Nu = 0.023 (23234)^{0.8} (3.56)^{0.4} = 119$$

$$Nu = \frac{hiD}{k} = \frac{hi(0.025)}{0.643} = 119 \Rightarrow hi = 3061 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}} = \frac{1}{\frac{1}{30.61} + \frac{1}{40.0}} = 354$$

$$p = \frac{t_o - t_i}{T_i - t_i}$$

$$R = \frac{T_i - T_o}{t_o - t_i}$$

$$\Rightarrow p = \frac{85 - 15}{160 - 15} = \frac{70}{145} = 0.48$$

$$R = \frac{160 - 100}{85 - 15} = \frac{60}{70} = 0.86$$

$$\Rightarrow F = 0.87$$

$$q = FUA.\Delta T_{lm} \Rightarrow 731675W = 0.87 \times 354.A \times 39.9$$

$$\Rightarrow A = 29.7m^2 \text{ مساحت مورد نیاز برای انتقال حرارت}$$

$$A = 10 \times \pi D l \Rightarrow l = 4.7m$$

* روش $\varepsilon - NTU$: زمانی دماهای مجهول باشند.

$$\dot{Q}_h = \dot{Q}_c \Rightarrow \dot{m}_h C_{p_h} (Th_i - Th_o) = \dot{m}_c \dot{C}_{pc} (T_{co} - T_{ci})$$

* ماکزیمم اختلاف دماها را ورودی‌ها دارند.

$$(\Delta T_{\max} = Th_i - T_{ci})$$

$$\dot{m}c_p = C$$

$$\Rightarrow C_c (T_{bc,o} - T_{c,i}) = C_h (Th_i - Th_o)$$

$$q_{\max} = C_{\min} \cdot \Delta T_{\max} = C_{\min} (Th_i - T_{c,i})$$

$$\begin{cases} * \text{ If } C_c < C_h \Rightarrow C_{\min} = C_c \\ * \text{ If } C_h < C_c \Rightarrow C_{\min} = C_h \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{q}{q_{\max}} \Rightarrow q = \varepsilon q_{\max} \quad \text{NTU: Number of Transfer Unit (پارامتر بدون بعد)}$$

$$NTU = \frac{UA}{\theta_{\min}}$$

جدول 3-11

$$\varepsilon = f(NTU, C_r), \quad C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}}$$

$$NTU = f(\varepsilon, C_r)$$

شکل‌های 11-14 تا 11-19 بررسی شود.

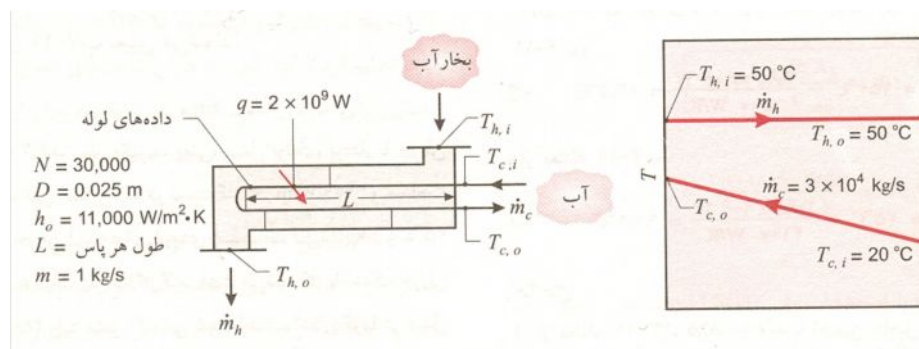
Condansor: $C_h \gg C_c$, Evaportor: $C_c \gg C_h \Rightarrow C_r = 0$.

$$C_r = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 - e^{-NTU}$$

* زمانی که می‌خواهیم مبدل را طراحی کنیم از روش اول LMTD استفاده می‌کنیم اما زمانی که انتخاب نوع مبدل منظور است از روش $\varepsilon - NTU$ استفاده می‌کنیم.

مثال:

کندانسور نیروگاه بخار یک مبدل گرمایی است که بخار آب در آن به آب مایع تبدیل می‌شود. فرض کنید کندانسور از نوع مبدل گرمایی پوسته-لوله‌ای است که از یک پوسته و 30000 لوله، هر کدام با دوپاس، تشکیل شده است. لوله‌ها جدار نازک با $D = 25 \text{ mm}$ هستند، و بخار آب روی سطح خارجی آنها، با ضریب جابه‌جایی $h_o = 11000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ، چگالیده می‌شود. آهنگ انتقال گرمای q مورد نیاز در مبدل $2 \times 10^9 \text{ W}$ است، و این را با عبور آب سرد با آهنگ $3 \times 10^4 \text{ kg/s}$ می‌توان تأمین کرد (بنابراین، آهنگ جریان در هر لوله 1 kg/s است). آ با 20°C وارد و بخار آب در 50°C چگالیده می‌شود. دمای آب سردی که از کندانسور خارج می‌شود چقدر است طول لوله مورد نیاز، L ، در هر پاس چقدر است؟



$$|q_h| = |q_c| \Rightarrow \dot{m}_c c_{p_c} (T_{c_o} - T_{c_i}) = \dot{m}_h c_{p_h} (T_{h_i} - T_{h_o})$$

$$q = \dot{m}_c \cdot c p_c (T_{c,o} - T_{c,i}) \Rightarrow 2 \times 10^4 \text{ W} = 3 \times 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{s}} 4179 (T_{c,o} - 20)$$

$$\Rightarrow T_{c,o} = 36^\circ \text{C}$$

F: در کندانسور و اواپراتور برابر یک است.

$$q = FUA\Delta T_{lm}, F = 1$$

$$\Delta T_1 = 50 - 20 = 30$$

$$\Delta T_2 = 50 - 36 = 14$$

$$\Delta T_{l,m} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \right)} = 21^\circ \text{C}$$

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}}, h_o =$$

$$T = 28^\circ \text{C} \begin{cases} \mu = 855 \times 10^{-6} \text{ N.s/m}^2 \\ K = 0.613 \text{ W/m.k} \\ \text{Pr} = 5.83 \end{cases} \quad \text{Re} = \frac{\rho \dot{m}}{\mu \pi D}, \dot{m} = \frac{3 \times 10^4}{3600} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Re} = \frac{4 \times 1}{855 \times \pi \times 10^{-6} \times 0.025} \Rightarrow \text{Re} = 59567 > 10^4 \Rightarrow \text{جريان: turbulent}$$

$$Nu_D = 0.023 \text{ Re}^{0.8} \cdot \text{Pr} = 0.023 (59567)^{0.8} (5.83)^{0.4} = 308$$

$$\Rightarrow \frac{h_i \times 0.025}{0.613} = 308 \Rightarrow h_i = 7552 \text{ W/m}^2 \cdot \text{k}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{7552} + \frac{1}{11000}} \Rightarrow U = 4478$$

U همیشه از دو h کمتر است.

$$\Rightarrow 2 \times 10^4 \text{ W} = 1 \times 4478 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{k}} A \times 21 \text{ K} \Rightarrow A = 21268$$

$$A = NM \pi D l = 30 \cdot 0.001 \times 2 \times \pi \times 0.025 \times l = 21268$$

$$\Rightarrow l = 4.51 \text{ m}$$

روش دوم:

$$C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = , \quad \varepsilon = \frac{q}{q_{\max}}$$

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} \quad \text{سیال سرد} \quad C_{\min} = \dot{m}_c C_p = 3 \times 10^4 \times 4179 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$= 1.25 \times 10^8 \frac{W}{K}$$

$$\varepsilon = 1 - e^{-NTU}$$

$$q_{\max} = C_{\min} \Delta T_{\max} = C_{\min} (T_{hi} - T_{ci}) = 1.25 \times 10^8 (50 - 20)$$

$$= 3.75 \times 10^9 W, \quad \varepsilon = \frac{q}{q_{\max}} = \frac{2 \times 10^9}{3.75 \times 10^9} = 0.53$$

$$\Rightarrow 0.53 = 1 - e^{-NTU} \Rightarrow e^{-NTU} = \frac{AU}{C_{\min}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.76 = \frac{4478A}{1.25 \times 10^8} \Rightarrow A = 21215$$

$$\Rightarrow 21215 = 30000 \times 2 \times \pi \times 0.025 \times l \Rightarrow l = 4.5$$

The End.



قطب علمی تبدیل انرژی
گروه تبدیل انرژی
دانشکده مهندسی مکانیک



مقدمه‌ای بر انتقال حرارت

سیامک کاظم‌زاده‌حنانی
مهدی کارزار جدی



تابستان ۱۳۸۴
ویرایش اول

عنوان: مقدمه‌ای بر انتقال حرارت
عنوان انگلیسی: An Introduction to Heat Transfer
نویسنده: سیامک کاظم‌زاده حنانی و مهدی کارزارجدی
تاریخ انتشار الکترونیکی: تابستان ۱۳۸۴
ویرایش اول

عنوان

پیشگفتار

فصل اول: مقدمه

- هدایت
- همرفت
- تابش

فصل دوم: انتقال حرارت هدایتی

- قانون فوریه
- معادله دیفرانسیل هدایت دائمی یک بعدی
- معادله دیفرانسیل هدایت دو بعدی دائمی
- معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی
- معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی و تابعی از زمان
- دیواره‌های چند لایه یا کامپوزیت
- ضریب انتقال حرارت شعاعی از لوله‌ها
- ضریب انتقال حرارت عمومی
- ضخامت بحرانی عایق
- انتقال حرارت در استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی
- انتقال حرارت در سطوح گسترش یافته
- پره با مقطع متغیر
- تعیین ضریب انتقال حرارت عمومی برای سطوح پره‌دار

فصل سوم: انتقال حرارت دوبعدی

- روش‌های تحلیلی (روش جداسازی متغیرها)
- روش‌های عددی
- روش اختلاف محدود

فصل چهارم: انتقال حرارت هدایت-ناپایدار و گذرا

- معادلات حاکم
- روش انباشته یا ظرفیت فشرده
- سیستم انباشته چندگانه
- هدایت گذرا در جسم نیمه بی‌نهایت
- هدایت گذرای یک بعدی در صفحه، استوانه و کره در معرض جابجایی

- صفحه بی‌نهایت
- استوانه بی‌نهایت
- کره
- هدایت گذرا در اجسام چند بعدی
- میله‌ای به طول بی‌نهایت
- مکعب به ابعاد ...
- استوانه به طول محدود و معین
- حل عددی معادله انتقال حرارت ناپایدار
- روش صریح
- روش ضمنی

فصل پنجم: انتقال حرارت جابجایی (جریان خارجی)

- مقایسه با مکانیک جامدات
- روش‌های تحلیلی
- مقایسه تغییرات لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال حرارت در طول صفحه
- معادلات لایه مرزی و تشابه رینولدز-کولبورن
- جریان از روی هندسه‌های مختلف
- رابطه تجربی هلیپرت

فصل ششم: انتقال حرارت جابجایی در لوله‌ها (جریان داخلی)

- دمای متوسط حجمی
- شرایط مرزی در جریان آرام توسعه یافته
- روابط تجربی و محاسباتی برای تعیین ضریب انتقال حرارت
- جریان لایه‌ای کاملاً توسعه یافته
- جریان لایه‌ای در حال توسعه در لوله‌های صاف دما ثابت
- جریان لایه‌ای در حال توسعه در لوله‌های شار حرارتی ثابت
- جریان مغشوش توسعه یافته در لوله‌های صاف

فصل هفتم: انتقال حرارت تابشی

- ضریب دید
- روابط بین ضریب دید
- انتقال حرارتی تابشی در اجسام سیاه

مراجع

پیشگفتار

جزوه حاضر خلاصه‌ای از مباحث درس انتقال حرارت ۱ می‌باشد که توسط اینجانب تدریس و به کمک همکار پژوهشی آقای مهندس کارزارجدی در دانشگاه صنعتی شریف تدوین شده است. دانشجویان عزیز می‌توانند از مطالب این جزوه به منظور آشنایی سریعتر با مطالب درس و یا اجتناب از جزوه نویسی در کلاس استفاده نمایند. در این جزوه ممکن است اشتباهات تایپی یا مفهومی وجود داشته باشد که با کمک دانشجویانم و یا سایر خوانندگان گرامی تصحیح خواهد شد. لازم است در اینجا از زحمات آقای بهرنگ اسدی و سرکار خانم پریسا حکیم جوادی که در جمع‌آوری جزوه حاضر مرا یاری کردند تشکر نمایم. تایپ این جزوه توسط سرکار خانم فرشته پورشریفی انجام شده که از ایشان نیز سپاسگزاری می‌گردد.

سیامک کاظم‌زاده حنانی - مهدی کارزارجدی

تهران - تابستان ۱۳۸۴

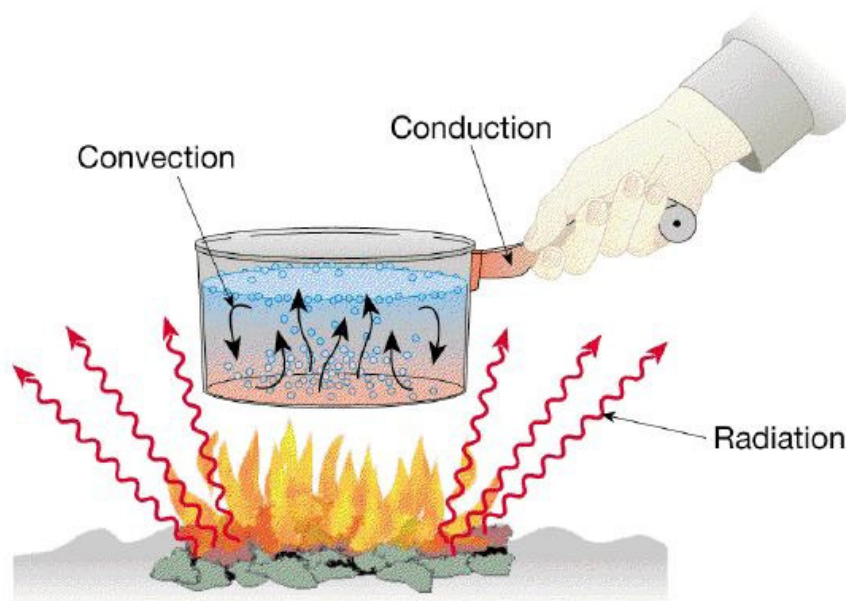
فصل اول: مقدمه

انواع مکانیزمهای انتقال حرارت Modes or Methods of Heat Transfer از نظر فیزیک کلاسیک انتقال حرارت توسط سه مکانیزم یا روش: ۱- هدایتی ۲- جابجایی (همرفت) ۳- تابشی انجام می‌شود (شکل ۱ را ببینید).

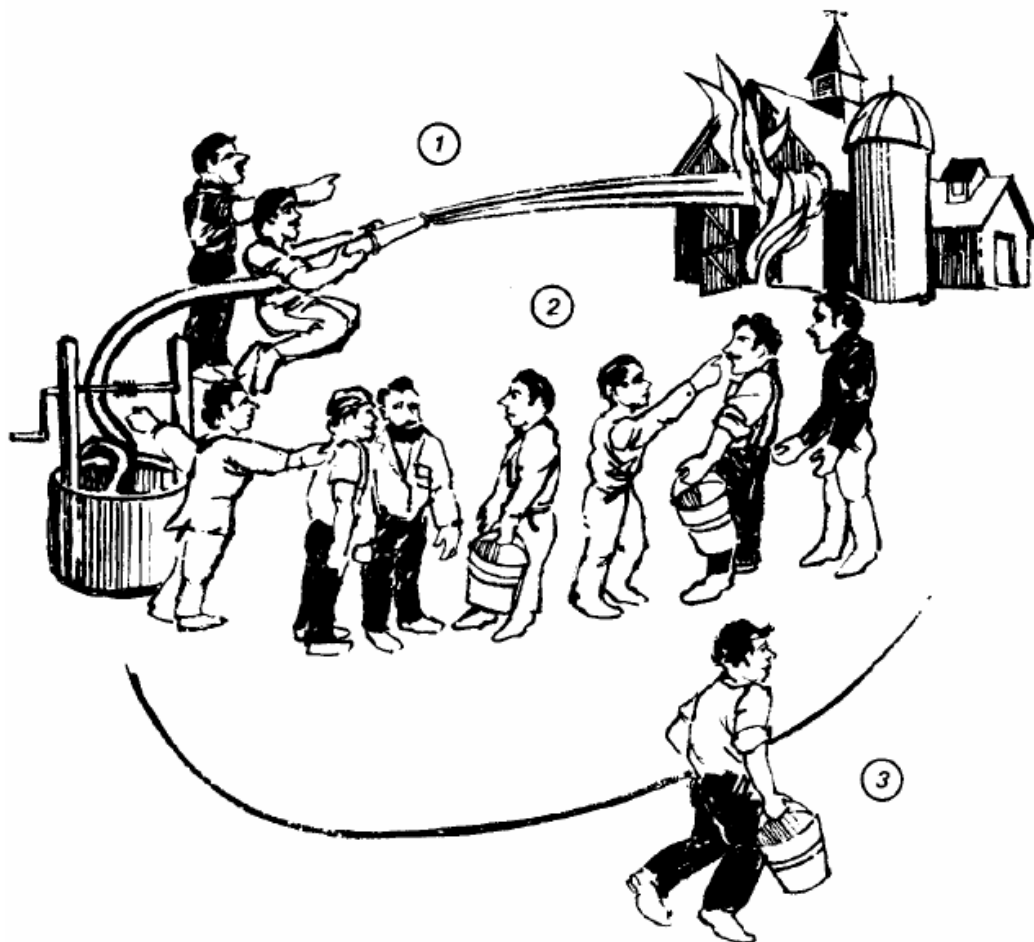
در شکل ۲ آنالوژی انتقال حرارت با انتقال آب از محل چاه به محل آتش‌سوزی به نمایش گذاشته شده‌است. همانگونه که مشاهده می‌گردد افراد برای انتقال آب از سه روش مختلف بهره گرفته‌اند: در حالت اول (که با شماره ۱) مشخص شده‌است آب بدون هیچ گونه وابستگی به محیط از منبع به محل مورد نظر منتقل می‌شود. این روش مشابه انتقال حرارت تشعشعی می‌باشد.

در حالت دوم (شماره ۲) دسته افراد با کمک هم آب را از طریق محیط از منبع به محل آتش‌سوزی منتقل می‌کنند. این روش مشابه انتقال حرارت هدایتی می‌باشد.

در حالت سوم (شماره ۳) دونده آب را از منبع به محل آتش‌سوزی منتقل می‌نماید. این روش همانند انتقال حرارت جابجایی می‌باشد.



شکل ۱. روش‌های مختلف انتقال حرارت



شکل ۲. شبیه سازی انتقال حرارت با انتقال آب [۱۰]

- هدایت (Conduction)

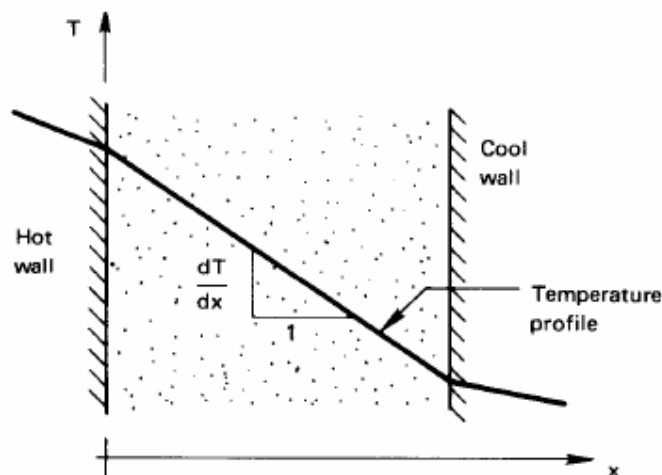
هدایت به انتقال گرما در جامدات و یا محیط‌های سیال ساکن در اثر اختلاف دما در این محیط‌ها انجام می‌گیرد. بطور کلی فرض بر این است که در اثر جابجایی ماکروسکوپیک محیط، گرما از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر منتقل نمی‌شود بلکه انتقال گرما توسط عواملی مانند حرکت تصادفی مولکول‌های گازی و یا ارتعاش شبکه کریستالی جامد انجام شود. در کتب کلاسیک انتقال حرارت مبحث انتقال حرارت به حالت‌های یک بعدی، دو بعدی، چند بعدی و دائمی و غیر دائمی تقسیم بندی شده‌است که در بخش‌های آتی بیشتر در این مورد بحث خواهیم کرد.

معادله حاکم بر انتقال حرارت هدایتی در حالت یک بعدی بصورت زیر نوشته می‌شود (قانون فوریه):

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (۱)$$

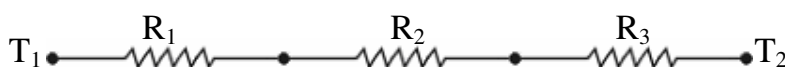
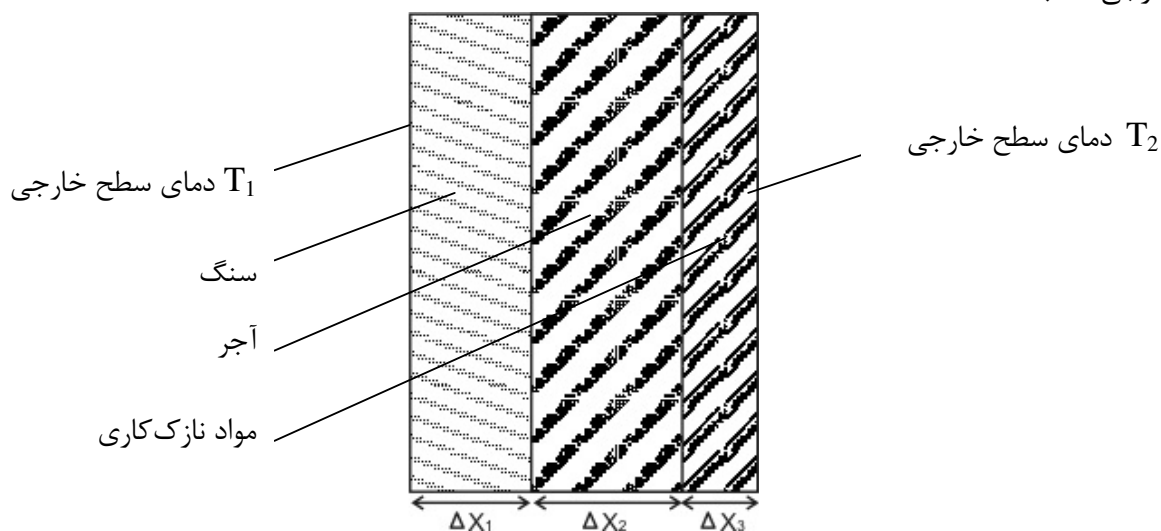
در رابطه فوق، q شار حرارتی [W/m^2]، T درجه حرارت [K]، $\frac{\partial T}{\partial x}$ گرادیان دما [K/m] و k ضریب انتقال حرارت هدایتی [W/mK] می‌باشد. مقدار k بستگی به محیطی دارد که در آن انتقال حرارت هدایتی انجام می‌گیرد، در محیط‌های فلزی مقدار k بزرگتر از محیط‌های غیر فلزی

می باشد. که با فرضیه انتقال حرارت توسط الکترون های آزاد سازگار است. همچنین گازها مانند هوا دارای ضریب هدایت پایین تری نسبت به جامدات می باشند. علامت منفی در رابطه (۱) بدین معنی است که در جهت افزایش مختصات x مقدار دما کاهش می یابد، به عبارت دیگر گرادیان دما $\frac{\partial T}{\partial x}$ کوچکتر از صفر است ولی q مثبت محاسبه می گردد.



شکل ۵. انتقال حرارت از دیواره

انتقال حرارت در دیوارهای خارجی ساختمان ها از جمله مثال های معمول و کلاسیک در کاربرد هدایت می باشد. مثلاً فرض کنید در شرایط دائمی دمای جدار خارجی دیوار T_1 و دمای جداره خارجی T_2 باشد.



شکل ۶. انتقال حرارت از دیواره چند لایه

قانون فوریه را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{R_t} \quad (2)$$

ملاحظه می‌شود که می‌توان جریان انتقال حرارت فوق را با جریان الکتریسیته شبیه‌سازی نمود به این ترتیب که q با مقدار جریان الکتریسیته، $\frac{\Delta x}{k}$ با مقاومت الکتریکی و ΔT را با اختلاف پتانسیل الکتریکی شبیه‌سازی نمود. به این ترتیب یک مدار سری مطابق شکل می‌توان تشکیل داد، برای مدار تشکیل شده خواهیم داشت:

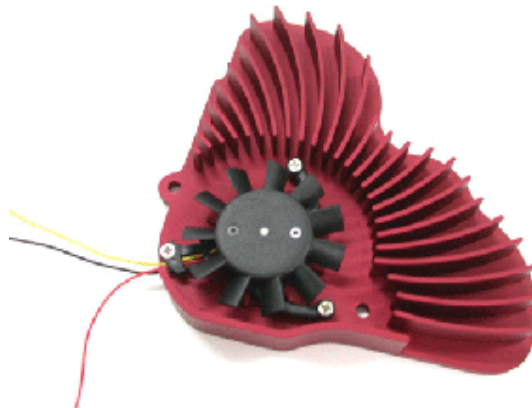
$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{\Delta x_3}{k_3 A}} \quad (3)$$

در رابطه فوق، A سطح تبادل حرارت و عمود بر جهت انتقال حرارت می‌باشد.

- همرفت (Convection)

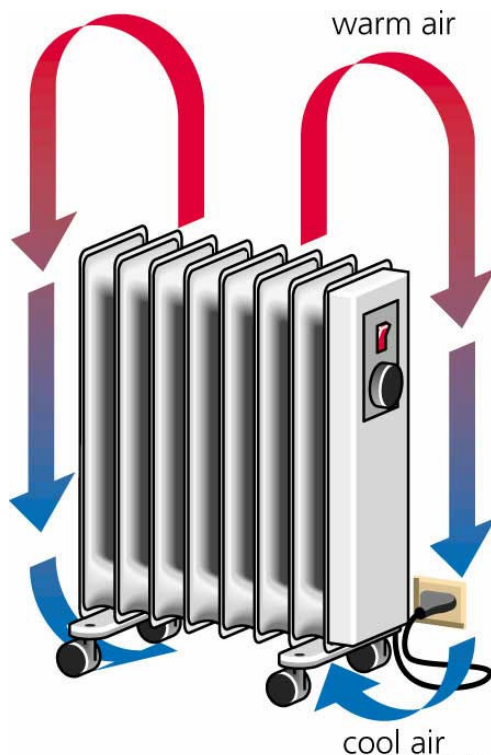
جابجایی یا همرفت زمانی وجود دارد که سیال (گاز یا مایع) در جوار یک سطح جامد حرکت نماید و بین سیال و جدار جامد اختلاف دما وجود داشته‌باشد. انتقال حرارت جابجایی خود بر دو نوع اصلی اجباری و آزاد تقسیم می‌شود.

جابجایی اجباری (Forced Convection): هنگامی که جسم در مقابل جریان هوا (با دمای بیشتر یا کمتر از خود جسم) قرار می‌گیرد. در اثر جریان هوا و اختلاف دمای بین سیال و جسم، انتقال حرارت بین جسم و سیال صورت می‌گیرد. به این نوع انتقال حرارت، انتقال حرارت جابجایی اجباری گفته می‌شود. در شکل ۳ نمونه‌ای از انتقال حرارت اجباری نشان داده شده است که پره‌های هیت‌سینک Heat Sink یک وسیله الکترونیکی در اثر جریان هوای ایجاد شده توسط فن (پنکه) پره‌های در معرض جریان هوا خنک‌کاری می‌شوند.

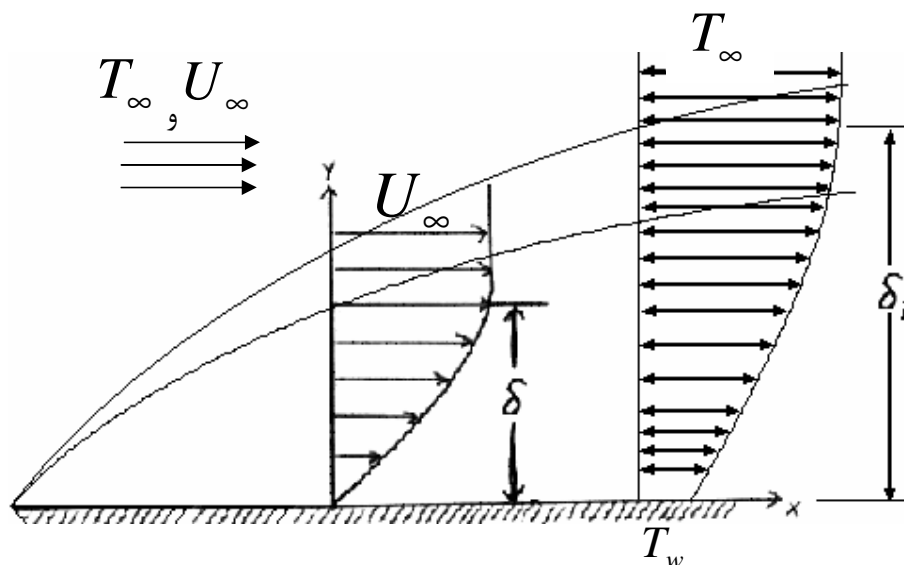


شکل ۳. خنک کردن لوازم الکترونیکی با استفاده از فن (مثالی از جابجایی اجباری)

جابجایی آزاد یا طبیعی (Natural or Free Convection): هنگامی که سیال اطراف جسم در اثر اختلاف دمای خود با سیال محیط اطراف شناور شده (در اجسام سرد به پایین و در اجسام گرم به سمت بالا) می‌رود انتقال حرارت همرفت آزاد یا طبیعی صورت می‌گیرد. در شکل ۴ نمونه‌ای از انتقال حرارت طبیعی نشان داده شده‌است که گرمایش هوای منزل با استفاده از بخاری برقی را نشان می‌دهد.



شکل ۴. گرمایش هوا بوسیله نوعی بخاری برقی (مثالی از جابجایی آزاد)
به عنوان مثالی از مسائل کلاسیک جابجایی می‌توان به انتقال جابجایی از روی دیواره تخت در برابر جریان یکنواخت هوا اشاره کرد



شکل ۷. انتقال حرارت جابجایی

* شروع کننده انتقال حرارت در این روش، هدایت یا Conduction است، زیرا سیال لزج چسبیده به دیواره ساکن فرض می‌شود و انتقال حرارت از جداره جامد در سیال ساکن خیلی نزدیک به دیواره بصورت هدایت منتقل می‌شود.
بنابراین برای لایه ساکن نزدیک به دیواره می‌توان نوشت:

$$q = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (۴)$$

ضریب هدایت حرارتی سیال

در انتقال حرارت جابجایی قانون سرمایش نیوتن بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$q = hA(T_{wall} - T_{\infty}) \quad (۵)$$

$$q = hA(T_w - T_{\infty})$$

$\rightarrow$ [m²] سطح تبادل حرارت
 $\rightarrow$ [W/m²K] ضریب انتقال حرارت جابجایی

پیدا کردن h (ضریب انتقال حرارت جابجایی) مشکل است و یکی از اهداف اصلی مبحث انتقال حرارت جابجایی بدست آوردن این ضریب می‌باشد. بررسی فیزیکی پدیده انتقال حرارت جابجایی به کمک فرضیه لایه مرزی انجام می‌گیرد که در فصل پنجم با آن آشنا خواهید شد.

- تابش (Radiation)

همه اجسام با استفاده از امواج الکترومغناطیسی در دمای بیشتر از صفر کلوین از خود انرژی ساطع می کنند. به این نوع انتقال انرژی انتقال حرارت تابش جابجایی گفته می شود. اهمیت انتقال حرارت تابشی به دمای سطح جسم و نوع سطح جسم بستگی دارد. در این جزوه مقدمه ای بر تابش ارائه شده است. برای دو جسم سیاه که فقط باهم تبادل حرارتی دارند می توان نوشت:

$$q_{rad} = \sigma A(T_1^4 - T_2^4) = h_r A(T_1 - T_2) \quad (6)$$

رابطه فوق، قانون استفان - بولتزمن نام دارد در این رابطه σ ثابت استفان بولتزمن می باشد و مقدار آن برابر $5.6677 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ می باشد، h_r برای شبیه کردن محاسبات با فرمول های انتقال حرارت جابجایی و هدایت تعریف می شود تا محاسبات از نظر ریاضی خطی باشد. در فصل تابش جسم سیاه و روابط مورد نیاز برای محاسبه انتقال حرارت اجسام غیر سیاه در حالت کلی ارائه شده است.

فصل دوم: انتقال حرارت هدایتی

Conduction Heat Transfer

هدف اصلی فصل حاضر آشنا کردن دانشجویان با روش‌های بدست آوردن معادلات حاکم بر انتقال حرارت و حل این معادلات در شرایط بسیار ساده یک بعدی می‌باشد.

معادلات حاکم بر انتقال حرارت از طریق هدایت در مختصات کارتزین بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

معادله (۱) در حالت خطی حل تحلیلی دارد (با استفاده از روش جداسازی متغیرها) که در فصل سوم مورد بحث قرار خواهد گرفت. البته برای حل این معادلات روشهای تحلیلی دیگری نیز موجود می‌باشد که در دوره‌های تحصیلات تکمیلی مورد بحث قرار می‌گیرند از جمله این روش‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

Duhamel	- دو هامل
Green's Function	- تابع گرین
Laplace Transform	- تبدیل لاپلاس
Integral Transform	- تبدیل انتگرال

در مختصات قطبی معادله (۱) به شکل زیر نوشته می‌شود:

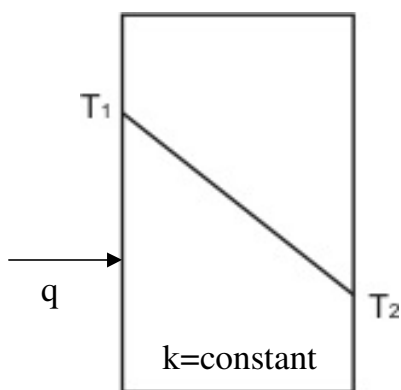
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

قانون فوریه Fourier's Law

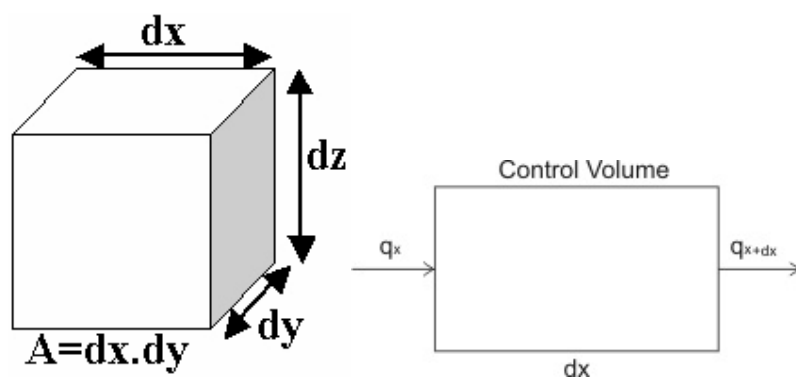
مطابق این قانون شار حرارتی هدایت در یک محیط تناسب مستقیم با گرادیان دما و سطح تبادل

حرارتی (گرادیان دما در دو سوی سطح تبادل حرارت $\frac{\partial T}{\partial x}$) دارد:

$$q \propto \frac{\Delta T}{\Delta x} A \quad (3)$$
$$\Rightarrow q = kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad k \left[\frac{W}{mK} \right]$$



شکل ۱. انتقال حرارت در یک محیط یک بعدی با ضریب انتقال حرارت ثابت
با استفاده از اصل موازنه انرژی معادله (۱) را در حالت‌های ساده بدست می‌آوریم.
- معادله دیفرانسیل هدایت دائمی یک بعدی



$$q_x = q_{x+dx} \Rightarrow q_x = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (۴)$$

با فرض ثابت بودن سطح مقطع $A=dx.dy$

$$(۴) \text{ و } (۳) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (۵)$$

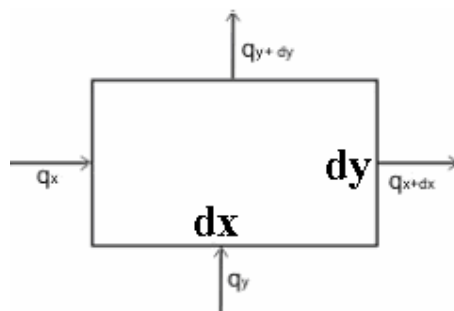
با فرض ثابت بودن k با انتگرالگیری از رابطه (۵):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1 \quad (۶)$$

$$T = C_1 x + C_2 \quad (۷)$$

ملاحظه می‌شود که اگر ضریب هدایت حرارتی ثابت باشد توزیع دمای یک بعدی در جسم خطی خواهد بود.

- معادله دیفرانسیل هدایت دو بعدی دائمی



$$q_x + q_y = q_{x+dx} + q_{y+dy}$$

$$q_x + q_y = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = 0 \quad (8)$$

با استفاده از (۳):

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} A_x, \quad q_y = -k A_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (9)$$

خواهیم داشت:

$$A_x = dy \times 1, \quad dx \times 1 = A_y \quad (10)$$

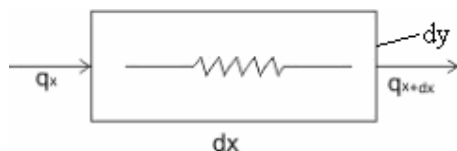
با جانشین کردن (۳)، (۸) و (۱۰) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx = 0 \quad (11)$$

با فرض ثابت بودن ضریب هدایت حرارتی:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

- معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی



$$q_x + (\dot{q}) dx dy \times 1 = q_{x+dx}$$

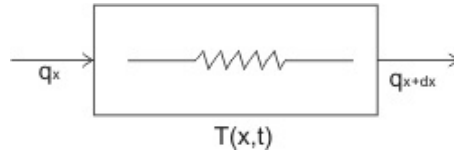
$$q_x + \dot{q} dx dy = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (13)$$

$$\dot{q} dx dy = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy$$

با فرض ثابت بودن ضریب انتقال حرارت هدایت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (14)$$

- معادله دیفرانسیل هدایت یک بعدی با چشمه حرارتی و تابعی از زمان



$$q_x + \dot{q}dx dy = q_x + \rho c dx dy \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{و} \quad \rho dx dy (1) = \text{حجم المان} \quad (15)$$

$$q_x + \dot{q}dx dy = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \rho c dx dy \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

$$\dot{q}dx dy = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dy dx + \rho c dx dy \frac{\partial T}{\partial t} \quad (17)$$

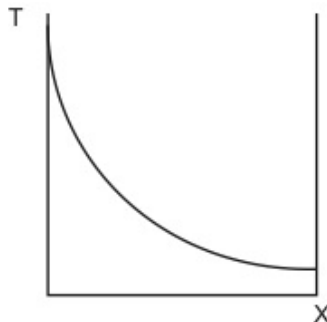
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (18)$$

ρ جرم مخصوص و C گرمای ویژه جسم است.

با تعریف $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ ضریب پخش حرارتی Thermal Diffusion می‌توان نوشت:

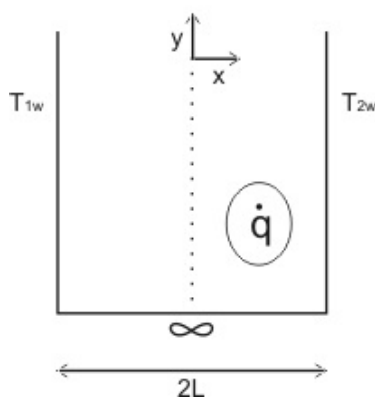
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (19)$$

مثال - معلوم کنید دیوار زیر در حال گرم شدن است یا سرد شدن:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} > 0$$

پس در حال گرم شدن است.
 * توزیع دما را در دیواره نشان داده شده در شکل زیر را بیابید



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \Rightarrow \text{Steady State } \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{-\dot{q}}{k} \quad \text{و} \quad k \neq k(x)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-\dot{q}x}{k} + C_1 \quad (*)$$

$$T = \frac{-\dot{q}}{2k} x^2 + C_1 x + C_2$$

تقارن از $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$x = -L \Rightarrow T = T_w \Rightarrow T_w = \frac{-\dot{q}}{2k} L^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_w + \frac{\dot{q}}{2k} L^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{-\dot{q}}{2k} x^2 + x^2 + \frac{qL^2}{2k} + T_w$$

$$\Rightarrow T = \frac{-\dot{q}}{2k} [x^2 - L^2] + T_w$$

- می خواهیم انتقال حرارت از این دیواره ها را بیابیم:
 ۱. بدون محاسبه و از روش استدلالی می توان گفت چون شرایط پایا است کل حرارت تولید شده باید بطور کامل خارج شود بنابراین:

$$\dot{Q}_{out} = \dot{q} \times \underbrace{2L \times W \times 1}_{\text{حجم}}$$

گرما در واحد حجم

۲. از راه معادله (*) به ازای واحد پهنا می توان نوشت:

$$\frac{-\dot{q}}{k}(+L) = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{برای لبۀ راست}$$

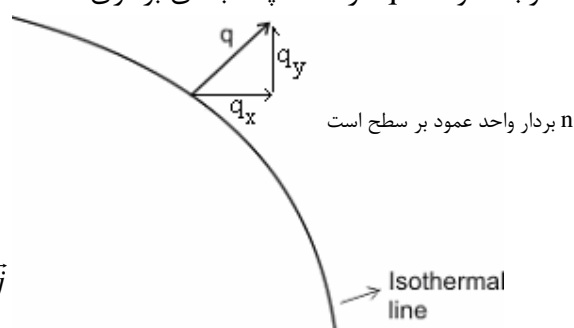
$$\frac{-\dot{q}}{k}(-L) = \frac{\dot{q}}{k}L = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{برای لبۀ چپ}$$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-L} = R \left[\frac{-\dot{q}}{k}(L) \right] = \dot{q}T(L) \quad \text{از لبۀ سمت چپ}$$

$$q = -R \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = -h \left[\frac{-\dot{q}}{R}L \right] = +\dot{q}L \quad \text{از لبۀ راست}$$

$$Q_{out} = q_{\text{چپ}} + q_{\text{راست}} = +2\dot{q}L$$

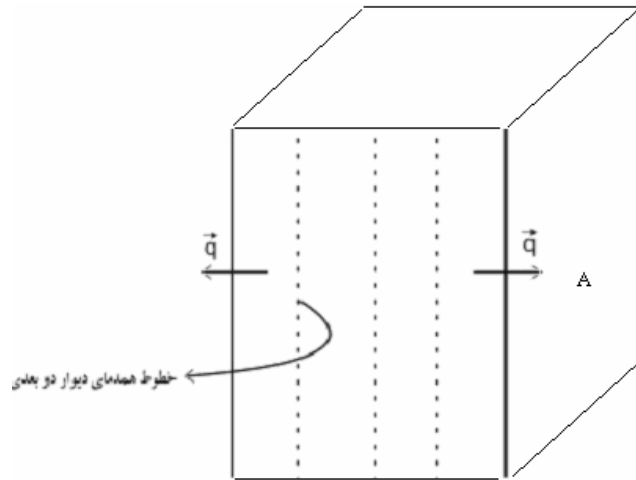
* توجه شود که q در حالت چند بعدی برداری است که به صورت زیر تعریف می شود.



$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T = -k \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} - k \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j}$$

$$\vec{q} = -k \frac{\partial T}{\partial n}$$

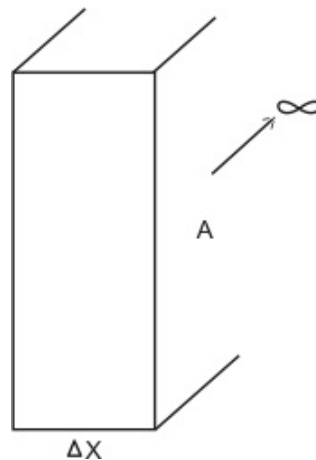
خطوط همدمما برای دیوار دوبعدی در هدایت یک بعدی:



شکل خطوط همدمای بر روی دیواره تخت (خطوط موازی لبه‌ها خطوط همدمای می‌باشند)

درواقع دما را می‌توان به پتانسیل تشبیه کرد و خطوط پتانسیل همان خطوط هم دما در اینجا می‌باشند و خطوط شار حرارتی بر خطوط همدمای عمود هستند.

هدایت یک بعدی یعنی هدایت یا گرادیان دما منحصرأً در یکی از جهات مختصات وجود داشته باشد.



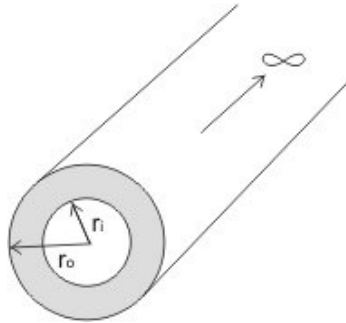
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$$

(۲۱)

لوله ای به طول نامحدود:

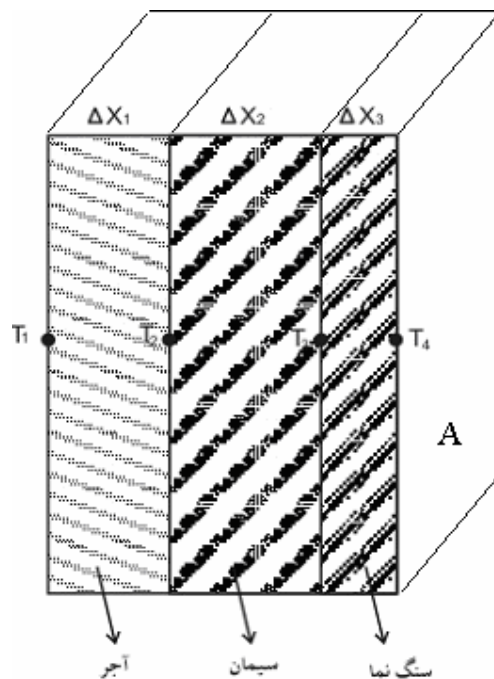


$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} &\neq 0 & q &\neq f(\theta) \end{aligned} \quad (22)$$

خطوط همدمای دایره ای هم مرکز لوله هستند.

دیوارهای چند لایه یا کامپوزیت Composite Walls

در عمل دیواره های موجود معمولاً از چند لایه با جنس های مختلف تشکیل شده اند (شکل را ببینید). در این بخش به محاسبات مربوط به انتقال حرارت از این دیواره ها می پردازیم.



شکل انتقال حرارت از دیواره چند لایه

$$q = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x_1} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} q &= kA \frac{T_2 - T_3}{\Delta x_2} \\ q &= k A \frac{T_3 - T_4}{5x_3} \end{aligned} \right\} T_i - T_{i+1} = \frac{q_i \Delta x_1}{k_i A} \quad (24)$$

در شرایط دائمی و Steady $q = q_1 = q_2 = q_3 \Leftarrow$

$$\Rightarrow q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{\Delta x_3}{k_3 A}} \quad (25)$$

- انتقال حرارت شعاعی از لوله‌ها

لوله‌ای به طول l و شعاع داخلی و خارجی r_i , r_o در نظر بگیرید با نوشتن قانون فوریه معادلات انتقال حرارت در مختصات استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial r} \quad (26)$$

$$q = -k2\pi l \frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow -dT = \frac{q}{2\pi k} \frac{dr}{r} \quad (27)$$

$$T_i - T_o = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{r_o}{r_i}$$

$$\Rightarrow q = \frac{T_i - T_o}{\left(\ln \frac{r_o}{r_i} \right) / 2\pi k} \quad (28)$$

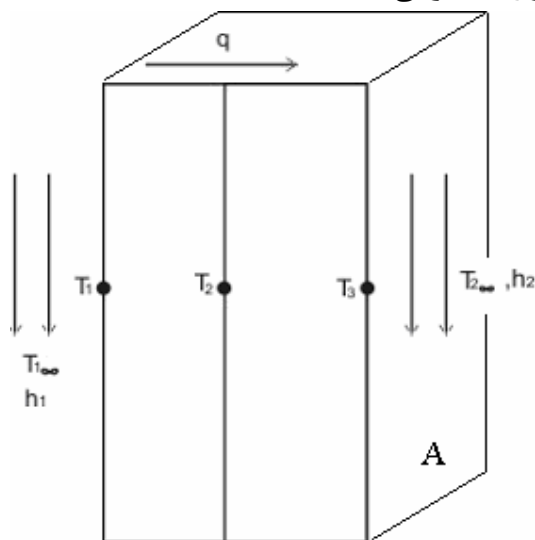
$$q = \frac{\Delta T}{R} \quad (29)$$

$$R = \frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi k} \quad (30)$$

به همین ترتیب می‌توان برای لوله‌های کامپوزیتی نوشت:

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k_1} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi k_2} + \dots} \quad (31)$$

- ضریب انتقال حرارت عمومی Overall Heat Transfer Coefficient



شکل انتقال حرارت از یک دیواره تخت

در شرایط انتقال حرارت دائمی:

$$\begin{cases} q_1 = h_1 A (T_{1\infty} - T_1) \\ q_2 = k_1 A \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x_1} \\ q_3 = k_2 A \frac{(T_2 - T_3)}{\Delta x_3} \\ q_4 = h_2 A (T_3 - T_{2\infty}) \end{cases} \quad (32)$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 \quad (33)$$

از (32) و (33) نتیجه می شود که:

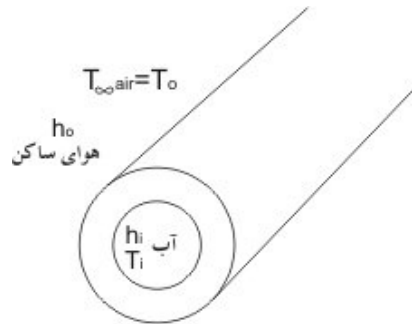
$$q = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\frac{\Delta x_1}{k_1 A} + \frac{\Delta x_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_1 A} + \frac{1}{h_2 A}} \quad (34)$$

$$q = UA \Delta t \Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{1}{h_2}} \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \quad (35)$$

در عبارت فوق U ضریب انتقال حرارت عمومی می باشد.

- ضریب انتقال حرارت عمومی برای سیستم شعاعی

در این بخش به محاسبه ضریب انتقال حرارت کلی برای مقاطع دایروی می پردازیم. لوله ای که در داخل آن سیال جریان دارد و محیط بیرون آن نیز توسط سیال دیگری احاطه شده در نظر می گیریم.



شکل انتقال حرارت یک لوله استوانه‌ای

h_o ضریب انتقال حرارت هوای ساکن محیط اطراف استوانه و h_i ضریب انتقال حرارت جابجایی سیال درون لوله می‌باشد.

$$q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi k} + \frac{1}{h_o A_o}} \quad (36)$$

$$A_i = 2\pi r_1$$

$$A_o = 2\pi r_2$$

با تعریف

$$q = U_o A_o \Delta T \quad (37)$$

ضریب انتقال حرارت عمومی برحسب سطح خارجی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{h_i A_i} + \frac{A_o \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k} + \frac{1}{h_o}} \quad (38)$$

با تعریف

$$q = U_i A_i \Delta T \quad (39)$$

ضریب انتقال حرارت عمومی سطح داخلی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_i = \frac{1}{h_i + \frac{A_i \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k} + \frac{A_i}{h_o A_o}} \quad (40)$$

سؤال آیا در جدار تماس دو لایه با فرض شرایط ایده‌آل گرادیان دما ثابت است؟

$$q_1 = -k_1 A \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_2 = -k_2 A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (41)$$

$$q_1 = q_2 \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 \neq \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 \quad (**)$$

*توجه شود که پیوستگی در نقطه های تماس وجود دارد ولی مشتق پذیری وجود ندارد به دلیل رابطه (**) که در بالا آمده است.

- ضخامت بحرانی عایق Critical Thickness of Insulation

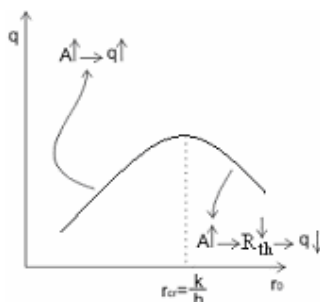
دمای جداره داخلی T_i و این لوله در معرض محیط با دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابجائی آن h می باشد. از مقاومت حرارتی جدار لوله فلزی در مقابل ضخامت عایق $(r_o - r_i)$ صرف نظر می کنیم.

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{\ln \frac{r_o}{r_i} + \frac{1}{2\pi k l} + \frac{1}{h(2\pi r_o)l}} \quad (42)$$

$$\frac{dq}{dr_o} = \frac{(T_i - T_\infty) \left(\frac{1}{r_o k} - \frac{1}{hr_o^2} \right)}{(\text{مخرج})^2} \quad (43)$$

$$\Rightarrow r_8 = \frac{k}{h} \quad \frac{\partial^2 q}{\partial r_o^2} < 0 \Rightarrow \text{بنابراین نقطه مشتق صفر معرف انتقال حرارت ماکزیمم است} \quad (44)$$

$$A \uparrow \Rightarrow q \uparrow \quad (45)$$



شکل انتقال حرارت بر حسب شعاع بحرانی

- انتقال حرارت در استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی

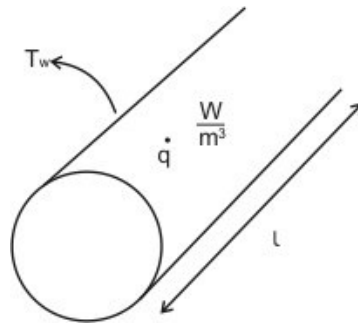
مطابق شکل یک استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی $\dot{q}$ در نظر بگیرید

$$T = T(r) \quad (46)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (47)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{\dot{q}}{k} \Rightarrow r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{-qr^2}{2k} + C_1 \quad (48)$$

$$\Rightarrow T = \frac{-\dot{q}r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2 \quad (49)$$



شکل استوانه توپر با چشمه حرارتی داخلی

$$\begin{cases} T(r=R) = T_w \\ \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow T - T_w = \frac{\dot{q}}{4k} (R^2 - r^2) \end{cases} \quad (50)$$

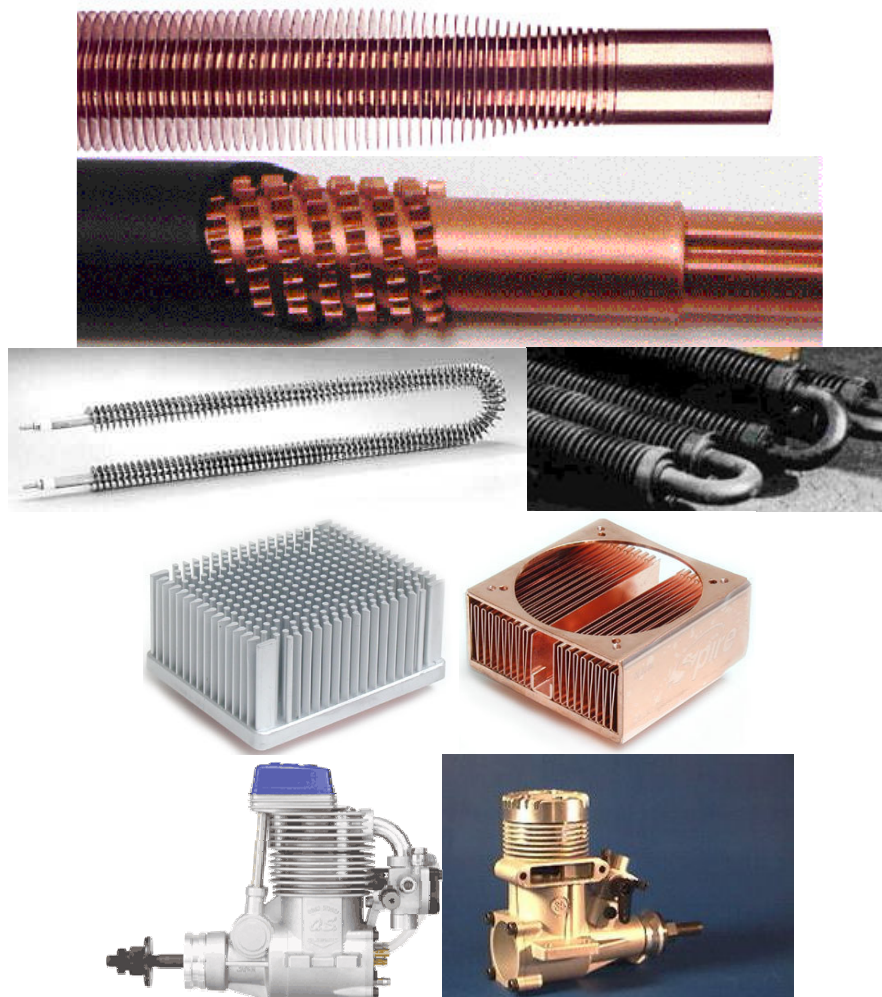
سؤال: آیا h و k قابل محاسبه اند؟

k : جزء خواص ماده می باشد و با روش های آزمایشگاهی محدود می توان آن را بدست آورد. البته k با دما تغییر می کند و لازم است که جداول خواص بر حسب دما را داشته باشیم. همچنین k در اجسام جامد تابعی از مکان و شبکه کریستالی نیز می باشد.

h : بستگی به رژیم جریان، هندسه جریان، جنس سیال دارد و همچنین تشابه بین الگوی ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت جابجائی وجود دارد.

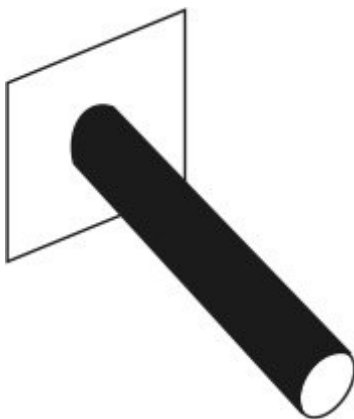
انتقال حرارت در سطوح گسترش یافته Extended Surfaces

منظور از سطوح گسترش یافته بررسی انتقال حرارت از پره ها Fin می باشد. پره ها برای افزایش انتقال حرارت از یک سطح، در صنایع مختلف از جمله در مبدل های حرارتی در خنک کاری لوازم الکترونیکی و بسیاری کاربردهای دیگر مورد استفاده قرار می گیرند. در شکل تعدادی از کاربردهای پره ها در صنایع مختلف نشان داده شده است. در این بخش با استفاده از ساده سازی های خاصی به بررسی انتقال حرارت از این پره ها نشان داده شده است.



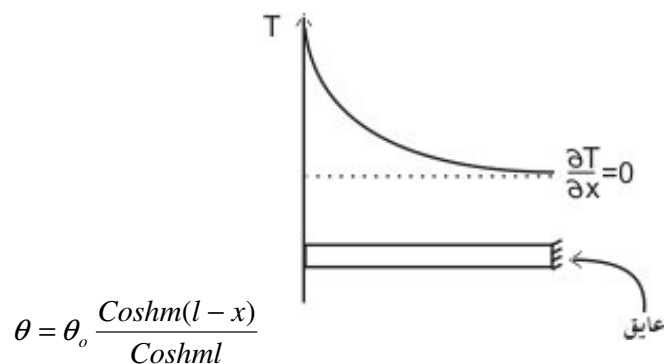
شکل کاربردهای متنوع پره‌ها

پره با طول بی نهایت با دمای ریشه T_o که در دمای محیط T_∞ قرار دارد و با در نظر گرفتن
 $\theta_o = T_o - T_\infty$ و $\theta = T - T_\infty$

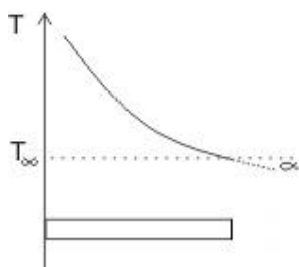


$$\theta = \theta_o e^{-mx}$$

پره انتها عایق:



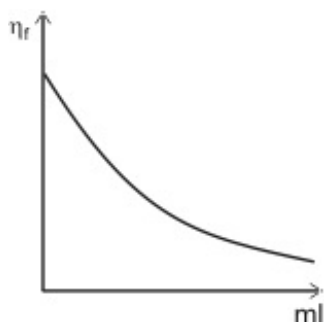
پره با طول معین:



$$\eta_f = \frac{q \text{ واقعی با پره}}{\text{وقتی همه پره در دمای ریشه باشد}} \quad \text{راندمان پره: در حالت کلی} \quad (51)$$

$$\eta_f = \frac{\sqrt{hpkA}\theta_o \tanh ml}{ph\theta_o l} = \frac{\tanh ml}{ml} \quad (52)$$

در رابطه فوق h ضریب انتقال حرارت جابجایی، k ضریب هدایت حرارتی پره، A سطح مقطع پره و p پیرامون مقطع پره می باشد.



$$\epsilon_f = \frac{\sqrt{hpkA}\theta_o}{hA\theta_o} = \sqrt{\frac{pk}{hA}} \quad \text{کارایی پره:} \quad (53)$$

برای پره با طول بی نهایت

پره زمانی کارائی مناسب دارد که ضریب هدایت حرارتی بالا و آن را در معرض محیط با h کم قرار دهیم. اکنون به تفسیر فیزیکی رابطه (۵۳) می پردازیم.

$$q = hA\theta_o = \frac{\theta_o}{\frac{1}{hA}} \Rightarrow R_1 \quad (54)$$

- مقاومت در حالت بدون پره $\frac{1}{hA}$ است.

$$q = \sqrt{hpkA}\theta_o = \frac{\theta_o}{\frac{1}{\sqrt{hpkA}}} \Rightarrow R_2 \quad (55)$$

مقاومت در حالت با پره R_2 است.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{hA}{\sqrt{hpkA}} : \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{pk}{hA}} \quad (56)$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \varepsilon_f \text{ پره کارائی}$$

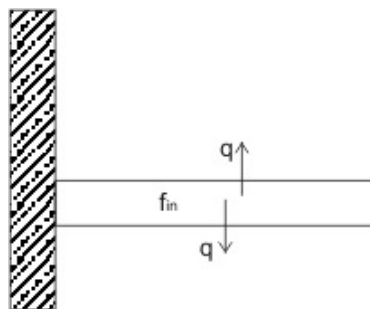
در واقع می توان گفت که کارائی پره عبارتست از مقاومت حرارتی بدون پره به مقاومت حرارتی با پره حرارتی می باشد.

قانون سرمایش نیوتن را یکبار دیگر یادآوری می کنیم:

$$q = hA(T - T_\infty) \quad (57)$$

برای زیاد کردن انتقال حرارت باید h یا A را تغییر دهیم.

برای تغییر و یا گسترش A از فین ها (پره ها) استفاده می کنیم.



در حالت ایده آل برای پره استوانه ای با انتهای عایق خواهیم داشت:

$$q = h A (T - T_\infty) \quad (58)$$

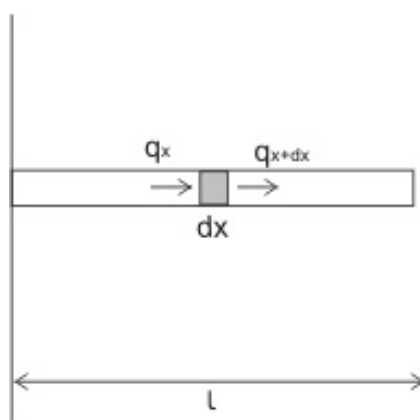
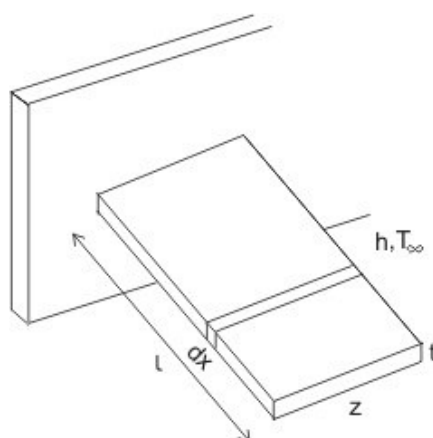
$\downarrow$
 $\pi d l$
 دمای ریشه

$\swarrow$
 سطح جانبی

در فرمول فوق d قطر و l طول پره می باشد.

توجه:

فین را طرف سیال با h کمتر تعبیه می کنند چرا؟



روابط ریاضی برای پره های با مقطع یکنواخت

فرضیات:

- گرادیان دما فقط در جهت x داریم (ضخامت t نازک است)

- h ثابت و یکنواخت است.

موازنه انرژی

$$q_x = q_{x+dx} + q_{conv}$$

$$-kzt \frac{\partial T}{\partial x} = -kzt \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx \right) + h(2zdx + 2tdx)(T - T_\infty)$$

$$-kA \frac{\partial T}{\partial x} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} - kA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx + hpdx(T - T_\infty)$$

$$kA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - hp(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{hp}{KA}(T - T_\infty)$$

$$m = \sqrt{\frac{hp}{KA}} \left(\frac{1}{m} \right)^{1/2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \theta = 0 \\ T - T_\infty = \theta \end{array} \right.$$

شرایط مرزی اول:

$$x = 0$$

$$T = T_o \Rightarrow \theta = T_o - T_\infty = \theta_o$$

شرایط مرزی دوم:

الف) پره طول بلند باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow \infty \\ T = T_\infty \Rightarrow \theta = 0 \end{array} \right. \quad \text{جواب} \quad \theta / \theta_o = e^{-mx}$$

$$q = \sqrt{hpkA} \theta_o$$

ب) پره انتها عایق:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = l \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\theta}{\theta_o} = \frac{\cosh m(l-x)}{\cosh ml}$$

$$q = \sqrt{hpkA} \theta_o \tanh(ml)$$

ج) پره با طول معین:

$$x = L$$

$$-kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = hA(T_{(L)} - T_\infty)$$

$$\Rightarrow k \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} = -h\theta \Big|_{x=L}$$

پره با مقاطع متغیر:

از تعریف راندمان پره به ترتیب زیر استفاده می کنیم.

$$\eta_f = \frac{tgh(ml)}{mL}$$

$$mL = \sqrt{\frac{hp}{kA}} L = \sqrt{\frac{h(2z+2t)}{kzt}} L$$

$$z \gg t, mL = \sqrt{\frac{2hz}{ktz}} L = \sqrt{\frac{2h}{kt}} L = \sqrt{\frac{2h}{ktL}} L^{\frac{3}{2}}$$

$$A_p = Lt \Rightarrow \text{profile Area}$$

$$\eta_f = \frac{tgh\left[\frac{2h}{kA_p} L^{\frac{3}{2}}\right]}{\sqrt{\frac{2h}{kA_p} L^{\frac{3}{2}}}}$$

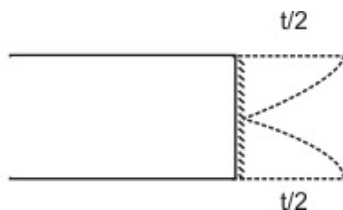
برای شرایطی که $\left(\frac{ht}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه می توان برای محاسبه راندمان فین هائی که انتها

عایق نیستند در رابطه فوق به طول فین به اندازه $\frac{t}{2}$ اضافه کرد و طول تصحیح شده نامید.

طول تصحیح شده از رابطه

$$L_c = L + \frac{t}{2}$$

محاسبه می گردد، خطای چنین تقریبی حدود 5% است.



بنابراین راندمان برای فین های مستطیلی که در انتها نیز تبادل حرارت دارند بطور تقریبی بصورت

زیر بیان می شود.

بطور کلی:

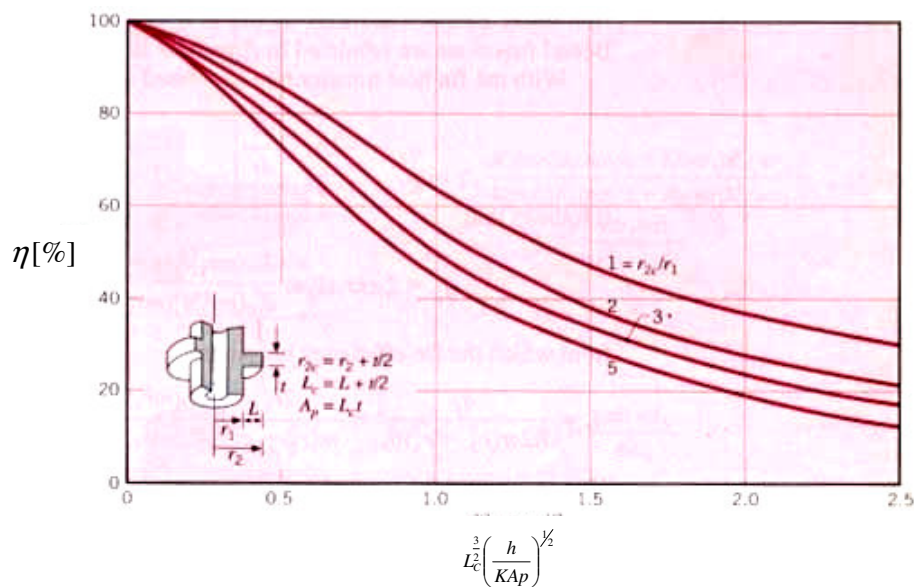
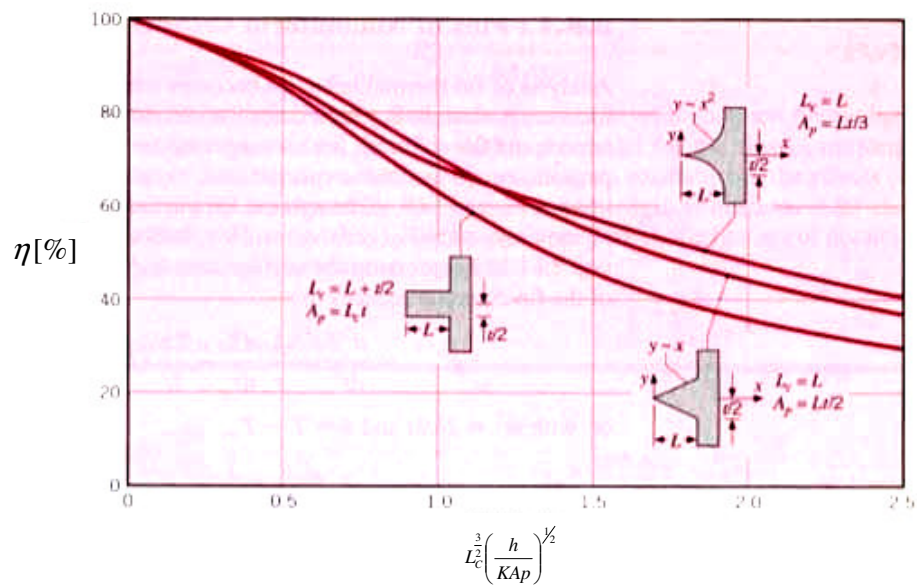
$$\eta_f = \frac{tgh\sqrt{\frac{2h}{kA_p}\left(L + \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\frac{2h}{kA_p}\left(L + \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$A_p = \left(L + \frac{t}{2}\right)t = L_c t$$

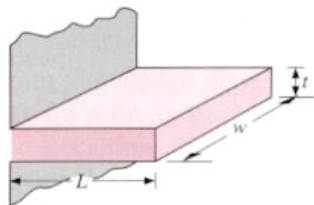
در شکل راندمان دوفین با مقاطع پروفیل مثلثی و مستطیلی نشان داده شده است. مورد فین مثلثی

توسط حل معادله دیفرانسیل هدایت و سپس با استفاده از تعریف بازده فین بدست آمده است.

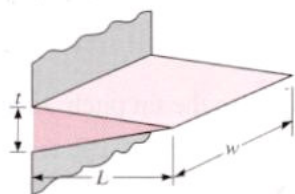
توجه کنید چون سطح تبادل حرارت در انتهای فین مثلی صفر است بنابراین این این فینها عملاً انتها عایق هستند.



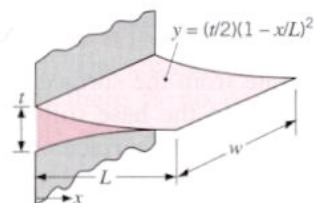
شکل نمودار بازدهی پره‌های محیطی لوله‌ها [۹]



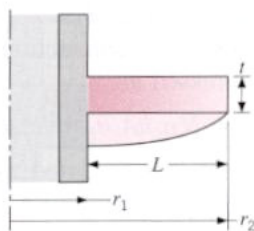
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



$$\eta_f = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

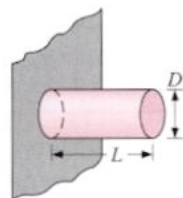


$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

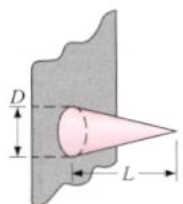


$$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$



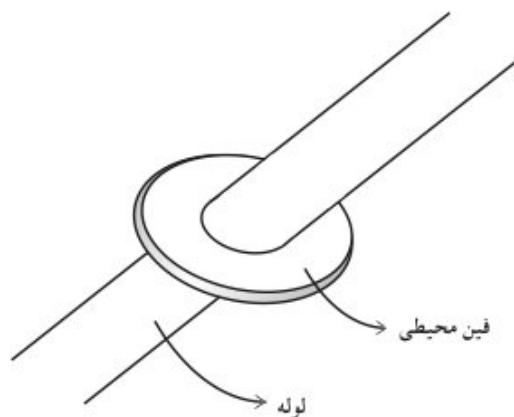
$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$



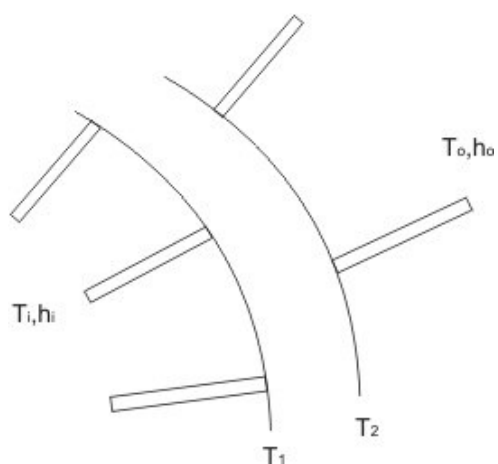
$$\eta_f = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$

شکل راندمان پره‌ها با اشکال مختلف [۹]

در شکل راندمان فین های محیطی نیز برحسب پارامتر $L_c^2 \left(\frac{h}{KA_p} \right)^{1/2}$ رسم شده است.



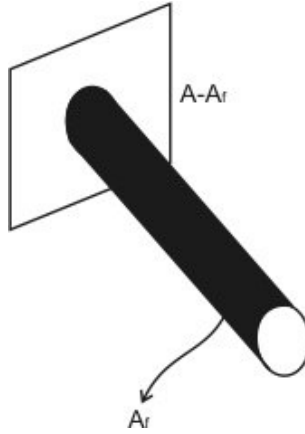
- تعیین ضریب انتقال حرارت عمومی برای سطوح پره دار



$$Q = UA(T_i - T_o)$$

ابتدا بازده کل سطح پره دار را تعریف می کنیم:

$$\eta_t = \frac{\text{حرارت واقعی از سطح پره و سطح بی پره}}{\text{حرارتی که از سطح پره و از سطح بدون پره در دمای ریشه منتقل میشود}}$$



$$\eta_t = \frac{(A - A_f)h\Delta T + \eta_f A_f h\Delta T}{Ah\Delta T}$$

$$\eta_t = 1 - \frac{A_f}{A}(1 - \eta_f)$$

$$Q_1 = \eta_{ti} h_i A_i (T_i - T_1) = \frac{T_i - T_1}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i}}$$

$$Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{\text{هدایت}}$$

$$Q_3 = \frac{T_2 - T}{\frac{1}{h_o A_o \eta_{to}}}$$

در حالت دائم:

$$Q = \frac{T_i - T_o}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i} + R + \frac{1}{\eta_{to} A_o h_o}}$$

پس

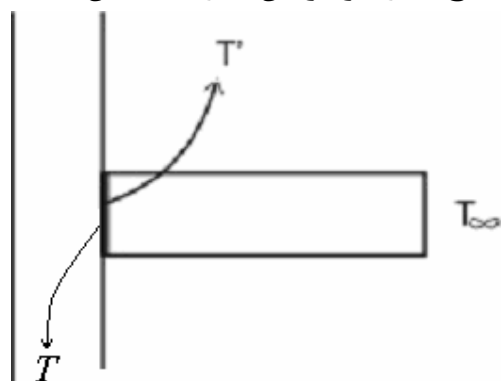
$$UA = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{ti} h_i A_i} + R + \frac{1}{\eta_{to} A_o h_o}}$$

$$Q = U_i A_i \Delta T = UA \Delta T$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{UA}{A_i}$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{ti} A_i} + R + \frac{A_i}{\eta_{to} A_o h_o}}$$

- تعیین بازده کلی سطح با در نظر گرفتن مقاومت تماس



$$\eta_t = \frac{(A - A_f)h\Delta T + \eta_f A_f h \Delta T'}{Ah\Delta T}$$

$$(T' - T_\infty)A_f h \eta_f = \frac{T - T'}{R_c / A_c}$$

در رابطه فوق R_c مقاومت تماس و A_c سطح ریشه یا سطح مقطع پره می باشد.

$$\frac{T - T_\infty}{\frac{1}{A_f h \eta_f} + \frac{R_c}{A_c}} = \frac{T' - T_\infty}{\frac{1}{A_f h \eta_f}}$$

$$T' - T_\infty = \frac{(T - T_\infty) \frac{1}{A_f h \eta_f}}{\frac{1}{A_f h \eta_f} + \frac{R_c}{A_c}}$$

$$\eta_t = \frac{(A - A_f)h\Delta T + \frac{\eta_f A_f h \Delta T}{\frac{1}{A_f h \eta_f} + \frac{R_c}{A_c}}}{h A \Delta T}$$

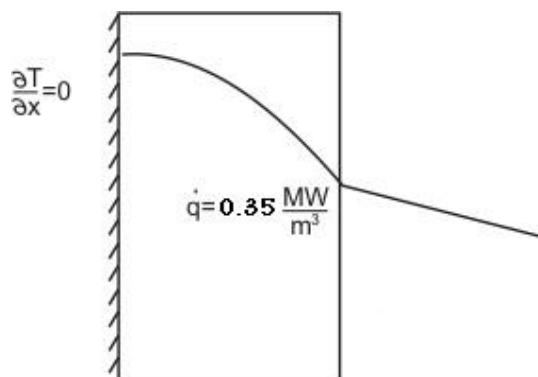
$$\eta_t = \frac{Ah\Delta T - A_f h \Delta T + \Delta T \left(\frac{1}{\frac{1}{A_f \eta_f h} + \frac{R_c}{A_c}} \right)}{h A \Delta T}$$

$$\eta_t = 1 - \frac{A_f}{A} \left[1 - \frac{\eta_f}{1 + \eta_f \frac{R_c h A_f}{A_c}} \right] = 1 - \frac{A_f}{A} \left[1 - \frac{\eta_f}{1 + \underbrace{\eta_f h A_f \frac{R_c}{A_c}}_{C_1}} \right]$$

$$\Rightarrow \eta_t = 1 - \frac{A_f}{A} \left[1 - \frac{\eta_f}{C_1} \right]$$

مسائل

۱. یک طرف دیواری به ضخامت 7.5cm عایق است و از طرف دیگر تحت تاثیر یک محیط به دمای 93°C و ضریب انتقال حرارت جابجائی $570 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}}$ است هرگاه در داخل دیوار تولید حرارت به میزان $0.35 \frac{\text{MW}}{\text{m}^3}$ داشته باشیم مطلوبست دمای حداکثر دیوار $k=21$.



$$T_{\infty} = 93^{\circ}\text{C}$$

$$h = 570 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ -K \frac{\partial T_A}{\partial x} \Big|_{x=7.5\text{cm}} = hA(T - T_{\infty}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$

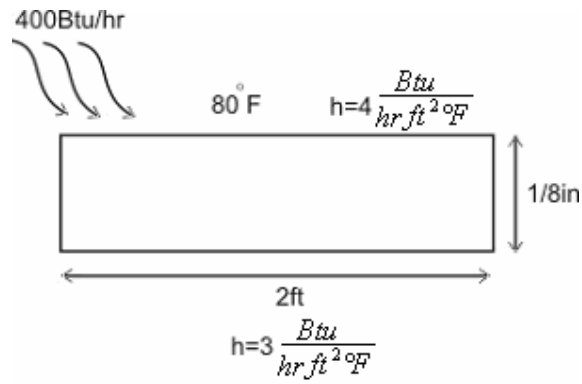
$$\text{شرایط مرزی اعمال} \Rightarrow T = \frac{-\dot{q}}{2k}x^2 + 186^{\circ}\text{C} \Rightarrow T_o = 186^{\circ}\text{C}$$

۲. یک صفحه مسی با ضخامت $\frac{1}{8}$ " و طول 2ft و عرضی 1ft در معرض هوای 80°F قرار دارد.

اگر کل انرژی تابشی خورشید که به صفحه برخورد می کند $400 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}}$ باشد و ضریب انتقال

حرارت جابجائی از بالا و پائین به ترتیب 3,4 $\frac{\text{Btu}}{\text{hr ft}^2 \text{ } ^{\circ}\text{F}}$ باشد، مطلوبست دمای تعادل

صفحه.



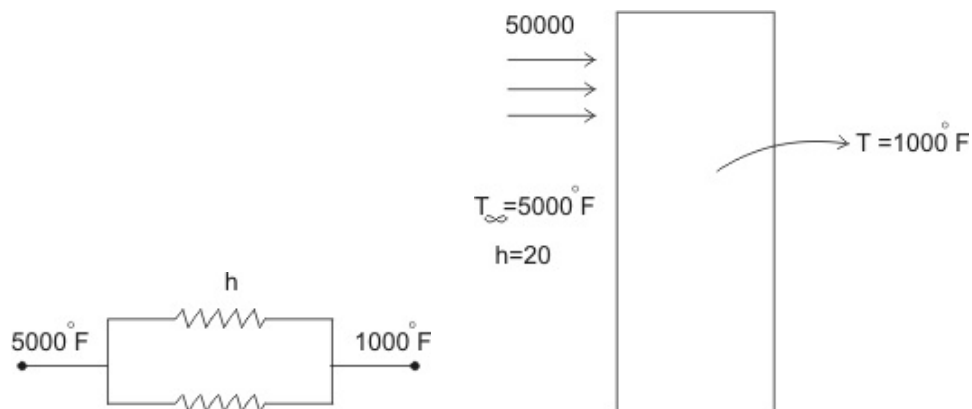
خواسته: دمای تعادل صفحه

$$\begin{aligned}
 q_{rad} + q_1 + q_2 &= 0 \\
 \Rightarrow \dot{q}_{rad} &= h_1 A(T - 80) + h_2 A(T - 80) \\
 400 &= 4(2 \times 1) \times (T - 80) + 3(2 \times 1)(T - 80) \\
 \Rightarrow T_{\infty} &= 108.5
 \end{aligned}$$

۳. جدار داخلی اتاق احتراق یک موتور $50000 \frac{\text{Btu}}{\text{hr ft}^2}$ انرژی تابشی از گازها در دمای 5000°F

دریافت می کند و ضریب انتقال حرارت جابجایی این گاز و دیوار $20 \frac{\text{Btu}}{\text{hr ft}^2 \text{°F}}$ می باشد.

اگر دمای دیوار داخلی 1000°F باشد مطلوبست مقاومت معادل این فرایند انتقال حرارت.



$$\begin{aligned} \overbrace{50000A}^{q_{rad}} + hA(5000 - 1000) &= q \\ 50000 &= h_r(5000 - 1000) \\ (h_r A + h_c A)(5000 - 1000) &= q \\ \Rightarrow R &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{\frac{1}{h_r h_c}}{\frac{1}{h_r} + \frac{1}{h_c}} = \frac{1}{h_r + h_c} \\ Q &= (h_c + h_r)(5000 - 1000) \end{aligned}$$

به معنای موازی بودن است

۴. دو صفحه بزرگ فولادی در دمای 200°F و 160°F از یکدیگر بوسیله میله ای فولادی به قطر $1''$ و طول 1 ft جدا شده اند. میله به هر دو صفحه جوش شده است فضای بین صفحات توسط عایق پر شده است. فضای بین صفحات توسط عایق پر شده است عایق سطح جانبی میله را نیز پوشانده است به علت اختلاف ولتاژ بین دو صفحه، جریان الکتریکی در میله ایجاد شده و جریان الکتریکی $40 \frac{\text{Btu}}{\text{hr}}$ حرارت تلف می کند. دمای حداکثر میله و همچنین شار حرارتی در دو انتهای میله را محاسبه کنید.

۵. جهت تعیین هدایت حرارتی یک میله بلند به قطر $1''$ نیمی از آنرا در داخل کوره ای و نیمه دیگر را در معرض هوای 80°F قرار می دهند. پس از ایجاد شرایط دائمی در دو نقطه به فاصله $3''$ دما به ترتیب 258°F و 196°F می شود. اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی $4 \frac{\text{Btu}}{\text{hft}^{20}\text{F}}$ باشد، مطلوبست محاسبه ضریب هدایت حرارتی میله پره با طول خیلی بد.

۶. دو انتهای یک میله مسی II شکل به قطر $1''$ به دیوار قائمی متصل است. دمای دیوار 200°F بوده و طول گسترده میله II شکل 2ft است. دمای هوای محیط 100°F است اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی $6 \frac{\text{Btu}}{\text{hft}^{20}\text{F}}$ باشد مطلوبست تعیین دمای نقطه میانی (وسط) میله و انتقال حرارت از این میله.

۷. یک صفحه به سطح به ضخامت L دو محیط در دمای T_o, T_i را از هم جدا می کند. ضریب انتقال حرارت در جابجائی برای این دو محیط h_o, h_i می باشد. فرض کنید T_i بزرگتر از T_o باشد. می خواهیم این صفحه با محیطی که در دمای T_i است حرارتی مبادله نکند. بدین منظور بطریق الکتریکی $\dot{q}$ انرژی بطور یکنواخت در صفحه تولید می کنیم مطلوبست $\dot{q}$.

۸. در لحظه ای از زمان توزیع دما در جسمی به صورت تابع زیر می باشد:

$$T(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - xy + 2yz$$

اگر خواص حرارتی جسم ثابت فرض شود و چشمه حرارتی نیز وجود نداشته باشد تعیین کنید در کدام نواحی دما بازمان تغییر خواهد کرد.

فصل سوم: انتقال حرارت دوبعدی

2-D Conduction Heat Transfer

این فصل به بررسی روش‌های موجود برای حل مسائل انتقال حرارت دو بعدی اختصاص یافته‌است. برای این منظور ابتدا روش جداسازی متغیرها (از روش‌های تحلیلی متداول) ارائه شده‌است پس از آن به روش‌های عددی موجود برای حل مسائل انتقال حرارت هدایتی پرداخته شده‌است. لازم به یادآوری است که روش‌های ارائه شده در این مبحث تنها مقدمه‌ای بر روش‌های عددی و تحلیلی می‌باشند و این مباحث به تفصیل در دوره‌های تحصیلات تکمیلی گرایش تبدیل انرژی ارائه می‌شوند.

الف- روش‌های تحلیلی (روش جداسازی متغیرها)

همچنانکه که پیشتر نیز اشاره شد در این مبحث از میان روش‌های تحلیلی مختلف برای حل معادلات انتقال حرارت هدایتی تنها به ذکر روش جداسازی متغیرها اکتفا خواهیم نمود. معادله پاره‌ای مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_2(x) \frac{\partial T}{\partial x} + a_3(x)T + b_1(y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + b_2(y) \frac{\partial T}{\partial y} + b_3(y)T = 0 \quad (1)$$

اگر a, b ها تابع T باشند آنگاه معادله غیر خطی بوده و با روش جداسازی متغیرها قابل حل نیست. فرض کنید بتوان جواب معادله فوق را بصورت زیر نوشت:

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2)$$

با جایگذاری جواب فوق در معادله داده شده خواهیم داشت:

$$\left[a_1(x) \frac{d^2 X}{dx^2} + a_2(x) \frac{dX}{dx} + a_3(x)X \right] \frac{1}{X} + \left[b_1(y) \frac{d^2 Y}{dy^2} + b_2(y) \frac{dY}{dy} + b_3(y)Y \right] \frac{1}{Y} = \pm \lambda^2 \quad (3)$$

$$a_1(x) \frac{d^2 X}{dx^2} + a_2(x) \frac{dX}{dx} + [a_3(x) \pm \lambda^2]X = 0 \quad (4)$$

$$b_1(y) \frac{d^2 Y}{dy^2} + b_2(y) \frac{dY}{dy} + [b_3(y) \mp \lambda^2]Y = 0 \quad (5)$$

هنگامی می‌توان از روش جداسازی متغیرها برای حل تحلیلی مسائل انتقال حرارت دوبعدی استفاده نمود که شرایط زیر برقرار باشند:

- ۱- یکی از جهات مسئله را بتوان بوسیله یک معادله همگن با شرایط مرزی همگن جدا کرد.
- ۲- جهت دیگر مسئله را بتوان توسط یک معادله دیفرانسیل همگن با یک شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی غیرهمگن نمایش داد.

توجه: علامت λ^2 طوری باید انتخاب شود تا معادله دیفرانسیل مرزی (Boundary-Value) جهت همگن منجر به معادله مقدار مشخصه (Characteristic Value) گردد. یادآوری ۱: یک مسئله مقدار مرزی زمانی مقدار مشخصه است که جواب‌های آن پریودیک باشند. دامنه نوسان‌ها می‌توانند ثابت یا متغیر باشند. یادآوری ۲: یک مسئله مقدار مشخصه جواب‌های غیر بدیهی فقط برای مقادیر مشخصی از یکی از پارامترهای λ بنام Eigen Value دارد. مسئله مقدار مشخصه (Characteristic Value) زیر شامل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f_1(x) \frac{du}{dx} + [f_2(x) + \lambda^2 f_3(x)]u = 0 \quad (6)$$

معادله فوق معادله Sturm-Liouville نام دارد. همچنین فرض کنید شرایط مرزی این مسئله همگن باشد. معادله (۶) با استفاده از فاکتور $e^{\int f_1 dx} = p(x)$ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + [q(x) + \lambda^2 w(x)]u = 0 \quad (7)$$

بطوریکه

$$\begin{aligned} q(x) &= f_2 p \\ w(x) &= f_3 p \end{aligned} \quad (8)$$

فرض کنید λ_m و λ_n دو مقدار مشخصه مختلف مسئله فوق باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که توابع مشخصه (Characteristic function) φ_m و φ_n مربوط به λ_m و λ_n متعامد هستند و شرایط تعامد را پیدا نماییم.

چون داریم

$$\begin{aligned} u &= \varphi_m(x) \\ u &= \varphi_n(x) \end{aligned} \quad (9)$$

که جواب‌های غیر بدیهی معادله (۷) هستند بنابراین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_m}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_m^2 w] \varphi_m &= 0 & \text{ضرب در } \varphi_n \\ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_n^2 w] \varphi_n &= 0 & \text{ضرب در } -\varphi_m \end{aligned}$$

با جمع دو عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\varphi_n \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_m}{dx} \right] - \varphi_m \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] + [\lambda_n^2 \lambda_m^2] \varphi_m \varphi_n w = 0 \quad (10)$$

یا:

$$[\lambda_n^2 - \lambda_m^2] \int_a^b \varphi_m \varphi_n w dx = \int_a^b \left\{ \varphi_n \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_m}{dx} \right] - \varphi_m \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] \right\} \quad (11)$$

با انتگرالگیری جزء به جزء:

$$\left[\lambda_n^2 - \lambda_m^2 \right] \int_a^b \varphi_m \varphi_n w dx = \left\{ \varphi_n \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_m}{dx} \right] - \varphi_m \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] \right\}_a^b \quad (12)$$

لذا توابع φ_m و φ_n متعامد هستند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (13)$$

یا

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a} = 0, \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=b} = 0, \quad (14)$$

یا

$$\left[\frac{du}{dx} + Bu \right]_{x=a} = 0, \left[\frac{du}{dx} + Bu \right]_{x=b} = 0 \quad (15)$$

اثبات رابطه (15) بصورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \varphi_n \varphi'_m - \varphi_m \varphi'_n &= \varphi_n \varphi'_m - \varphi_m \varphi'_n \pm B \varphi_m \varphi'_n \\ &= \varphi_n (\varphi'_m + B \varphi_m) - \varphi_m (\varphi'_n + B \varphi_n) \end{aligned} \quad (16)$$

توجه شود که اگر داشته باشیم $\varphi(x) = 0$ در $x=a$ یا $x=b$ در اینصورت سمت راست معادله (12) حذف می شود و نیازی به شرایط مرزی جهت تحقق شرط تعامد نخواهد بود.
توجه: اگر $p(a)=p(b)$ و $u(a)=u(b)$ و $u'(a)=u'(b)$ آنگاه شرط تعامد ارضا می شود. به این حالت شرط مرزی پریودیک می گویند.

بسط توابع بر حسب سری توابع متعامد

فرض کنید $\varphi_n(x)$ مجموعه ای از توابع متعامد نسبت به تابع وزنی $w(x)$ در فاصله (a,b) باشد. آنگاه می توان نوشت:

$$f(x) = b_0 \varphi_0(x) + b_1 \varphi_1(x) + b_2 \varphi_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \quad (17)$$

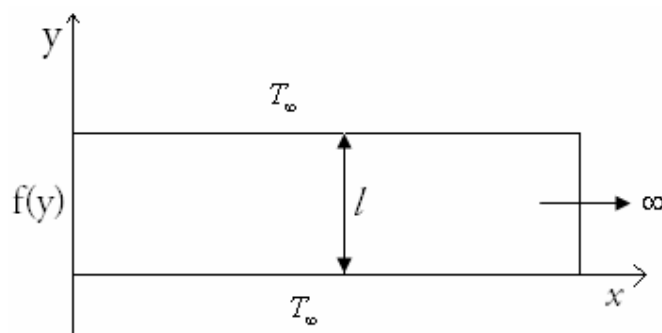
برای محاسبه b_m طرفین رابطه فوق را در $w(x) \varphi_m(x)$ ضرب و در فاصله a تا b انتگرال می گیریم:

$$\int_a^b w(x) f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_a^b w(x) \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx \quad (18)$$

یا:

$$b_n = \frac{\int_a^b w(x) f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b w(x) \varphi_n^2(x) dx} \quad (19)$$

مثال: یک پره دوبعدی با طول بی نهایت به ضخامت l در نظر بگیرید. دمای پایه پره $f(y)$ می باشد و دمای محیط T_{∞} است و ضریب انتقال حرارت بسیار بزرگ می باشد. دمای حالت پایای پره را بیابید.



معادله حاکم همگن است ولی شرایط مرزی همگن نیستند

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

$$T(0, y) = f(y)$$

$$T(\infty, y) = T_\infty \quad (21)$$

$$T(x, 0) = T_\infty$$

$$T(x, l) = T_\infty$$

فرض کنید $\theta = T - T_\infty$ باشد خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \theta = 0$$

$$\theta(0, y) = f(y) - T_\infty$$

$$\theta(\infty, y) = 0 \quad (22)$$

$$\theta(x, 0) = 0$$

$$\theta(x, l) = 0$$

اکنون جهت y همگن می باشد.

$$\theta = XY \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \lambda^2 \quad (23)$$

علامت λ^2 باید طوری انتخاب گردد که جهت همگن y به مقدار مشخصه مسئله برسد. انتخاب

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \text{ به توابع هیپربولیک که متعامد نیستند منجر خواهد شد.}$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, X(x)Y(0) = \theta(x, 0) = 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$X(x)Y(l) = \theta(x, l) = 0 \quad (23)$$

$$Y(l) = 0$$

$$X(\infty) = 0$$

$$Y = A \cos \lambda y + B \sin \lambda y \quad (24)$$

$$Y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (25)$$

$$Y(l) = 0 \Rightarrow B \sin \lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{m\pi}{l}, m = 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$Y = B \sin \frac{m\pi}{l} y \quad (27)$$

$$X = C e^{-\lambda x} + D e^{\lambda x} \quad (28)$$

$$X(\infty) = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (29)$$

$$X = C e^{-\lambda x} \quad (30)$$

$$\theta = B C e^{-\lambda x} \sin \lambda y \quad (31)$$

$$\theta = A_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y = A_n e^{-\frac{n\pi}{l} x} \sin \frac{n\pi}{l} y \quad (32)$$

حال با استفاده از اصل برهم‌نهی خواهیم داشت:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{l} x} \sin \frac{n\pi}{l} y$$

$$\theta(0, y) = f(y) \quad (33)$$

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} y$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi}{l} y dy, \quad A_n = \frac{\int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi}{l} y dy}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} y dy} \quad (34)$$

$$\theta = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi \eta}{l} d\eta \right] e^{-\frac{n\pi x}{l}} \sin \frac{n\pi y}{l} \quad (35)$$

حال اگر $\theta(0, y) = f(y) = \theta_0$ (const.value)

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \theta_0 \sin \frac{m\pi}{l} y dy = -\frac{2}{l} \frac{l}{m\pi} \theta_0 \cos \frac{m\pi}{l} y \Big|_0^l = -\frac{2}{m\pi} (\cos m\pi - 1) \quad (36)$$

$$n = 2k \Rightarrow A_n = 0 \quad (37)$$

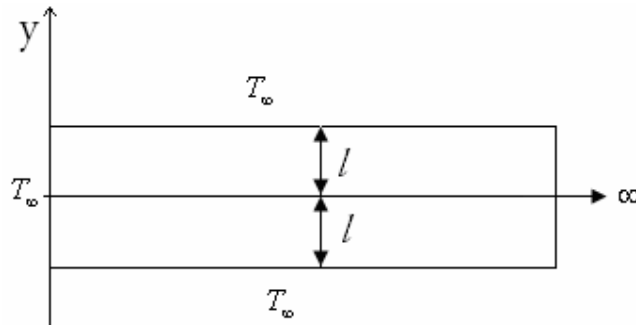
$$n = 2k + 1 \Rightarrow \cos n\pi = \cos(2k + 1)\pi = -1 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_n = \frac{4}{(2k + 1)\pi} \theta_0 \quad (38)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\theta_0}{(2k + 1)\pi} e^{-(2k+1)\frac{\pi x}{l}} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{l} \quad (39)$$

$$T(x, y) = \theta(x, y) + T_0 \quad (40)$$

مثال: مسئله مثال قبلی با شرایط مرزی نشان داده شده در شکل، با استفاده از شرط تقارن حل نمایید.



$$A_n = \frac{\int_0^l \theta_0 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} y dy}{\int_0^l \cos^2 \frac{(2n+1)\pi}{2l} y dy} \quad (41)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{یادآوری} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \cos^2 \frac{(2n+1)\pi}{2l} y dy &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[1 + \cos^2 \frac{(2n+1)\pi y}{l} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[y + \sin \frac{(2n+1)\pi y}{l} \right]_0^l = \frac{l}{2} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \theta_0 \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} y dy &= \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2l} \Big|_0^l \\ &= \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)} \left[\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} - 0 \right] = \frac{2\theta_0 l}{\pi(2n+1)} (-1)^n \end{aligned} \quad (44)$$

$$A_n = \frac{4\theta_0}{\pi(2n+1)} (-1)^n \quad (45)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\theta_0}{\pi(2n+1)} (-1)^n e^{-\frac{(2n+1)\pi x}{2l}} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2l} \quad (46)$$

ب- روش‌های عددی

(۱) اختلاف محدود Finite Difference: روش کلاسیک و ساده از نظر برنامه نویسی و در تخمین خطای محاسبات است ولی برای حل مسائل در هندسه های پیچیده محدودیت دارد.

(۲) حجم محدود Finite Volume

الف) سازمان یافته Structured

ب) بی سازمان Unstructured

(۳) اجزاء محدود Finite Element

(۴) اجزاء مرزی Boundary Elements

مزایا: یک بعد از مسئله کم میشود.

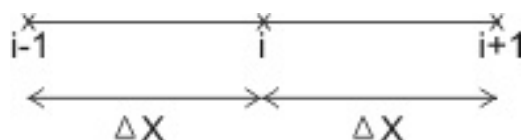
معایب: قابلیت تعمیم به مسائل غیرخطی را در حالت عمومی ندارد.

۵) روش های بدون شبکه Mesh-less Methods به تازگی ارائه شده است تلاش این روش ها اجتناب از تولید شبکه (نقاط) به منظور صرفه جوئی در زمان حل می باشد. البته هنوز مسائل ناشناخته (از نظر دقت و حجم محاسبات) بسیار دارد.

روش اختلاف محدود Finite Difference

معادله حاکم بر انتقال گرما در حالت دائمی بدون چشمه حرارتی در دو بعد به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (47)$$



شکل یک شبکه یکنواخت اختلاف محدود

حال با استفاده از بسط سری تیلور معادله مشتقات مرتبه دوم فوق را بسط می دهیم، ابتدا در جهت X داریم:

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= T_i + \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dots \\ T_{i-1} &= T_i - \Delta x \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dots \\ T_{i+1} - T_{i-1} &= 2T_i + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\Delta x)^4 \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \times \frac{2}{4!} + \dots \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) - \frac{2\Delta x^2}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) + \dots \\ &\quad \text{order 2} \end{aligned} \quad (48)$$

با صرف نظر کردن از سایر پارامترهای (از مرتبه دوم به بعد) خواهیم داشت:

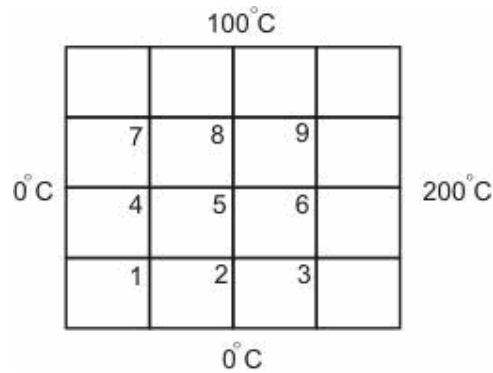
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (49)$$

به همین ترتیب در جهت Y داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cong \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta y^2} \quad (50)$$

* اختلاف مرکزی با سه نقطه مشتق مرتبه دوم را با دقت $(\Delta x)^2$ تقریب می زند.

- مثال دمای نقاط شماره گذاری می شود و برای هرگره معادلات بالا نوشته می شود.



برای گره شماره ۱ می‌توان نوشت:

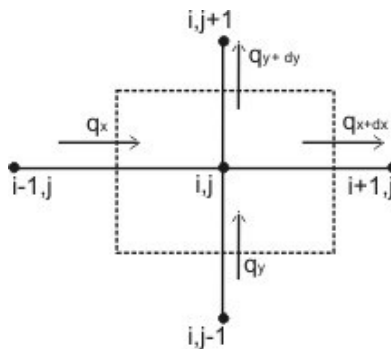
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{T_2 - 2T_1 + 0}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{T_4 - 2T_1 + 0}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 0 \quad (52)$$

$$T_2 + T_4 - 4T_1 = 0 \quad (1) \quad (53)$$

به همین ترتیب ۸ معادله دیگر نیز به دست می‌آوریم و ۹ معادله و ۹ نقطه و به همین ترتیب معادله جبری دمای تمام نقاط بدست می‌آید و با حل این معادلات جبری دمای تمامی نقاط مسئله بدست خواهد آمد.

- روش موازنه انرژی: (حالت خاص از روش حجم محدود)

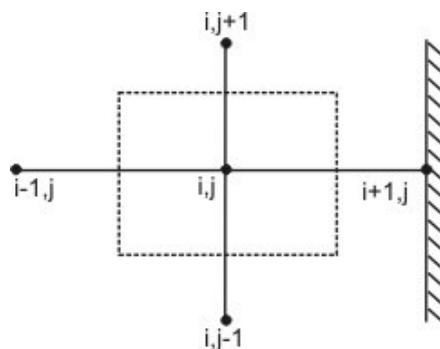


$$q_{dx} = k \frac{T_{i,j} - T_{i,j+1}}{\Delta y} \times \Delta x \times 1 \quad (54)$$

$$* \Rightarrow T_{i-1,j} + T_j + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0$$

بافرض k ثابت و $\Delta x = \Delta y$

مثال: اگر عایق داشته باشیم:



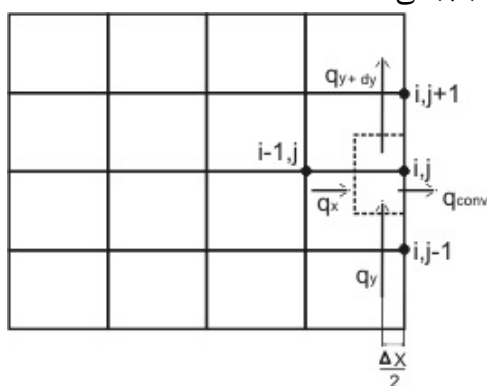
$$q_{x+dx} = 0$$

$$q_x + q_y = q_{x+dx} + q_{y+dy}$$

(۵۵)

$$\Rightarrow T_{i-1,j} + T_{i,j} + T_{i,j+1} - 3T = 0$$

در مرز محدود به سیال در جابجائی:



$$q_x + q_y = q_{y+dy} + q_{conv}$$

(۵۶)

$$\frac{k(T_{i-1,j} - T_{i,j})}{\Delta x} \Delta y + \frac{k(T_{i,j} - T_{i+1,j})}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} = h(T_{i,j} - T_{\infty}) + k \frac{(T_{i,j} - T_{i,j+1})}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2}$$

(۵۷)

به طور کلی برای معادلات گره ها می توان یک دستگاه معادله ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$KT=F$$

برای حل معادله بالا روش های گوناگونی می باشد:

- روش های مستقیم *Direct Methods*: مانند روش *Gauss Elimination*
- روش های تکراری *Iterative Methods*: که به عنوان مثال می توان روش *Gauss-Seidel* و روش *Jacobi* را نام برد.

مسائل

۱. دمای داخلی و خارجی شیشه پنجره ای به ترتیب 15°C و 5°C می‌باشد. اگر ضخامت شیشه 5mm و ابعاد آن 1×3 متر باشد مطلوبست اتلاف حرارت از شیشه ضریب هدایت حرارتی شیشه $1.4 \text{ W/m}^2\text{K}$ است.

۲. هوا در دمای 300°C از روی صفحه ای به ابعاد 0.5×0.25 متر جریان دارد اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی $250 \text{ W/m}^2\text{K}$ باشد مطلوبست انتقال حرارت از یکطرف این صفحه دمای صفحه 400°C است.

۳. صفحه ای فلزی از یکطرف کاملاً عایق شده است در حالیکه طرف دیگر آن انرژی تشعشعی به شدت 800 W/m^2 دریافت می‌کند. اگر دمای محیط 20°C و ضریب انتقال حرارت جابجائی بین صفحه و محیط $12 \text{ W/m}^2\text{K}$ باشد مطلوبست افت دمای صفحه فلزی.

۴. توزیع دما در دیواری یک بعدی با هدایت حرارتی 50 W/mK و ضخامت 50mm به صورت $T = a + bx^2$ می‌باشد که $a = 200^{\circ}\text{C}$ و $b = -2000^{\circ}\text{C/m}^2$ و x برحسب m است. مطلوب است تعیین نرخ تولید حرارت در این دیوار و شار حرارتی در دو وجه آن. توزیع دما در شرایط دائمی و مستقل از زمان می‌باشد.

۵. مطلوبست محاسبه اتلاف حرارت به ازاء واحد سطح از دیوار کوره ای که جدار آن از فولاد به ضخامت 0.5cm و $k = 40 \text{ W/mK}$ بوده و جدار خارجی آن آجری به ضخامت 10cm و $k = 2.5 \text{ W/mK}$ می‌باشد. دمای جدار داخلی 900K و دمای جدار خارجی 460K فرض شود. دمای فصل مشترک فولاد و آجر را نیز محاسبه کنید.

۶. در طراحی مبدل حرارتی یک هواپیما دمای ماکزیمم دمای دیواره نباید از 800K تجاوز کند. برای شرایطی که در شکل نشان داده شده است مطلوبست محاسبه مقاومت ماکزیمم مجاز دیوار.

$$T_g = 1300\text{K}$$

$$T_c = 300\text{K}$$

$$h_g = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$h_c = 400 \text{ W/m}^2\text{K}$$

hg = ضریب انتقال حرارت جابجائی گازهای داغ است.

۷. یک لوله از جنس فولاد زنگ با ضریب هدایت حرارتی $19 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ به قطر داخلی 2cm و قطر خارجی 4cm بوسیله 3cm لایه عایق آزبست پوشانیده شده است. اگر دمای جدار داخلی 600 oC و دمای جدار خارجی عایق 100 oC باشد مطلوبست انتقال حرارت به ازاء واحد طول لوله.

$$k = 0.2 \text{ W/mK}$$

۸. دیواری آجری به ضخامت 0.1m و ضریب هدایت حرارتی 0.7 W/mK از یکطرف در معرض باد سرد به دمای 270K و ضریب انتقال حرارت جابجائی $40 \text{ W/m}^2\text{K}$ و از طرف دیگر در معرض هوای سالن به دمای 330K و ضریب انتقال حرارت جابجائی $10 \text{ W/m}^2\text{K}$ قرار دارد. مطلوبست اتلاف حرارت از این دیوار به ازاء واحد سطح.

۹. جدار داخلی لوله نازکی به شعاع داخلی r_i در دمای T_i قرار دارد. اگر این لوله در معرض محیطی به دمای T_∞ و ضریب جابجائی h_∞ قرار داشته باشد مطلوبست تعیین ضخامت عایق بهینه برای این لوله از مقاومت حرارتی لوله صرفنظر کنید و فقط عایق را در نظر بگیرید. نتیجه فوق را برای لوله ای مسی به قطر 10mm و ضخامت عایق 0,2,5,10,40mm امتحان کنید. ضریب جابجائی $5 \text{ W/m}^2\text{K}$ و هدایت حرارتی عایق $0.055 \text{ W/m}^2\text{K}$ فرض شود.

۱۰. در استوانه ای توپر (Solid) به شعاع r_i چشمه حرارتی یکنواختی به شدت $\dot{q}$ تولید می شود. اگر این استوانه در معرض محیطی به دمای T_∞ و ضریب جابجائی h_c قرار گرفته باشد ثابت کنید:

$$\frac{T(r) - T_\infty}{T_\infty} = \frac{\dot{q} r_i}{4 h_c T_\infty} \left\{ 2 + \frac{h_c r_i}{k} \left[1 - \left(\frac{r}{r_i} \right)^2 \right] \right\}$$

۱۱. جریان الکتریکی به شدت 700A در کابلی فولادی به قطر 5mm و مقاومت $6 \times 10^{-4} \text{ K/W}$ جریان دارد. این کابل در معرض هوای 30°C و ضریب جابجائی $25 \text{ W/m}^2\text{K}$ قرار دارد. دمای سطح این کابل را محاسبه کنید. از مقاومت حرارتی فولاد صرفنظر کنید.

۱۲. دمای جدار داخلی لوله ای که در آن بخار جریان دارد 300°C است. قطر داخلی این لوله 5cm و ضخامت آن 5.5mm است. این لوله توسط دو لایه عایق پوشانده شده است. ضخامت لایه اول 9cm و هدایت حرارتی آن $50 \text{ W/m}^2\text{K}$ و ضخامت لایه دوم 4cm و هدایت حرارتی آن $0.35 \text{ W/m}^2\text{K}$ می باشد. دمای سطح خارجی لوله عایق 30°C است. اتلاف حرارت به ازاء واحد طول این لوله را محاسبه کنید. هدایت حرارتی لوله $47 \text{ W/m}^2\text{K}$ فرض شود. هرگاه این لوله در اتاقی در مجاورت هوای 20°C قرار گرفته باشد. مطلوبست ضریب جابجائی انتقال حرارت بین لوله و هوای اتاق.

۱۳. استوانه ای از جنس فولاد ضدزنگ $(k = 13 \text{ Btu/hrft}^{\circ}\text{F})$ بطول 1' و قطر 4" جهت انجام عملیات حرارتی از کوره ای به طول 20 ft عبور می دهند. دمای نهائی آن هنگام خروج از کوره 1500°F است. اگر دمای گازهای داخل کوره 2300°F و ضریب انتقال حرارت جابجائی $18 \text{ Btu/hrft}^2\text{F}$ باشد مطلوبست سرعت عبور استوانه از داخل کوره $(\alpha = 0.27 \text{ ft}^2/\text{h})$

۱۴. آجری از جنس نسوز $(\alpha = 0.02 \text{ ft}^2/\text{hr}, h = 0.65)$ در دمای اولیه یکنواخت 100°F را در معرض گازهای داغ 1200°F قرار می دهند. ضریب جابجائی $4 \text{ Btu/hrft}^2\text{F}$ بوده و برای کلیه سطوح آجر یکسان است. مطلوبست دمای مرکز آجر پس از گذشت 20 hr در حالتهای (a) دیوار بی نهایت به ضخامت 2 ft (b) ستون بسیار بلند به سطح مقطع $2' \times 2'$ (c) مکعب به ابعاد $2 \times 2 \times 2$ که یک وجه آن روی سطح عایقی قرار گرفته است.

۱۵. استوانه ای به قطره قطر 5" از جنس آلومینیم است $\rho = 36 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}, C_p = 0.25 \frac{\text{Btu}}{\text{lbm}^{\circ}\text{F}}, h = 0.125 \frac{\text{Btu}}{\text{hrft}^{\circ}\text{F}}$ در دمای اولیه یکنواخت 100°F را در محیطی به دمای 1200°F با ضریب جابجائی $4 \text{ Btu/hrft}^2\text{F}$ قرار می دهند. زمان لازم برای آنکه دمای مرکز استوانه به 500°F برسد را در حالتهای زیر محاسبه

کنید. (a) استوانه خیلی بلند (b) استوانه به ارتفاع ۲ فوت که روی سطحی عایق ایستاده است.

۱۶. یک اتوی خانگی به وزن 3lb و از جنس آلومینیوم بوسیله المانهای الکتریکی به قدرت 50W گرم می شود. اگر سطح خارجی اتو 0.5ft^2 دمای هوای محیط 70°F و ضریب جابجائی $2.0\text{BTu}/\text{hft}^2\text{ }^\circ\text{F}$ باشد مطلوبست زمان لازم برای آنکه دمای اتو به 220°F برسد دمای اولیه اتو دمای محیط است.

فصل چهارم: انتقال حرارت هدایت-ناپایدار و گذرا

Unsteady Conduction Heat Transfer

دربسیاری از کاربردهای مهندسی با مسائل انتقال حرارت هدایت ناپایدار و گذرا مواجه می‌شویم. به عنوان مثال انتقال حرارت از دیواره سیلندر موتورهای احتراق داخلی از جمله مسائلی است که در آن دمای جداره با زمان تغییر می‌کند. البته به دلیل تغییرات پیرویدیک شرایط داخلی سیلندر (دمای هوا یا گاز) شاید بتوان تغییرات دما جداره داخلی را به صورت تابع معینی از زمان یا با تقریب بیشتر به صورت پیرویدیک فرض کرد. برعکس تغییرات دمای مجموعه سیلندر از زمان روشن شدن موتور تا لحظه رسیدن به شرایط دائمی تابع بسیار پیچیده‌ای از زمان می‌باشد و پیش بینی دمای جداره و سپس تعیین دمای آب خنک کن یا روغن جهت طراحی سیستم خنک کاری و روغنکاری اهمیت ویژه‌ای دارد. مثالهای دیگری می‌توان برای انتقال حرارت ناپایدار در زندگی روزمره پیدا کرد. مثلاً سرد شدن ناگهانی هوا و تغییرات دمای سطوح زمین با زمان از آن جمله می‌باشد. همچنین در مراحل ساخت قطعات از طریق ریخته‌گری کلیه مراحل سرد شدن و انجماد مذاب در قالب ماسه از جمله مسائل انتقال حرارت ناپایدار یا گذرا می‌باشد. در متن حاضر منظور از ناپایدار (Unsteady) یعنی دما همواره با زمان متغیر است در حالیکه واژه گذرا (Transient) برای حالتی بکار می‌رود که دمای جسم پس از گذشت زمان معینی به شرایط دائمی و مستقل از زمان برسد. بدیهی است که بین دو حالت فوق می‌توان در حالت ایده آل شرایط پیرویدیک را نیز مدلسازی کرد.

معادلات حاکم انتقال حرارت هدایت ناپایدار یا گذرا در مختصات متعامد دکارتی، استوانه‌ای یا کروی و به شرط خطی بودن معادلات دارای حل‌های تحلیلی می‌باشد و روشهای مختلفی برای حل آن پیشنهاد شده است. کتابهای Ozicik, Myers و یا Carslaw and Jager حاوی راه حل‌های متنوعی برای هندسه‌های مختلف و شرایط مرزی مختلف می‌باشد و می‌توان به صورت Hand Book توسط دانشجویان کارشناسی بکار رود. درمقاطع تحصیلات تکمیلی کتابهای فوق به صورت کتاب درسی به دانشجویان پیشنهاد می‌شود تا دانش و تکنیک‌های ریاضی آنان را تقویت کند.

معادلات حاکم در هندسه‌های پیچیده و شرایطی که ضریب انتقال حرارت هدایت، چشمه حرارتی و سایر خواص فیزیکی به صورت غیرخطی هستند امروزه به کمک روش‌های عددی کلاسیک به آسانی حل می‌شود و بسیاری از نرم‌افزارهای تجاری مانند ANSYS، NISA و Fluent قابلیت حل این معادلات را دارند.

در این فصل دانشجویان با روشهای تقریبی ولی بسیار کاربردی حل مسائل ناپایدار و همچنین با روشهای حل تحلیلی و نتایج آن آشنا می‌شوند. ضمناً در انتهای فصل روش عددی اختلاف محدود مورد بحث قرار گرفته و دانشجویان با این روش حل نیز آشنا خواهند شد.

معادلات حاکم

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dot{q}''' / k = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

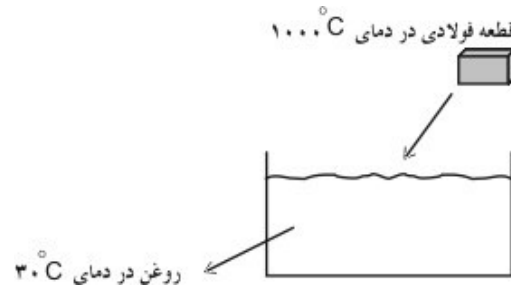
در مختصات کارتزین

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 1/r \frac{\partial T}{\partial r} + \dot{q}''' / k = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2)$$

در مختصات استوانه ای

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \text{ Diffusivity } \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (3)$$

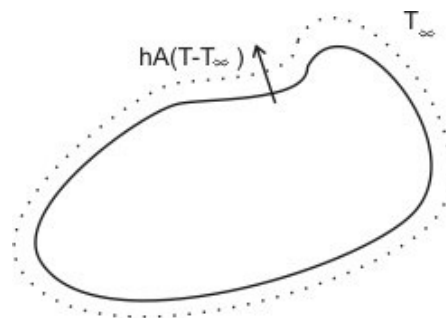
در معادلات فوق $\dot{q}'''$ چشمه حرارتی، τ زمان، k ضریب انتقال حرارت هدایت و α ضریب پخش می باشد.



مثالی برای هدف فیزیکی:

هدف: تعیین مدت زمان سرد شدن و نحوه تغییرات دمای قطعه با زمان.

۱. روش ظرفیت انباشته یا ظرفیت فشرده Lumped Capacity System



جسم ناگهان در محیطی به دمای T_∞ قرار می گیرد

ρ	جرم مخصوص
C	گرمای ویژه
V	حجم
A	سطح جانبی
T_0	دمای اولیه

در سیستم انباشته فرض می‌شود توزیع دما در جسم یکنواخت و تنها تابعی از زمان باشد. از نظر فیزیکی یعنی مقاومت هدایتی در داخل جسم در مقایسه با مقاومت جابجایی از سیال محیط کمتر باشد. این فرض وقتی مجاز است که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{h}{k} \left(\frac{V}{A} \right) < 0.1 \quad (4)$$

حجم قطعه
↖
↗ سطح جانبی

مقدار $\frac{hx}{k}$ به عنوان عدد بی‌بعد بيو (Biot) شناخته می‌شود (X طول مشخصه است) و با علامت Bi نشان داده می‌شود به این ترتیب شرط فوق بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$Bi = \frac{hx}{k} < 0.1 \quad (5)$$

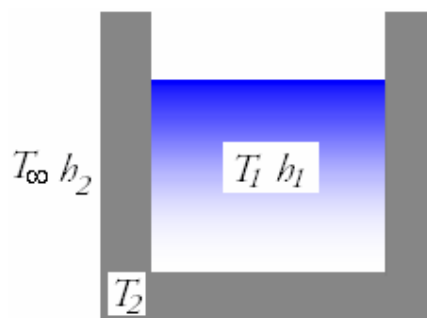
از موازنه انرژی: تغییرات انرژی داخلی = حرارت جابجا شده به محیط

$$hA(T - T_\infty) = -\rho c V \frac{\partial T}{\partial \tau} \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = e^{-(hA/\rho c V)\tau} \quad (6)$$

$$\text{شرط اولیه} \quad \begin{cases} \tau = 0 \\ T = T_o \end{cases} \quad (7)$$

سیستم انباشته چندگانه

فرض کنید در داخل ظرف فلزی مایعی قرار دارد، ظرف و مایع درون آن هر دو در دمایی یکسان (متفاوت با دمای محیط اطراف) قرار دارند. حال کل سیستم گفته شده در دمای محیط قرار داده می‌شود و دمای سیستم شروع به تعادل با دمای محیط می‌نماید. هدف یافتن دمای ظرف و محتویات آن به عنوان تابعی از زمان است.



معادلات حاکم بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} h_1 A_1 (T_1 - T_2) = -\rho_1 C_1 V_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ h_1 A_1 (T_2 - T_1) + h_2 A_2 (T_2 - T_\infty) = -\rho_2 C_2 V_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} \end{cases} \quad (8)$$

با شرایط اولیه:

$$\begin{cases} T_1 = T_2 = T_0 \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

با نوشتن معادلات به صورت اپراتوری معادلات حاکم به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} \left(\frac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1} + D \right) T_1 - \frac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1} T_2 = 0 \\ -\frac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2} T_2 - \left(\frac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2} + \frac{h_2 A_2}{\rho_2 C_2 V_2} + D \right) T_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

با در نظر گرفتن پارامترهای زیر:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{h_1 A_1}{\rho_1 C_1 V_1} \\ K_2 &= \frac{h_1 A_1}{\rho_2 C_2 V_2} \\ K_3 &= \frac{h_2 A_2}{\rho_2 C_2 V_2} \end{aligned} \quad (11)$$

معادلات به فرم زیر ساده‌تر می‌شوند:

$$\begin{cases} (K_1 + D)T_1 - K_1 T_2 = 0 \\ -K_2 T_2 - (K_2 + K_3 + D)T_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

با حل دستگاه معادلات فوق دمای ظرف و محتویات آن به صورت تابعی از زمان بدست می‌آیند:

$$T_1 = T_\infty + Me^{m_1 t} + Ne^{m_2 t} \quad (13)$$

$$T_2 = T_1 + \frac{T_\infty + Me^{m_1 t} + Ne^{m_2 t}}{K_1} \quad (14)$$

در روابط فوق ثوابت به صورت زیر تعریف شده‌اند:

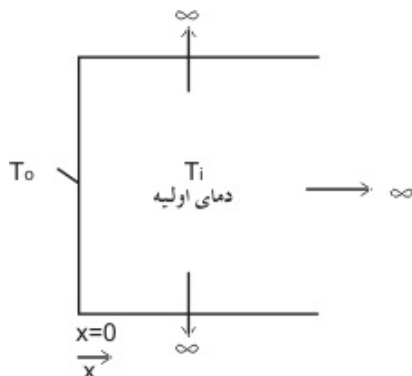
$$m_1 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) + \sqrt{(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1 K_3}}{2} \quad (15)$$

$$m_2 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) - \sqrt{(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1 K_3}}{2} \quad (16)$$

$$M = \frac{T_0 - T_\infty}{m_1 - m_2} m_2 \quad (17)$$

$$N = \frac{T_0 - T_\infty}{m_1 - m_2} m_1 \quad (18)$$

۲. هدایت گذرا در جسم نیمه بی نهایت Semi-Infinite



الف) ناگهان در لحظه $\tau = 0$ دمای سطح به T_0 می رسد.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q'''/k = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad , \quad T(x, \tau) = ? \text{ هدف}$$

$$T(0, \tau) = T_0 \quad \tau > 0 \quad \text{شرط مرزی} \quad (20)$$

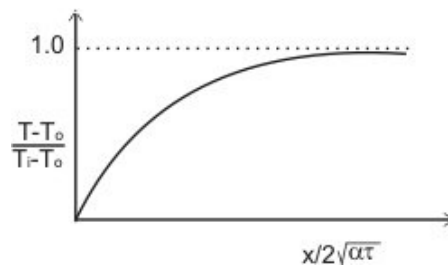
$$T(x, 0) = T_i \quad \text{شرط اولیه}$$

به کمک تبدیل لاپلاس

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \quad (21)$$

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{kA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}$$

ب) شار حرارتی ثابت: سطح در لحظه $\tau = 0$ تحت شار حرارتی ثابتی قرار می گیرد.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 1/\alpha \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0 \end{cases} \quad \tau > 0$$

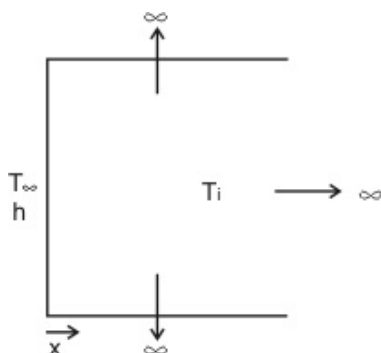
جواب تحلیلی:

$$T - T_i = \frac{2Q_0 \sqrt{\alpha\tau/\pi}}{kA} \exp(-x^2/4\alpha\tau)$$

$$-\frac{Q_0 x}{kA} (1 - \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}})$$

$$T - T_i = \frac{2q_0}{k} \sqrt{\alpha\tau/\pi} \exp(-x^2/4\alpha\tau) - \frac{q_0 x}{k} (1 - \text{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}})$$

ت) جسم نیمه بی نهایت ناگهان در محیطی به دمای T_∞ قرار می گیرد.



شرط اولیه

$$T(x, 0) = T_i$$

$$hA(T_\infty - T)|_{x=0} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \tau > 0 \quad \text{شرط مرزی:}$$

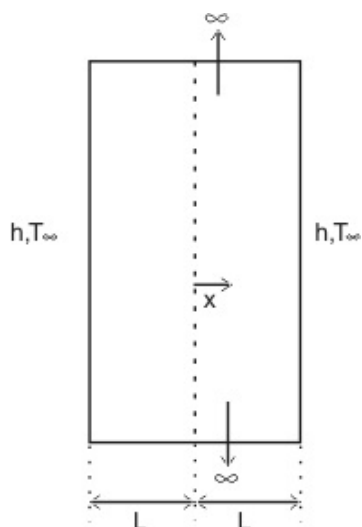
$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right) \times \right. \quad \text{جواب تحلیلی:}$$

$$\left. \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right) \right] \right]$$

۳. هدایت گذرای یک بعدی در اجسامی مانند صفحه، استوانه و کره که در معرض

جابجائی قرار دارند

(a) صفحه بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (a)$$

$$T(x, 0) = T_i \quad \tau = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \tau > 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{h}{k}(T - T_{\infty}) \Big|_{x=L} \quad \tau > 0$$

حل معادله (a) به کمک روش Separation of Variables امکان پذیر است. برای حل به کتاب Myers مراجعه کنید.

جواب:

$$T(x, \tau) - T_{\infty} = 2 \frac{hL}{k} (T_i - T_{\infty}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n L \cos \lambda_n x}{\lambda_n L \left(\frac{hL}{k} + \sin^2 \lambda_n L \right)} e^{-(\lambda_n L)^2 \frac{\alpha \tau}{L^2}} \quad (b)$$

که λ_n از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\lambda_n L \tan \lambda_n L = \frac{hL}{k} \quad \text{و} \quad \frac{hL}{k} = Biot \text{ عددی}$$

از نظر فیزیکی دو عامل در انتقال حرارت تاثیر دارد. اولی نسبت مقاومت هدایت به مقاومت جابجائی است که با عدد Bi زیر نشان می دهند.

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad (22)$$

دومی میزان نفوذ موج دما در جسم است که با عدد فوریه نشان می دهند.

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{L^2} \quad (23)$$

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ هر چه α بزرگتر باشد یعنی k بزرگتر است و یا میزان نفوذ در اثر هدایت حرارت بیشتر

است. Heisler رابطه (b) را به صورت منحنی هائی رسم کرده است. در این منحنی ها تاثیر اعداد Bi و Fo به وضوح دیده می شود. در این منحنی ها داریم:

$$\begin{aligned} \theta &= T(x, \tau) - T_{\infty} & T_i &= \text{دمای اولیه} \\ \theta_i &= T_i - T_{\infty} & T_o &= \text{دمای مرکز} \\ \theta_o &= T_o - T_{\infty} \end{aligned} \quad (24)$$

از منحنی (ت-۱) می توان دمای مرکز صفحه را در زمانهای مختلف و برای شرایط مختلف محاسبه کرد.

اگر دما در نقاط دیگری لازم باشد می توان از منحنی (ت-۲) نسبت $\frac{\theta}{\theta_o}$ را بدست آورد آنگاه به

کمک رابطه:

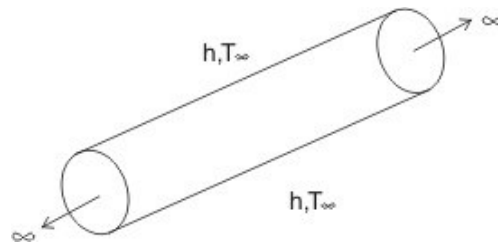
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \left(\frac{\theta_o}{\theta_i} \right) \left(\frac{\theta}{\theta_o} \right)$$

دمای θ را محاسبه کنید.

{برای محاسبه حرارت منتقل شده در هر لحظه می توان از منحنی (ت-۳) استفاده کرد}.

$$\begin{cases} Q = \tau & \text{حرارت تلف شده تا لحظه } \tau \\ Q_0 = \rho CV(T_i - T_\infty) \end{cases}$$

(b) استوانه بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{hr_o}{k} \\ Fo &= \alpha \tau / r_o^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_i \\ T(0, \tau) &= \text{معین} \\ -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_o} &= h[T(r_o, \tau) - T_\infty] \end{aligned}$$

(c) کره

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

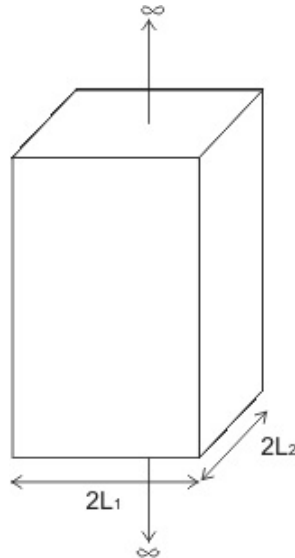
$$T(0, \tau) = \text{Finite}, T(r, 0) = T_i, -h \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_o} = h[T(r_o, \tau) - T_\infty]$$

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{hr_o}{k} \\ Fo &= \alpha \tau / r_o^2 \end{aligned} \right\}$$

هنگام استفاده از منحنی‌های Heisler باید توجه شود که این منحنی‌ها برای عدد فوریه بیشتر از ۰/۲ صادق است. در فوریه کمتر از ۰/۲ برای آنکه سری‌های فوریه همگرا شوند لازم است که جملات بیشتری از Summation محاسبه شوند که این عمل در منحنی‌های Heisler انجام نشده است.

(۴) هدایت گذرا در اجسام چند بعدی

(a) میله ای به طول بی نهایت



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (25)$$

فرض

$$T = T_1(x, \tau) \times T_2(y, \tau) \quad (26)$$

با جانشین کردن (۲۶) در (۲۵) نتیجه می شود.

$$\frac{1}{T_1} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \right) = - \left(\frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{T_2} \quad (27)$$

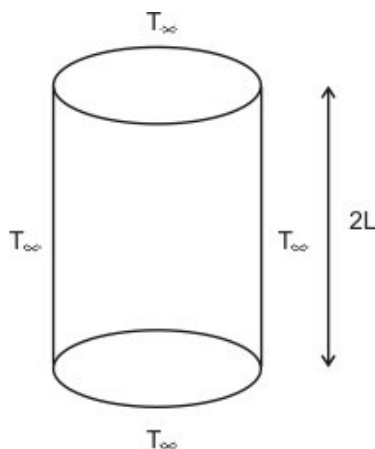
در نتیجه منجر به حل دو مسئله هدایت در صفحات بی نهایت به ضخامت $2L_1$ و $2L_2$ می شود این دو حالت توسط منحنی های Heisler قابل حل هستند لذا می توان نوشت:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_1} \times \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_2} \quad (28)$$

(b) مکعب به ابعاد $2L_1 \times 2L_2 \times 2L_3$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_1} \times \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_2} \times \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{2L_3} \quad (29)$$

(c) استوانه به طول محدود و معین

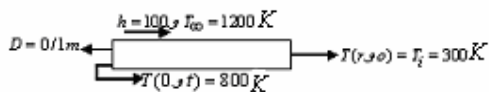


$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$T = T_1(r, \tau) \times T_2(z, \tau) \quad (30)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \left(\frac{T - T_\infty}{T_\lambda - T_\infty} \right)_{cyl} \times \left(\frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \right)_{صفحه}$$

مثال: محورهای فولادی به قطر 0.11 متر در کوره ای گاز سوز بادمای 1200K و ضریب جابجایی $100 \frac{W}{m^2 K}$ قرارداده می شود. اگر دمای اولیه محور 300K باشد چه مدت طول می کشد تا دمای مرکز آن به 800K برسد؟



طبق جدول ضمیمه کتاب:

$$\rho = 7832 \text{ و } k = 51.2$$

$$C = 541, \alpha = 1.21 \times 10^{-5}$$

$$Bi = \frac{hr_o/2}{k} = \frac{100 \times 0.05}{51.2} = \%488$$

⇐ پس می توان از روش انباشته استفاده کرد.

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho V C} t} = e^{-\frac{4h}{\rho C D} t}$$

$$\ln\left(\frac{800 - 1200}{300 - 1200}\right) = -0.811 = -\frac{4 \times 100}{7832 \times 541 \times 0.1} t$$

$$\Rightarrow t = 860(s) = 14 : 20 \text{ دقیقه}$$

مثال: میله ای بلند به قطر 40mm از یاقوت کبود ساخته شده (یاقوت کبود همان Al_2O_3 دمای

اولیه آن 800K و ناگهان با سیالی با دمای 300K و $h = 1600 \frac{W}{m^2 K}$ خنک می شود پس از ۳۵

ثانیه عایقی به دور میله پیچیده می شود. دمای میله پس از زمانی طولانی به چه مقدار می رسد؟ (جدول خواص در انتهای کتاب)

$$\rho = 3970 \text{ و } c = 1068 \text{ و } k = 22.3 \text{ و } \alpha = 5.259 \times 10^{-5}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{hr_{io}}{2k} = \frac{1600 \times \frac{0.02}{2}}{22/3} = \underline{0.72 > 0.1}$$

حرارت تلف شده (از رابطه انرژی) حرارت تلف شده تا زمان ۳۵

$$-Q = \rho c v (\bar{T}(\infty) - T_{\infty}) - Q_o$$

$$\text{و } Q_o = \rho c v (T_i - T_{\infty})$$

$$\bar{T}(\infty) = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty})(1 - Q/Q_o)$$

از نمودار (ت-۶) داریم:

$$Bi = \frac{hr_o}{k} = \frac{1600 \times 0.02}{22.3} = 1.43$$

$$Bi^2 F_o = Bi^2 \left(\frac{\alpha t}{r_o^2} \right) = 0.95$$

$$Q/Q_o \cong 0.56 \Rightarrow \bar{T} = 300 + (800 - 300)(1 - 0.56) = 561K$$

توجه:

$\bar{T}(\alpha)$ دمای میانگین سطح و هسته استوانه در زمان $t = 35_s$ است.

حل عددی معادله انتقال حرارت ناپایدار

حالت یک بعدی



$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(t=0) = T_i \quad (31)$$

$$T(x=0) = T_1$$

$$T(x=1) = T_2$$

روش صریح یا Explicit

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (32)$$

$$T_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) + T_i^n$$

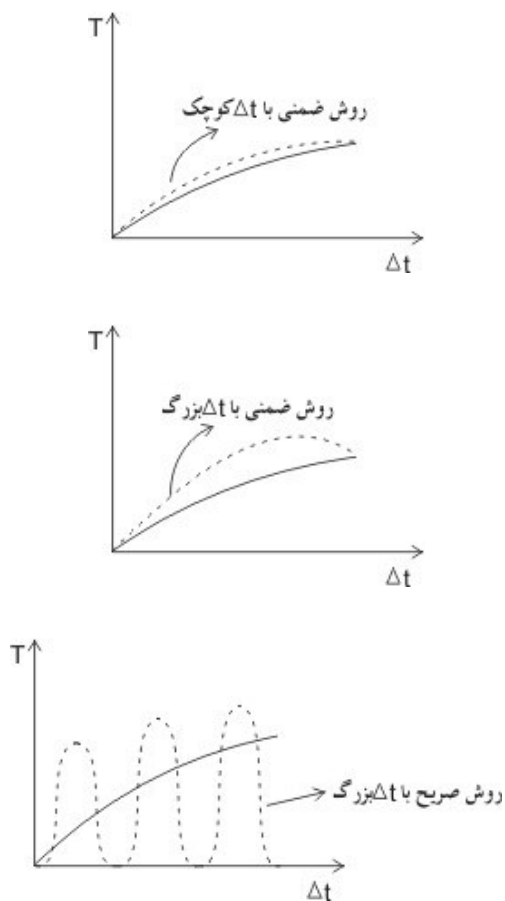
روش ضمنی یا Implicit

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{(T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1})}{\Delta x^2} \quad (33)$$

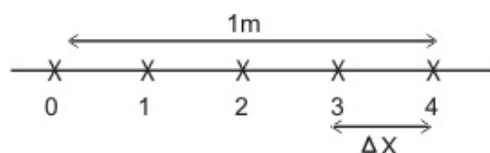
روش ضمنی منجر می شود به دستگاه معادلات ماتریسی که دماها به طور همزمان بدست می آیند و نه نسبت به هم در هر قدم. خطای برش هر دو روش از مرتبه اول زمان و دوم مکان است.

* روش ضمنی پایدار است یعنی اگر خطا وارد محاسبات شود این خطا میرا می شود ولی روش صریح ناپایدار است و اگر خطا وارد شود ممکن است رشد کند. برای پایداری روش صریح باید داشته باشیم:

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} \quad (34)$$



مثال:



روش صریح

$$T_i = 0$$

$$T(x=0) = 20$$

$$T(x=1) = 100$$

$$\frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_o^n - 2T_1^n + T_2^n)$$

$$n=0 \Rightarrow \frac{T_1^1 - T_i}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (20 - 2x_o + o) \Rightarrow T_1^1$$

$$\frac{T_2^1 - T_2^o}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_3^o - 2T_2^o + T_i^o)$$

$$\frac{T_2^1 - 0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (0 - 2y_o + 0) \rightarrow T_2^1$$

وقتی که دمای هر ۴ نقطه را بدست آوریم شروع به پیدا کردن ترم دوم یا زمان $n+1$ می کنیم.

روش ضمنی

$$\frac{T_1^1 - T_1^o}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_o^1 - 2T_1^1 + T_2^1)$$

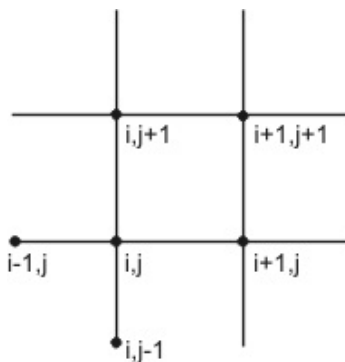
$$\frac{T_2^1 - T_2^0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_1^1 - 2T_2^1 + T_3^1)$$

$$\frac{T_3^1 - T_3^0}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_2^1 - 2T_3^1 + T_4^1)$$

با انتخاب Δt و $5x$ متناسب جواب را از دستگاه معادلات ماتریس بدست می آوریم.

حل عددی معادله انتقال حرارت ناپایدار در دو بعد

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

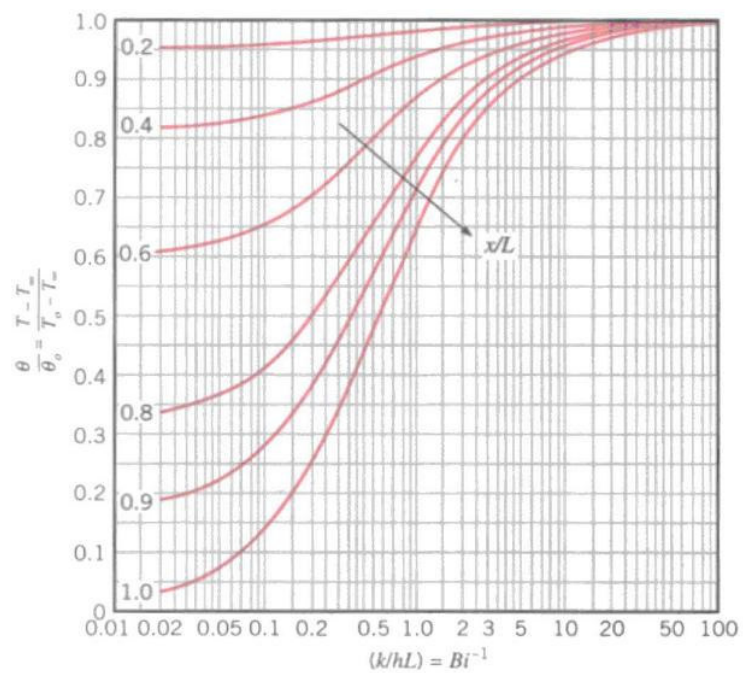
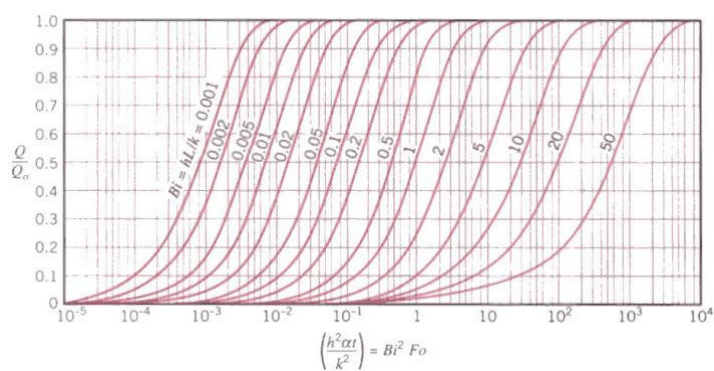
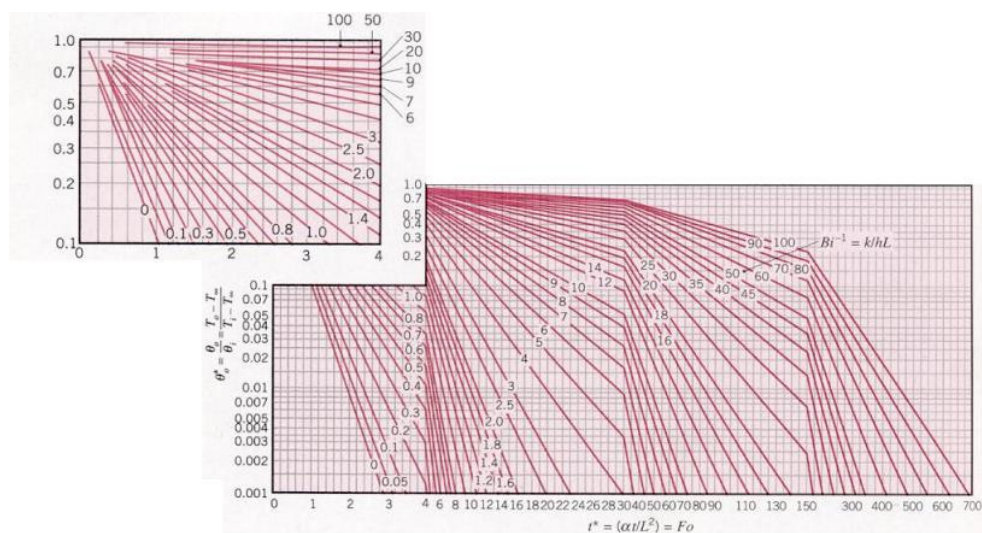


روش صریح:

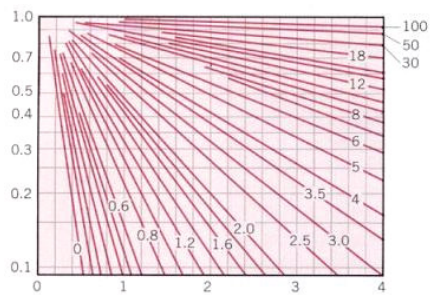
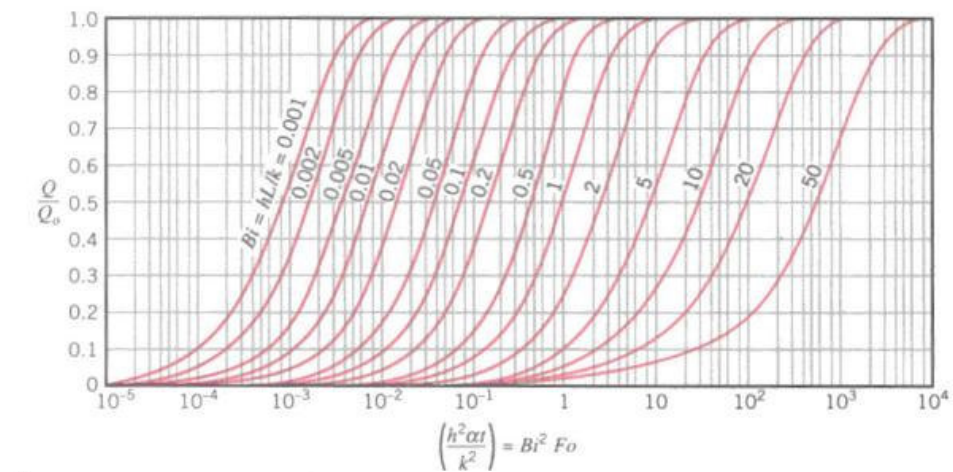
$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n) + \frac{\alpha}{\Delta y^2} (T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n)$$

$$\text{شرط پایداری } \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{4} \text{ و } \Delta y = \Delta x$$

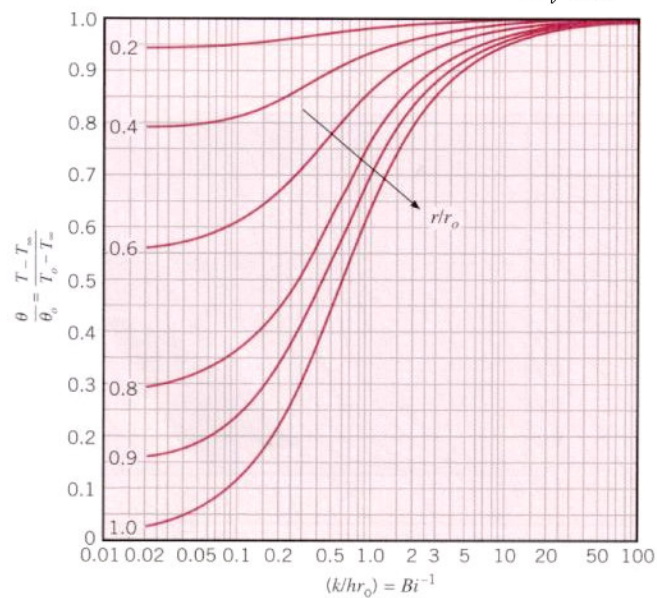
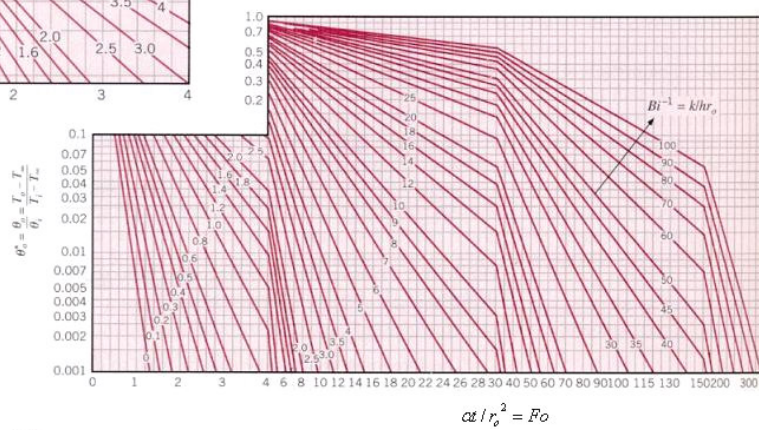
$$\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^n}{\Delta t}=\frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(T_{i-1,j}^{n+1}-4T_{i,j}^{n+1}+T_{i+1,j}^{n+1}+T_{i,j+1}^{n+1}+T_{i,j-1}^{n+1}\right) \quad (40)$$



شکل منحنی‌های هایسلر برای دیوار تخت با ضخامت $2L$ [۹]



Cylinder



شکل منحنی‌های هایسلر استوانه بی نهایت با شعاع r_0 [۹]

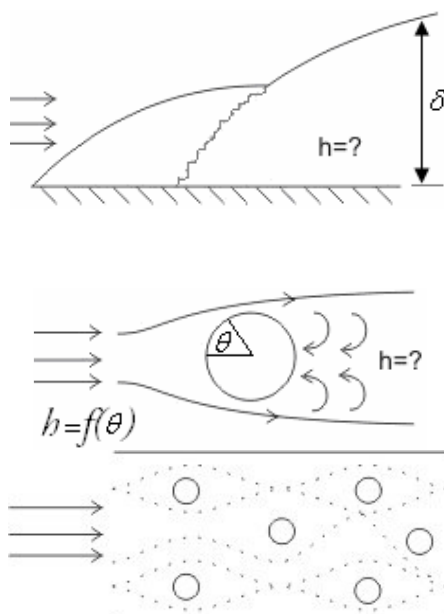
فصل پنجم: انتقال حرارت جابجائی (جریان خارجی) Convection Heat Transfer (External Flow)

رابطه اصلی کاربردی انتقال حرارت از طریق جابجائی بصورت زیر است:

$$q = h A (T - T_{\infty})$$

$\nwarrow$ سطوح تبادل حرارت
 $\swarrow$ ضریب انتقال حرارت جابجائی
 $\searrow$ دمای سیال به اندازه کافی دور از جداره جسم

این رابطه به قانون **سرمایش نیوتن** نیز معروف است.
در این فصل تمام سعی و تلاش ما پیدا کردن تابع h می باشد.



شکل لایه مرزی هیدرودینامیکی در اطراف یک سطح تخت، در اطراف استوانه و مجموعه لوله‌ها
ضریب نرخ انتقال حرارت جابجایی (h) تابع پیچیده‌ای از محل قرارگیری لوله‌ها، قطر آن‌ها و اعداد
بی بعد مانند Re و Pr می‌باشد. این مطلب در طول درس بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

– مقایسه با مکانیک جامدات:

به طور کلی در الاستیسته داریم:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} + f_i = 0 \\ \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + f_x = 0 \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + f_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

بطوریکه

$$\sigma_{xx,x} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \quad (2)$$

به ترتیب تنش های نرمال در جهت x و y و تنش برشی هستند. f_i نیروی حجمی مانند جرم است.

در معادلات فوق برای اکثر حالات کلاسیک Closed Form Solution داریم و معادلات از طریق روشهای دقیق قابل حل اند.

معادلات حاکم در سیالات غیر قابل تراکم دو بعدی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

ρ جرم مخصوص u, v مولفه های سرعت افقی و قائم، p فشار، μ و سکوزیته دینامیک هستند. این معادلات در حالت کلی جواب بسته ندارند که علت اصلی مشکل حل این معادلات چه به صورت تحلیلی و چه به صورت روشهای عددی (کامپیوتری) وجود ترمهای غیرخطی یا به عبارت دیگر جملات جابجائی است. در حالتی که سرعت سیال خیلی ناچیز باشد (جریان سیال بسیار لزج) می توان از جملات جابجائی در مقابل جملات فشار و پخش (Diffusion) صرفنظر کرد. آنگاه معادلات راحت تر حل می شوند و می توان جواب های بسته نیز برای آن پیدا کرد. بدین منظور طی صدسال اخیر تلاش قابل توجهی جهت حل این معادلات صرف شده است همچنین بعلاوه نبود حل تحلیلی جامع، بسیاری از نتایج کاربردی به کمک روش های تجربی بدست آمده و در اختیار مهندسان قرار گرفته است.

معادله دیفرانسیل انتقال حرارت جابجائی بصورت زیر نوشته می شود.

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

همانطور که ملاحظه می شود برای حل معادله فوق لازم است ابتدا معادلات ناویر استوکس حل شوند و میدان سرعت (u, v) تعیین گردند در این شرایط هنوز غیر خطی بودن معادلات و ناپایداری جملات جابجائی مشکل زا هستند و جواب های تحلیلی محدود و برعکس جواب های عددی نسبتاً نامحدود ولی تقریبی خواهند بود. در این حالت هنوز استفاده از روش های تجربی جهت تعیین ضرایب انتقال حرارت و ضرایب اصطکاک بطور معمول بکار می رود و ساخت انواع دستگاههای اندازه گیری مانند (PIV) Particle Image Velocimetry یا (LDV) Laser Doppler Velocimetry درک عمیق تر و دقیق تری از پدیده های انتقال حرارت و انتقال ممنتوم بخصوص در جریان های آشفته فراهم ساخته است. به نظر می رسد در آینده نزدیک با تلاش های محققین در حل تحلیلی، عددی و

بکار گیری روش های تجربی بیشتری از پدیده های انتقال در توربوماشین ها و سایر دستگاههای حرارتی - برودتی فراهم می یابد.

روش های تحلیلی

تحلیل ابعادی معادلات لایه مرزی

The Laminar Boundary Layer Equations Using Scaling Principle

جریان سیال تراکم ناپذیر از روی یک صفحه تخت به طول L را در نظر بگیرید. حال معادله لایه مرزی را با استفاده از تحلیل ابعادی مورد مطالعه قرار می دهیم و تغییرات سرعت از $u=0$ تا $u=U_{\infty}$ و تغییرات دما را از $T=T_0$ تا $T=T_{\infty}$ در نظر می گیریم. در فاصله x از لبه حمله ضخامت لایه مرزی δ است (δ ضخامت لایه مرزی به عنوان اندازه ای است که در آن سرعت از صفر تا U_{∞} تغییر می کند). در ناحیه به اندازه کافی دور از صفحه سرعت U_{∞} ، دما T_{∞} ، سرعت در جهت y صفر و فشار P_{∞} است. در نتیجه در ناحیه نزدیک به لایه مرزی (در ناحیه ای با ارتفاع δ از صفحه و طول L) ابعاد (Scale) زیر برای تغییرات x, y در نظر گرفته می شود:

$$x \sim L, y \sim \delta, u \sim U_{\infty}, \quad (5)$$

به دانشجویان توصیه می شود قبل از مطالعه این بخش مباحث مربوط به مکانیک سیالات ۱ و ۲ مرور نمایند.

فرض می کنیم که مولفه های سرعت با U و گرادیان های سرعت با U/L متناسب باشند. هرگاه از تغییرات فشار صرف نظر نماییم (در مورد صفحه تخت فرض درستی است) آنگاه معادله مومنتم در جهت x بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$\frac{U}{L} + \frac{U \cdot U}{L} \sim v \frac{U}{L^2} \quad (6)$$

$$\frac{UL}{v} \sim 1 \quad (7)$$

$$Re_L \sim 1 \quad (8)$$

نتیجه:

برای آنکه جمله پخش $v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ با جمله جابجایی هم مرتبه باشد لازم است که مرتبه بزرگی عدد Re حدود ۱ باشد. بنابراین برای آنکه جملات برای Re های بالا نیز هم مرتبه باشند. لازم است که طول مشخصه در جهت عمود بر جریان با δ ضخامت لایه مرزی متناسب باشد، آنگاه می توان نتایج ذیل را گرفت

پیوستگی Continuity

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{U}{L} \approx \frac{v}{\delta} \Rightarrow v \sim \frac{U \delta}{L} \quad (10)$$

مومنتم در جهت X

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 U \cdot \frac{U}{L} + \frac{\delta}{L} U \cdot \frac{U}{\delta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + v \left(\frac{U}{L^2} + \frac{U}{\delta^2} \right) \\
 \frac{U^2}{L} + \frac{U^2}{L} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{vU}{\delta^2} \left(\frac{\delta^2}{L^2} + 1 \right) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \ll 1 \\
 \frac{vU}{\delta^2} &\sim \frac{vU}{L^2 / \text{Re}_L} \cong \frac{vU}{L^2} \text{Re}_L = \frac{vU}{L^2} \cdot \frac{UL}{v} = \frac{U^2}{L}
 \end{aligned} \tag{11}$$

یا برعکس اگر $\frac{\partial P}{\partial x} \sim 0$ آنگاه مرتبه بزرگی بخش و جابجائی باید برابر باشند

$$\frac{U^2}{L} \sim \frac{vU}{\delta^2} \Rightarrow \delta/L \sim 1/\sqrt{\text{Re}_L} \tag{12}$$

مومنتم در جهت y

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 U \cdot \frac{U\delta}{L^2} + \frac{U\delta}{L} \cdot \frac{U\delta}{L\delta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{U\delta^2}{L} \left(\frac{U\delta}{L.L^2} + \frac{U\delta}{L\delta^2} \right) \\
 \frac{U^2\delta}{L^2} + \frac{U^2\delta}{L^2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{U^2\delta}{L^2} \left(\frac{\delta^2}{L} + 1 \right) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \ll 1
 \end{aligned} \tag{13}$$

پس

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \sim \frac{U^2\delta}{L^2} \tag{14}$$

شکل

$$\begin{aligned}
 P - P_\delta &\sim \int_0^\delta \rho \frac{U^2\delta}{L^2} dy \rightarrow P \sim P_\delta + \rho \frac{U^2\delta^2}{L^2} \\
 \frac{\partial P}{\partial x} &\sim \frac{\partial P_\delta}{\partial x} + O \left[\rho \frac{U^2\delta^2}{L^3} \right] \sim \frac{\partial P_\delta}{\partial x} + O \left[\frac{\rho U^2}{L} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right]
 \end{aligned} \tag{15}$$

ولی

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_\delta}{\partial x} &= \frac{dP_\delta}{dx} \quad (P_\delta \text{ is independent of } y, \text{ Flow is inviscid}) \\
 \frac{\partial P}{\partial x} &\sim \frac{dP_\delta}{dx} + O \left[\frac{\rho U^2}{L} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right]
 \end{aligned} \tag{16}$$

با استفاده از نتایج بدست آمده فوق در معادله مومنتم در جهت X:

$$\frac{U^2}{L} + \frac{U^2}{L} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\delta}{dx} - \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{U^2}{L} \cdot \frac{\delta^2}{L^2} \right) + v \frac{U}{\delta^2} \quad (17)$$

$$\frac{U^2}{L} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\delta}{dx} - \frac{U^2}{L} \left[\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \right] + \frac{vU}{\delta^2}$$

$\downarrow$
 $\ll 1$

بنابراین معادله مومنتم در جهت X:

$$\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0 \quad (18)$$

بصورت زیر نوشته می شود:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (19)$$

مقایسه

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \sim o\left(\rho \frac{U^2}{L}\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \sim o\left(\rho \frac{U^2 \delta}{L^2}\right) \quad (20)$$

$$\frac{dP/\partial y}{\partial P/\partial x} \sim o\left(\frac{U^2 \delta/L^2}{U^2/L}\right) \sim o\left(\frac{\delta}{L}\right) \ll 1$$

یا

$$\frac{\partial P}{\partial y} \ll \frac{\partial P}{\partial x} \quad (21)$$

مومنتم در جهت Y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

معادله انرژی Energy Equation

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \beta T \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \phi \quad (23)$$

اکنون به بررسی مرتبه بزرگی جملات می پردازیم:

$$\rho C_p T \left(\frac{U}{L} + \frac{\delta U}{L \delta} \right) \sim k T \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\delta^2} \right) + \beta T \left(U_o \rho \frac{U_o^2}{L} + \frac{\delta U}{L} \rho \frac{\delta}{L^2} U^2 + \phi \right) \quad (24)$$

فرض می کنیم ضخامت لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی هم مرتبه باشند (در بخش بعدی در این مورد بیشتر توضیح داده می شود) داریم:

$$\frac{U}{L} + \frac{U}{L} \sim \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\delta^2} \right) + \frac{\beta}{C_p} \frac{U^3}{L} \left(1 + \frac{\delta^2}{L^2} \right) + \phi / \rho C_p T \quad (25)$$

$\ll 1$ $\ll 1$

$$\phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \phi &\sim \mu \left[\left(\frac{U}{L} \right)^2 + \left(\frac{\delta U}{L \delta} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{U}{\delta} + \frac{U \delta}{L^2} \right)^2 \\ &\sim \mu \left[\frac{U^2}{L^2} + \frac{U^2}{\delta^2} + \frac{U^2 \delta^2}{L^4} + 2 \frac{U^2}{L^2} \right] \sim \mu \frac{U^2}{\delta^2} \\ \mu \frac{U^2}{\delta^2} &= \rho v \frac{U^2}{\delta^2} \sim \rho \frac{v U^2}{v L / U} \sim \frac{\rho U^3}{L} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \beta T u \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (27)$$

در عبارت فوق از ترم a صرف نظر می کنیم وقتی که داشته باشیم:

$$\frac{\phi}{Inertia} \sim \frac{\rho u^3 / L}{\rho C_p T U / L} = \frac{U^2}{C_p T} \quad \text{if } Ec = \frac{U^2}{C_p T} \ll 1 \quad (28)$$

ترم (a) زمانی قابل صرف نظر کردن است که $Ec \ll 1$ باشد در مورد ترم (b) می توان نوشت:

$$\frac{\phi}{pressure term} \sim \frac{\rho U^3 / L}{\rho \beta T U^3 / L} = \frac{1}{\beta T} \quad (29)$$

برای گاز ایده آل

$$\frac{1}{\beta T} \sim o(1), \beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{T} \quad (30)$$

برای مایعات (مانند آب)

$$\beta T \sim 0.05 \Rightarrow \phi \gg pressure term \quad (40)$$

به هر حال چنانچه از ϕ صرف نظر کنیم ترم فشار نیز صرف نظر خواهد شد. که در این صورت معادله انرژی بصورت زیر ساده می شود:

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (41)$$

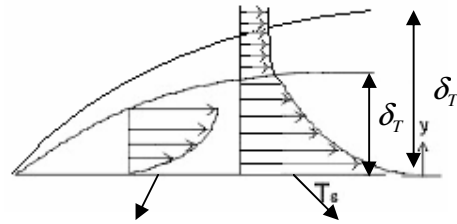
فرضیه لایه مرزی Thermal Boundary Layer Assumption

$$q = hA(T_s - T_\infty)$$

در این رابطه T_s دمای سطح، T_∞ دمای سیال به اندازه کافی دور از جسم می باشد همانگونه که قبلا نیز اشاره شد در نزدیکی جسم انتقال حرارت تنها از طریق هدایت انجام می گیرد، بنابراین:

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

ضریب هدایت حرارت سیال ↗



توزیع دما در لایه مرزی حرارتی توزیع سرعت در لایه مرزی هیدرودینامیکی

شکل لایه مرزی بر روی یک سطح تخت

با ترکیب دو معادله فوق خواهیم داشت:

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial y} \big|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = ? \quad \text{برای محاسبه } h \text{ باید معلوم کنیم}$$

$$T = f(y) = ? \quad \text{یا}$$

Local Heat Transfer Coefficient $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$: ضریب انتقال حرارت جابجائی موضعی: h

و $\bar{h}$ ضریب انتقال حرارت متوسط است که برای صفحه تخت بصورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{h} = \frac{\int_0^x h dA}{\int_0^x dA} = \frac{\int_0^x h \times (1) \times dx}{\int_0^x (1) \times dx}$$

برای صفحه تخت به عرض واحد

مثال: اگر ضریب انتقال حرارت جابجائی موضعی به صورت زیر باشد $\bar{h}$ را محاسبه نمایید.

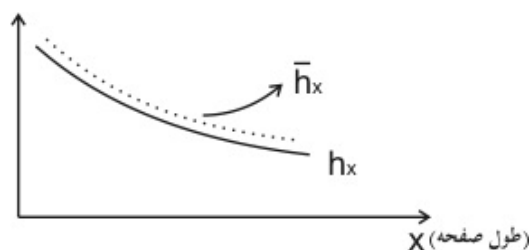
$$h_x(x) = ax^{0.1}$$

$$\bar{h}_x = \frac{1}{x} \int_0^x h_x(x) dx \rightarrow h_x(x) = ax^{0.1}$$

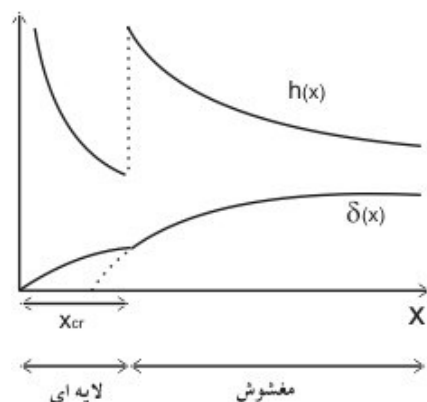
$$\Rightarrow \bar{h}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x ax^{0.1} dx = \frac{a}{x} \int_0^x x^{0.1} dx = 1/1 ax^{0.1}$$

$$\Rightarrow \bar{h}(x) = 1.1 h_x$$

ملاحظه می شود که تغییرات h_x و $\bar{h}_x$ به صورت زیر خواهد بود.



- مقایسه تغییرات لایه مرزی سرعت و ضریب انتقال حرارت جابجائی در طول یک صفحه:



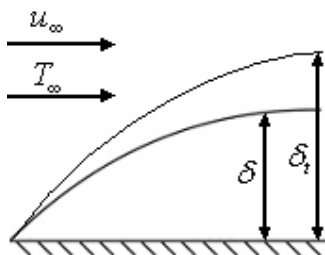
معادلات لایه مرزی و تشابه رینولدز - کولبورن (Colburn-Reynolds Analogy)

در بخش‌های قبلی معادلات لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی را بدست آوردیم. ملاحظه می‌کنید که حل این معادلات نسبتاً آسان‌تر از حل معادلات کامل ناویر-استوکس است. بنابراین می‌توان در شرایط خاص حل بسته (Closed Form) نیز بدست آورد. برای مثال حل بلازیوس Blasius یکی از روش‌های کلاسیک در این مورد است که با فرض تشابه توزیع سرعت نسبت به متغیر تشابه‌ی y/δ می‌توان معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی لایه مرزی را بصورت معادله دیفرانسیل معمولی نوشت و براحتی حل نمود. البته در این جزوه حل تشابه‌ی بلازیوس مورد بحث قرار نخواهد گرفت.

روش دیگری که برای تعیین ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت بکار می‌رود روش فون-کارمن Von-Karman است که بصورت انتگرال‌گیری از معادلات در فاصله $y=0$ تا $y=\delta$ و فرض توزیع چند جمله‌ای برای سرعت و دما می‌باشد. خواننده می‌تواند با مراجعه به کتب سیالات یا انتقال حرارت روش‌های ریاضی فوق‌الذکر را مورد مطالعه قرار دهد.

یکی از نکات جالب توجه در مبحث انتقال حرارت جابجایی تشابه بین دو مکانیزم انتقال مومنتم و انتقال حرارت می‌باشد. به عبارت دیگر همانگونه که از نظر فیزیکی و درک شهودی می‌توان انتقال

مومنتم و انتقال حرارت را در جریان آرام و متلاطم بطور مشابه تفسیر کرد از نظر ریاضی نیز معادلات مشابه هم برای دو نوع انتقال بدست می‌آیند.



شکل لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (42)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

فرض: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ، در مورد صفحه تخت فرض درستی است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong \frac{V^2}{\delta^2} \gg \frac{V^2}{L^2} \cong \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (43)$$

معادله لایه مرزی هیدرودینامیکی:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (44)$$

معادله لایه مرزی حرارتی:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (45)$$

ابتدا معادلات را بی بعد می کنیم خواهیم داشت:

$$U^* = \frac{U}{V} \quad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \quad y^* = \frac{y}{l} \quad (46)$$

$$V^* = \frac{v}{V} \quad P^* = \frac{P}{\rho V^2} \quad x^* = \frac{x}{l}$$

معادله بی بعد شده حاصل می شود:

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y} = \text{Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \quad (47)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{عدد پرانتل} \quad (48)$$

عدد پرانتل از نظر فیزیکی نسبت پخش مومنتم ν به پخش حرارت می باشد. هرگاه $\text{Pr}=1$ باشد در آنصورت بدیهی است که ضخامت لایه مرزی حرارتی و هیدرودینامیکی برابر خواهند شد. البته از نظر

ریاضی با حل تشابهی یا انتگرالی می توان نشان داد که $\frac{\delta}{\delta_t} = \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$ اکنون با توجه به معادله (44) و

(47) می توان توابع زیر را برای توزیع سرعت و دما فرض کرد:

$$U^* = f_1(x^*, y^*, \text{Re}) \quad (49)$$

$$T^* = f_2(x^*, y^*, \text{Re}, \text{Pr})$$

از تعریف تنش برشی داریم:

$$\tau \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu \frac{\partial u^* V}{\rho \partial y^*} = \frac{\mu V}{L} f_3(x^*, \text{Re})$$

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho V^2} = \frac{\mu V}{\frac{1}{2} \rho V^2 L} f_3(x^*, \text{Re}) \quad (50)$$

$$\frac{C_f}{2} = \frac{1}{\text{Re}} f_3(x^*, y^*, \text{Re})$$

طبق تعریف شار حرارتی عبارتست از:

$$q \Big|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{-k(T_s - T_\infty)}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad (51)$$

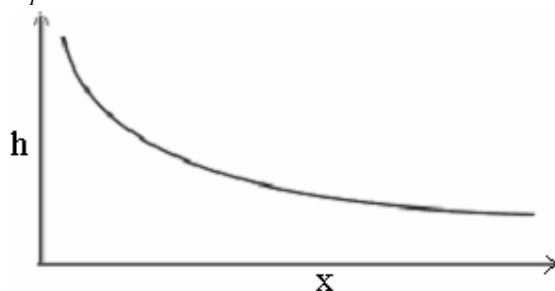
$$h = \frac{q}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} f_4(x^*, \text{Re}, \text{Pr}) \quad (52)$$

عدد بی بعد ناسلت بصورت زیر تعریف می شود:

$$Nu = \frac{hL}{K} = f_4(x^*, \text{Re}, \text{Pr}) \quad (53)$$

اکنون ملاحظه می گردد که هرگاه عدد $\text{Pr}=1$ باشد آنگاه بدلیل تشابه معادلات ۴۴ و ۴۷ شکل توابع f_3 و f_4 نیز مشابه خواهد بود. در نتیجه ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت مشابه خواهند بود. عدد بی بعد استانتون را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$St = \frac{Nu}{\text{Re Pr}} = \frac{h}{\rho V C_p} \rightarrow \frac{C_f}{2} \quad (54)$$



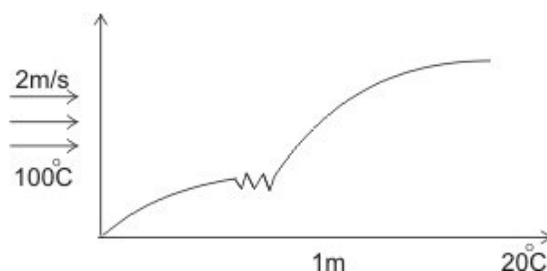
شکل توزیع ضریب انتقال حرارت بر روی سطح تخت

رابطه (۵۳) اهمیت ویژه ای دارد و بیانگر آنست که برای بدست آوردن ضریب انتقال حرارت جابجایی از روش تجربی یا تئوری به جای هفت پارامتر اصلی $(h, k, C_p, \rho, \mu, L, U_\infty)$ تنها از سه گروه بی بعد Re , Pr , Nu می توان استفاده نمود. اهمیت رابطه (۵۴):

رابطه (۵۴) تشابه رینولدز نام دارد. توجه دارید که رابطه بین میدان سرعت و انتقال حرارت رابطه برقرار می‌نماید. البته این رابطه در شرایط $Pr=1$ و $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ بدست آمده‌است، با این وجود می‌توان نشان داد از این رابطه می‌توان برای طیف وسیعی از اعداد Pr می‌توان استفاده نمود [۹] و در نهایت رابطه بصورت زیر کامل می‌شود:

$$\frac{C_f}{2} = St Pr^{\frac{2}{3}} \quad 0.6 < Pr < 60 \quad (55)$$

نکته: در جریان آشفته روی صفحه تخت گرادیان فشار نقش کمتری دارد و معادله (۵۵) در این حالت نیز بصورت تقریبی صادق خواهد بود.
مثال: در شکل روبرو h_x و $\bar{h}_x$ و q را به دست آورید.



$$Re_x = \frac{\rho V x}{\mu} < 5 \times 10^5$$

از جدول صفحه ۸۲ داریم:

$$0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} = Nu_x$$

$$Nu_x = \frac{h_x L}{k} \xrightarrow{\text{معلوم}} h_x \rightarrow \text{برای هر } x \text{ معلوم}$$

$$q = \bar{h}(T_\infty - T_s)$$

$$h_x = 0.664 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

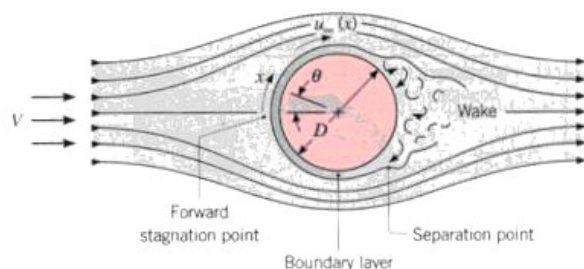
$$\Rightarrow q = h_x(T_\infty - T_s) = h_x(100 - 20)$$

به ازاء واحد سطح

جریان از روی هندسه‌های مختلف

برای جریان سیال از روی هندسه‌های مختلف باید از فرمول‌های تجربی پیشنهاد شده توسط محققان مختلف سود جست. برای مثال برای استوانه Nu برحسب رینولدز تعریف می‌شود. در زیر رابطه تجربی هلیپرت را برای جریان از روی استوانه ارائه شده‌است.

$$\begin{cases} Nu = \frac{hD}{k} \\ Re = \frac{\rho V D}{\mu} \end{cases} \quad (17)$$



شکل جریان از روی استوانه [۹]

رابطه تجربی هلیپرت

$$\bar{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{K} = C Re_D^m Pr^{1/3} \rightarrow \text{تمام خواص در دمای } \bar{Nu}_D \text{ فیلم سیال است.}$$

جدول مقادیر رابطه هیلبرت برای مقطع دایروی به ازای اعداد مختلف رینولدز

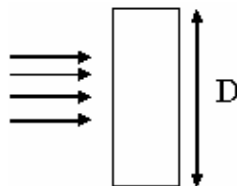
Re_D	c	m
0.4-4	0.989	0.330
4-40	0.911	0.385
40-4000	0.683	0.465
4000-40000	0.193	0.618
40000- 4×10^5	0.027	0.805

توجه شود که اعداد ارائه شده در جدول فوق تنها برای جریان از روی استوانه‌های با مقطع دایره‌ای صادق است و برای هندسه‌های مختلف (مقطع شش‌ضلعی، مثلثی و ...) باید از جداول ویژه این مقاطع استفاده نمود.

جدول مقادیر عدد هیلبرت برای مقاطع مختلف

Geometry	Re_D	C	m
Square 	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.246	0.588
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.102	0.675
Hexagon 	$5 \times 10^3 - 1.95 \times 10^4$ $1.95 \times 10^4 - 10^5$	0.160 0.0385	0.638 0.782
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.153	0.638
Vertical plate 	$4 \times 10^3 - 1.5 \times 10^4$	0.228	0.731

مثال: جریان هوا از روی صفحه تختی با مشخصات زیر عبور می کند. نرخ انتقال حرارت از روی این استوانه را بیابید.



$$Re_D \rightarrow 9 \times 10^3 - 1.5 \times 10^5$$

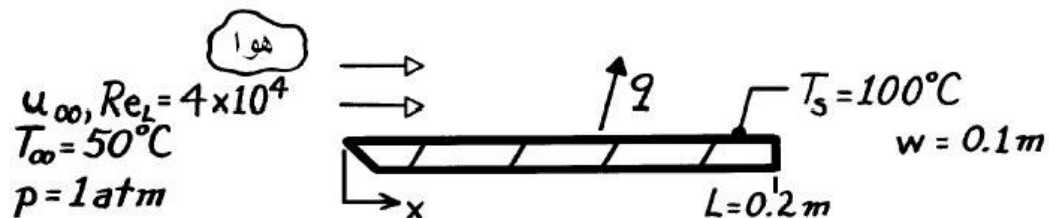
$$C = 0.228$$

$$m = 0.731$$

توجه:

روابط گوناگونی (تجربی) برای پیدا کردن $\overline{Nu}$ حول استوانه و کره موجود می باشد که دقت آن ها متفاوت است. اینک با ذکر سه مثال به تکمیل مبحث انتقال حرارت جابجائی در جریان خارجی می پردازیم:

(۱) هوا در فشار 1 atm و دمای 50°C به طور موازی روی یک سطح ورق تختی که دمای آن 100°C است جریان دارد. طول صفحه 0.2m و پهنای آن 0.1m است عدد رینولدز بر مبنای طول صفحه 4×10^4 است. نرخ انتقال گرما از صفحه به هوا چقدر است؟ اگر سرعت جریان آزاد هوا دو برابر و فشار آن 10 atm شود، نرخ انتقال گرما چقدر خواهد شد؟



حل:

طبق جدول انتهایی کتاب:

$$T_f = 384^\circ K \mid p = 1 \text{ atm} \rightarrow k = 0.0299 \frac{m}{m.k} \text{ و } pr = 0.7$$

$$q = \bar{h}_L (w \times L) (T_s - T_\infty)$$

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}_L L}{K} = 0.664 \text{Re}_L^{0.5} pr^{0.33} = 118$$

$$\bar{h}_L = 118 \frac{k}{L} = 118 \times \frac{0.299}{0.2} = 17.6 \Rightarrow q = 17.6 \times (0.02) \times (100 - 50) = 17.6$$

در قسمت دوم فشار ۱۰ اتمسفر شده است پس:

$$\rho_2 = 10\rho_1 \Rightarrow v_2 = 0.1 \times v_1$$

$$\text{Re}_{L,2} = \frac{UL}{\nu} = 2 \times 10 \times \left(\frac{UL}{\nu}\right)_1 = 20\text{Re}_1 = 8 \times 10^5$$

عدد رینولدز زیاد شده است و از مرز 5×10^5 گذشته است پس جریان مغشوش خواهد شد و باید از

معادلات تجربی لایه مرزی مرکب استفاده نمود:

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h}_L L}{k} = (0.037 \text{Re}_L^{0.8} - 871) \text{Pr}^{1/3} = [0.037(8 \times 10^5)^{0.8} - 871] \times (0.7)^{1/3}$$

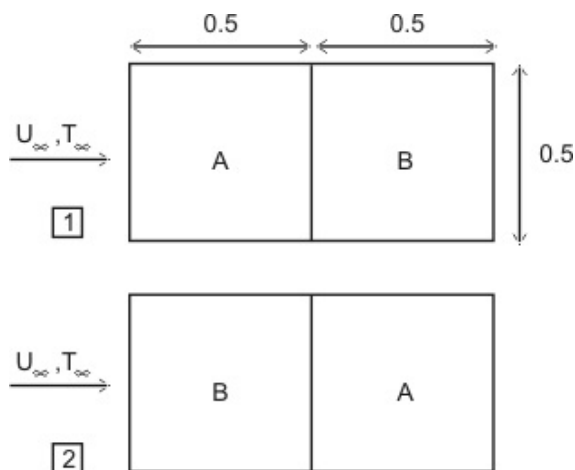
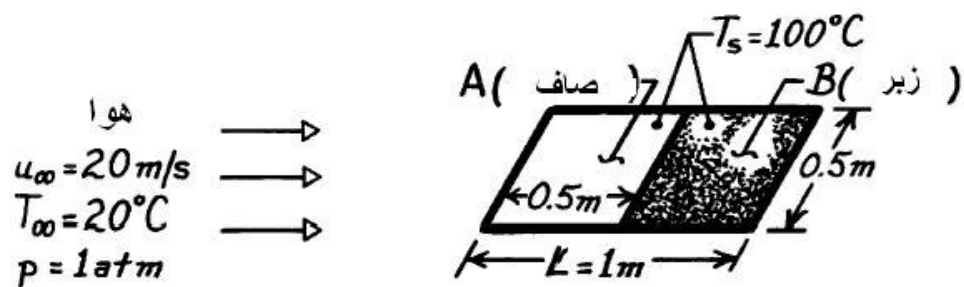
$$\bar{Nu} = 961 \times \frac{0.0299}{0.2} = 143.6$$

$$q = 143.6 \times (90.1 \times 0.2) (100 - 50) = 143.6$$

پس انتقال حرارت جابجائی بسیار زیادتر خواهد شد.

۲) سطح بالای یک محفظه گرم از یک بخش صاف (A) و یک بخش کاملاً ناصاف (B) تشکیل

شده است این سطح در معرض جریان هوای محیط قرار دارد.



در کدامیک از حالات ۱ و ۲ مقدار انتقال حرارت جابجائی کمتر است؟ اگر $T_s = 100^{\circ}$ و $T_{\infty} = 20^{\circ}$ و $U_{\infty} = 0.20 \text{ m/s}$ باشد نرخ انتقال حرارت جابجائی در هر حالت چقدر است؟

حل:

طبق جدول انتهایی کتاب مرجع ۹:

از آنجائی که در وضعیت ۲ جریان روی صفحه از همان ابتدا مغشوش خواهد شد انتقال حرارت کمتر در حالت ۱ بوجود می آید. ولی برای محاسبه مقدار آن به طریق زیر عمل می کنیم:

$$\text{Re}_L = \frac{U_{\infty} L}{\nu} = \frac{20}{19.2 \times 10^{-6}} = 1.09 \times 10^6 \rightarrow$$

$$\text{Re}_x = 5 \times 10^5 \rightarrow x_c = 0.48 \leftarrow$$

قبل از رسیدن به منطقه زبری در حالت اول

$$\bar{Nu}_{2,1} = [0.037(1.09 \times 10^6)^{0.8} - 871](0.7)^{0.33} = 1366$$

$$\bar{Nu}_{1,2} = [0.037(1.09 \times 10^6)^{0.8}](0.7)^{0.33} = 2140$$

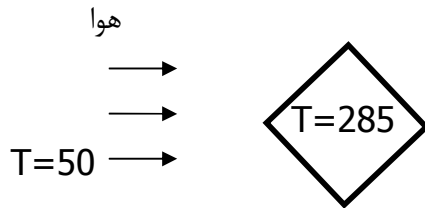
$$\Rightarrow \bar{Nu}_2 > \bar{Nu}_1 \Rightarrow q_1 < q_2$$

$$\bar{h}_1 = 1366 \frac{(28.7 \times 10^{-3})}{1} = 39.2$$

$$q_1 = \bar{h}_1 \times A(T_s - T_\infty) = 39.2 \times (0.5 \times 1)(100 - 20)$$

$$q_1 = 1568 W$$

۳) شمش مکعب مستطیلی به ضلع 10cm پس از بیرون آوردن از کوره باز پخت با دمای 285°C در جریان هوای خنک کننده ای با دمای متوسط 50°C قرار می گیرد، میزان انتقال حرارت در لحظه ی خروج از کوره چقدر است؟ (فرض کنید فن باد را با سرعت $2\frac{m}{s}$ بدمد).



حل:

$$D = \sqrt{(0.1)^2 + (0.1)^2} = \sqrt{0.2}$$

عدد رینولدز را محاسبه میکنیم:

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} = \frac{2 \times \sqrt{0.2}}{18 \times 10^{-6}} = 49688.8$$

$$\Rightarrow C = 0.246, m = 0.588$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{18 \times 10^{-6}}{27 \times 10^{-6}} = 0.66 \quad \text{طبق جدول خواص:}$$

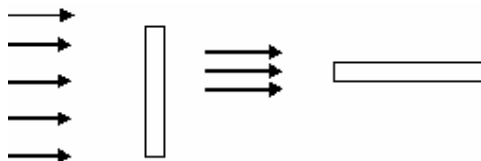
$$k = 27.2 \times 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \bar{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{K} = C Re_D^m Pr^{\frac{1}{3}} \rightarrow 0.246 \times (49688.8)^{0.588} \times (0.66)^{\frac{1}{3}} = 123.64$$

$$\rightarrow \bar{h} = \bar{Nu} \times \frac{k}{D} = 123.64 \times \frac{27.2 \times 10^{-3}}{\sqrt{0.2}} = 7.52$$

$$\rightarrow q'' = \bar{h} \times (T_s - T_\infty) = 7.52 \times (285 - 50) = 1767.2 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

مسئله : با استفاده از روابط تجربی و تئوری انتقال حرارت را برای صفحه ای به طول ۱ متر و عرض بی نهایت در دو حالت عمودی و افقی که وزش باد روی آن با سرعت ۱ متر بر ثانیه میباشد ، مقایسه کنید.(سپس با فرض دما برای هوا و صفحه نتیجه خود را تائید کنید)



جدول خلاصه‌ای از روابط تجربی برای محاسبه ضرایب اصطکاک و انتقال حرارت در جریان بر روی صفحات تخت با زاویه حمله صفر [۹]

Coefficient	Equation	Conditions
LAMINAR FLOW		
Local friction coefficient	$C_{fx} = 0.664 \text{Re}_x^{-0.5}$	$\text{Re}_x < 5 \times 10^5$
Local Nusselt number at distance x from leading edge	$\text{Nu}_x = 0.332 \text{Re}_x^{0.5} \text{Pr}^{0.33}$	$\text{Pr} > 0.1, \text{Re}_x < 5 \times 10^5$
	$\text{Nu}_x = 0.565 (\text{Re}_x \text{Pr})^{0.5}$	$\text{Pr} < 0.1, \text{Re}_x < 5 \times 10^5$
Local Sherwood number	$\text{Sh}_x = 0.332 \text{Re}_x^{0.5} \text{Sc}^{0.3}$	$\text{Sc} > 0.1, \text{Re}_x < 5 \times 10^5$
Average friction coefficient	$C_f = 1.33 \text{Re}_L^{-0.5}$	$\text{Re}_L < 5 \times 10^5$
Average Nusselt number between $x = 0$ and $x = L$	$\bar{\text{Nu}}_L = 0.664 \text{Re}_L^{0.5} \text{Pr}^{0.33}$	$\text{Pr} < 0.1, \text{Re}_L < 5 \times 10^5$
	$\bar{\text{Sh}}_L = 0.664 \text{Re}_L^{0.5} \text{Sc}^{0.33}$	$\text{Sc} > 0.1, \text{Re}_L < 5 \times 10^5$
TURBULENT FLOW		
Local friction coefficient	$C_{fx} = 0.0576 \text{Re}_x^{-0.2}$	$\text{Re}_x > 5 \times 10^5, \text{Pr} > 0.5$
Local Nusselt number at distance x from leading edge	$\text{Nu}_x = 0.0288 \text{Re}_x^{0.8} \text{Pr}^{0.33}$	
Local Sherwood number	$\text{Sh}_x = 0.0288 \text{Re}_x^{0.8} \text{Sc}^{0.33}$	$\text{Re}_x > 5 \times 10^5, \text{Sc} > 0.5$
Average friction coefficient	$\bar{C}_f = 0.072 [\text{Re}_L^{-0.2} - 0.0464(x_{cr}/L)]$	$\text{Re}_L > 5 \times 10^5, \text{Pr} > 0.5$
Average Nusselt number between $x = 0$ and $x = L$ with transition at $\text{Re}_{x,cr} = 5 \times 10^5$	$\bar{\text{Nu}}_L = 0.036 \text{Pr}^{0.33} [\text{Re}_L^{0.8} - 23,200]$	
Average Sherwood number	$\bar{\text{Sh}}_L = 0.036 \text{Sc}^{0.33} [\text{Re}_L^{0.8} - 23,200]$	$\text{Re}_L > 5 \times 10^5, \text{Sc} > 0.5$

* Applicable to low-speed flow (Mach number < 0.5) of gases and liquids with all physical properties at the mean film temperature. $T_f = (T_s + T_\infty)/2$.

$$\begin{array}{lll}
 C_{fx} = \tau_x / (\rho u_\infty^2 / 2g_c) & \bar{C}_f = (1/L) \int_0^L C_{fx} dx & \text{Pr} = c_p \mu / k \\
 \text{Nu}_x = h_c x / k & \bar{\text{Nu}} = \bar{h}_t L / k & \bar{h}_t = (1/L) \int_0^L h_t(x) dx \\
 \text{Re}_x = \rho u_\infty x / \mu & \text{Re}_L = \rho u_\infty L / \mu & \text{Sc} = \nu / D_{AB} \\
 \text{Sh}_x = h_m x / D_{AB} & \bar{\text{Sh}} = \bar{h}_m L / D_{AB} & \bar{h}_m = (1/L) \int_0^L h_m(x) dx
 \end{array}$$

جدول ضرایب انتقال حرارت برای جریان های خارجی [۹]

Geometry	Correlation equation	Restrictions
Long circular cylinder in a gas or a liquid	$\overline{Nu}_D = C Re_D^m Pr^n (Pr/Pr_s)^{1/4}$ (see Table 7.1)	$1 < Re_D < 10^6$
Noncircular cylinder in a gas	$\overline{Nu}_D = B Re_D^n$ (see Table 7.2)	$2500 < Re_D < 10^5$
Circular cylinder in a liquid metal	$\overline{Nu}_D = 1.125(Re_D Pr)^{0.413}$	$1 < Re_D Pr < 100$
Short cylinder in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.123 Re_D^{0.651} + (D/L)^{0.85} Re_D^{0.792}$	$7 \times 10^4 < Re_D < 1.1 \times 10^5$ $L/D < 4$
Sphere in a gas	$\frac{h_c}{c_p U_\infty} = (2.2/Re_D + 0.48/Re_D^{0.5})$	$1 < Re_D < 25$
	$\overline{Nu}_D = 0.37 Re_D^{0.6}$	$25 < Re_D < 10^5$
	$\overline{Nu}_D = 430 + 5 \times 10^{-5} Re_D + 0.25 \times 10^{-9} Re_D^2 - 3.1 \times 10^{-17} Re_D^3$	$4 \times 10^5 < Re_D < 5 \times 10^6$
Sphere in a gas or a liquid	$\overline{Nu}_D = 2 + (0.4 Re_D^{1/2} + 0.06 Re_D^{2/3}) Pr^{0.4} (\mu/\mu_s)^{1/4}$	$3.5 < Re_D < 7.6 \times 10^4$ $0.7 < Pr < 380$
Sphere in a liquid metal	$\overline{Nu}_D = 2 + 0.386(Re_D Pr)^{1/2}$	$3.6 \times 10^4 < Re_D < 2 \times 10^5$
Long flat plate, width D , perpendicular to flow in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.20 Re_D^{2/3}$	$1 < Re_D < 4 \times 10^5$
Half-round cylinder with flat rear surface in a gas	$\overline{Nu}_D = 0.16 Re_D^{2/3}$	$1 < Re_D < 4 \times 10^5$
Square plate, dimension, L , perpendicular to flow of a gas or a liquid	$(\overline{h}_D/c_p U_\infty) Pr^{2/3} = 0.930 Re_L^{-1/2}$	$2 \times 10^4 < Re_L < 10^5$
Packed bed—heat transfer to or from packing, in a gas	$\overline{Nu}_{D_p} = \frac{1-\epsilon}{\epsilon} (0.5 Re_{D_p}^{1/2} + 0.2 Re_{D_p}^{2/3}) Pr^{1/3}$ (ϵ = porosity of bed)	$20 < Re_{D_p} < 10^4$ $0.34 < \epsilon < 0.78$

ادامه دارد

Geometry	Correlation equation	Restrictions																								
(ϵ = void fraction) (D_p = equivalent packing diameter, see Eq. 7.16)	$\frac{(\bar{h}_d/c_p U_d) Pr^{2/3}}{\epsilon} = \frac{1.075}{\epsilon} Re_{D_p}^{-0.826}$	$0.01 < Re_{D_p} < 10$																								
Packed bed— heat transfer to or from containment wall, gas	$\bar{Nu}_{D_p} = 2.58 Re_{D_p}^{1/3} Pr^{1/3} + 0.094 Re_{D_p}^{0.8} Pr^{0.4}$	$40 < Re_{D_p} < 2000$ cylinder-like packing																								
	$\bar{Nu}_{D_p} = 0.203 Re_{D_p}^{1/3} Pr^{1/3} + 0.220 Re_{D_p}^{0.8} Pr^{0.4}$	$40 < Re_{D_p} < 2000$ sphere-like packing																								
Tube bundle in cross-flow (see Figs. 7.17 and 7.18)	$\bar{Nu}_D Pr^{-0.36} (Pr/Pr_s)^{-0.25} = C (S_T/S_L)^m Re_D^n$																									
	<table> <tr> <th>C</th><th>m</th><th>n</th></tr> <tr> <td>0.8</td><td>0.4</td><td>0</td></tr> <tr> <td>0.9</td><td>0.4</td><td>0</td></tr> <tr> <td>0.27</td><td>0.63</td><td>0</td></tr> <tr> <td>0.35</td><td>0.60</td><td>0.2</td></tr> <tr> <td>0.40</td><td>0.60</td><td>0</td></tr> <tr> <td>0.021</td><td>0.84</td><td>0</td></tr> <tr> <td>0.022</td><td>0.84</td><td>0</td></tr> </table>	C	m	n	0.8	0.4	0	0.9	0.4	0	0.27	0.63	0	0.35	0.60	0.2	0.40	0.60	0	0.021	0.84	0	0.022	0.84	0	$10 < Re_D < 100$, in-line $10 < Re_D < 100$, staggered $1000 < Re_D < 2 \times 10^5$, in-line $S_T/S_L \geq 0.7$ $1000 < Re_D < 2 \times 10^5$, staggered $S_T/S_L < 2$ $1000 < Re_D < 2 \times 10^5$, staggered $S_T/S_L \geq 2$ $Re_D > 2 \times 10^5$, in-line $Re_D > 2 \times 10^5$, staggered $Pr > 1$ $Re_D > 2 \times 10^5$, staggered $Pr = 0.7$ $2 \times 10^4 < Re_D < 8 \times 10^4$, staggered liquid metals
C	m	n																								
0.8	0.4	0																								
0.9	0.4	0																								
0.27	0.63	0																								
0.35	0.60	0.2																								
0.40	0.60	0																								
0.021	0.84	0																								
0.022	0.84	0																								
	$\bar{Nu}_D = 0.019 Re_D^{0.84}$																									
	$\bar{Nu}_D = 4.03 + 0.228(Re_D Pr)^{2/3}$																									

فصل ششم:

انتقال حرارت جابجائی (جریان‌های داخلی)

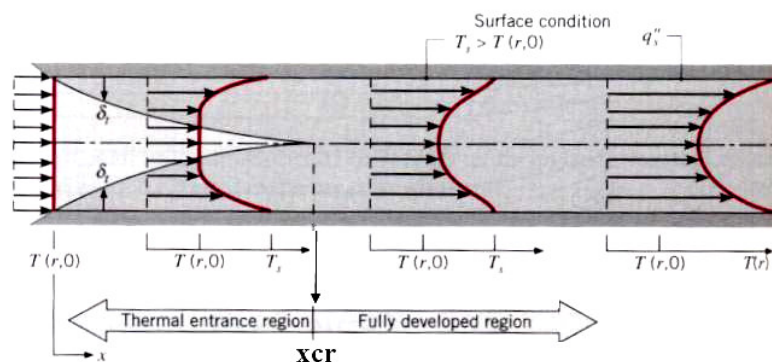
Convection Heat Transfer (Internal Flow)

ضریب انتقال حرارت جابجائی بین جدار لوله و سیال مطلوب است.

نوع رژیم ←
 Laminar آرام
 Turbulent مغشوش

انواع شرایط مرزی ←
 شار حرارتی ثابت $q'' = cte$
 دمای جداره ثابت $T_w = T_s = cte$
 حالت عمومی از شرایط مرزی
 $q'' = q''(x)$ یا $T_w = f(x)$

بررسی :
 (۱) در ناحیه ورودی لوله Entrance
 (۲) میدان جریان در فاصله دور از ورودی لوله (توسعه یافته) Fully Developed



شکل جریان داخلی (توزیع دمای توسعه یافته و توزیع دمای ورودی)

در ناحیه گسترش یافته داریم:

سرعت:

در لوله

$$u = 2u_{av} \left(1 - \frac{r^2}{r_o^2} \right) \quad (1)$$

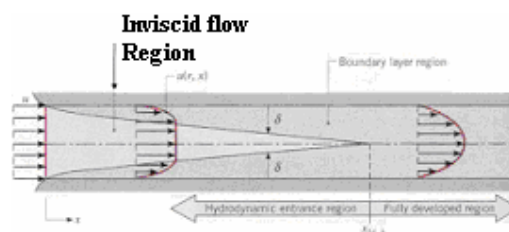
برای جریان
بین دو صفحه

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow u = u_{av} \left(1 - \frac{y^2}{L^2} \right)$$

در جریان توسعه یافته هیدرودینامیکی:

$$\frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\text{شرایط توسعه یافته} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ v = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const} \end{cases} \quad (3)$$



تعریف دمای متوسط حجمی یا Bulk Mean Temp

$$T_m = \frac{\int \rho u c T dA}{\int \rho u c dA} = \frac{\int u T dA}{V_{av} A} = f(x) \quad (4)$$

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \neq f(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \bigg|_{r=r_o} = - \frac{\frac{\partial T}{\partial r} \big|_{r=r_o}}{T_w - T_m} = \text{const}$$

$$q'' = h(T_w - T_m) \text{ و } q'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=r_o} \Rightarrow \frac{h}{k} = \text{cte} \rightarrow h = \text{cte}$$

A سطح مقطع لوله است. پس نتیجه می گیریم که h تابعی از x نیست. (در جریان توسعه یافته)

فرض شرایط مرزی در جریان آرام توسعه یافته

می توان نشان داد که در حالت دمای دیواره ثابت و یا شار حرارتی ثابت توزیع دما در شکل بی بعد آن در جهت x تغییر نمی کند و اصطلاحاً توسعه یافته تلقی می شود در نتیجه Nu مستقل از x بدست می آید. ابتدا جریان با شار حرارتی ثابت از روی دیواره ها بررسی می شود.

$$\begin{aligned}
 q'' &= h(T_w - T_m) = cte \\
 \frac{dT_w}{dx} &= \frac{dT_m}{dx} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_w}{\partial x} = \frac{\partial T_m}{\partial x} \\
 \frac{u}{\alpha} \frac{\partial T_m}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\
 \left. \begin{aligned}
 r = r_o &\Rightarrow T = T_w \\
 r = 0 &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\
 u = 2u_{av} \left(1 - \frac{r^2}{ro^2}\right)
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\frac{2V}{\alpha} \left(1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right) \frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\
 &T = f(r_o, r, \frac{\partial T_m}{\partial x}) \\
 &T_o = g(r_o, \frac{\partial T_m}{\partial x}) \\
 &T_m = \psi(r_o, \frac{\partial T_m}{\partial x})
 \end{aligned} \quad (5)
 \end{aligned}$$

براساس روابط بالا می توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned}
 q'' &= h(T_w - T_m) \\
 h &= \frac{48}{11} \frac{k}{D} \Rightarrow Nu = \frac{hD}{k} = \frac{48}{11} = 4.36 \quad (6)
 \end{aligned}$$

روابط تجربی و محاسباتی برای تعیین ضریب انتقال حرارت

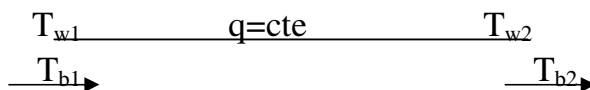
۱. جریان لایه ای کاملاً توسعه یافته:

دراین بخش T_b بجای T_m بکار رفته است.

$$\begin{aligned}
 \frac{T - T_w}{T_b - T_w} &= f(r) \\
 q &= h(T_w - T_b) \\
 q &= -k(T_b - T_w) \\
 -k(T_b - T_w) \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_o} &= hA(T_w - T_b) \rightarrow h = k \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_o}
 \end{aligned} \quad (7)$$

چون سمت چپ تابعی از x نمی باشد درنتیجه h نیز تابع x نیست.

1-a شارحرارتی دیوار ثابت: ($q=\text{constant}$)

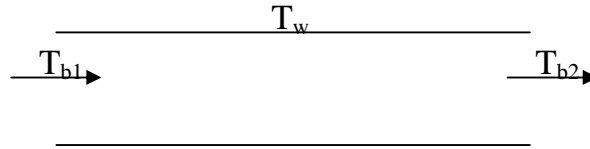


$$\begin{aligned}
 Nu = 4.36 &\rightarrow \frac{hd}{k} = 4.36 \\
 q &= hpl\Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{q}{hpl} \\
 \Delta T &= T_{w1} - T_{b1}
 \end{aligned} \quad (8)$$

در نتیجه برای محاسبه می توان از رابطه زیر نیز استفاده کرد.

$$\Delta T = T_w - T_{b2} \quad (9)$$

1b- دمای دیوار ثابت



$$Nu_d = 3.66 \quad \frac{hd}{k} = 3.66 \quad (10)$$

$$q = hpl\Delta T$$

$$\Delta T = T_w - T_b(x)$$

روش تقریبی:

$$\Delta T = T_w - \frac{(T_{b1} + T_{b2})}{2} \quad (11)$$

روش دقیق:

$$\dot{m} C_p T_{b1} + hp dx (T_w - T_b) = \dot{m} C_p (T_b + \frac{dT_b}{dx} dx)$$

$$hp (T_w - T_b) = \dot{m} C_p \frac{dT_b}{dx}$$

$$\frac{\dot{m} C_p}{hp} \int_{T_{b1}}^{T_{b2}} \frac{dT_b}{T_w - T_b} = \int_0^l dx$$

$$\frac{\dot{m} C_p}{hp} \ln \frac{T_w - T_{b1}}{T_w - T_{b2}} = l$$

$$\frac{\dot{m} C_p}{h\rho} = \frac{1}{\ln \left(\frac{T_w - T_{b1}}{T_w - T_{b2}} \right)} \quad (12)$$

$$q = \dot{m} C_p (T_{b2} - T_{b1}) = hpl \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\dot{m} C_p (T_{b2} - T_{b1})}{hpl}$$

$$\Delta T = \frac{T_{b2} - T_{b1}}{\ln \left(\frac{T_w - T_{b1}}{T_w - T_{b2}} \right)}$$

۲. جریان لایه ای در حال توسعه در لوله های صاف دمای دیوار ثابت

$$\bar{Nu} = \frac{hD}{k_{av}} = \left\{ 3.66 + \frac{0.0668(D/L) \text{Re} \text{Pr}}{1 + 0.04[(D/L) \text{Re}]^{2/3}} \right\} \left(\frac{\mu_a}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (14)$$

$\mu_w \rightarrow$ دردمای دیواره

$$T_{b_a} = \frac{T_{b_1} + T_{b_2}}{2} \text{ و } \Delta T_{\log} \quad (15)$$

رابطه معروف دیگر مربوط به سایدنر و تیت (Sieder and Tate) می‌شود:

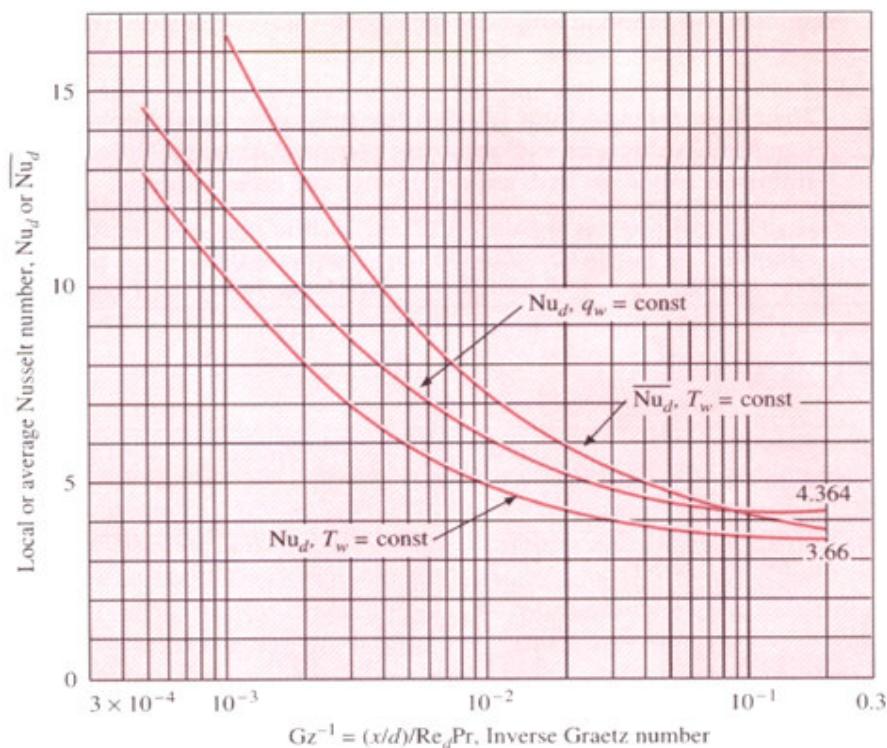
$$\bar{Nu}_d = 1.86(\text{Re}_D \text{Pr})^{1/3} \left(\frac{d}{l} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

$$\text{Re} \text{Pr} \frac{D}{L} > 10 \quad (16)$$

$$q = \bar{h} p \Delta T$$

$$\Delta T = T_w - \frac{1}{2}(T_{b1} - T_{b2})$$

۳. برای جریان لایه‌ای در حال توسعه در لوله‌های صاف و شار حرارتی ثابت در شکل زیر نوسلت موضعی نشان داده شده‌است.



شکل ناسلت موضعی و متوسط برای لوله با مقطع دایره‌ای در مقطع ورودی لوله با جریان توسعه یافته

$$\left(\frac{T_{b1} + T_{b2}}{2}\right)$$

جریان مغشوش توسعه یافته در لوله های صاف
(Colburn Analogy) یا (Reynolds Analogy)

$$\tau = \rho(v + \varepsilon_m) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (17)$$

ε_m لزجت گردابه‌ای در جریان مغشوش تعریف می‌شود.

$$q_w'' = -\rho C_p (\alpha + \varepsilon_H) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (18)$$

ε_H نیز ضریب پخش گردابه‌ای تعریف می‌شود. با فرض توزیع خطی شار حرارتی و تنش برشی و فرض برابری لزجت‌های گردابه‌ای و ضریب پخش گردابه‌ای خواهیم داشت:

$$\tau = \tau_w \left(1 - \frac{y}{R}\right) \quad (19)$$

$$q'' = q_w'' \left(1 - \frac{y}{R}\right) \quad (20)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_H \quad (21)$$

اگر

$$v = \alpha, \text{Pr} = 1 \quad (22)$$

آنگاه از (۱۹) و (۲۰)

$$\frac{q_w''}{C_p \tau_w} = \frac{-\partial T}{\partial y} \Rightarrow \frac{q''}{C_p \tau_w} dy = -dT$$

$$\frac{q_w''}{C_p \tau_w} \int_0^{u_{av}} du = - \int_{T_w}^{T_b} dT \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_w'' u_{av}}{C_p \tau_w} &= T_w - T_b \\ h_x &= \frac{q_w''}{T_w - T_b} \end{aligned} \right\} h_x = \frac{C_p \tau_w}{u_{av}}$$

داریم

$$\tau_w = \frac{1}{2} C_f \rho u_{av}^2 \quad (24)$$

$$\frac{h_x}{\rho C_p u_{av}} = \frac{C_f}{2} \quad (25)$$

با توجه به تعریف عدد استانتون

$$St_x = \frac{C_f}{2} \quad (26)$$

از طریق تجربی نشان داده شده است:

$$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

$$St = \frac{Nu}{Re Pr}$$

$$Nu = Re Pr^{1/3} \cdot \frac{cf}{2}$$

(۲۷)

نیاگرام مودی

$$f = 4C_f$$

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^n \begin{matrix} \nearrow n = 0.3 \text{ Cooling} \\ \longrightarrow n = 0.4 \text{ heating} \end{matrix}$$

$$Re_D > 10^4, 0.7 < Pr < 100, \frac{L}{D} \geq 60$$

اگر خواص خیلی تغییر کنند:

$$\bar{Nu}_D = 0.023 Re^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_{av}}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

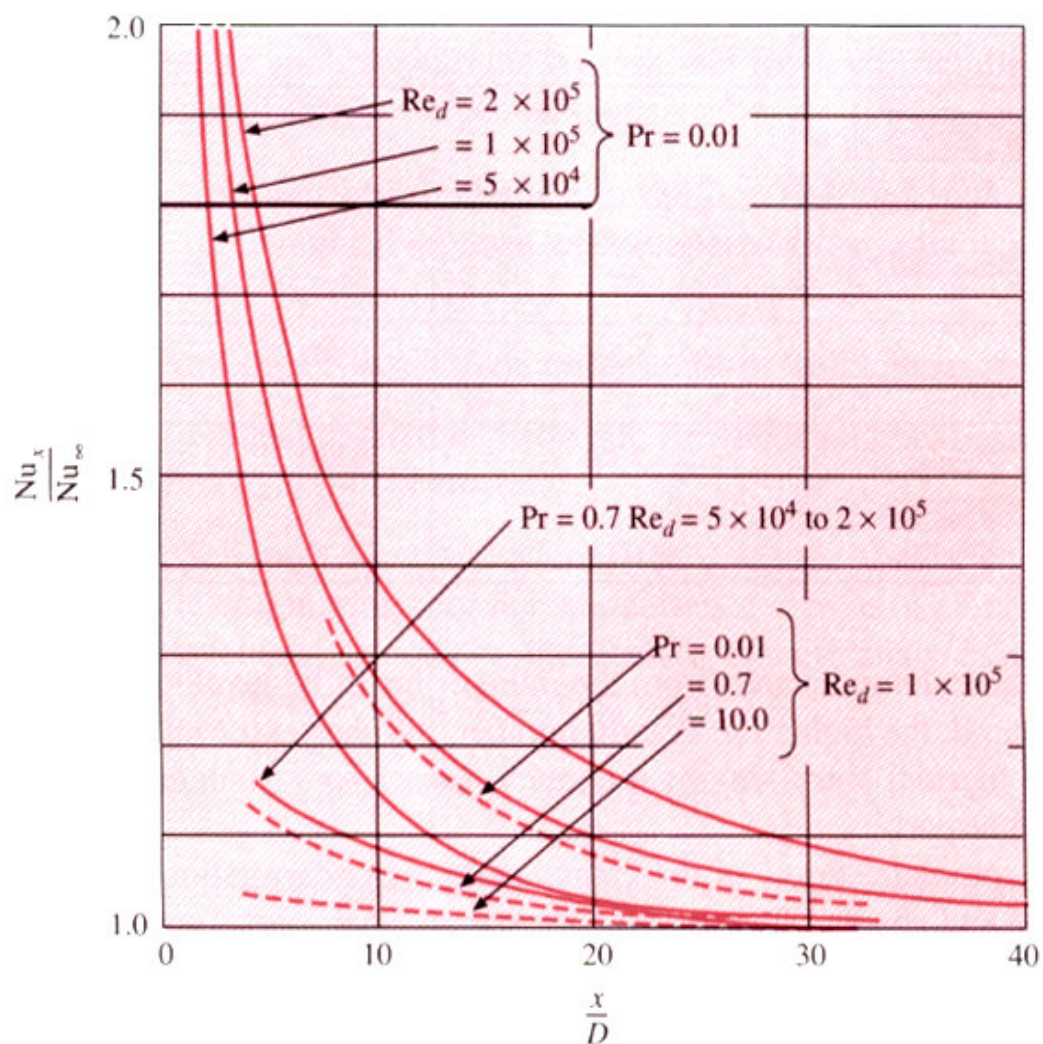
(۲۸)

$\Delta T = \Delta T_{\log}$, خواص در نمای زیر:

$$T_{b_a} = \frac{T_{b1} + T_{b2}}{2}$$

$$T_w = cTe \Rightarrow \Delta T = T_w - T_b$$

نکته: در این جزوه تنها به تعداد محدودی از روابط تجربی در جریان‌های داخلی اشاره شده است. روابط دقیق‌تر را می‌توان در کتاب‌های انتقال حرارت پیشرفته و یا کتاب‌های مربوط به مبدل‌های حرارتی جستجو کرد [۱۴] و [۱۵].



شکل ناسلت برای ورودی حرارتی لوله‌های با شار حرارتی ثابت و جریان توربولانس توسعه یافته

فصل هفتم: انتقال حرارت تابشی

Radiation Heat Transfer

از دیدگاه موجی انرژی تابشی به صورت انتشار امواج الکترومغناطیس صورت می‌پذیرد.

طیف امواج حرارتی $0.01 \mu_m < \lambda < 200 \mu_m$

طیف مرئی $0.2 \mu_m < \lambda < 0.7 \mu_m$

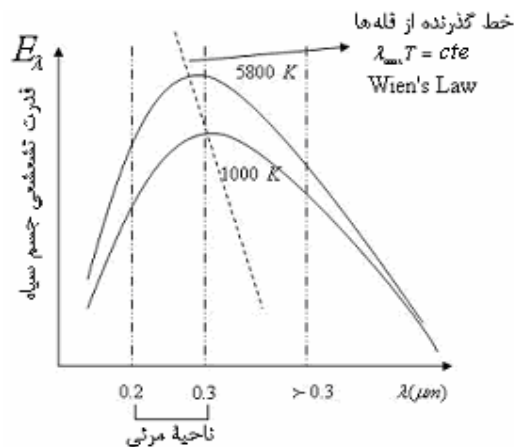
جسم ایده آل: جسم سیاه Black Body

به جسمی سیاه می‌گوئیم که:

۱. همه انرژی تابشی را جذب می‌کند.
۲. انتشار امواج در همه جهات یکنواخت است.
۳. انتشار انرژی حرارتی آن از هر جسم دیگری در دمای یکسان بیشتر است.

در شکل نمودار قدرت تشعشعی جسم سیاه $E_{b\lambda}$ بر حسب درجه حرارت و طول موج نشان داده شده است. همانگونه که در شکل نیز مشخص است برای دماهای بیشتر قله منحنی به طول موج‌های کوتاهتر انتقال می‌یابد این نقاط حداکثر طبق قانون وین به هم مربوط می‌شوند:

$$\lambda_{\max} T = 2897.6 \mu m K [5215.6 \mu m^{\circ} R]$$



* سطح زیر منحنی بیانگر انرژی منتقل شده به یا از جسم سیاه است.

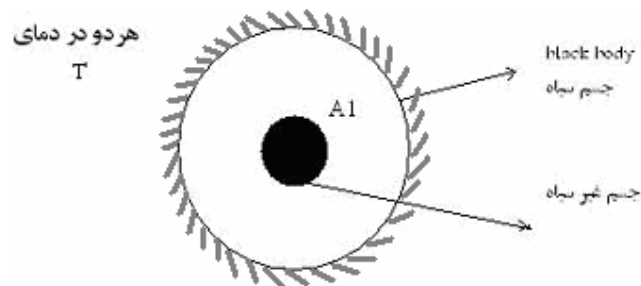
رابطه پلانک

$$E_{b,\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]} \quad (1)$$

رابطه انرژی بولتزمن:

$$E_b = \int_0^{\infty} E_{b,\lambda} d\lambda = \sigma T^4 \quad (2)$$

برای روشن شدن روابط فوق و خصوصیات جسم سیاه:



هر دو دمای T دارند.

$$q_{\text{جسم سیاه } A_1} = EA_1 = \epsilon E_b A_1 \quad (3)$$

ضریب جذب $\epsilon = \frac{E(T)}{E_b(T)}$ و $\epsilon_{\text{جسم سیاه}} = 1$

نشر ϵ ضریب

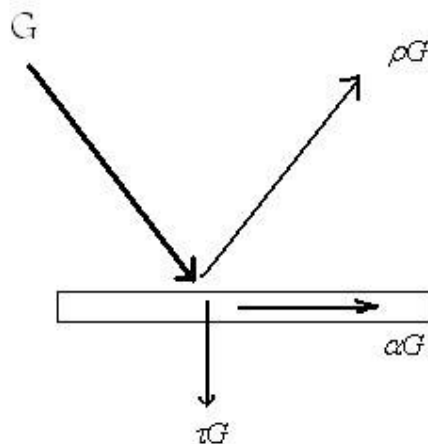
از تعادل حرارتی داریم:

$$\underbrace{E_b \alpha A_1}_{\text{صادر شده به جسم سیاه}} = \underbrace{E_b \epsilon A_1}_{\text{جذب شده توسط } A_1} \Rightarrow \alpha = \epsilon$$

چراکه آنچه از طریق تابش از جسم غیر سیاه خارج شده توسط جسم غیرسیاه جذب می شود و تعادل دمای حرارتی برقرار می ماند.

جذب، بازتابش و عبور از یک سطح

آنچه انرژی تابشی به یک سطح می رسد به صورت تعادل جذب، بازتابش و عبور از آن جسم می شود.



$$G = \rho G + \alpha G + \tau G \quad (5)$$

انرژی تابشی رسیده

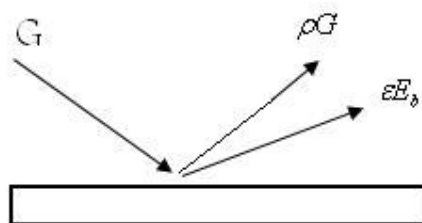
$$\rho + \alpha + \tau = 1$$

τ : ضریب انتقال (عبور)

α : ضریب جذب

ρ : ضریب انعکاس

پس اگر فرض کنیم که جسم ما انرژی تابشی را از خود عبور نمی‌دهد ($\tau = 0$) آنگاه خواهیم داشت:



ϵE_b : تشعشع به خاطر دمای خود جسم

$$J = \rho G + \epsilon E_b \quad (6)$$

در رابطه فوق J رادیوسیتی می‌باشد.

$$q = A(J - G) \rightarrow q = A\left(J - \frac{J - \epsilon E_b}{\rho}\right) = \left(J - \underbrace{\frac{J - \epsilon E_b}{\rho}}_{1-\alpha}\right) \quad (7)$$

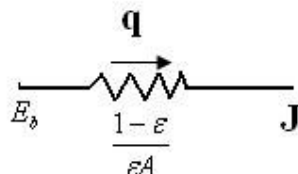
بافرض صرف نظر از τ

$$q = A(J - \frac{J - \epsilon E_b}{1 - \epsilon})$$

$$q = A(E_b - J) \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} = A(E_b - J) \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \quad (8)$$

$$\Rightarrow q = \frac{E_b - J}{\frac{1 - \epsilon}{\epsilon A}}$$

پس برای اجسام تبادل کننده انرژی از طریق تابش داریم:



برای جسم سیاه $E_b = J$

ضریب دید View Factor

ضریب دید به صورت کسری از انرژی تابشی است که سطح I را ترک کرده و به سطح J می‌رسد و آن را اصطلاحاً با F_{ij} نشان می‌دهیم.

↓
ترتیب مهم است



مقدار انرژی که سطح ۱ را ترک می‌کند و به سطح ۲ می‌رسد برابر است با:

$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{12} \quad (9)$$

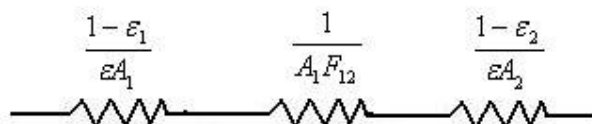
مقدار انرژی که سطح ۲ را ترک می‌کند و به سطح ۱ می‌رسد برابر است با:

$$q_{2-1} = J_2 A_2 F_{21} \quad (10)$$

در نهایت مقدار کل انرژی مبادله شده برابر خواهد بود با:

$$Q_{1-2} = J_1 A_1 F_{12} - J_2 A_2 F_{21} \quad (11)$$

مدار معادل:



- روابط بین ضرایب دید:

$$A_i F_{ij} = A_j A_{ji}$$

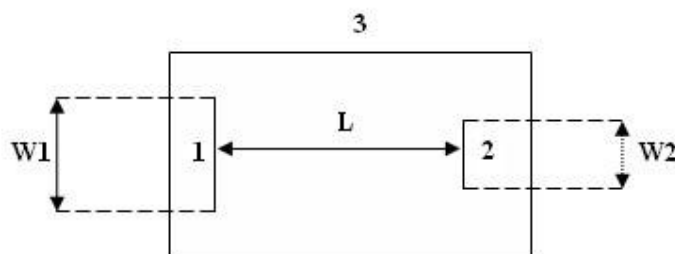
$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad (12)$$

برای محاسبه تبادله تابش در یک محفظه N سطحی، تعداد N^2 ضریب دید مورد نیاز است. این نیاز هنگامی واضح تر بیان می شود که ضرایب دید به صورت ماتریس مرتب شوند.

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_{N1} & F_{N2} & \dots & F_{NN} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ولی لازم نیست که تمام ضرایب دیده به طور مجزا محاسبه شوند. با استفاده از دو رابطه اساسی گفته شده برای ضرایب دید می توان تمام ضرایب دید را مشخص نمود.

مثال:



$$\sum_{j=1}^3 F_{ij} = 1 \Rightarrow F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad (14)$$

* ضریب دید هر جسم غیر محدب نسبت به خودش صفر می باشد.

$$F_{11} = 0$$

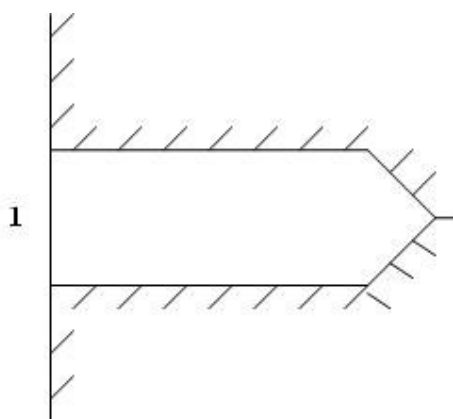
$$\Rightarrow F_{12} + F_{13} = 1$$

$$F_{12} = \frac{[(w_1 + w_2)^2 + 4]^{1/2} - [(w_2 - w_1)^2 + 4]^{1/2}}{2w_1} \quad (15)$$

$$\Rightarrow F_{13} = 1 - \frac{[(w_1 w_2)^2 + 4]^{1/2} - [(w_2 - w_1)^2 + 4]^{1/2}}{2w_1}$$

مثال:

ضریب شکل سر سوراخ ۱ رانست به داخل آن پیدا کنید.

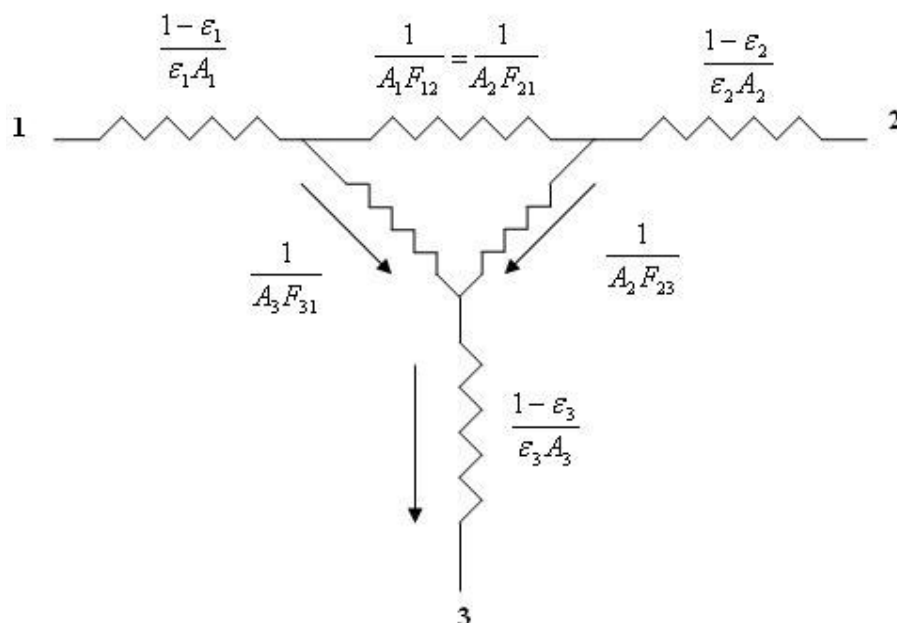


با یک نگاه می توان جواب داد که ضریب دیدسر سوراخ نسبت به خود سوراخ برابر یک است زیرا هر چه تابش از سرسوراخ وارد بدنه سوراخ شود درون سوراخ جذب یا بازتابش خواهد شد یا به عبارتی اگر چشم شخصی روی سوراخ باشد تمام دید آن فرد درون سوراخ است و جای دیگری را نمی بیند.

تئوری روش محاسباتی

$$F_{11} + F_{12} = 1 \Rightarrow F_{12} = 1 \quad (16)$$

شکل مدار مثال ۱:



انتقال انرژی تابشی در اجسام سیاه

برای مثال در شکل زیر:



$$\begin{aligned} q_{12} &= A_1 J_1 F_{12} = A_1 E_{b_1} F_{12} \\ q_{21} &= A_2 E_{b_2} F_{21} \end{aligned} \quad (17)$$

تبادل انرژی از سطح ۱:

$$\begin{aligned} q &= q_{12} - q_{21} \\ 1 &= A_1 F_{12} E_{b1} - A_2 F_{21} E_{b2} \\ \Rightarrow 1 &= A_1 F_{12} 6(T_1^4 - T_2^4) \end{aligned} \quad (18)$$

به طور کلی داریم:

$$q_1 = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} 6(T_i^4 - T_j^4) \quad (19)$$

مثال:

در مثال ۱ انرژی انتقالی از سطح جسم را بدست آورید.

$$q = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} 6(T_i^4 - T_j^4) = A_1 F_{12} 6(T_1^4 - T_2^4) + A_1 F_{13} 6(T_1^4 - T_3^4)$$

$$F_{12} = \frac{[(w_1 + w_2) + 4]^{1/2} - [(w_2 w_1)^2 + 4]^{1/2}}{2w_1}$$

$$F_{13} = -\frac{[(w_1 + w_2)^2 + 4]^{1/2} - [(w_2 - w_1)^2 + 4]^{1/2}}{2w_1}$$

مراجع برای مطالعه بیشتر

- [1] Carslaw, H.S., and Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., Oxford University Press, London, 1959
- [2] Arpaçi, V. S., Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, Reading, M.A., 1996
- [3] Myers, E.E., Analytical Methods in Conduction Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1971
- [4] Kays, W.M., and Crawford, M.E., Convection Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, 1980
- [5] Bejan, A., Convection Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1995
- [6] Eckert, E.R.G., and Drake, R.H., Jr., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, 1981
- [7] Siegel, Ro., and Howell, J.R., Thermal Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1981
- [8] Özicik, Boundary Layer Value Problems of Heat Conduction, International Textbook, Scranton, P.A., 1968
- [9] Incropera, F.P., and Witt, D.P., Introduction to Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1996
- [10] Leinhard IV, J.H., and, Leinhard V, J.H., A Heat Transfer Text Book, Phlogiston Press, Cambridge Massachusetts, 2001
- [11] Holman, J.P., Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1997
- [12] White, F.M., Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1999
- [13] White, F.M., Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1991
- [14] Kay, W.S., and London, A.L., Compact Heat Exchangers, Krieger Publishing Company, Malabor, Florida, 1998
- [15] Saunders, E.A.D., Heat Exchangers: Selection, Design, and Construction, Longman, Harlow, 1988

مجموعه فرمول های

انتقال حرارت

تهیه کننده: دکتر بهزاد خداکرمی

مقدمه

۱-۱ - انتقال گرما و مکانیسم‌های آن

۱-۲ - انتقال گرماک هدایتی

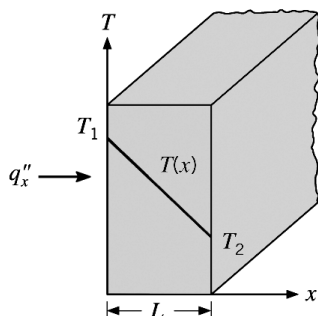
قانون فوریه

حالت یک بعدی و دارای توزیع دمای $T = T(x)$:

$$q_x'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (۱)$$

برای توزیع دما خطی:

$$q_x'' = k \frac{\Delta T}{L} \quad (۲)$$



k : ضریب هدایت گرمایی L : ضخامت صفحه A : سطح مقطع عمود بر جهت انتقال گرما

نرخ انتقال گرما: $q_x = q_x'' A$

شکل سه بعدی قانون فوریه

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (۳)$$

$$q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (۴)$$

$$q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (۵)$$

$$\mathbf{q}'' = q''_x \mathbf{i} + q''_y \mathbf{j} + q''_z \mathbf{k} \quad (۶)$$

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T \quad (۷)$$

شکل دیگر قانون فوریه:

$$q''_n = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (۸)$$

q''_n شار گرما در جهت n

$$q''_n = \sqrt{q''_x{}^2 + q''_y{}^2} \quad (۹)$$

مواد غیرایزوتروپیک ناهمسانگرد::

$$q''_x = - \left(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (۱۰)$$

$$q''_y = - \left(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (۱۱)$$

$$q''_z = - \left(k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (۱۲)$$

۸- برای گازها داریم:

$$k \propto T^{\frac{1}{2}} \quad (\text{الف})$$

$$k \propto M^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{ب})$$

۳-۱ - انتقال گرمای جابه‌جایی

قانون سرمایش نیوتن

$$q = hA(T_s - T_\infty) \quad (۱۴)$$

h ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی، A سطح، T_s دمای سطح و T_∞ دمای سیال است.

۴-۱- انتقال گرمای تشعشعی

تشعشع صادر شده از یک جسم با دمای T_s :

$$q = A \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (۱۵)$$

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4$: ثابت استفان - بولتزمن ε : ضریب صدور

نرخ خالص انتقال گرمای تشعشعی بین دو سطح:

$$q_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma A (T_s^4 - T_{\text{surr}}^4) \quad (۱۶)$$

۵-۱ - قانون بقای انرژی

قانون بقای انرژی برای حجم کنترل

$$\dot{E}_{\text{in}} - \dot{E}_{\text{out}} + \dot{E}_{\text{gen}} = \dot{E}_{\text{st}} \quad (۱۷)$$

قانون بقای انرژی برای سطح کنترل

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = 0 \quad \text{یا} \quad \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \quad (18)$$

۶-۱- ضریب نفوذ گرمایی α

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (19)$$

معادلات کلی انتقال گرمای هدایتی

۱-۲. معادله کلی انتقال گرمای هدایتی

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}'' + \dot{q} \quad (۱)$$

$\dot{q}$ مربوط به تولید انرژی است.

$$k = \text{cte} \Rightarrow \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \dot{q} \quad (۲)$$

در شرایط پایا و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{معادله لاپلاس}) \quad (۳)$$

۲-۲. معادله انتقال گرما در مختصات کارتزین

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۴)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۵)$$

در شرایط پایا و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (۶)$$

۳-۲. معادله انتقال گرما در مختصات استوانه‌ای

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T = q_r'' \mathbf{i} + q_\theta'' \mathbf{j} + q_z'' \mathbf{k}$$

$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta'' = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

معادله انتقال گرما در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (8)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

در شرایط پایا و یک بعدی و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (10)$$

۴-۲. معادله انتقال گرما در مختصات کروی

$$\mathbf{q}'' = q_r'' \mathbf{i} + q_\theta'' \mathbf{j} + q_\phi'' \mathbf{k}$$

$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta'' = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_\phi'' = -\frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$$

معادله انتقال گرما در مختصات کروی (r, θ, ϕ)

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q} \quad (11)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$

در شرایط پایا و یک بعدی و بدون تولید انرژی و ضریب هدایت گرمایی ثابت:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (13)$$

معادله لاپلاس یک بعدی در مختصات مختلف:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x^n \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0 \quad (14)$$

برای مختصات کارتزین: $n = 0$

برای مختصات استوانه‌ای: $n = 1$

برای مختصات کروی: $n = 2$

انتقال گرمای هدایتی

۱-۳ انتقال گرمای یک بعدی، پایا، بدون تولید انرژی در دیوار مسطح

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (۱)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (۲)$$

$$T(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (۳)$$

$$T(0) = T_{s,1}, \quad T(L) = T_{s,2} \quad \text{شرایط مرزی}$$

$$T(x) = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} x + T_{s,1} \quad \text{توزیع دما} \quad (۴)$$

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = \frac{kA}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) \quad (۵)$$

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = \frac{k}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) \quad (۶)$$

۲-۳ انتقال گرمای یک بعدی، پایا، با تولید انرژی در دیوار مسطح

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \dot{q} = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (۷)$$

$$k = \text{cte} : \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (۸)$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + c_1 x + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (۹)$$

$$T(-L) = T_{s,1}, \quad T(L) = T_{s,2} \quad \text{شرایط مرزی}$$

$$T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k} \left[1 - \frac{x^2}{L^2} \right] + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2} \frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2} \quad (10)$$

حالت خاص: $T_{s,1} = T_{s,2} = T_s$

$$T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k} \left[1 - \frac{x^2}{L^2} \right] + T_s \quad (11)$$

$$T_{\max} = T_i = \frac{\dot{q}L^2}{2k} + T_s \quad (12)$$

$$\frac{T(x) - T_i}{T_s - T_i} = \left[\frac{x}{L} \right]^2 \quad (13)$$

هرگاه دیواره در مجاورت سیال با دمای T_∞ باشد

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T_s - T_\infty) \quad (14)$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}L}{h} \quad (15)$$

۳-۳- انتقال گرماي يك بعدي، پايه، بدون توليد انرژي در استوانه توخالي

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[kr \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (17)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad (18)$$

$$T(r) = c_1 \ln r + c_2 \quad \text{جواب عمومي} \quad (19)$$

$$T(r_1) = T_{s,1}, \quad T(r_2) = T_{s,2} \quad \text{شرایط مرزی}$$

r_1 : شعاع داخلی r_2 : شعاع خارجی

$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1 / r_2)} \ln \left[\frac{r}{r_2} \right] + T_{s,2} \quad \text{یا} \quad \frac{T(r) - T_{s,2}}{T_{s,1} - T_{s,2}} = \frac{\ln(r / r_2)}{\ln(r_1 / r_2)} \quad (20)$$

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = \frac{2\pi Lk(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2 / r_1)} \quad (21)$$

$$q_r'' = \frac{k(T_{s,1} - T_{s,2})}{r \ln(r_2 / r_1)} \quad (22)$$

۳-۴- انتقال گرماي يك بعدي، پايه، با توليد انرژي در يك استوانه توپر

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[kr \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \dot{q} = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (23)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (24)$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad \text{جواب عمومی}$$

$$T(r_1) = T_s, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0$$

$$T(r) = \frac{\dot{q} r_1^2}{4k} \left[1 - \frac{r^2}{r_1^2} \right] + T_s \quad \text{یا} \quad \frac{T(r) - T_s}{T_s - T_s} = 1 - \left[\frac{r}{r_1} \right]^2 \quad (25)$$

T : دمای محور استوانه r : شعاع استوانه

$$T_{\max} = T_s = \frac{\dot{q} r_1^2}{4k} + T_s \quad \text{حداکثر دما} \quad (27)$$

اگر استوانه در مجاورت سیال با دمای T باشد:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q} r_1}{h} \quad (28)$$

۵-۳- انتقال گرما یک بعدی، پایا، بدون تولید انرژی در یک کره توخالی

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (29)$$

$$k = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \quad (30)$$

$$T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (31)$$

$$T(r_1) = T_{s,1}, \quad T(r_2) = T_{s,2}$$

$$T(r) = T_{s,1} - \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{1 - (r_1/r_2)} \left[1 - \frac{r_1}{r} \right] \quad \text{توزیع دما} \quad (33)$$

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi k (T_{s,1} - T_{s,2})}{1/r_1 - 1/r_2}$$

$$q_r'' = \frac{k(T_{s,1} - T_{s,2})}{r^2 (1/r_1 - 1/r_2)} \quad (34)$$

۶-۳- انتقال گرما یک بعدی، پایا، با تولید انرژی در یک کره توپر

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \dot{q} = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (35)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad \text{معادله انتقال گرما} \quad (36)$$

$$T(r) = -\frac{\dot{q} r^2}{6k} - \frac{c_1}{r} + c_2 \quad \text{جواب عمومی} \quad (37)$$

$$T(r_1) = T_s, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0$$

$$T(r) = \frac{\dot{q}r^2}{4k} \left[1 - \frac{r^2}{r_i^2} \right] + T_s \quad (38)$$

$$T_{\max} = T_i = \frac{\dot{q}r_i^2}{4k} + T_s \quad (39)$$

اگر کره در مجاورت سیال با دمای T_∞ باشد:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}r_i}{3h} \quad (40)$$

۷-۳- مقاومت گرمایی

$$R_{\text{cond}} = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{q_x} \quad (40)$$

دیوار مسطح

$$\text{هدایت: } R_{\text{cond}} = \frac{L}{kA} \quad (41)$$

$$\text{جابه‌جایی: } R_{\text{conv}} = \frac{1}{hA} \quad (42)$$

$$\text{تشعشع: } R_{\text{rad}} = \frac{1}{h_r A} \quad (43)$$

استوانه

$$\text{هدایت: } R_{\text{cond}} = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi Lk} \quad (44)$$

$$\text{جابه‌جایی: } R_{\text{conv}} = \frac{1}{2\pi r Lh} \quad (45)$$

کره

$$\text{هدایت: } R_{\text{cond}} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi k} \quad (46)$$

$$\text{جابه‌جایی: } R_{\text{conv}} = \frac{1}{4\pi r^2 h} \quad (47)$$

۸-۳- دیوار مرکب

ضریب انتقال گرمای کلی (U):

$$q_x = UA\Delta T \quad (48)$$

$$U = \frac{1}{R_t A} \quad (49)$$

۱۱-۳- مقاومت گرمایی تماس

$$R''_{t,c} = \frac{T_A - T_B}{q''_x} \quad (50)$$

۱۲-۳- شعاع بحرانی

برای استوانه:

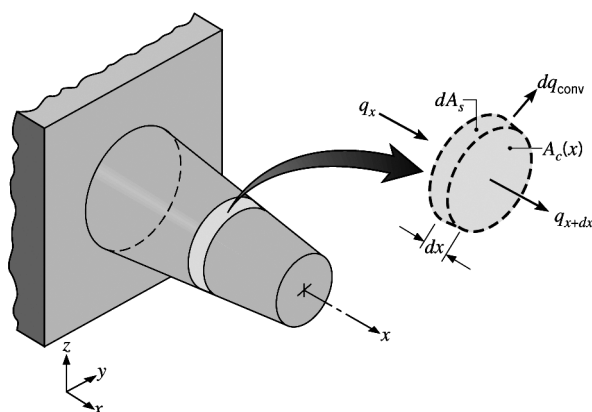
$$r_c = \frac{k}{h} \quad (51)$$

برای کره:

$$r_c = \frac{2k}{h} \quad (52)$$

سطوح گسترش یافته (پره ها)

۱-۴ - معادله دیفرانسیل حاکم



$$\frac{dT}{dx} + \left[\frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right] \frac{dT}{dx} - \left[\frac{1}{A_c} \frac{h}{k} \frac{dA_s}{dx} \right] (T - T_\infty) = 0 \quad (1)$$

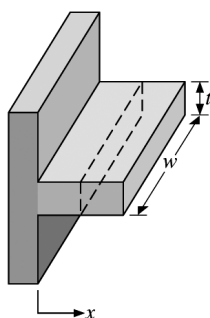
A_c : مساحت سطح مقطع (می تواند با x تغییر کند)

A_s : مساحت سطح از پای پره تا x

پره مستطیلی:

$$\theta = T - T_\infty, \quad m = \frac{hP}{kA}$$

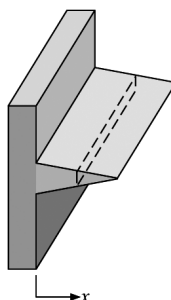
$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$



پره مثلثی:

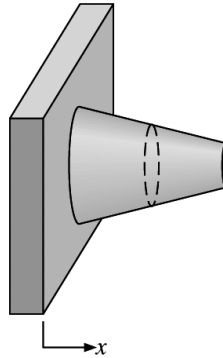
$$\theta = T - T_\infty, \quad m = \frac{hP}{kA}$$

$$x \frac{d^2\theta}{dx^2} + x \frac{d\theta}{dx} - m^2 x \theta = 0$$



پره مخروطی:

$$x^2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + 2x \frac{d\theta}{dx} - m^2 x \theta = 0, \quad m^2 = \frac{rhL}{kR}$$



L : طول پره ، t : ضخامت پره در محل اتصال به پایه

۲-۴- توزیع دما در پره‌های با سطح مقطع یکنواخت

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل} \quad (2)$$

$$\theta(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \quad \text{جواب عمومی} \quad (3)$$

شرایط مرزی اول:

$$\theta(0) = T_b - T_\infty \equiv \theta_b$$

(۱) پره نوع اول (پره طولانی)

$$x \rightarrow \infty : T = T_\infty \Rightarrow \theta = 0$$

$$\text{توزیع دما} : \frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx} \quad (4)$$

(۲) پره نوع دوم (نوک پره عایق)

$$x = L : \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$\text{توزیع دما} : \frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (5)$$

(۳) پره نوع سوم (انتقال گرمایی جابه‌جایی در نوک پره)

$$x = L : -k \frac{dT}{dx} = h(T - T_\infty) \Rightarrow -k \frac{d\theta}{dx} = h\theta$$

$$\text{توزیع دما} : \frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL} \quad (6)$$

(۴) پره نوع چهارم (دمای نوک پره مشخص)

$$x = L : T = T_L \Rightarrow \theta = \theta_L$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\theta_L / \theta_b \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL} \quad (7)$$

۳-۴ - انتقال گرما در پره‌ها

روش اول:

$$q_f = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \Rightarrow q_f = -kA \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \quad (۸)$$

روش دوم:

$$q_f = \int_0^L hA\theta dx \quad (۹)$$

۱- پره طولانی

$$q_f = M \quad (۱۰)$$

۲- نوک پره عایق

$$q_f = M \tanh mL \quad (۱۱)$$

۳- انتقال گرمای جابه‌جایی در نوک پره

$$q_f = M \frac{\sinh mL + (h / mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h / mk) \sinh mL} \quad (۱۲)$$

۴- دمای نوک پره مشخص

$$q_f = M \frac{\cosh mL - \theta_L / \theta_b}{\sinh mL} \quad (۱۳)$$

در معادلات (۱۰) تا (۱۳) $M = \sqrt{hpkA_c} \theta_b$ است.

۴-۴ - راندمان پره

$$\eta_{fin} = \frac{q_f}{q_{max}} \quad (۱۴)$$

برای پره‌های طولانی:

$$\eta_f = \frac{1}{mL} \quad (۱۶)$$

برای پره‌های با نوک عایق:

$$\eta_f = \frac{\tanh mL}{mL} \quad (۱۷)$$

$$q_{max} = hA_f (T_b - T_\infty) = hpL\theta_b \quad (۱۵)$$

۴-۵ - ضریب تأثیر پره

$$\varepsilon_f = \frac{\text{نرخ انتقال گرما با پره}}{\text{نرخ انتقال گرما بدون پره}} = \frac{q_f}{hA_{c,b}\theta_b} = \eta_f \frac{A_f}{A_b} \quad (۱۸)$$

A_f : کل سطح پره A_b : سطح مقطع پره

برای پره‌های طولانی داریم:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{kp}{hA_c}} \quad (۱۹)$$

برای پره‌های با نوک عایق داریم:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{kp}{hA_c}} \tanh mL \quad (20)$$

راندمان کلی n پره :

$$\eta_o = \frac{q_t}{q_{t,max}} = \frac{q_t}{hA_t \theta_b} \quad (21)$$

$$A_t = A_b + nA_f \quad (22)$$

A_f : سطح هر پره و A_b : سطح اصلی

$$\eta_o = 1 - \frac{nA_f}{A_t} (1 - \eta_f) \quad (23)$$

۶-۴- روش هارپر و براون

شرط فرض پره نازک:

$$\left[\frac{ht}{rk} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{ht}{k} \leq \frac{1}{2} \quad (24)$$

طول اصلاح شده عبارت است از:

$$L_c = L + \frac{A}{P} \quad (25)$$

انتقال گرمای هدایتی چندبعدی

۲-۵. ضریب شکل هدایت گرمایی

$$q = Sk(T_1 - T_r) \quad (۱)$$

S : ضریب شکل سیستم و واحد آن m است.

مقاومت گرمایی یک سیستم دو بعدی:

$$R = \frac{1}{Sk} \quad (۲)$$

$$Q = \frac{kA}{L}(T_1 - T_r) \quad \text{دیواره:}$$

$$Q = \frac{2\pi kL}{\ln(r_r / r_1)}(T_1 - T_r) \quad \text{پوسته استوانه‌ای:}$$

$$Q = \frac{4\pi k r_1 r_r}{r_r - r_1}(T_1 - T_r) \quad \text{پوسته کروی:}$$

بنابراین:

$$S = \frac{A}{L} \quad \text{دیواره:}$$

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(r_r / r_1)} \quad \text{پوسته استوانه‌ای:}$$

$$S = \frac{4\pi r_1 r_r}{r_r - r_1} \quad \text{پوسته کروی:}$$

برای مکعب داریم:

$$S = 0.54D \quad \text{لبه‌ها}$$

$$S = 0.15L \quad \text{گوشه‌ها}$$

L : ضخامت دیواره‌ها و D : طول لبه‌ها

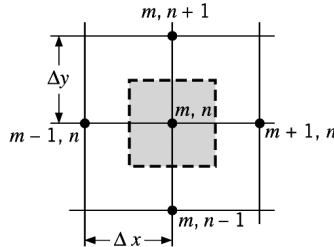
۳-۵. روش‌های عددی

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m,n} \cong \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (۳)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n} \cong \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (۴)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} \quad (6)$$



$$T_{m,n} = \frac{1}{4} (T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n}) \quad (7)$$

در حالت یک بعدی به جای $\frac{1}{4}$ عدد $\frac{1}{2}$ و در حالت سه بعدی $\frac{1}{6}$ قرار می‌گیرد.

اگر تولید انرژی داخلی $\dot{q}$ وجود داشته باشد:

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{q}(\Delta x \times \Delta y)}{k} = 0 \quad (8)$$

در حالتی که روی سطح جسم جابه‌جایی گرمایی داشته باشیم:

$$T_{m,n} = \frac{a + BiT_{\infty}}{b + Bi} \quad (9)$$

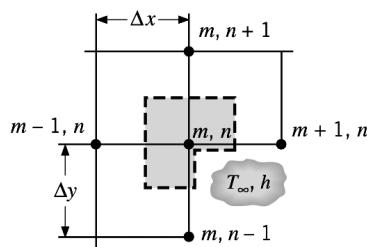
a: مجموع دماهای نقاط همسایه که به‌صورت هدایت تبادل گرما می‌کنند. برای نقاط همسایه متقارنی که از یک سمت جابه‌جایی گرمایی

داشته باشند از میانگین حسابی استفاده می‌کنیم.

b: تعداد نقاط ذکر شده در a

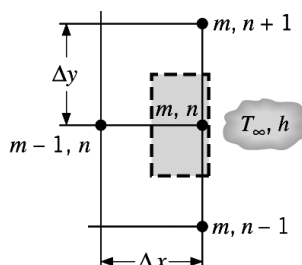
حالت ۱:

$$T_{m,n} = \frac{T_{m,n-1} + T_{m-1,n} + (T_{m+1,n} + T_{m,n+1})/2 + BiT_{\infty}}{3 + Bi}$$



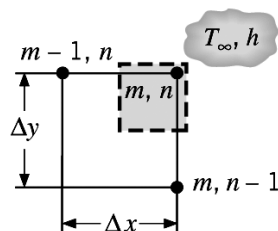
حالت ۲:

$$T_{m,n} = \frac{T_{m-1,n} + (T_{m,n+1} + T_{m,n-1})/2 + BiT_{\infty}}{2 + Bi}$$



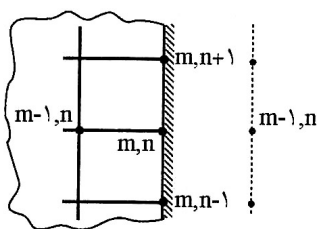
حالت ۳:

$$T_{m,n} = \frac{(T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) / \gamma + Bi T_{\infty}}{1 + Bi}$$

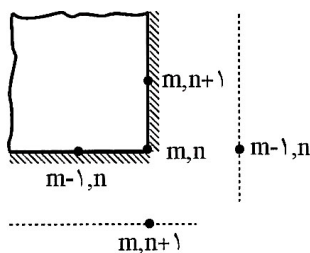


که در معادلات فوق $Bi = \frac{h\Delta x}{k}$ است.

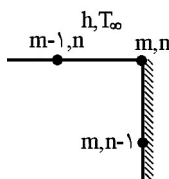
برای صفحه‌ی عایق‌بندی شده:



$$T_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \gamma T_{m-1,n}}{4}$$



$$T_{m,n} = \frac{\gamma T_{m,n+1} + \gamma T_{m-1,n}}{4} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m-1,n}}{2}$$



$$T_{m,n} = \frac{T_{m,n-1} + (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) / \gamma + Bi T_{\infty}}{\gamma + Bi} = \frac{(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}) / \gamma + Bi T_{\infty}}{1 + Bi / \gamma}$$

۴-۵- تعیین ضریب شکل هدایت گرمایی در روش ترسیمی

$$S = \frac{ML}{N}$$

(۱۰)

M: تعداد مسیرهای گرما N: تعداد کل نمونه‌های دما L: طول مسیر در جهت عمود بر صفحه کاغذ

هدایت گرمایی ناپایا

۱-۶- روش ظرفیت گرمایی فشرده

عدد بی بعد بيو:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} \quad (۱)$$

$$L_c = \frac{V}{A}$$

الف) کره به شعاع R

$$L_c = \frac{R}{۳}$$

ب) مکعبی به طول ضلع D

$$L_c = \frac{D}{۶}$$

ج) دیواره‌ای به ضخامت L

$$L_c = \frac{L}{۲}$$

د) استوانه‌ای به طول L و قطر D

$$L_c = \frac{DH}{۴H + ۲D}$$

توزیع دما در روش ظرفیت گرمایی فشرده:

$$\text{توزیع دما} : \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-t/\tau} \quad (۲)$$

T_i دما در لحظه $t = 0$ است.

$$\tau = \frac{\rho VC_p}{hA} \quad \text{ثابت زمانی} \quad (۳)$$

۲-۶- عدد فوریه

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (۴)$$

$$\text{توزیع دما} : \frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-Bi \times Fo} \quad (5)$$

میزان انتقال گرما در هر لحظه و انتقال گرمای کل از لحظه صفر تا زمان t:

$$Q_i = \rho CV \frac{dT}{dx} = -hA(T_i - T_{\infty})e^{-t/\tau} = -hA(T_i - T_{\infty})e^{-Bi \times Fo} \quad (6)$$

$$Q_t = \int_0^t Q_i dt = \rho CV(T_i - T_{\infty})(e^{-t/\tau} - 1) = \rho CV(T_i - T_{\infty})(e^{-Bi \times Fo} - 1) \quad (7)$$

۶-۳- اثرات مکانی

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

شرایط مرزی:

$$x = 0 : \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$x = L : h[T(L, t) - T_{\infty}] = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L}$$

شرط اولیه:

$$t = 0 : T(x, 0) = T_i$$

برای یک شکل هندسی مشخص:

$$\theta^* = f(x^*, Fo, Bi)$$

$$\theta^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}, \quad x^* = \frac{x}{L}$$

۶-۴- جسم نیمه بی نهایت

$$\text{معادله دیفرانسیل} : \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{شرایط مرزی} : T(0, t) = T_s, \quad T(\infty, t) = T_i$$

$$\text{شرط اولیه} : T(x, 0) = T_i$$

$$\text{توزیع دما} : \frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (9)$$

$$q_x''(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad (10)$$

دو جسم بی نهایت در تماس با یکدیگر:

$$\frac{T_{A,i} - T_s}{T_s - T_{B,i}} = \frac{m_B}{m_A} \quad (11)$$

$$m_A = \sqrt{k_A \rho_A C_A}, \quad m_B = \sqrt{k_B \rho_B C_B}$$

۶-۵- نمودارهای هسلر

هدایت ناپایا در سیستم‌های چندبعدی

$$S(x, t) = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{جسم نیمه بی نهایت} \end{array} \right.$$

$$P(x, t) = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{دیواره مسطح} \end{array} \right.$$

$$C(x, t) = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{استوانه بلند} \end{array} \right.$$

۱- دیواره نیمه بی نهایت $S \times P$

۲- استوانه نیمه بی نهایت $S \times C$

۳- استوانه کوتاه $P \times C$

۴- میله مستطیلی نامحدود $P_l \times P_r$

۵- میله مستطیلی نیمه بی نهایت $S \times P_l \times P_r$

الف) دوبعدی:

$$\left(\frac{Q}{Q_i} \right)_{\text{کل}} = \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_l + \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_r - \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_l \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_r \quad (14)$$

ب) سه بعدی:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{Q_i} \right) &= \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_l + \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_r + \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_r - \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_l \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_r \\ &\quad - \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_l \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_r - \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_r \left(\frac{Q}{Q_i} \right)_r \end{aligned} \quad (15)$$

Q : گرمای مبادله شده تا زمان دلخواه t

Q_i : گرمای داخلی جسم در حالت اولیه نسبت به محیط

۶-۷- روش‌های تفاضل محدود برای انتقال گرمای ناپایا

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{m+1,n}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m-1,n}^p}{(\Delta x)^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{m,n+1}^p - 2T_{m,n}^p + T_{m,n-1}^p}{(\Delta y)^2} \quad (18)$$

برای $\frac{\partial T}{\partial t}$ داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (19)$$

۱) روش صریح:

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo(T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4Fo) T_{m,n}^p \quad (20)$$

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \text{ که در آن:}$$

شرط پایداری برای روش صریح:

$$1 - 2Fo \geq 0 \Rightarrow Fo \leq \frac{1}{2} \text{ در حالت یک بعدی}$$

$$1 - 4Fo \geq 0 \Rightarrow Fo \leq \frac{1}{4} \text{ در حالت دوبعدی}$$

$$1 - 6Fo \geq 0 \Rightarrow Fo \leq \frac{1}{6} \text{ در حالت سه بعدی}$$

(۲) روش ضمنی:

$$T_{m,n}^{p+1} (1 + 4Fo) - Fo(T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) = T_{m,n}^p \quad (22)$$

انتقال گرمای جابه‌جایی

۷-۱- مقدمه

شار انتقال گرمای جابه‌جایی موضعی:

$$q''_{\text{conv}} = h(T_w - T_\infty) \quad (۱)$$

نرخ انتقال گرمای کلی:

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) \quad (۲)$$

در معادلات فوق h ضریب جابه‌جایی موضعی و $\bar{h}$ ضریب جابه‌جایی متوسط است.

۷-۲- ضریب جابه‌جایی

ضریب جابه‌جایی متوسط:

$$\bar{h} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h dA_s \quad (۳)$$

برای صفحه تخت:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h dx \quad (۴)$$

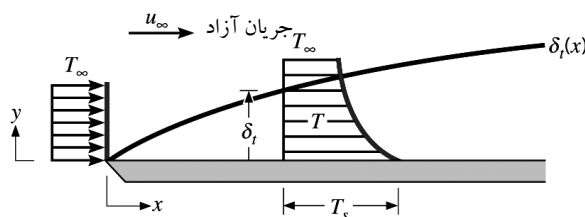
. در حرکت یک سیال روی صفحه:

$$h = \frac{-k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_w - T_\infty} \quad (۵)$$

k_f : ضریب هدایت گرمایی سیال

۷-۳- لایه مرزی گرمایی

صفحات لایه مرزی گرمایی δ_t در هر نقطه در روی سطح به صورت فاصله‌ای از سطح تعریف می‌گردد که در آن $\frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = 0.99$ است.



شکل ۷-۲: لایه مرزی گرمایی روی یک صفحه تخت

۷-۴- معادلات لایه مرزی

(۱) لایه مرزی سرعت

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۶)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۷)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

(۲) لایه مرزی گرمایی

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (۸)$$

شکل بی بعد معادلات لایه مرزی

$$x^* \equiv \frac{x}{L}, \quad y^* \equiv \frac{y}{L}, \quad u^* \equiv \frac{u}{U}, \quad v^* \equiv \frac{v}{U}, \quad T^* \equiv \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}, \quad P^* \equiv \frac{P}{\rho U^2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (۱۰)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dP^*}{dx^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (۱۱)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{Ec}{Re_L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \quad (۱۲)$$

۷-۵- تشابه رینولدز

$$\frac{C_f}{2} = St \quad (۱۳)$$

:(St)

$$St = \frac{h}{\rho V C_p} = \frac{Nu}{Re.Pr} \quad (۱۴)$$

$$Nu = \frac{h L_c}{k} \quad (۱۵)$$

۷-۶- تشابه رینولدز - کلبورن

$$St.Pr^{\frac{1}{2}} = \frac{C_f}{2} = \frac{f}{8} \quad (۱۶)$$

$$St_x Pr^{\frac{1}{2}} = \frac{C_{f_x}}{2}, \quad \overline{St} Pr^{\frac{1}{2}} = \overline{\frac{C_f}{2}} \quad (۱۷)$$

۷-۷- جریان روی صفحه تخت

(۱) جریان آرام

$$\text{معادله پیوستگی: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

$$\text{معادله مومنتم: } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (19)$$

$$\text{معادله انرژی: } u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (20)$$

شرایط مرزی:

$$y = 0 : u = 0, \quad T = T_w$$

$$y = 0 : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$y = \delta : u = U_{\infty}, \quad T = T_{\infty}$$

$$y = \delta : \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

نتایج حاصل از حل معادلات فوق به صورت زیر است:

$$\text{ضخامت لایه ی مرزی: } \delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \quad (21)$$

$$\text{ضریب اصطکاک: } C_f = 0.664 Re_x^{-1/2} \quad (22)$$

$$\text{عدد ناسلت: } Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (23)$$

در حالت میانگین داریم:

$$\begin{cases} \bar{h} = \eta h_{x=L} \\ \bar{C}_f = \eta C_{f,x=L} \\ \bar{Nu} = \eta Nu_{x=L} \end{cases} \quad (24)$$

$$\frac{\delta}{\delta_t} \approx Pr^{1/3} \quad (25)$$

دمای فیلم:

$$T_f = \frac{T_w + T_{\infty}}{2}$$

دمای متوسط با دمای کپه ای سیال:

$$T_b = \frac{\int_0^{\delta} u \rho C_p T dy}{\int_0^{\delta} u \rho C_p dy} \quad (26)$$

۲) جریان درهم

$$\text{ضخامت لایه مرزی: } \delta = \frac{0.37x}{Re_x^{1/4}} \quad (27)$$

$$C_{f_x} = 0.0592 Re_x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ضریب اصطکاک} \quad (28)$$

$$Nu_x = 0.0296 Re_x^{\frac{4}{3}} Pr^{\frac{1}{3}} \quad \text{عدد ناسلت} \quad (29)$$

شار گرمای یکنواخت در صفحه

$$Nu_{q''=cte} = 1/36 Nu_{T=cte} \quad \text{جریان آرام} \quad (31)$$

$$Nu_{q''=cte} = 1/4 Nu_{T=cte} \quad \text{جریان درهم} \quad (32)$$

$$T_s(x) = T_\infty + \frac{q''_x}{h} \quad (33)$$

طول ورودی آدیاباتیک

اگر طول ورودی آدیاباتیک وجود داشته باشد به طوری که لایه مرزی در $x = d$ شروع گردد داریم:

$$Nu_x = \frac{Nu|_{d=0}}{\left[1 - (d/x)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{3}}} \quad \text{جریان آرام} \quad (34)$$

$$Nu_x = \frac{Nu|_{d=0}}{\left[1 - (d/x)^{\frac{9}{10}}\right]^{\frac{1}{9}}} \quad (35)$$

لایه‌های مرزی مرکب

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left[\int_0^{x_c} h_{lam} dx + \int_{x_c}^L h_{turb} dx + \right] \quad (36)$$

با فرض $Re_{x,c} = 5 \times 10^5$ نتایج حاصله به شرح زیر است:

$$\overline{Nu}_L = \left[0.037 Re_L^{\frac{4}{5}} - 871 \right] Pr^{\frac{1}{4}} \quad (37)$$

$$\bar{C}_{f,L} = \frac{0.074}{Re_L^{\frac{1}{2}}} - \frac{1742}{Re_L} \quad (38)$$

اگر $L \gg x_c$ (یا $Re_L \gg Re_{x,c}$) باشد داریم:

$$\overline{Nu}_L = 0.037 Re_L^{\frac{4}{5}} Pr^{\frac{1}{4}} \quad (39)$$

$$\bar{C}_{f,L} = 0.074 Re_L^{-\frac{1}{2}} \quad (40)$$

۷-۸- روش انتگرالی ون کارمن

معادله انتگرالی انرژی عبارت است از:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u(T_\infty - T) dy = \alpha \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (41)$$

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \text{Pr}^{-\frac{1}{2}} \quad (42)$$

$$\text{Nu} = 0.54 \text{Re}^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{4}} \quad (43)$$

۹-۷- جریان حول استوانه و کره

جریان حول یک استوانه:

در نقطه جدایش:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

معادله هیلپرت:

$$\text{Nu} = c \text{Re}^m \text{Pr}^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

جریان روی کره:

قانون استوکس:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_D} \quad \text{Re}_D < 0.5 \quad (45)$$

معادله تیاکر:

$$\overline{\text{Nu}}_D = 2 + \left[0.4 \text{Re}_D^{\frac{1}{2}} + 0.6 \text{Re}_D^{\frac{1}{4}} \right] \text{Pr}^{0.4} \left[\frac{\mu}{\mu_s} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (46)$$

برای محاسبه ضریب انتقال کره از قطرات مایع در حال سقوط آزاد از رابطه رانز و مارشال استفاده می‌شود:

$$\overline{\text{Nu}}_D = 2 + 0.6 \text{Re}_D^{\frac{1}{2}} \text{Pr}^{\frac{1}{4}} \quad (47)$$

در حالتی که سیال ساکن اطراف یک کره داشته باشیم $\overline{\text{Nu}}_D = 2$ است.

۱۰-۷- جریان عمود بر مجموعه لوله‌ها

$$\overline{\text{Nu}}_D = 1.13 c_1 \text{Re}_{D,\max}^m \text{Pr}^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

در محاسبه $\text{Re}_{D,\max}^m$ از ماکزیمم سرعت سیال استفاده می‌گردد.

c_1 و m ثابت‌های مربوط به نوع آرایش لوله‌ها و گام‌های عرضی و طولی

۱۱-۷- جریان داخلی

شرط توسعه یافته بودن گرمایی:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T - T_s}{T_m - T_s} \right]_{fd,t} = 0 \quad (49)$$

T_m دمای میانگین سیال در سطح مقطع لوله و T_s دمای سطح لوله است.

طول ناحیه ورودی گرمایی (x_f) :

$$\left[\frac{x_t}{d} \right] = 0.05 \text{Re}_d \text{Pr} \quad (50)$$

$$\left[\frac{x_t}{d} \right] = 10 \quad (51)$$

۱) شار گرمایی ثابت سطح

$$q = q_s''(pL) = mC_p (T_m(x) - T_{m,i}) \quad (52)$$

دمای میانگین سیال در خروجی لوله:

$$T_m(x) = T_{m,i} + \frac{q_s'' p}{\dot{m} C_p} x \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{برای جریان آرام:}$$

عدد ناسلت در جریان آرام در این شرایط مقدار ثابتی بوده و عبارت است از:

$$\text{Nu} = 4 / 36 \quad (54)$$

۲) دمای سطح ثابت

در این حالت دمای سطح لوله مقدار ثابت T_s است.

$$\frac{T_s - T_m(x)}{T_s - T_{m,i}} = \exp \left[- \frac{p x}{\dot{m} C_p} \bar{h} \right] \quad (55)$$

نرخ انتقال گرمای کلی:

$$q = \bar{h} A \Delta T_{lm} \quad (56)$$

$$\Delta T_{lm} = \frac{T_{m,o} - T_{m,i}}{\ln \frac{T_s - T_{m,o}}{T_s - T_{m,i}}} = \frac{\Delta T_o - \Delta T_i}{\ln \frac{\Delta T_o}{\Delta T_i}} \quad (57)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{برای جریان آرام:}$$

$$\text{Nu} = 3 / 66 \quad (58)$$

دمای متوسط:

$$T_b = \frac{\int_0^r (\pi r dr) \rho u C_p T}{\int_0^r (\pi r dr) \rho u C_p} \quad (59)$$

۷-۱۲- جریان درهم داخل لوله‌ها

معادله دیتوس - بولتر

$$\text{Nu}_D = 0.023 \text{Re}_D^{1/2} \text{Pr}^n \quad (60)$$

برای گرمایش $n = 0.4 : (T_s > T_m)$

برای سرمایش $n = 0.3 : (T_s < T_m)$

هرگاه اختلاف دماهای $T_s - T_m$ زیاد باشد:

$$Nu_D = 0.027 Re_D^{\frac{1}{4}} Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (61)$$

طول ورودی برای جریان درهم کوتاه است می توان فرض کرد که $\overline{Nu}$ برای کل لوله با Nu مربوط به ناحیه کاملاً توسعه یافته برابر است:

$$\overline{Nu}_D = Nu_{D,ft}$$

ولی در لوله های کوتاه:

$$\overline{Nu}_D > Nu_{D,ft}$$

۱۳-۷- مجاری غیردایره ای

قطر هیدرولیکی:

$$D_h = \frac{4A_c}{P} \quad (62)$$

A_c : سطح مقطع جریان P : محیط تر شده

برای مجرای بین دو لوله هم محور:

$$Nu_i = \frac{h_i D_h}{k}, \quad Nu_o = \frac{h_o D_h}{k} \quad (63)$$

قطر هیدرولیکی:

$$D_h = D_o - D_i \quad (64)$$

جابه‌جایی طبیعی

۱-۸- مقدمه

۱-۸- معادلات حاکم بر انتقال گرمای جابه‌جایی طبیعی

$$\text{معادله پیوستگی} : \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۱)$$

$$\text{معادله اندازه حرکت} : u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۲)$$

$$\text{معادله انرژی} : u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۳)$$

β : ضریب انبساط حجمی

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p \quad (۴)$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} \quad \text{برای گاز ایده‌آل:}$$

$$T_f = \frac{T_w + T_{\infty}}{2} \quad T_f \text{ دمای فیلم است:}$$

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\rho_{\infty} - \rho}{T_{\infty} - T} \quad \text{برای گازهای واقعی و مایعات:}$$

بزرگ بودن β برای یک سیال به معنی زیاد بودن تغییرات چگالی آن با دما است.

۲-۸- تعیین توزیع سرعت و توزیع دما

شرایط مرزی:

$$y=0 : u=0, \quad T=T_w$$

$$y=0 : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g\beta(T_w - T_{\infty})}{\nu}$$

$$y=\delta : \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$y=\delta : u=0, \quad T=T_{\infty}$$

$$\frac{u}{u_x} = \frac{y}{\delta} \left[1 - \frac{y}{\delta} \right]^2 \quad (5)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{y}{\delta} \right]^2 \quad (6)$$

u_x یک سرعت مجازی بوده که تابعی از x است.

عدد گرافش:

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (7)$$

۳-۸- روابط جابه‌جایی طبیعی

$$Nu_L = \frac{\bar{h}L}{k} = c(Gr_L \cdot Pr) = cRa_L^n \quad (8)$$

Ra : عدد رایلی

$$Ra = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu\alpha} \quad (9)$$

مقادیر c و n به هندسه سطح و رژیم جریان بستگی دارند.

$$n = \frac{1}{4} \quad \text{جریان آرام:} \quad n = \frac{1}{3} \quad \text{جریان درهم:}$$

۱) صفحه عمودی

$$Nu_x = \left[\frac{Gr_x}{4} \right]^{\frac{1}{4}} g(Pr) \quad (10)$$

برای جریان آرام داریم:

$$\bar{h} = \frac{4}{3} h|_{x=L} \quad \text{در شرایط دمایی ثابت سطح}$$

$$\bar{h} = \frac{5}{4} h|_{x=L} \quad \text{در شرایط شار گرمایی ثابت در سطح}$$

سرعت ماکزیمم در $y = \frac{\delta}{3}$ حاصل می‌شود.

$$h_x = \frac{2k}{\delta} \quad (11)$$

$$Nu_x = \frac{2x}{\delta} \quad (12)$$

۲) جابه‌جایی طبیعی روی استوانه

برای استوانه افقی:

$$Nu_D = C Ra_D^n$$

اگر شرط زیر برقرار باشد یک استوانه عمودی را می‌توان یک صفحه عمودی در نظر گرفت:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{\frac{1}{4}}} \quad (13)$$

۶) جابه‌جایی طبیعی روی کره

معادله زیر برای کره دما ثابت و سیالات با عدد پرانتل نزدیک به یک به کار می‌رود:

$$Nu_D = 2 + 0.43 Ra_D^{1/4} \quad 1 < Ra_D < 10^5$$

۴-۸- انتقال گرماک جابه‌جایی اجباری طبیعی توأم

$$Nu^n = Nu^n_{\text{طبیعی}} \pm Nu^n_{\text{اجباری}} = Nu^n_{\text{کل}} \quad (14)$$

جریان‌های هم‌جهت و جریان‌های مورب: +

جریان‌های غیر هم‌جهت: -

جوشش و میعان

۹-۱- مقدمه

۹-۲- جوشش

$$q_s'' = h(T_s - T_{\text{sat}}) = h \Delta T_e \quad (۱)$$

رژیم‌های مختلف جوشش استخری:

۱- جوشش جابه‌جایی آزاد: $\Delta T_e \leq 5^\circ\text{C}$ است.

$$\begin{aligned} \text{جریان آرام: } h &\propto \Delta T_e^{\frac{1}{4}}, \quad q'' \propto \Delta T_e^{\frac{5}{4}} \\ \text{جریان درهم: } h &\propto \Delta T_e^{\frac{1}{3}}, \quad q'' \propto \Delta T_e^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

۲- جوشش هسته‌ای یا حبابی: $5^\circ\text{C} \leq \Delta T_e \leq 30^\circ\text{C}$
رابطه بین q_s'' و ΔT_e :

$$q_s'' = \mu_l h_{fg} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left(\frac{C_{p,l} \Delta T_e}{C_{s,f} h_{fg} \text{Pr}_l^n} \right)^{1/4} \quad (۲)$$

اندیس‌های l و v به حالت‌های مایع و بخار اشباع اشاره می‌کنند.

σ : کشش سطحی h_{fg} : گرمای نهان تبخیر آب

مقادیر ضرایب $C_{s,f}$ و n به ترکیب سطح - مایع وابسته هستند

۳- جوشش انتقالی: $30^\circ\text{C} \leq \Delta T_e \leq 120^\circ\text{C}$

۴- جوشش لایه‌ای

ضریب انتقال گرمای کلی برای لوله‌های افقی:

$$(\bar{h})^{\frac{4}{3}} = (\bar{h}_{\text{conv}})^{\frac{4}{3}} + \bar{h}_{\text{rad}} (\bar{h})^{\frac{1}{3}} \quad (۳)$$

هرگاه $\bar{h}_{\text{rad}} < \bar{h}_{\text{conv}}$

$$\bar{h} = \bar{h}_{\text{conv}} + \frac{3}{4} \bar{h}_{\text{rad}} \quad (۴)$$

۳-۹- میعان

۴-۹- میعان لایه‌ای روی یک صفحه تخت قائم

توزیع سرعت برای لایه مایع در میعان لایه‌ای آرام:

$$u(y) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \left(\delta y - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (5)$$

نرخ دبی جرمی بر واحد عرض صفحه عبارت است از:

$$\Gamma(x) = \frac{\rho_l(\rho_l - \rho_v)g\delta^2}{2\mu_l} \quad (6)$$

در معادلات فوق δ ضخامت لایه است.

$$h = \frac{k}{\delta} \quad (5) \quad \bar{h} = \frac{4}{3} h \Big|_{x=L} \quad (4) \quad h \propto \Delta T^{-\frac{1}{4}} \quad (3) \quad h \propto x^{-\frac{1}{4}} \quad (2) \quad \delta \propto x^{\frac{1}{4}} \quad (1)$$

کل انتقال گرما به سطح:

$$q = \bar{h}_L A (T_{\text{sat}} - T_s) \quad (7)$$

نرخ کل میعان:

$$\dot{m} = \frac{\bar{h}_L A (T_{\text{sat}} - T_s)}{h'_{fg}} \quad (8)$$

که h'_{fg} گرمای نهان تبخیر اصلاح شده است و از رابطه $h'_{fg} = h_{fg} + 0.68 C_{p,l} (T_{\text{sat}} - T_s)$ به دست می‌آید.

دژیم جریان:

$$\text{Re}_f = \frac{4\Gamma}{\mu_l} \quad (9)$$

برای یک صفحه به طول L :

$$\text{Re}_f = \frac{4\bar{h}_L L (T_{\text{sat}} - T_w)}{h_{fg}\mu_l} \quad (10)$$

ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در میعان فیلمی:

$$h_x = \left[\frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)k_l^2 h'_{fg}}{4\mu_l(T_{\text{sat}} - T_s)} x \right]^{\frac{1}{4}} \quad (11)$$

$$\bar{h}_l = 0.725 \left[\frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)k_l^2 h'_{fg}}{\mu_l(T_{\text{sat}} - T_s)L} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (12)$$

ضخامت لایه مرزی:

$$\delta(x) = \left[\frac{4k_l\mu_l(T_{\text{sat}} - T_s)x}{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)h'_{fg}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (13)$$

۵-۹- عدد میعان

$$Co = \bar{h} \left[\frac{\mu^2}{k^3 \rho (\rho - \rho_v) g} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (14)$$

۶-۹- سطوح مایل

$$h_{\text{صفحه مایل}} = h_{\text{صفحه قائم}} (\cos \theta)^{\frac{1}{4}}$$



۹-۷- میعان لایه‌ای آرام در سیستم‌های شعاعی

برای میعان روی لوله افقی و کره:

$$\bar{h}_D \propto D^{\frac{1}{4}}$$

برای N لوله افقی زیر هم:

$$\bar{h}_{D,N} = \bar{h}_D N^{\frac{1}{4}} \quad (15)$$

دو معادله فوق $\bar{h}_D$ ضریب انتقال گرمای لوله بالایی است.

مبدل‌های گرمایی

۱۰-۲- رسوب‌گذاری

ضریب رسوب‌گرفتگی:

$$R_f = \frac{1}{U_{\text{کنیف}}} - \frac{1}{U_{\text{تمیز}}} \quad (۱)$$

رابطه انتقال گرما برای مبدل‌های گرمایی پوسته و لوله‌ای:

$$R = \frac{1}{UA} = \frac{1}{U_o A_o} = \frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{h_i A_i} + R_w + \frac{R_{f,o}}{A_o} + \frac{R_{f,i}}{A_i} + \frac{1}{h_o A_o} \quad (۲)$$

R_w مقاومت دیواره، A_o و A_i مساحت سطوح داخلی و خارجی، $R_{f,o}$ و $R_{f,i}$ ضریب رسوب‌گرفتگی سطوح داخلی و خارجی است.

۱۰-۳- تحلیل مبدل‌های گرمایی

۱۰-۳-۱- روش LMTD

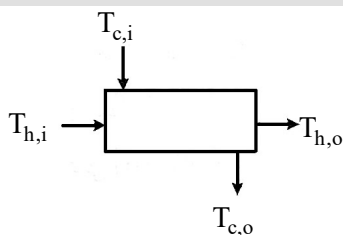
برای محاسبه نرخ انتقال گرما داریم:

$$q = \dot{m}_h C_{p,h} \Delta T_h$$

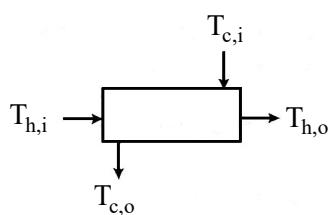
$$q = \dot{m}_c C_{p,c} \Delta T_c$$

$$q = UA \Delta T_{\text{LMTD}} \quad (۳)$$

$$\Delta T_{\text{LMTD}} = \frac{\Delta T_r - \Delta T_l}{\ln \left(\frac{\Delta T_r}{\Delta T_l} \right)} \quad (۴)$$



$$\begin{cases} \Delta T_l = T_{h,i} - T_{c,i} \\ \Delta T_r = T_{h,o} - T_{c,o} \end{cases} \quad \text{برای جریان موازی:}$$



$$\begin{cases} \Delta T_l = T_{h,i} - T_{c,o} \\ \Delta T_r = T_{h,o} - T_{c,i} \end{cases} \quad \text{برای جریان مخالف:}$$

استفاده از رابطه نرخ انتقال گرما برای مبدل‌ها با جریان متقاطع و مبدل‌های چندمسیره:

$$\Delta T_{LMTD} = F \Delta T_{LMTD,fc} \quad (5)$$

$\Delta T_{LMTD,fc}$ اختلاف دمای متوسط لگاریتمی

F: ضریب تصحیح

۲-۳-۱۰ روش ϵ -NTU

بازده انتقال گرما:

$$\epsilon = \frac{q_{act}}{q_{max}} = \frac{\text{مقدار گرمای واقعی منتقل شده}}{\text{حداکثر گرمایی که مبدل قادر است منتقل کند}} \quad (6)$$

حداکثر انتقال گرما در یک مبدل با سطح بی‌نهایت و با جریان مخالف حاصل می‌شود.

$$q_{act} = C_h (T_{h,i} - T_{h,o}) = C_c (T_{c,o} - T_{c,i}) \quad (7)$$

$$q_{max} = C_{min} (T_{h,i} - T_{c,i}) \quad (8)$$

بنابراین:

$$\epsilon = \frac{C_h (T_{h,i} - T_{h,o})}{C_{min} (T_{h,i} - T_{c,i})} = \frac{C_c (T_{c,o} - T_{c,i})}{C_{min} (T_{h,i} - T_{c,i})} \quad (9)$$

$$\epsilon = \frac{\Delta T_{(سیال حداقل)}}{\Delta T_{max}} \quad (10)$$

تعداد واحدهای انتقال (NTU):

$$NTU = \frac{AU}{C_{min}} \quad (11)$$

NTU معیاری از اندازه (A) و کیفیت انتقال گرما (U) است.

$$NTU = \frac{\Delta T_{(سیال حداقل)}}{\Delta T_{LMTD}} \quad (12)$$

برای حالتی که تغییر فاز داریم (چگالنده‌ها، تبخیرکننده‌ها)، $C = 0$ است و

$$\epsilon = 1 - e^{-NTU} \quad (13)$$

برای حالتی که $C = 1$ است:

$$\epsilon = \frac{NTU}{1 + NTU} \quad \text{جریان مخالف} \quad (14)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} (1 - e^{-2NTU}) \quad \text{جریان موازی} \quad (15)$$

۴-۱۰- قطر معادل

$$D_e = \frac{4A}{P} \quad (۱۶)$$

A: مساحت جریان آزاد

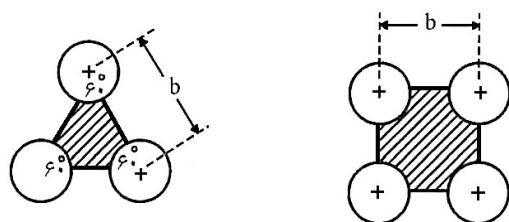
P: محیط تر شده

برای گام مربعی داریم:

$$D_e = \frac{4b^2 - \pi d_i^2}{\pi d_i} \quad (۱۷)$$

برای گام مثلثی داریم:

$$D_e = \frac{2\sqrt{3}b^2 - \pi d_i^2}{\pi d_i} \quad (۱۸)$$



جدول ۱۰-۲: ϵ برحسب NTU و C_r

اعداد بی بعد

۱-۱۱- عدد رینولدز

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجت}} \quad (۱)$$

۲-۱۱- عدد پراتل

$$Pr = \frac{v}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\text{پخش مومنتم}}{\text{پخش انرژی}} \quad (۲)$$

۳-۱۱- عدد ناسلت

$$Nu = \frac{h L_c}{k} = \frac{\text{انتقال گرمای جابه جایی}}{\text{انتقال گرمای هدایتی}} \quad (۳)$$

۴-۱۱- عدد بیو

$$Bi = \frac{h L_c}{k} = \frac{\text{مقاومت هدایتی}}{\text{مقاومت جابه جایی}} \quad (۴)$$

۵-۱۱- عدد فوریه

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\text{شدت انتقال گرما از حجم}}{\text{شدت ذخیره گرما در}} \quad (۵)$$

۶-۱۱- عدد گرافش

$$Gr_L = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2} = \frac{\text{نیروی شناوری}}{\text{نیروی لزجت}} \quad (۶)$$

۷-۱۱- عدد پکلت

$$Pe = Re.Pr = \frac{V L}{\alpha} = \frac{\dot{m} C_p \Delta T}{k A \frac{\Delta T}{L}} \quad (۷)$$

۸-۱۱- عدد رایلی

$$Pe = Gr.Pr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu \alpha} \quad (۸)$$

۹-۱۱- عدد استانتون

$$St = \frac{Nu}{Pe} = \frac{Nu}{Re.Pr} \text{ یا } St = \frac{h}{\rho C_p U} \quad (9)$$

۱۰-۱۱- عدد اکرت

$$Ec = \frac{U^2}{C_p (T - T_\infty)} \quad (10)$$

۱۲-۱۱- عدد گراتز

$$Gr = \frac{Re.Pr}{x/D} \quad (11)$$

۱۳-۱۱- عدد لويس

$$Le = \frac{\alpha}{D} = \frac{\text{پخش گرما}}{\text{پخش جرم}} \quad (12)$$

۱۴-۱۱- عدد برينکمن

$$Br = Pr.Ec = \frac{\mu U^2}{k_f (T - T_\infty)} \quad (13)$$

تَشَعُّع

۱۲-۱- مقدمه

۱۲-۲- خواص تشعشع

ضریب صدور یا ضریب نشر (ε)

$$\varepsilon = \frac{E}{E_b} = \frac{E}{\sigma T^f} \quad (1)$$

$$E = \varepsilon \sigma T^f$$

ضریب جذب ::

$$\alpha = \frac{\text{تَشَعُّع جَذَب شَدَه}}{\text{تَشَعُّع وِرودِی بَه سَطَح}}$$

ضریب انعکاس ::

$$\rho = \frac{\text{تَشَعُّع مَنعَكَس شَدَه}}{\text{تَشَعُّع وِرودِی بَه سَطَح}}$$

ضریب عبور ::

$$\tau = \frac{\text{تَشَعُّع عُبور کَرده}}{\text{تَشَعُّع وِرودِی بَه سَطَح}}$$

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

جسم سفید:

$$\tau = \alpha = 0, \quad \rho = 1$$

جسم شفاف:

$$\alpha = \rho = 0, \quad \tau = 1$$

جسم مات:

$$\alpha + \rho = 1, \quad \tau = 0$$

جسم سیاه:

$$\alpha = 1, \quad \rho = \tau = 0$$

ارتباط تشعشع با صدور انرژی و شدت تشعشع ورودی و خروجی:

$$E = \pi I_e \quad (2)$$

$$G = \pi I_i \quad (3)$$

$$J = \pi I_{e+r} \quad (4)$$

در معادلات فوق E توان صدور کلی، G شدت تشعشع ورودی کلی، J شدت تشعشع خروجی کلی (رادیو سیتی)، I_e شدت تابش کلی تشعشع صادر شده، I_i شدت تابش ورودی و I_{e+r} شدت تابش مربوط به صدور و انعکاس است.

۴-۱۲ - قانون توزیع پلانک

$$E_{b\lambda}(T) = \frac{c_1}{\lambda^5 [\exp(c_2 / \lambda T) - 1]} \quad (5)$$

در معادله فوق:

$$c_1 = 2\pi h c^2 = 3.742 \times 10^{-16} \text{ W} \cdot \mu\text{m}^2 / \text{m}^2$$

$$c_2 = hc / k = 1.438 \times 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J / K} \quad (\text{ثابت بولتزمن})$$

۵-۱۲ - قانون استفان بولتزمن

$$E_b = \sigma T^4 \quad (6)$$

E_b : توان صدور یک جسم

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{K}^4 \quad \text{ثابت بولتزمن}$$

۶-۱۲ - قانون جابه‌جایی وین

$$\lambda_{\max} T = 2897 / \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad (7)$$

۷-۱۲ - تبادل گرمای تشعشعی بین سطوح سیاه

نرخ خالص انتقال گرمای تشعشعی از سطح i به سطح j برابر است با:

$$q_{ij} = A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad (8)$$

F_{ij} : ضریب شکل

اگر محفظه‌ای شامل N سطح سیاه با دماهای مختلف داشته باشیم نرخ خالص انتقال گرمای تشعشعی از سطح i به سطوح دیگر برابر است با:

$$q_i = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad (9)$$

۸-۱۲ - تبادل گرمای تشعشعی بین سطوح خاکستری و دیفیوز در یک محفظه

هرگاه (irradiation) G شدت تشعشع رسیده به واحد سطح جسم در واحد زمان و J (Radiosity) شدت تشعشع خروجی از واحد سطح در واحد زمان باشند داریم:

$$J = \epsilon E_b + (1 - \epsilon) G \quad (10)$$

۱۲-۸ - تبادل خالص گرمای تشعشعی در یک سطح

نرخ خالص انتقال گرمای تشعشعی از سطح i:

$$q_i = A_i (J_i - G_i) \quad (11)$$

$$q_i = A_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{bi}}{1 - \varepsilon_i} \right) = \frac{A_i \varepsilon_i (E_{bi} - J_i)}{1 - \varepsilon_i} = \frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}}$$

$$q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{R_i} \quad (12)$$

$$\text{مقاومت سطحی: } R_i = \frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i} \quad (13)$$

۱۲-۸-۲ - تبادل خالص گرمای تشعشی بین دو سطح

نرخ خالص انتقال گرمای تشعشی از سطح i به سطح j عبارت است از:

$$q_{ij} = A_i F_{ij} (J_i - J_j) \quad (14)$$

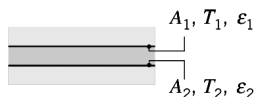
$$\text{مقاومت فضایی: } R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}} \quad (15)$$

۱۲-۹ - تبادل گرمای تشعشی در محفظه‌های دوسطحی

نرخ خالص انتقال گرمای تشعشی برای دو سطح خاکستری، دیفیوز و مات که تشکیل یک محفظه را می‌دهند:

$$q_{12} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} \quad (16)$$

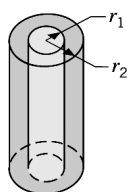
صفحات موازی بزرگ بسیار بلند



$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A \\ F_{12} &= 1 \end{aligned}$$

$$q_{12} = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

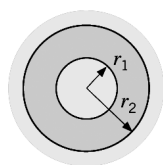
استوانه‌های هم‌مرکز بسیار بلند



$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_2} &= \frac{r_1}{r_2} \\ F_{12} &= 1 \end{aligned}$$

$$q_{12} = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)}$$

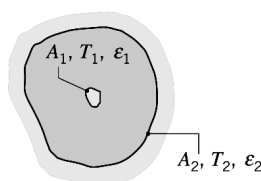
کره‌های هم‌مرکز



$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_2} &= \frac{r_1^2}{r_2^2} \\ F_{12} &= 1 \end{aligned}$$

$$q_{12} = \frac{\sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2}$$

جسم کوچک محدب در یک محفظه‌ی بزرگ



$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_2} &\approx 0 \\ F_{12} &= 1 \end{aligned}$$

$$q_{12} = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

۱۰-۱۲ - سپرهای تشعشعی

$$(q_{1r})_N = \frac{1}{N+1}(q_{1r}). \quad (17)$$

در معادله فوق (q_{1r}) نرخ انتقال گرمای تشعشعی بدون سپر است.

۱۱-۱۲ - انتقال گرمای تشعشعی در گازها

$$q = A_s \sigma (\epsilon_g T_g^r - \alpha_g T_s^r) \quad (19)$$

که ϵ_g و α_g به کمک منحنی‌های مختلفی که ارائه شده است تعیین می‌گردند.

۱۲-۱۲ - تعیین ضریب شکل یا ضریب دید

نرخ انتقال انرژی از جسم i به جسم j :

$$Q_{ij} = A_i F_{ij} \sigma (T_i^r - T_j^r) \quad (20)$$

۱۲-۱۲ - قوانین مربوط به تعیین ضریب شکل

۱- قانون تقابل یا معکوس پذیری:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (21)$$

۲- قانون جمع:

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad (22)$$

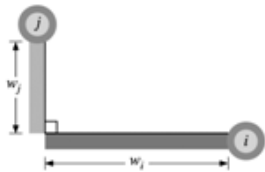
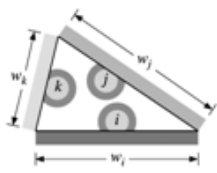
۳- قانون جمع اثر: ضریب شکل از یک سطح i به یک سطح j برابر است با مجموع ضریب شکل‌ها از سطح i به اجزاء سطح j . برای مثال در حالتی که تشعشع از سطح ۱ به دو سطح ۲ و ۳ صورت می‌گیرد داریم:

$$F_{1-2,3} = F_{12} + F_{13} \quad (23)$$

۴- قانون تقارن: یعنی اگر سطوح j و k نسبت به سطح i دارای تقارن باشند داریم:

$$F_{ji} = F_{ki} \quad (24)$$

توجه: ضریب شکل چند جسم در صفحه بعد آورده شده است.

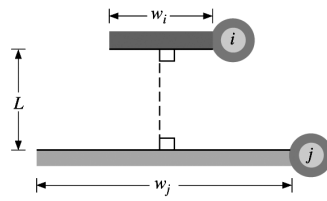
رابطه	شکل
$F_{ij} = \frac{1 + (w_j/w_i) - [1 + (w_j/w_i)^2]^{1/2}}{2}$	
$F_{ij} = \frac{w_i + w_j - w_k}{2w_i}$	

صفحات عمود بر هم
با لبه مشترک

محفظه سه سطحی

شکل	رابطه
-----	-------

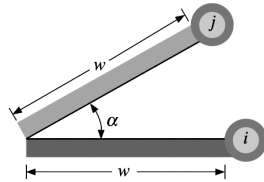
صفحات موازی



$$F_{ij} = \frac{[(W_i + W_j)^2 + 4]^{1/2} - [(W_j - W_i)^2 + 4]^{1/2}}{2W_i}$$

$$W_i = w_i/L, W_j = w_j/L$$

صفحات مایل با عرض
مساوی و لبه مشترک



$$F_{ij} = 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

۲-۱۲-۱۲ - روش ضربدری هاتل

$$F_{ij} = \frac{(\sum \text{مجموع طول خطوط متقاطع}) - \sum (\text{مجموع طول خطوط غیر متقاطع})}{\text{دو برابر خط روی سطح } i \text{ ام}} \quad (25)$$