

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

هندسه (۱)

رشته ریاضی و فیزیک

پایه دهم

دوره دوم متوسطه





وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب:

هندسه (۱) - پایه دهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۰۲۱۳

پدیدآورنده:

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، طیبه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل‌رحمت، محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
زهره رحیمی، محمدرضا سیدصالحی، هوشنگ شرقی، محمود نصیری (اعضای گروه تألیف) - سیداکبر میرجعفری (ویراستار)

مدیریت آماده‌سازی هنری:

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی:

احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - مجتبی زند (طراح گرافیک، طراح جلد و صفحه‌آرا) - سیده‌فاطمه محسنی، فاطمه باقری‌مهر، زهرا رشیدی‌مقدم، علی‌نجمی، سپیده ملک‌ایزدی، حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)

نشانی سازمان:

تهران: خیابان ایران‌شهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر:

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

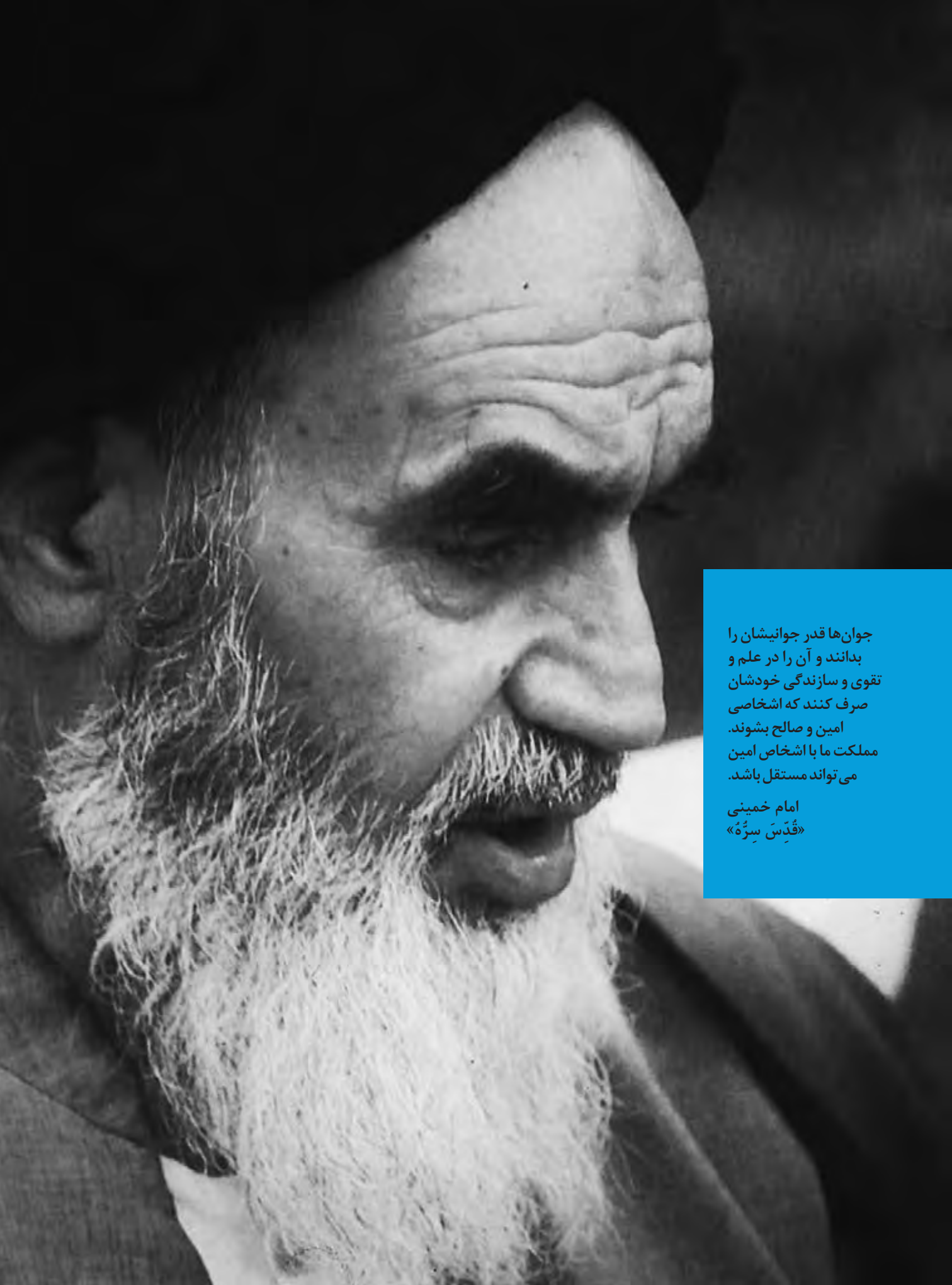
چاپخانه:

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ نهم ۱۴۰۳

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۵۰۱-۲

ISBN: 978-964-05-2501-2



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
تقوی و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی
«قُدَسِ سِرَّة»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

فصل ۱ : ترسیم های هندسی و استدلال	۹
درس اول : ترسیم های هندسی	۱۰
درس دوم : استدلال	۱۷
فصل ۲ : قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن	۲۹
درس اول : نسبت و تناسب در هندسه	۳۰
درس دوم : قضیه تالس	۳۴
درس سوم : تشابه مثلث ها	۳۸
درس چهارم : کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث ها	۴۵
فصل ۳ : چند ضلعی ها	۵۳
درس اول : چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها	۵۴
درس دوم : مساحت و کاربردهای آن	۶۵
فصل ۴ : تجسم فضایی	۷۷
درس اول : خط، نقطه و صفحه	۷۸
درس دوم : تفکر تجسمی	۸۷

پیشگفتار

قلمرو آموزش ریاضی از یک سو درک مفاهیم ریاضی شامل اعداد و محاسبات عددی، جبر و نمایش نمادین (الگوها، رابطه‌ها، تابع‌ها)، هندسه و اندازه‌گیری، داده‌ها و آمار و احتمال را در بر می‌گیرد و از سوی دیگر در این حوزه، دانش‌آموزان باید با فرایندهای ریاضی نظیر حل مسئله و به‌کارگیری راهبردهای حل مسئله، مدل‌سازی، استدلال، تفکر نقاد و استدلال منطقی، تفکر تجسمی یا دیداری، تفکر خلاق، اتصال و پیوندهای موضوعی و مفهومی ریاضی، گفتمان ریاضی، تصمیم‌گیری و تصمیم‌سازی، تخمین زدن و دقت یافتن آشنا شوند و در آنها مهارت یابند (سند برنامه درسی ملی).

از دید برخی پژوهشگران، هندسه، توانایی مشاهده کردن، تصور کردن و فکر کردن است. تقویت تفکر و حس زیبایی‌شناسی از موضوعاتی است که آموزش هندسه به دنبال آن است. از آنجا که موضوع هندسه بررسی فضا و شکل‌ها است و همه پدیده‌ها در فضا رخ می‌دهند، هندسه به گونه‌ای زمینه همه علوم طبیعی است. همچنین هندسه بستر مناسب بروز و تقویت خلاقیت و تخیل انسان را فراهم می‌آورد.

برخی اهداف مهم آموزش هندسه به قرار زیر است :

- زمینه‌سازی تقویت ذهن، خلاقیت و استدلال دانش‌آموزان؛
- تقویت قدرت درک هنر و حس زیبایی‌شناسی؛
- به‌کارگیری هندسه در زندگی روزمره؛
- آشنایی با آثار هنری برجسته و درک ایده‌های هندسی آنها؛
- شناسایی و تحلیل ویژگی‌های شکل‌های هندسی در صفحه و فضا؛
- تقویت تفکر تجسمی و مدل‌سازی هندسی در حل مسائل.

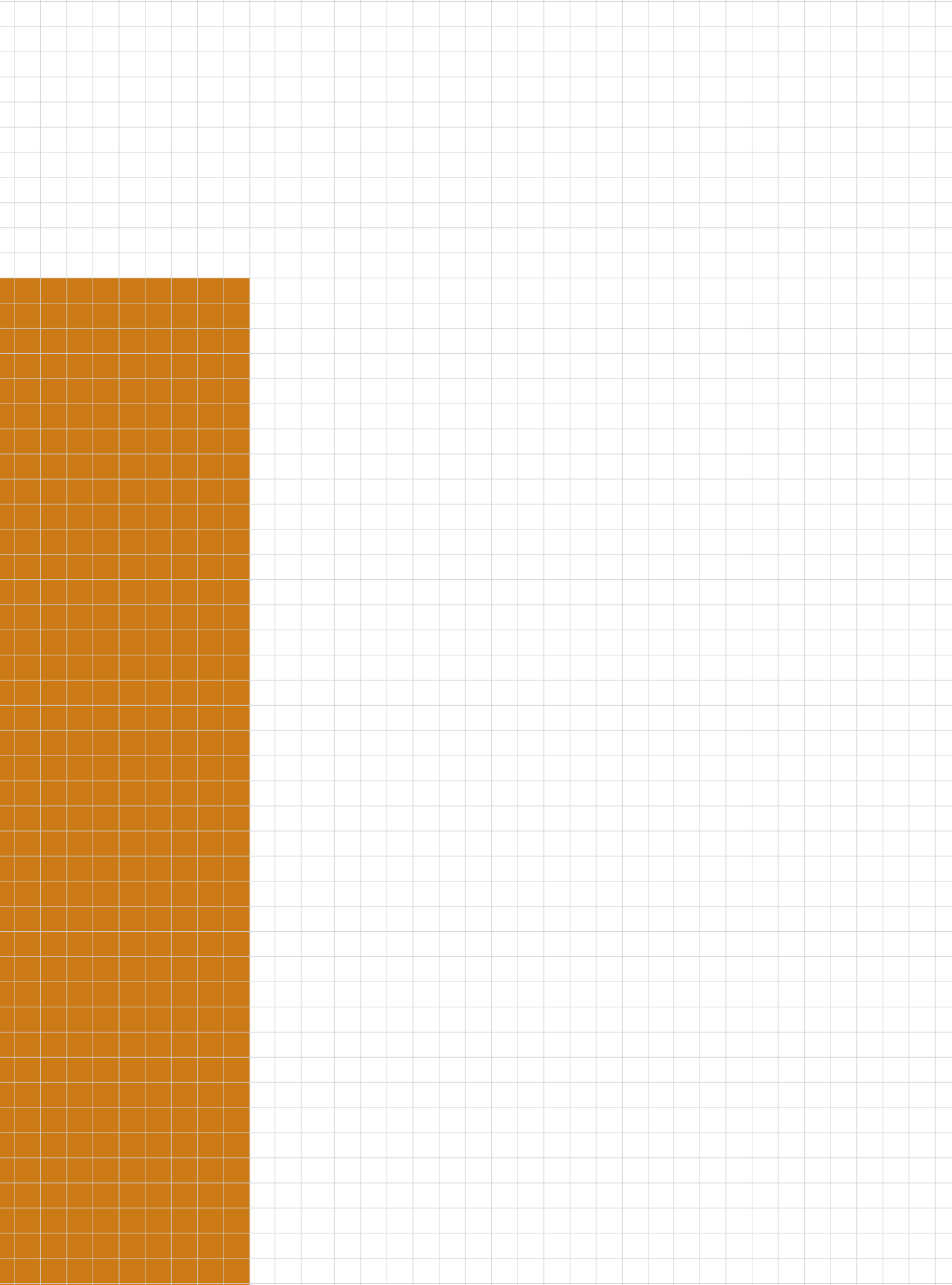
ساختار کتاب از بخش‌هایی چون «فعالیت»، «کار در کلاس»، «مثال» و «تمرین» تشکیل شده است. آنچه در هر فعالیت به‌طور عمده مدّ نظر بوده، آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درسی و سهیم بودن در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحل ماند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح هر راه حل، مرتب کردن، قضاوت درباره آن و مقایسه راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها توسط معلّم انجام می‌پذیرد و هر جا لازم باشد، راهنمایی توسط معلّم ارائه خواهد شد. در برخی موارد، فعالیت‌ها ساده و آسان نیست و صد البته اجرای مناسب دارای ارزش زیادی خواهد بود. این فعالیت‌ها در حدّ متوسط طراحی شده‌اند. معلّم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی دانش‌آموزانش آنها را غنی‌تر کند یا با ارائه توضیحاتی بیشتر و تغییراتی، فعالیت را ساده‌تر نماید.

هنگام انجام فعالیت، هدایتِ گفت‌وگوی کلاسی یا گفتمان ریاضی به عهده معلّم است که در آن دانش‌آموزان به ارائه دیدگاه‌ها و دفاع از افکار خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند. به‌طور خلاصه فراهم کردن فرصت‌های یادگیری و دادن مجال به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دغدغه‌های همکاران عزیزمان باشد.

کار در کلاس با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است. انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند. حل تمرین به عهده دانش‌آموزان است؛ اما ارائه و بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان در کلاس ضروری است.



نظر سنجی کتاب درسی



فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال



هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.



ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است. از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

۲- خط d را در نظر بگیرید و تمام نقاطی که به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارند را مشخص کنید.

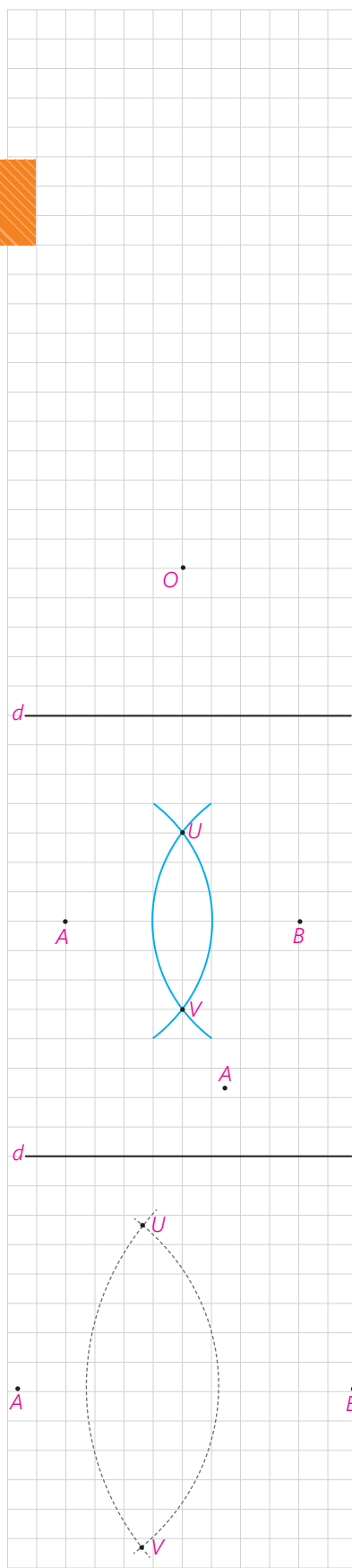
۳- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول باره خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۴- نقطه A ، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه A باشند.

۵- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟



پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردرکلاس

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، $\frac{2}{5}$ سانتی متر باشد.

۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

۳- نقاط A و B به فاصله ۷ سانتی متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر _____ و از نقطه B برابر _____ باشد.

جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

۱- زاویه xOy و نیم خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم خط‌های Ox، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)

نتیجه ۱

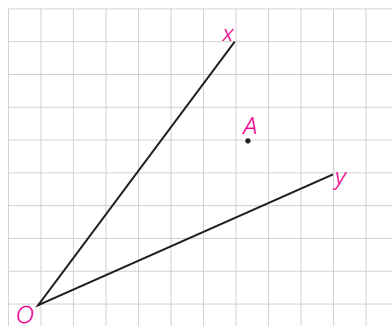
اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد .



۲- زاویه xOy و نقطه A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه A از نیم خط‌های Ox و Oy با هم برابر باشد.

نشان دهید که نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره خط OA ، و دو عمود از نقطه A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره خط OA همان نیمساز xOy است.)



نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی یک زاویه قرار داشته باشد، و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

۱- زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

– طول پاره خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

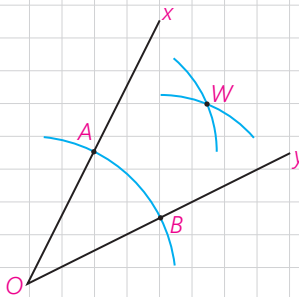
۲- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

– طول پاره خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

– پاره خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

– اندازه زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

– پاره خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره خطی است؟



کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

■ برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت

۱- پاره خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه W از دوسر پاره خط AB به یک فاصله است.

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره خط

۲- پاره خط AB و نقطه W را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی $WA = WB$) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.)

نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد و هر نقطه که روی عمودمنصف

فعالیت

۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟

۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه مورد نظر بگذرد؟

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟



فعالیت

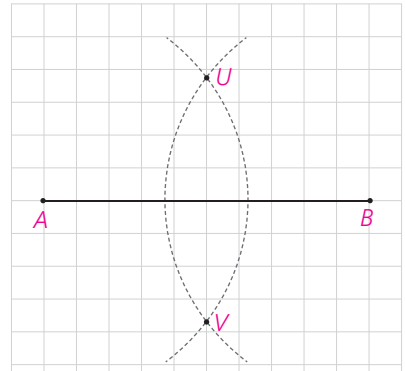
پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲- طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳- طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۴- آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟

۵- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.



کاردرکلاس

مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطه M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره خط AB باشد.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d _____ و از نقطه _____



کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه T به یک فاصله باشند.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمود منصف پاره خط AB از نقطه T می‌گذرد؟ چرا؟

عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d و از نقطه

کاردرکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن

خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه T بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورّب در نظر بگیرید.)

کاردرکلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید.

تمرین

۱- فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است.

متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع

به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲- فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهاش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی متر باشد.

۳- فرض کنیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.
الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.
ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

۴- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.
الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.
ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت (الف) یافته‌اید نیمساز زاویه را رسم کنید.

۵- به قسمت (الف) پاسخ دهید و از نتیجه آن در قسمت (ب) استفاده کنید.
الف) وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
ب) آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطه پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.





استدلال

شیوه درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعه انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند:

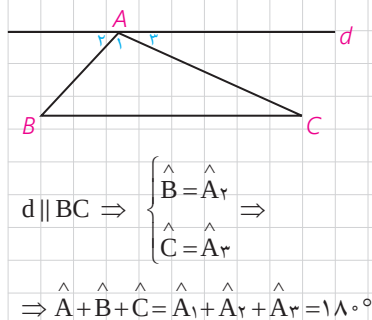
— من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.

— تیم مورد علاقه من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی آینده نیز شکست خواهد خورد.

■ استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجه گرفته‌شده مطمئن بود.

به‌طور مثال اگر فردی با مشاهده اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همه افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از استدلال استقرایی استفاده کرده است.



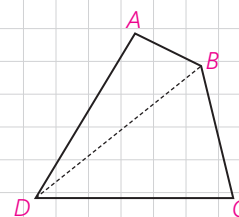
نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن استدلال استنتاجی گفته می‌شود. به‌طور مثال با دانستن رابطه بین خطوط موازی و مورب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلبخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم. مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360° .



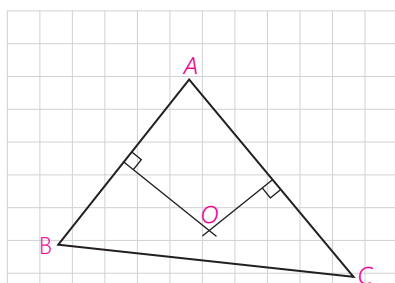
پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئله قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

– نوع استدلال ارائه‌شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

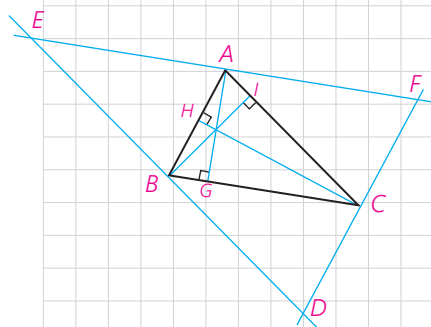
حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمود منصف اضلاع هر مثلث هم‌س‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).



استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می گیریم. چون پاره خط های AB و AC متقاطع اند، عمود منصف های آنها نیز در نقطه ای مانند O متقاطع اند.

- ۱- نقطه O روی عمود منصف پاره خط AC است؛ بنابراین $OA = OC$
 - ۲- نقطه O روی عمود منصف پاره خط AB است؛ بنابراین $OA = OB$
- از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم: $OB = OC$ بنابراین نقطه O روی BC قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد

مثال: استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث هم رس اند.



استدلال: مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به وجود آید. مثلث ABC با مثلث های ACF و ABE همنهشت است (چرا؟). بنابراین $AE = BC = AF$ و لذا نقطه A پاره خط EF است.

$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow AG \perp EF$$

از طرفی:

لذا خط AG پاره خط EF است.

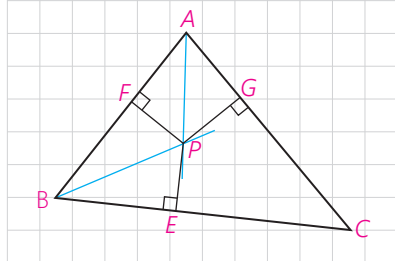
به طور مشابه می توان نشان داد:

پاره خط BI، پاره خط DE است.

پاره خط CH، پاره خط DF است.

بنابراین، ارتفاع های مثلث ABC، روی عمود منصف های اضلاع مثلث هستند و در نتیجه هم رس اند.

مثال: می دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمساز های زاویه های داخلی هر مثلث هم رس اند.



استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می گیریم. نیمساز های زاویه ای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه ای مانند P قطع می کنند. از نقطه P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می کنیم.

۱- نقطه P روی نیمساز زاویه A است؛ بنابراین $PF = PE$

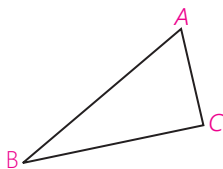
۲- نقطه P روی نیمساز زاویه B است؛ بنابراین $PF = PG$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\text{_____} = \text{_____}$ بنابراین نقطه P روی _____

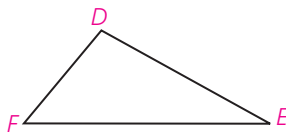
در نتیجه نقطه P محل برخورد _____ .

فعالیت

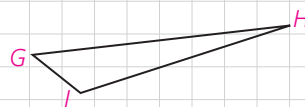
به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویه زیر آن وجود دارد؟

با توجه به این رابطه درباره یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟

آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟

مسئله: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،

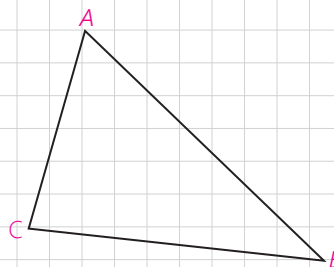
زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال: برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم.

آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

فرض: $AB > AC$

حکم: $\text{_____} > \text{_____}$



۱- در مثلث متساوی الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲- اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض $AB > AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطه D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC = AD$

★ اندازه زاویه‌های C_1 و C_2 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \square \hat{C}_2$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟

★★ اندازه زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \square \hat{D}_1$

زاویه D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟

★★★ اندازه زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1 \square \hat{B}$

از ★ و ★★ و ★★★ چه نتیجه‌ای درباره اندازه زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟ $\hat{C} \square \hat{B}$

همان‌طور که مشاهده کردید در مثلثی مانند $\triangle ABC$ فرض کردیم که ضلع $AB > AC$ است و نشان دادیم: زاویه روبه‌رو به $AC >$ زاویه روبه‌رو به AB است.

چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئله قبل با استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،

زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: $AB < AC$

حکم: $\hat{C} < \hat{B}$

– بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحل توسط علاقه‌مندان به ریاضی به دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «**عکس قضیه**» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به طور مثال عکس قضیه ۱ به صورت زیر است :

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$
حکم: $AB < AC$

مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهاش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

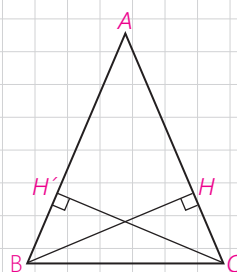
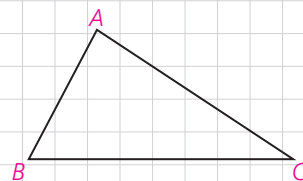
عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

در واقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC و ارتفاع بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده است.



گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

مثال :

- الف) جمله‌های زیر گزاره‌اند :
- مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است.
 - $3 < 2$
 - ب) جمله‌های زیر گزاره نیستند :
 - آیا فردا هوا بارانی است؟
 - چه هوای خوبی!
 - کتابت را مطالعه کن.

نقیض یک گزاره : همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

- الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»
- نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»
- ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»
- نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»
- پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.»
- نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.»
- در برخی گزاره‌ها به جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران بیارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک گزاره غلط یا غیرممکن می‌رسیم. در این حالت نتیجه می‌گیریم که فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد.

مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

حال می‌خواهیم درستی عکس قضیه ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$

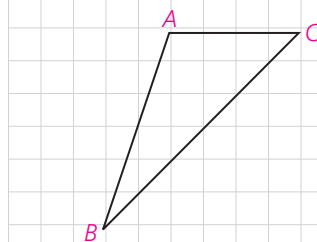
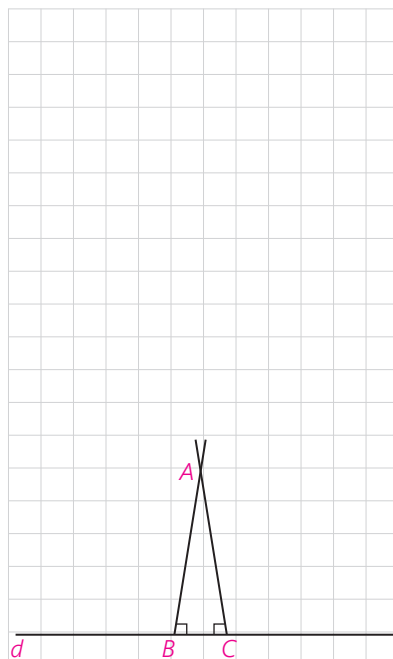
حکم: $BC > AC$

اثبات: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم _____ باشد. بنابراین باید _____ یا _____.

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول: اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیه ۱ باید _____ که با فرض در تناقض است.

حالت دوم: اگر $BC = AC$ باشد، $\triangle ABC$ یک مثلث _____ خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.



قضیه‌های دوشرطی

همان گونه که دیدیم، قضیه ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث باشد



$$BC > AB \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} > \hat{C}$$

مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

(الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

(ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

(پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

(ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (-2) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، **مثال نقض** گفته می‌شود. درباره‌ی درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟

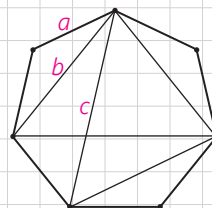
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، درباره‌ی درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستی آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» درباره‌ی گزینه (ت) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان درباره‌ی درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

کاردکلاس

۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به دست می‌آید».



۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه A و B ، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

تبرین

۱- می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ ، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) مثلثی با دو زاویه قائمه وجود ندارد.

ت) همه فلزات جامدند.

۵- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه

دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهاش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۶- فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه A باشد. دلایل هر یک از

نتایج زیر را بنویسید و نتیجه نهایی که در پایان آمده است را کامل نمایید.

الف) $\hat{D}_2 > \hat{A}_1$ ، زیرا _____ .

ب) $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$ ، زیرا _____ .

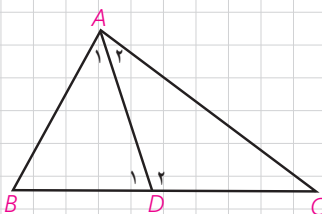
پ) $AC > DC$ ، زیرا _____ .

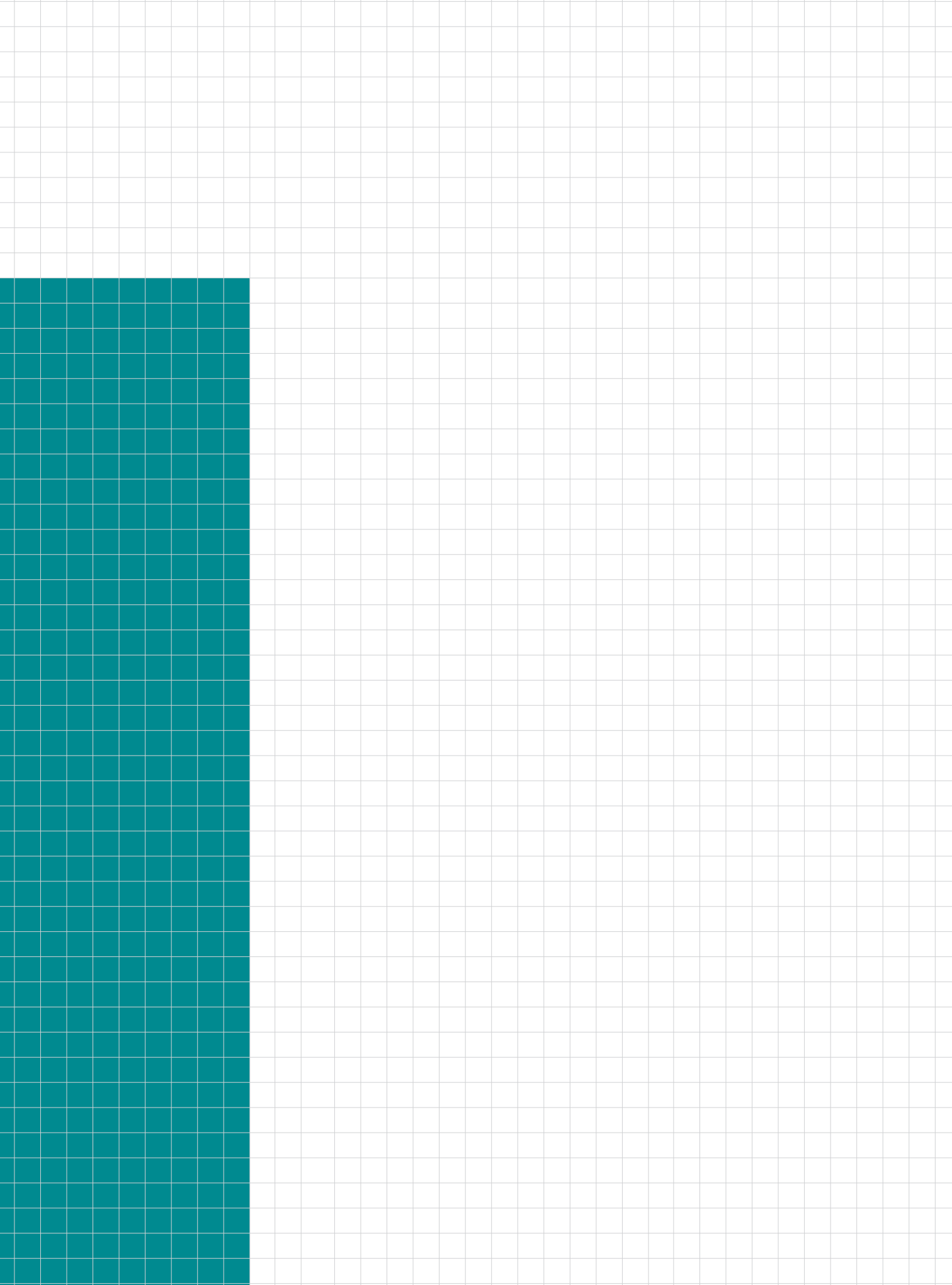
ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $AB > BD$

ث) حال نشان دهید: $AB + AC > BC$

نتیجه: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه _____ ، _____

است.





قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن



■ قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد. محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

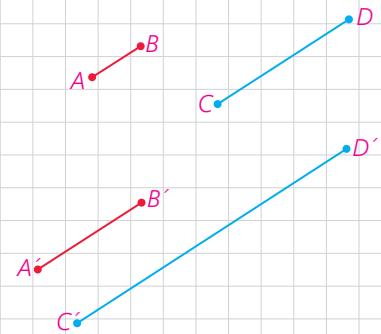


نسبت و تناسب در هندسه

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برای حاصل ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ب، d ≠ 0) آنگاه $ad = bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy = zt$ با شرط $t, y \neq 0$ تناسب $\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ۲ cm و CD پاره‌خطی به طول ۵ cm باشد، $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$. حال فرض کنید $A'B' = 4$ cm و $C'D' = 10$ cm، در این صورت:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

و بنابراین یک تناسب به صورت $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD، $\frac{2}{5}$ باشد، نسبت CD به AB، $\frac{5}{2}$ است.



۱ فعالیت

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعده AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده AB بنویسید.

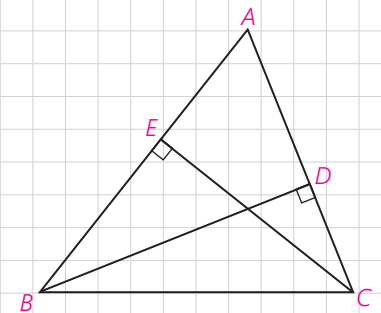
$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}}$$

— عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

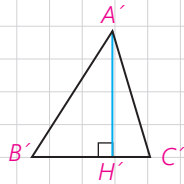
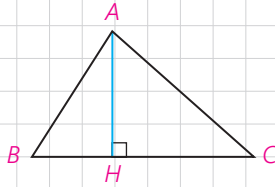
بنابراین: $AC \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}}$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟ تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟



با توجه به فعالیت صفحه قبل، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت وارد بر آنها برابر است.



۲ فعالیت

در شکل مقابل ارتفاع های AH و $A'H'$ در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم اندازه اند ($AH = A'H'$)

با پر کردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه زیر را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \times \dots \times \dots}{\frac{1}{2} \times \dots \times \dots} = \dots$$

۱ نتیجه

هرگاه اندازه ارتفاع های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها وارد شده است.

کاردکلاس

در شکل مقابل مثلث های ABC ، ACD ، ADE و AEF را که در رأس A مشترک اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A ، در همه این مثلث ها کدام پاره خط است؟

با توجه به نتیجه فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \dots$$

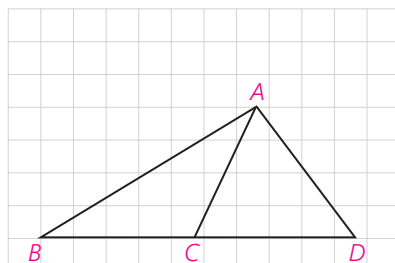
$$\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \dots$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \dots$$

نتیجه ۲

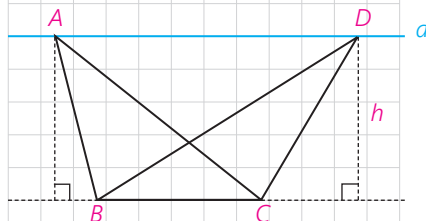
اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های ABC و DBC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC ، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

۱	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$	b و $d \neq 0$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$	a و b و c و $d \neq 0$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$	a و b و c و $d \neq 0$	(تعویض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$	$\frac{30}{21} = \frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21} = \frac{6}{14}$	b و $d \neq 0$	(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	

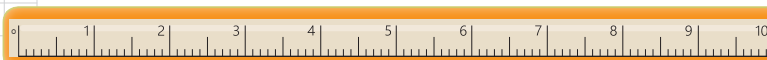
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30}$$

$b_1 \neq 0$ و $b_2 \neq 0$ و $\dots$ و $b_n \neq 0$

(تعمیم ویژگی ۶)

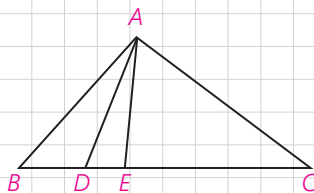
تعریف واسطه (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ با طرفین وسطین کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2 = ac$. در این صورت b را واسطه هندسی a و c می‌نامیم. مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطه هندسی بین آنهاست (چرا؟)



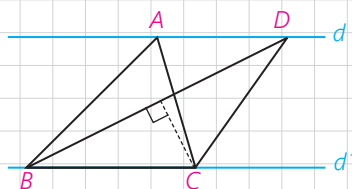
تمرین

۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

۲- طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.



۳- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید.



۴- در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، 8cm^2 است. اگر $BD = 6\text{cm}$ باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید.

قضیه تالس

در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجه ۲ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید:

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}} = \frac{\dots}{\dots}, \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{\dots}{\dots}$$

مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید:

$$\frac{AE}{\dots} = \frac{\dots}{DB}$$

بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم:

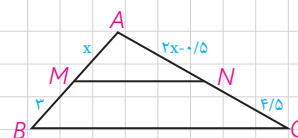
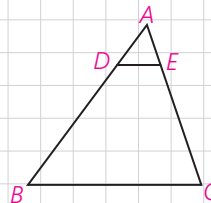
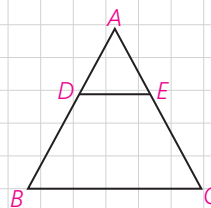
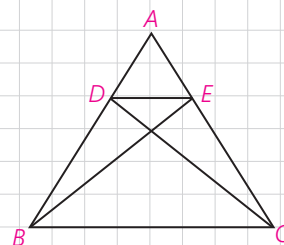
قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم $DE \parallel BC$ ، آنگاه:

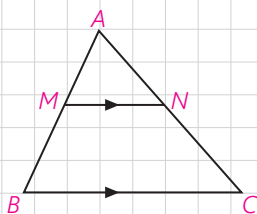
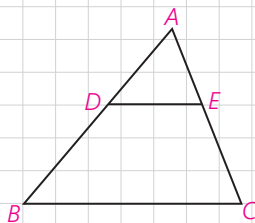
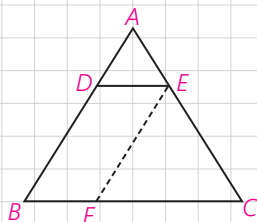
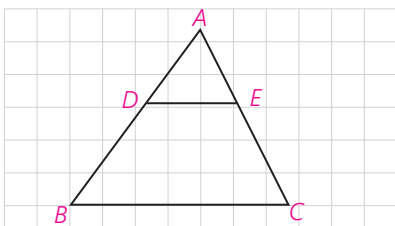
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

کاردکلاس

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD=1$ و $DB=3$ و $AE=8/5$. به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید.

۲- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.





۳- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ تناسب قضیه تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و با تفصیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

۱ فعالیت

در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، از نقطه E، پاره خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟
با توجه به این موضوع داریم:

$$DE = \dots, \quad DB = \dots$$

در مثلث ABC و با در نظر گرفتن $DE \parallel BC$ ، قضیه تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{\dots} = \frac{\dots}{AC} \quad (۱)$$

در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$ ، قضیه تالس را بنویسید.

$$\frac{BF}{BC} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

تعمیم قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

کاردکلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
عکس قضیه تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

⇒

عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم:

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ، فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \parallel BC$ ، پس از نقطه M پاره خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیه تالس داریم:

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

از مقایسه این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ و در نتیجه: $AN' = AN$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.

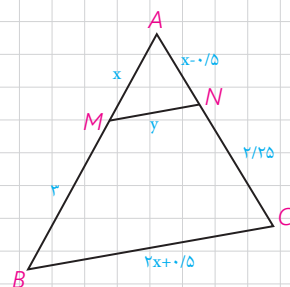
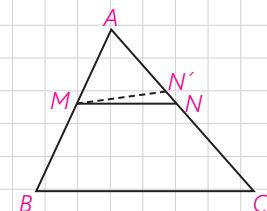
مثال: در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y را به دست آورید.

حل: با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x-0.5}{2/25} \Rightarrow$$

$$2/25x = 3x - 1/5 \Rightarrow 0.75x = 1/5 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{y}{4/5} \Rightarrow y = 1/8$$



تمرین

۱- در شکل مقابل پاره خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی

هر عبارت را مشخص کنید:

الف) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

ب) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

ت) $\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{BC}$

ث) $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{CA} = \frac{MN}{BC}$

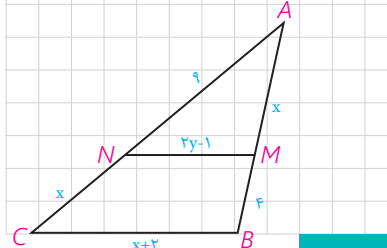
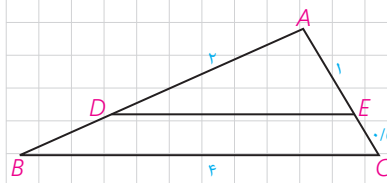
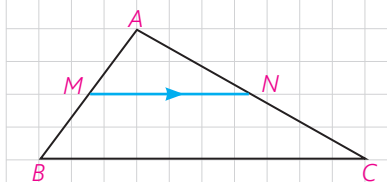
ج) $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$

ح) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

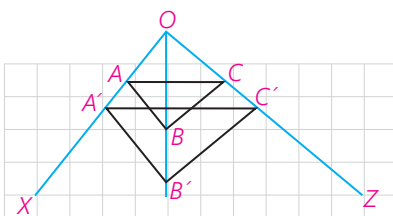
ح) $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC}$

۲- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ با توجه به اندازه پاره خط‌ها، طول‌های DE و AB را

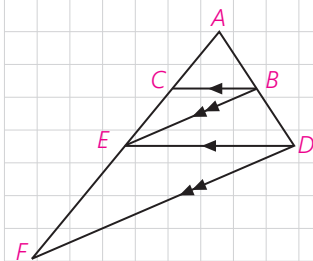
به دست آورید.



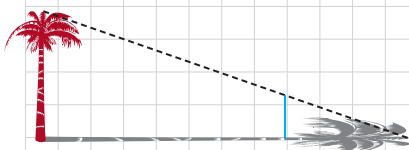
۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ مقادیر x و y را به دست آورید.



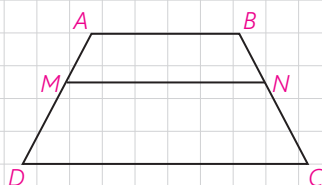
۴- در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



۵- در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ ، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



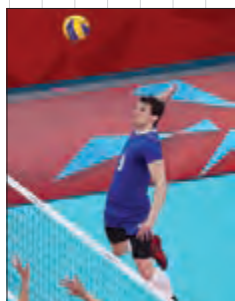
۶- یکی از کاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترسی بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



۷- در دوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

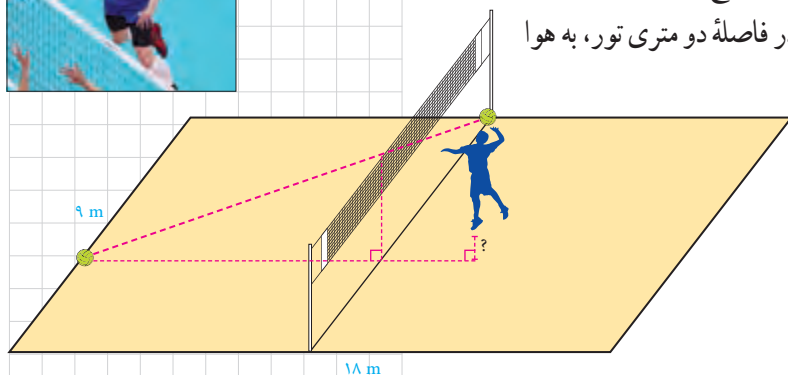
$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \quad (\text{قضیه تالس در دوزنقه})$$

(راهنمایی: یکی از قطرهای آن را رسم کنید.)



۸- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع 9×9 تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع $2/43$ متر روی خط وسط نصب شده است. یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا

می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربهٔ آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟



تشابه مثلث‌ها

در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم درباره تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند:

$$\angle A = \angle A'$$

$$\angle B = \angle B', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

$$\angle C = \angle C'$$

نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$ باشد و اندازه اضلاع مثلث $A'B'C'$ نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ ، متشابه است.

سؤال: مثلث ABC با چه نسبت تشابهی، با مثلث $A'B'C'$ متشابه است؟

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

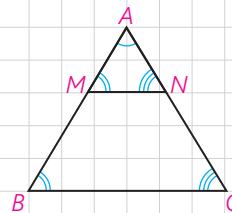
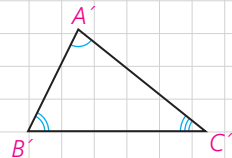
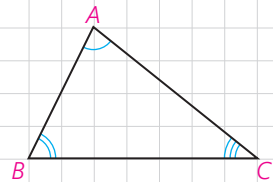
$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

۱- زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟

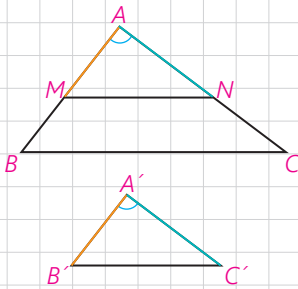
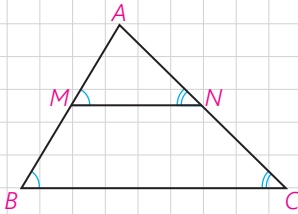
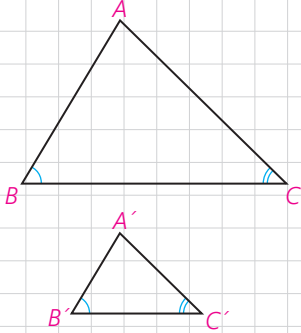
۲- با توجه به تعمیم قضیه تالس تناسب زیر را کامل کنید:

$$\frac{AM}{\dots} = \frac{\dots}{AC} = \frac{MN}{\dots}$$

۳- از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟



حال با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیه اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها) اثبات کنیم. راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر $A'B'$ و $A'C'$ جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.



قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

$$1- \angle B = \angle B' \text{ و } \angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ$$

$$\text{و } \angle C = \angle C' \text{ بنابراین } \angle A = \angle A'$$

$$2- \Delta AMN \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \angle A = \angle A' \text{ و } AN = A'C' \text{ و } AM = A'B' \text{ (ض‌ض)}$$

$$\Rightarrow \angle M = \angle B' \text{ و } \angle N = \angle C' \text{ و } MN = B'C'$$

$$3- \angle M = \angle B' \text{ و } \angle B = \angle B' \Rightarrow \angle M = \angle B \Rightarrow MN \parallel BC$$

$$4- \text{طبق قضیه اساسی تشابه، } \Delta AMN \sim \Delta ABC \text{ و در نتیجه: } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC ، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

۱- مثلث‌های AMN و $A'B'C'$ به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

۲- در فرض مسئله به جای $A'B'$ و $A'C'$ ، پاره‌خط‌های هم‌اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا $MN \parallel BC$ ؟

۳- با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجه قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

اثبات: روی AB و AC، پاره‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه A'B' و A'C' جدا کنید.

۱- در فرض به جای A'B' و A'C' مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $MN \parallel BC$ ؟

۲- از قضیه اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۳- تعمیم قضیه تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید:

$$MN = B'C'$$

۴- مثلث‌های A'B'C' و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟

حل: اگر تیر برق را با یک پاره خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.
حال در دو مثلث ABC و BDE داریم:

$$\angle B = \angle B, \angle C = \angle E = 90^\circ \Rightarrow$$

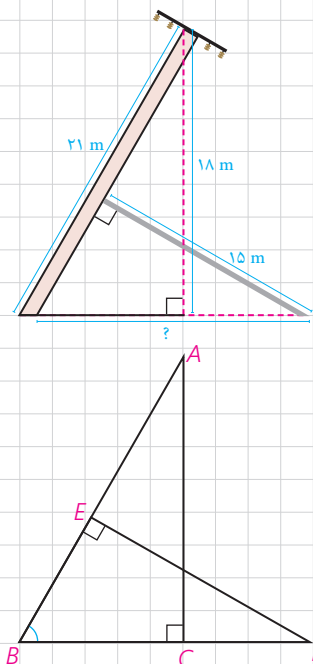
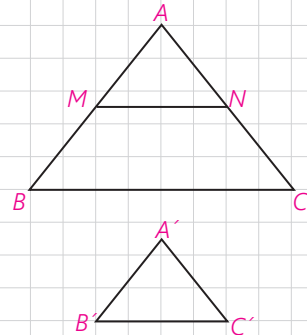
$$\triangle ABC \sim \triangle BDE \Rightarrow$$

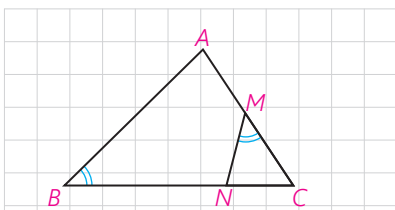
(در نوشتن نسبت تشابه، توجه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{18} = \frac{BD}{21} \Rightarrow BD = \frac{21 \times 15}{18} = 17.5 \text{ m}$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصله ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.





مثال : در مثلث ABC، از نقطه M وسط AC، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده ایم. اگر $NC=2$ و $NB=4$ ، طول AC را به دست آورید.

حل : با کمی دقت مشاهده می کنید که مثلث های MNC و ABC دو زاویه هم اندازه دارند و در نتیجه متشابه اند.

$$\angle M = \angle B, \angle C = \angle C \Rightarrow \triangle MNC \sim \triangle ABC$$

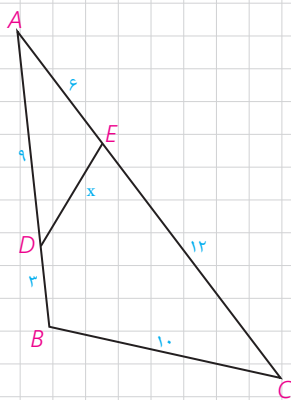
از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم :

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

و به جای MC، $\frac{AC}{2}$ را قرار می دهیم :

$$\frac{AC}{2BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 2NC \cdot BC = 2NC(NC + NB) \Rightarrow AC^2 =$$

$$2 \times 2(2 + 4) = 24 \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$



مثال : در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را به دست آورید.

حل : به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که :

حل : $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ و بنابراین $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ و با توجه به زاویه مشترک A مثلث های $\triangle ADE$ و $\triangle ABC$ متشابه اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به دست آورید.

سؤال : در شکل، روی AC، AD' را هم اندازه AD و روی AB، AE' را هم اندازه AE جدا کنید. چرا $D'E' \parallel BC$ ؟

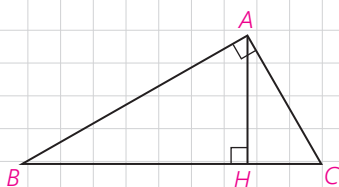
اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

۱ فعالیت

۱- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می کنیم. آیا می توانید دو زاویه هم اندازه را در دو مثلث ABC و ABH نام ببرید؟ $\hat{B} = \dots$ و $\hat{H} = \dots = 90^\circ$ به همین ترتیب دو زاویه هم اندازه از دو مثلث ABC و ACH را نام ببرید. بنابراین می توانیم بگوییم :

$$\triangle ABH \sim \triangle ABC, \triangle ACH \sim \triangle ABC$$

چرا مثلث های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه اند؟



نتیجه

در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲- نسبت تشابه دو مثلث ABC و ABH را بنویسید :

$$\frac{AH}{\dots} = \frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{AB} \Rightarrow AB^2 = \dots \times \dots$$

۳- نسبت تشابه دو مثلث ABC و ACH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطه هندسی BC و CH است.

۴- نسبت تشابه دو مثلث ABH و ACH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطه هندسی بین BH و CH است.

۵- از روابط ۲ و ۳ داریم :

(قضیه فیثاغورس)

$$AB^2 + AC^2 = BC \times \dots + BC \times \dots = BC(\dots + \dots) = BC \cdot BC = BC^2$$

نتیجه

در مثلث قائم الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

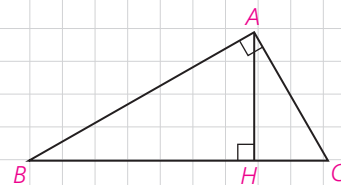
$$۱) AB^2 = BC \cdot BH$$

$$۲) AC^2 = BC \cdot CH$$

$$۳) AB^2 + AC^2 = BC^2$$

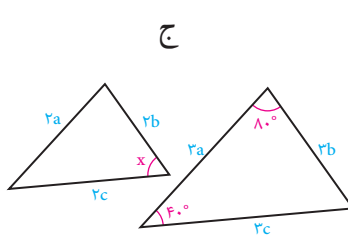
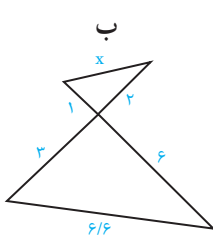
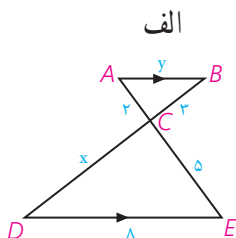
$$۴) AH^2 = BH \cdot CH$$

$$۵) AH \times BC = AB \times AC$$

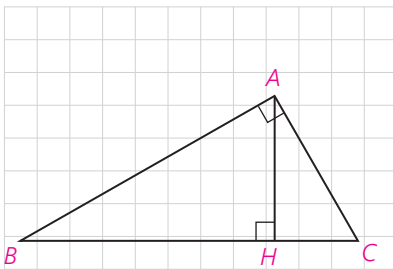


تمرین

۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x ، y را مشخص کنید :



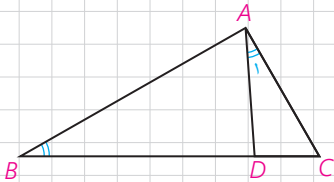
۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



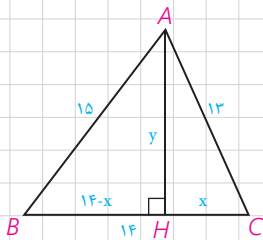
۱) $BH=9$, $CH=4$, $AH=?$, $AB=?$, $AC=?$

۲) $AB=8$, $AC=6$, $BH=?$, $CH=?$

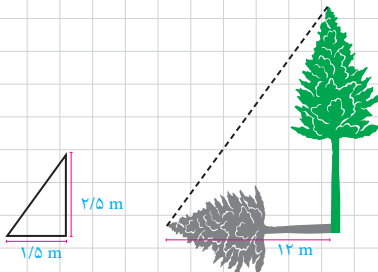
۳- در شکل روبه رو $\angle A_1 = \angle B$ و $AC=4$ و $BD=6$ ، طول BC را به دست آورید.



۴- در شکل مقابل، مثلی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH ، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

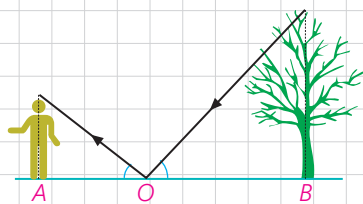


۵- در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.



الف) روش ترانه: ترانه یک چوب $2/5$ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایه چوب در آن زمان $1/5$ متر بود. هم‌زمان طول سایه درخت 12 متر بود. با توجه به شکل ارتفاع این درخت چند متر است؟

ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجه به آنچه از خواص آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازه قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به دست آورد. اگر قد شهرزاد 160 سانتی‌متر و فاصله پای او از آینه $2/5$ متر و فاصله آینه از پای درخت 20 متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۶- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC ، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.
الف) عکس این قضیه را بنویسید.

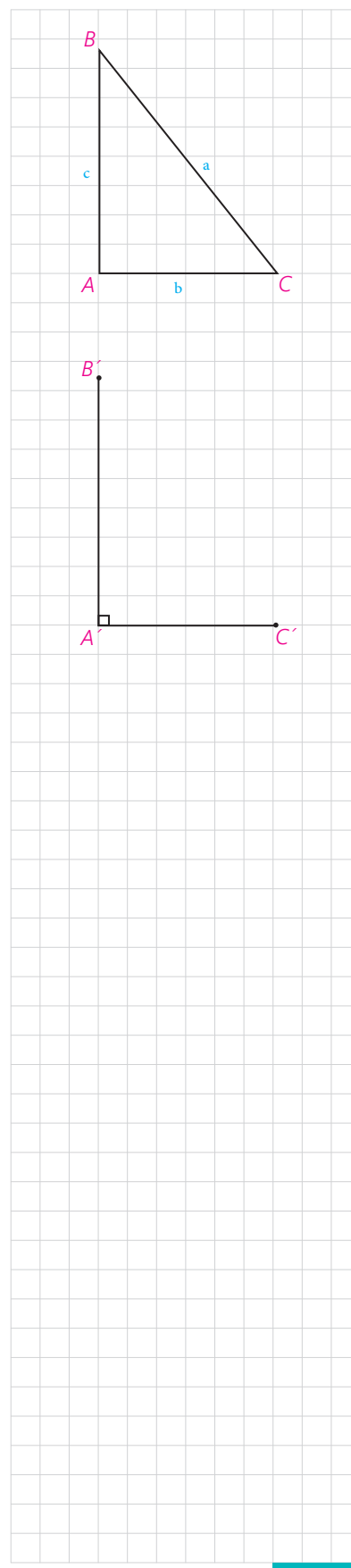
ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.
(۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه طول‌های اضلاع آن برقرار است.

(۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$

(۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

(۴) توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.



کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث ها

■ نسبت اجزای فرعی، محیط ها و مساحت های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه های هر دو جزء متناظر (ارتفاع ها، میانه ها، نیمسازها و محیط ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد (آنگاه $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$) :

(الف) نسبت اندازه های ارتفاع های متناظر آنها k است :

$$\frac{A'H'}{AH} = k$$

(ب) نسبت اندازه های میانه های متناظر آنها k است :

$$\frac{C'N'}{CN} = k$$

(ج) نسبت اندازه های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است :

$$\frac{B'D'}{BD} = k$$

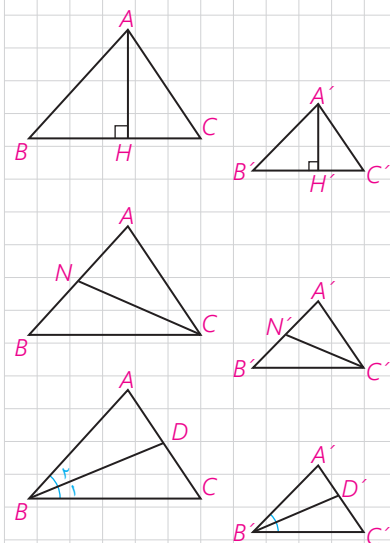
در مورد محیط های دو مثلث نیز داریم :

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k$$

و در مورد مساحت ها داریم :

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$

اثبات: اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع ها (میانه ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع ها (میانه ها، نیمسازها) است. (چرا؟)



الف) ارتفاعها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH} = k$

چرا $\angle B = \angle B'$ بنابراین: $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه گیری کنید.

ب) میانه ها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM} = k$

چرا $\angle B = \angle B'$ ؟

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\frac{1}{2} \dots}{\frac{1}{2} \dots} = \frac{\dots}{\dots} = k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'M'}{BM}$$

بنابراین $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

ج) نیمسازها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD} = k$

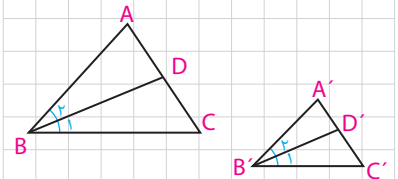
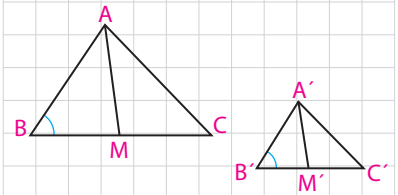
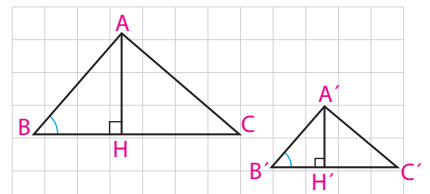
چرا $\angle A = \angle A'$ ، چرا $\angle B_p = \angle B'_p$ ؟
بنابراین $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

د) محیط ها

به سادگی و به کمک ویژگی تناسب ها می توان نوشت :

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k$$



هـ) مساحت‌ها

دیدیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} = k \quad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{A'H'}{AH} \times \frac{B'C'}{BC} = k.k = k^2$$

کاردکلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \dots, \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی $k=3$ بنابراین: $\frac{S}{S'} = k^2 = 9$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

کاردکلاس

۱- اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب 10° و 18° واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر 15 واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

۲- نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آنها 12 واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳- اندازه‌های اضلاع یک هفت‌ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت‌ضلعی چند برابر می‌شود؟

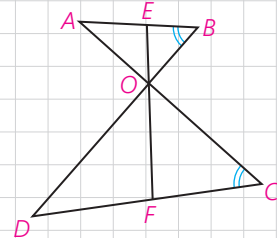
فعالیت

در شکل روبه‌رو $EF = 10 \text{ cm}$ و $\angle B = \angle C$ نیمساز دو زاویه متقابل به رأس O است و

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

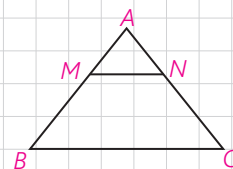
ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.



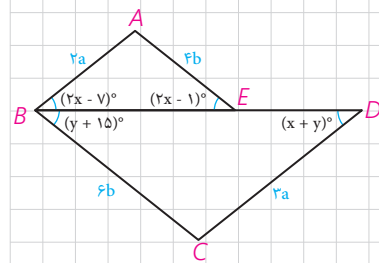
تمرین

۱- طول‌های اضلاع یک مثلث 10° و 12 و 15 سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، 10° سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

۲- در شکل روبه‌رو $BC \parallel MN$ است و مساحت ذوزنقه $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.



۳- در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



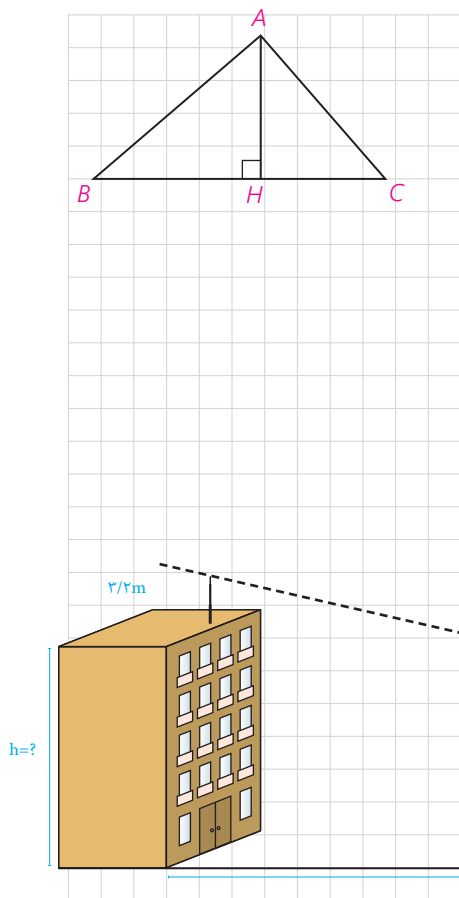
۴- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\triangle ABH \sim \triangle ABC \sim \triangle ACH$ است. با توجه به این موضوع،

الف) ثابت کنید:

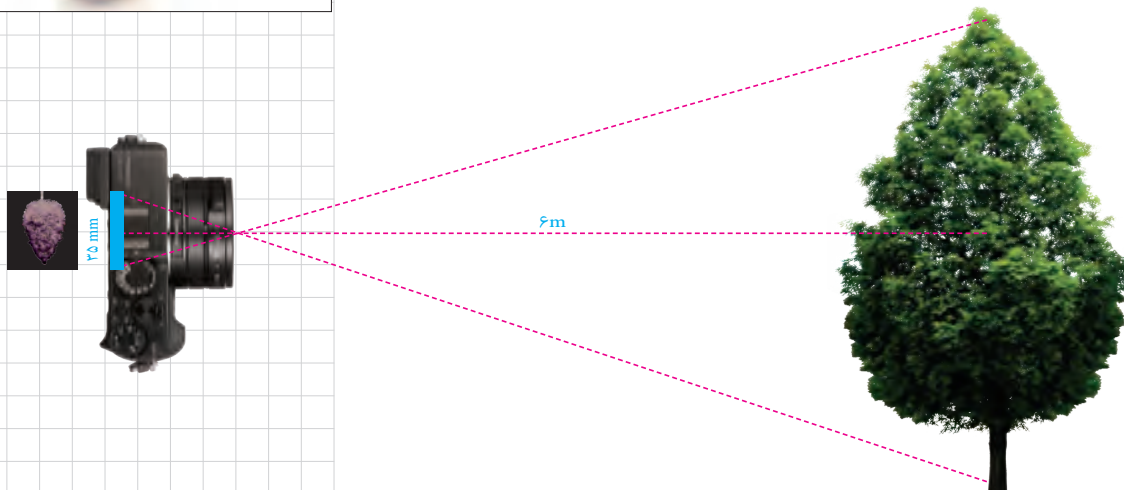
$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

۵- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع $3/2$ متر نصب شده است. در فاصله 60 متری ساختمان، یک تیر برق 6 متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله 20 متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصله چشم ناظر از زمین $1/6$ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه تالس کمک بگیرید.)

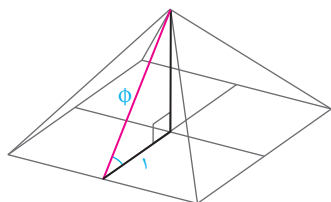
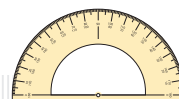


۶- در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقه فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی^۱ ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، 35mm و فاصله آن درون دوربین تا عدسی^۲، $4/2\text{cm}$ و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، 6m باشد، اندازه واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟



۱- واژه «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «نگاتیو» به کار رفته است.

۲- واژه «عدسی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «لنز» به کار رفته است.



اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سوم باشد؛ به عبارتی اعداد a ، b و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست‌گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.



اثبات ویژگی های تناسب

۱ طرفین - وسطین کردن؛ طرفین تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید :

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd \Rightarrow ad = bc$$

۲ ویژگی های (۲) و (۳) با طرفین - وسطین کردن، به سادگی نتیجه می شوند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow da = cb \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow bc = ad \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

۳ ویژگی های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می شوند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

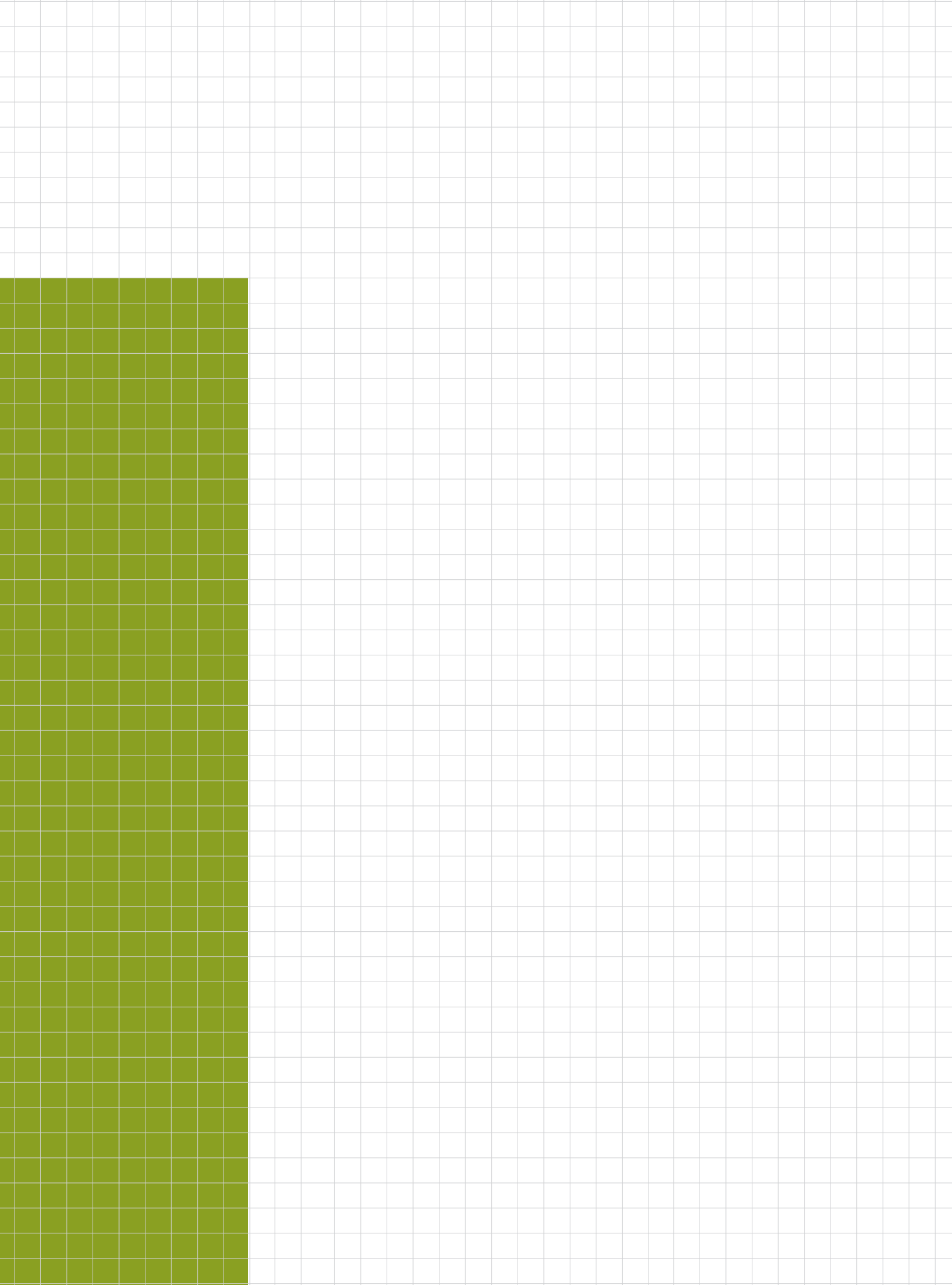
ویژگی های تفذیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶ :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.



چند ضلعی ها



پل طبیعت تهران

■ همه هنرمندان و معماران با هر سبک و در هر رشته به دنبال آن هستند که دیدگاه‌های خود را از زندگی و جهان اطراف در آنچه خلق می‌کنند و می‌سازند به نوعی به نمایش بگذارند. هندسه و به‌ویژه چندضلعی‌ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آنها می‌توان این آثار را پدید آورد.



چند ضلعی ها و ویژگی های از آنها

با پاره خط قبلاً آشنا شده اید. مطابق شکل زیر در پاره خط AB ، نقطه های A و B را دو سر پاره خط یا نقاط انتهایی پاره خط می نامند.



به شکل های روبه رو توجه کنید. هر شکل از تعدادی پاره خط تشکیل شده است؛ اما نقاط مشترک پاره خط ها در همه شکل ها با هم یکسان نیستند.

در شکل (۳) دو پاره خط AE و FC یکدیگر را در نقطه ای به جز نقاط انتهایی شان قطع کرده اند. در شکل (۴) پاره خط DE فقط در یک انتها بعضی پاره خط ها را قطع کرده و در انتهای دیگر هیچ پاره خطی را قطع نکرده است. اما در شکل های (۱) و (۲) هر پاره خط فقط دو پاره خط دیگر را آن هم در نقاط انتهایی قطع کرده است. چنین شکل های بسته ای را که از اجتماع پاره خط های متوالی هم تشکیل شده است، چند ضلعی می نامند. در تمام این فصل شکل ها در صفحه در نظر گرفته می شوند.

تعریف: n ضلعی شکلی است شامل n ($n \geq 3$) پاره خط متوالی که:

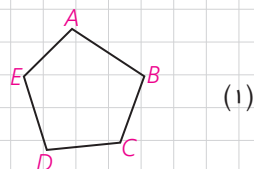
(۱) هر پاره خط، دقیقاً دو پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

(۲) هر دو پاره خط که در یک انتها مشترک اند، روی یک خط نباشند.

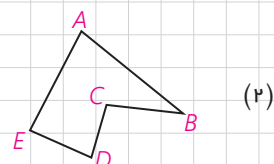
هر یک از این پاره خط ها یک ضلع چند ضلعی است.

هر دو ضلع چند ضلعی را که در یک انتها مشترک اند، دو ضلع مجاور و نقطه مشترک آن دو را رأس می نامند. هر دو زاویه چند ضلعی را که هر دو در یک ضلع چند ضلعی مشترک اند، دو زاویه مجاور به آن ضلع در چند ضلعی می نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل های (۱) و (۲)

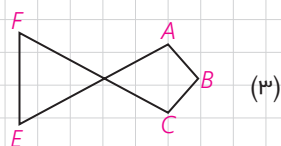
کدام یک از شکل های مقابل چند ضلعی است و تعداد ضلع ها و رأس های آن چند تا است؟ برخی ضلع های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.



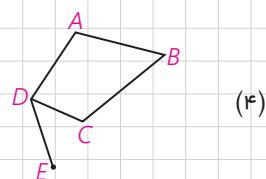
(۱)



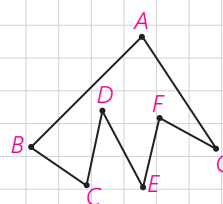
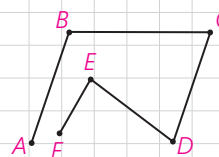
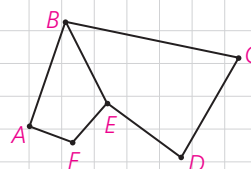
(۲)



(۳)



(۴)



■ قطر در چندضلعی‌ها

در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می‌نامند.

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟

n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ را در نظر می‌گیریم. از رأس A_1 ، _____ قطر می‌توان رسم کرد. با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرهای در n ضلعی $(n-3)$ است؟

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟

آیا جواب به‌دست آمده درست است؟

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبهٔ قطرهای می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟

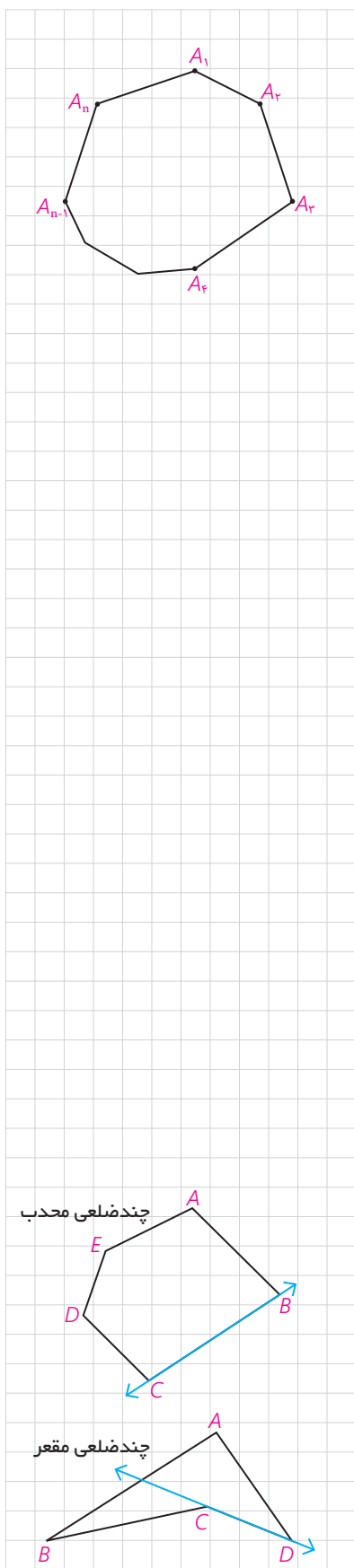
در هر n ضلعی تعداد قطرهای $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

کاردکلاس

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبهٔ تعداد قطرهای n ضلعی به‌کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر _____ پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با _____ پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرهای و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

تعریف: n ضلعی را محدب گوییم؛ هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیهٔ نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

هر «چندضلعی» را که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.



■ چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌هایی از آنها

در چهارضلعی $ABCD$ در شکل، دو ضلع AB و CD ، همچنین دو ضلع AD و BC را ضلع‌های مقابل می‌نامند. در چهارضلعی هر دو ضلع غیرمجاور را دو ضلع مقابل می‌نامند.

ابتدا تعریف چهارضلعی‌های مهم را بیان می‌کنیم.

تعریف‌ها:

- ۱- متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.
- ۲- مستطیل چهارضلعی‌ای است که، همهٔ زاویه‌های آن قائمه باشند.
- ۳- لوزی چهارضلعی‌ای است که، هر چهار ضلع آن هم‌اندازه باشند.
- ۴- مربع چهارضلعی‌ای است که هر چهار ضلع آن هم‌اندازه و حداقل یک زاویهٔ آن قائمه باشد.

کاردرکلاس

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید :

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

در لوزی $ABCD$ قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت

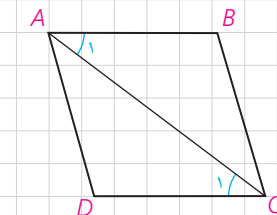
_____ هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویهٔ _____ و _____ هم‌اندازه‌اند.

در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و

AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.



■ ویژگی‌هایی از متوازی‌الاضلاع

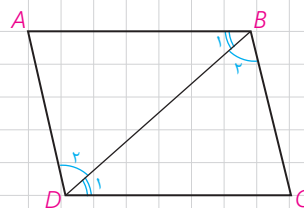
۱- فعالیت

متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در نظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی

بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دو مثلث ABD و CDB به حالت _____ هم‌نهشت‌اند.

در نتیجه، $AD = \underline{\hspace{2cm}}$ و $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.



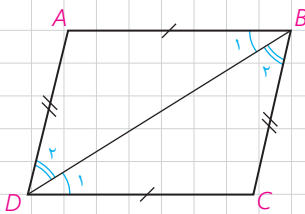
بنابراین قضیه زیر ثابت شده است؛

قضیه ۱: در هر متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه اند.

کاردرکلاس

در فعالیت (۱) مشاهده کردیم که وقتی در هر متوازی الاضلاع ABCD یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می کنیم. دو مثلث هم نهشت ABD و CDB پدید می آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم کنیم و $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$ هم نهشت باشند، آیا چهارضلعی ABCD همواره متوازی الاضلاع است؟ اگر چنین است، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است، مثال نقض بیاورید.

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع های مقابل دوبه دو هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می کنیم. به حالت _____، $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. از هم نهشتی این دو مثلث نتیجه می گیریم، اندازه $\angle B_1$ برابر اندازه _____ است.

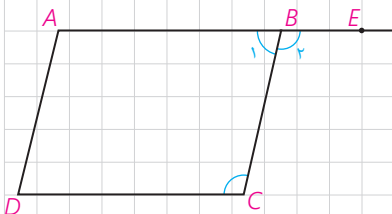
بنابراین ضلع AB موازی ضلع _____ است. از چه قضیه ای آن را نتیجه گرفته اید؟

موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع های AD و BC را چگونه نتیجه می گیرید؟ بنابراین چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

۲ فعالیت

چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. با توجه به شکل، $\angle B_1 = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle C$ و $\angle B_1$ _____ می باشند. بنابراین قضیه زیر ثابت شده است؛

قضیه ۲: در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.



عکس قضیه ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویه مجاور آن مکمل باشند، متوازی الاضلاع است.

در چهارضلعی $ABCD$ ، دو زاویه $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع $_____$ است.
به همین ترتیب دو زاویه $\angle A$ و $\angle B$ نیز مکمل اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع $_____$ است؛ بنابراین چهارضلعی $ABCD$ $_____$ است.

قضیه ۳: در هر متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مقابل هم اندازه اند.

با توجه به قضیه قبل آن را ثابت کنید.
می توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

فرض کنیم در چهارضلعی $ABCD$ هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle A$ و $\angle C$ هم اندازه اند. می دانیم مجموع اندازه های زاویه های درونی هر چهارضلعی محدب 360° است. چگونه به کمک آن ثابت می کنید هر دو زاویه مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل اند؟
بنابراین به کمک عکس قضیه ۲ ثابت کرده اید چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

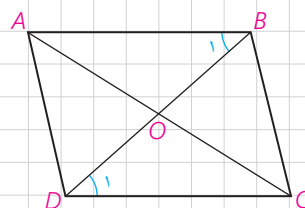
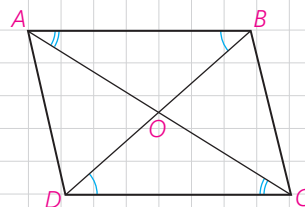
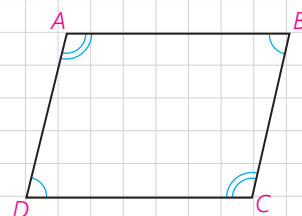
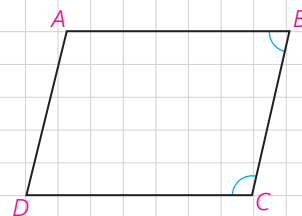
۳ فعالیت

در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، دو قطر AC و BD را رسم می کنیم و نقطه تلاقی آن دو را O می نامیم. $\triangle AOB \cong \triangle COD$. چرا؟
بنابراین، $OB = \underline{\hspace{2cm}}$ و $OA = \underline{\hspace{2cm}}$. در نتیجه؛

قضیه ۴: در هر متوازی الاضلاع قطرها $_____$.

۴ فعالیت

فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می دهید این چهارضلعی متوازی الاضلاع است؟



نقطه تقاطع دو قطر را O می‌نامیم. $\triangle AOB \cong \triangle OCD$. چرا؟

اندازه $\angle B_1$ برابر اندازه است. در نتیجه، ضلع AB موازی ضلع است. دو مثلث دیگر را در نظر بگیرید و به طور مشابه نشان دهید دو ضلع دیگر نیز موازی‌اند.
بنابراین؛

عکس قضیه ۴: هر چهار ضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

۵ فعالیت

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

اندازه $\angle A_1$ با اندازه برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم‌نهستی، $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

در نتیجه اندازه $\angle A_2$ برابر اندازه زاویه است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع است. بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. یعنی؛

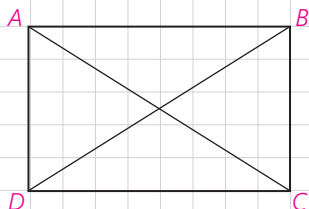
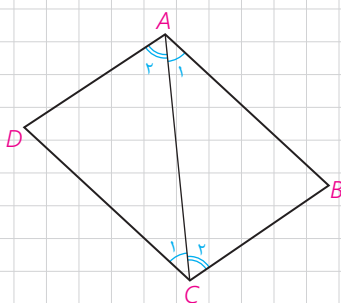
هر چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟

در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهستی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت $AC=BD$ ؟ این هم‌نهستی را نشان دهید.

بنابراین در هر مستطیل قطرهای



اگر دو قطر یک چهارضلعی هم اندازه باشند، آیا می توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟

اگر این چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

۶ فعالیت

ویژگی مهمی در مثلث قائم الزاویه

مثلث قائم الزاویه ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانه وارد بر وتر است در نظر می گیریم.

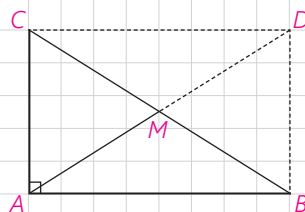
روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می گیریم که $AM = MD$.

چرا چهارضلعی $ABDC$ متوازی الاضلاع است؟

چرا این چهارضلعی مستطیل است؟

در مورد قطرها چه نتیجه ای می گیرید؟

اندازه AM چه رابطه ای با اندازه BC دارد؟ آن را بیان کنید.



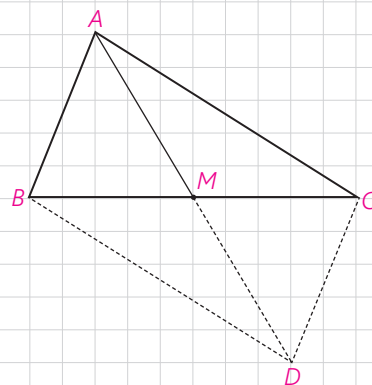
در هر مثلث قائم الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر ————— اندازه وتر است.

می توانیم عکس این ویژگی را نیز ثابت کنیم.

اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع، نصف اندازه آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

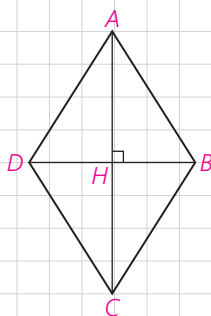
در مثلث ABC ، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{2}$. روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می گیریم که $MD = AM$.

آیا می توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟ چگونه نتیجه می گیرید $\angle A$ قائمه است؟



ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟



قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرهای آن نصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ چه نوع مثلثی است؟
نقطه تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD، AH چه پاره‌خطی است؟
چرا پاره‌خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟
بنابراین؛

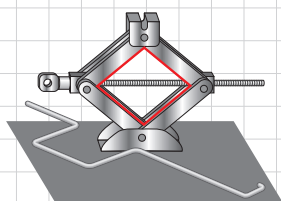
یکدیگرند و قطرهای روی

در هر لوزی قطرهای

زاویه‌ها می‌باشند.

کاردرکلاس

- ۱- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.
 - ۲- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویه آن باشد، لوزی است.
- اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.



در شکل یک جک خودرو را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟
اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز با هم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته‌شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

دوزنقه

دوزنقه چهارضلعی‌ای است که با چهارضلعی‌هایی که قبلاً بررسی کردیم، کمی متفاوت است.

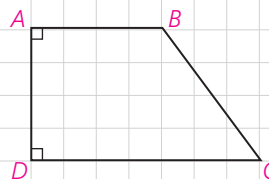
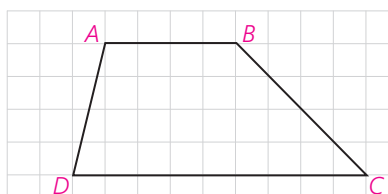
تعریف: دوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.

هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، قاعده و هر یک از دو ضلع غیرموازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ _____ هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ _____ هستند.

اگر در یک دوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را دوزنقه متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعده دیگر نیز عمود است؛ چرا؟
در این صورت دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

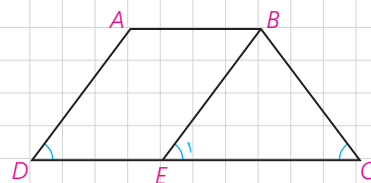


۷ فعالیت

دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ را که در آن $AD = BC$ است، در نظر می‌گیریم. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $ABED$ _____ است.
چرا دو زاویه $\angle D$ و $\angle E$ هم اندازه‌اند؟

$BC = BE$ چرا؟

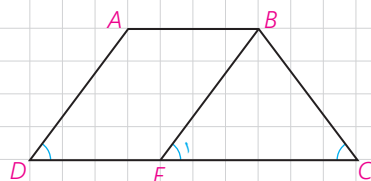
بنابراین اندازه $\angle E$ برابر اندازه _____ است.
اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین:



در هر دوزنقه متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم اندازه‌اند.

آیا عکس این ویژگی نیز درست است؟

فرض کنید در دوزنقه $ABCD$ ، دو زاویه $\angle C$ و $\angle D$ هم اندازه‌اند. از B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در E قطع کند. از اینکه $\angle D$ و $\angle E$ نیز هم اندازه‌اند، پس دو زاویه _____ هم اندازه‌اند و در نتیجه $BC = BE$.
چون $ABED$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AD = BE$. در نتیجه، $AD = BC$ است؛ بنابراین:



اگر در یک دوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده هم اندازه باشند، دوزنقه متساوی‌الساقین است.

به کمک ویژگی دوزنقه متساوی الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.

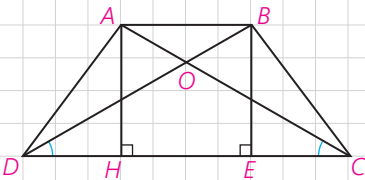
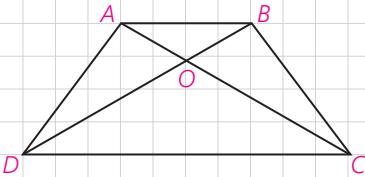
در هر دوزنقه متساوی الساقین، قطرهای مساوی دارند و بر عکس.

۸ فعالیت

در دوزنقه ABCD :

از هم نهشتی کدام دو مثلث نتیجه می‌گیرید $AD = BC$ است؟ اما اثبات عکس آن نیاز به تفکر بیشتر دارد. فرض کنیم $DB = AC$. آیا می‌توانید در شکل مقابل دو مثلث هم نهشت پیدا کنید که از آن $AD = BC$ یا مساوی بودن اندازه‌های دو زاویه مجاور به قاعده نتیجه شود؟

با کمی دقت مشاهده می‌کنید چنین دو مثلثی ظاهراً وجود ندارند؛ اما یک ویژگی در مسئله هست که از آن هنوز استفاده نکرده‌ایم. دو قاعده دوزنقه موازی‌اند یا رأس‌های A و B از قاعده CD به یک فاصله‌اند. با رسم دو ارتفاع AH و BE و هم نهشتی دو مثلث $\triangle BED$ و $\triangle AHC$ تساوی اندازه‌های دو زاویه را نتیجه بگیرید. به کمک آنها هم نهشتی دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle BCD$ نتیجه می‌شود و به حل مسئله منجر خواهد شد.



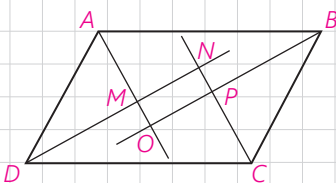
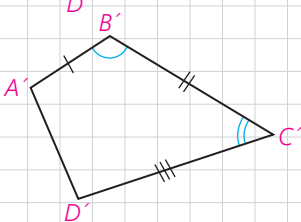
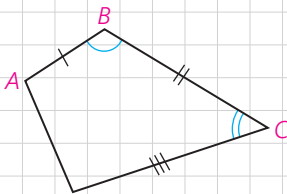
تمرین

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرهای ضلع‌ها برابر است؟

۲- در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$ ، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

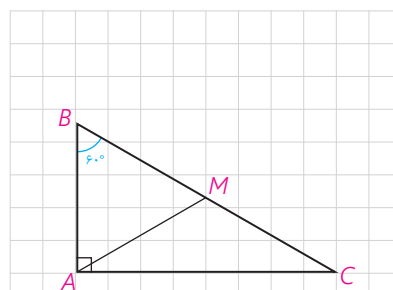
۳- از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.



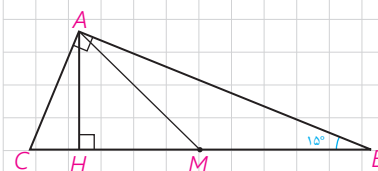
۴- مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه $\angle C$ برابر 30° است، در نظر می‌گیریم. میانه وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMB و AMC چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{1}{2}BC$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه یک زاویه 30° باشد، اندازه ضلع مقابل آن نصف اندازه وتر است.

سپس با استفاده از قضیه فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$.
یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه 60° باشد، اندازه ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اندازه وتر است.

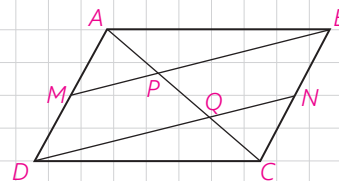
اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازه یک زاویه آن 45° باشد و نشان دهید که اندازه هر ضلع زاویه قائمه در آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ اندازه وتر است.



۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اندازه زاویه B برابر 15° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است.



۶- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



۷- ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

مساحت و کاربردهای آن

یادآوری

در سال‌های قبل با مساحت چهارضلعی‌های مهم آشنا شده‌اید.

۱- اگر اندازه یک ضلع مربع a باشد، $S = a^2$ مساحت آن است.

۲- اگر اندازه یک ضلع مثلث a و اندازه ارتفاع نظیر آن ضلع h_a باشد، آنگاه

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

بنابراین در هر مثلث ABC اگر اندازه ضلع‌های BC ، AC و AB را به ترتیب با

a ، b و c و اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر آنها را به ترتیب با h_a ، h_b و h_c نشان دهیم آن‌گاه،

$$2S = a h_a = b h_b = c h_c$$

۳- اگر اندازه یک ضلع متوازی‌الاضلاع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد، $S = ah$.

۴- اگر اندازه‌های دو قطر لوزی m و n باشند، $S = \frac{1}{2} mn$.

۵- اگر اندازه‌های دو قاعده یک ذوزنقه a و b و اندازه ارتفاع آن h باشد.

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

کاردرکلاس

فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH

را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

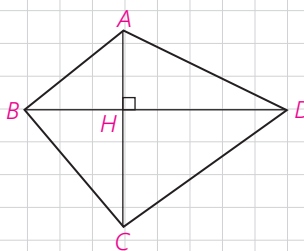
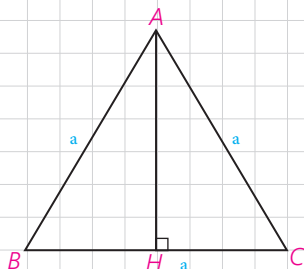
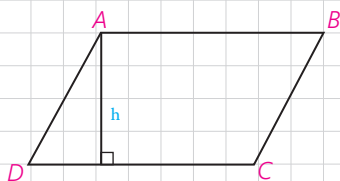
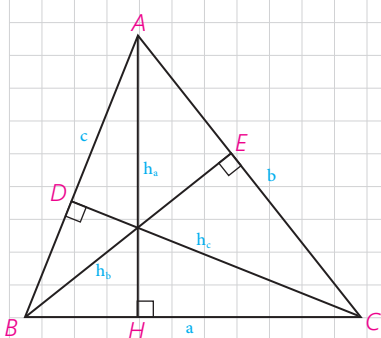
به کمک قضیه فیثاغورس نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

فعالیت

در چهارضلعی $ABCD$ دو قطر AC و DB برهم عموداند.

$$S_{ADB} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$S_{DBC} = \underline{\hspace{2cm}}$$



با جمع این دو مساحت داریم،

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD(\dots + \dots) = \frac{1}{2}BD\dots$$

بنابراین؛

در هر چهارضلعی که دو قطر آن برهم عمود باشند، مساحت برابر است با،

کاربردهایی از مساحت

قبلاً با کاربرد مساحت در اثبات قضیه تالس آشنا شدید. بعضی رابطه‌ها و ویژگی‌هایی را که با آن آشنا شده‌اید یادآوری می‌کنیم.

ویژگی ۱. در دو مثلث اگر اندازه قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

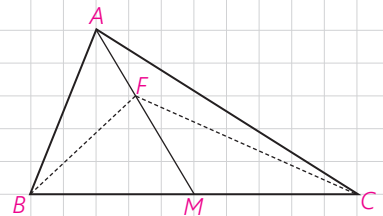
$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

ویژگی ۲. در دو مثلث که اندازه دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

کاردرکلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانه AM به جز نقطه M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟



فعالیت

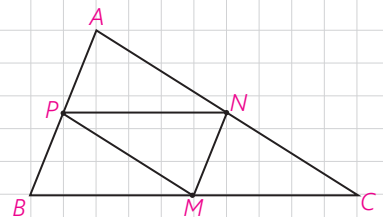
M و N وسط‌های سه ضلع مثلث ABC مطابق شکل اند.

پاره خط PN موازی ضلع _____ است و پاره خط PM موازی ضلع _____ است؛ چرا؟

بنابراین چهارضلعی PNCM _____ است، در نتیجه، $\triangle MNP \cong \triangle MNC$ ؛ چرا؟

به همین ترتیب برای بقیه مثلث‌ها نیز می‌توان نشان داد که دو به دو هم نهشت‌اند.

$$\triangle APN \cong \triangle MNP \cong \triangle BPM$$



اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.

فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانه مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانه AM و BN از $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطه G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانه BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، $AF = FN$. چرا؟ در نتیجه، $AM = 2GM$. چرا؟

بنابراین، $GM = \frac{1}{3}AM$ و $AG = \frac{2}{3}AM$. بین A و M است؛ در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم خط AM است که $AG = \frac{2}{3}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{2}{3}BN$. پس برای هر دو میانه دلخواه نقطه G با این ویژگی به دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G هم‌رس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون $AB = 2MN$ پس $AG = 2GM$ و $BG = 2GN$. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

سه میانه هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌رس‌اند؛ به طوری که فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است.

با رسم سه میانه مثلث نشان دهید، سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$. چرا؟ به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانه AM را در نظر بگیرید، $2z + x = \text{_____}$ در نتیجه $y = \text{_____}$.

میانه BN را در نظر بگیرید $2z + y = \text{_____}$ در نتیجه، $z = \text{_____}$ پس، _____ .

ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به طوری که دو خط

AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$.

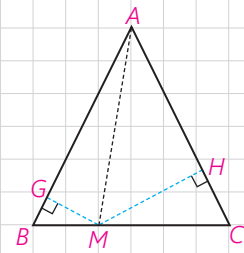
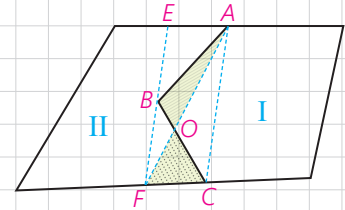
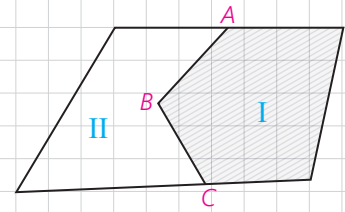
چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟

این ویژگی که در هر دوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

یک مسئله

در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟
فکر اصلی این عمل براساس مسئله قبلی است.

از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.



فعالیت

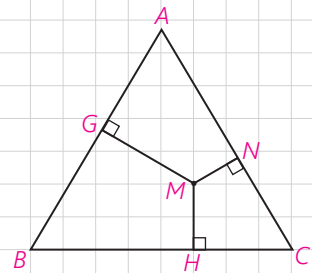
در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است؛ نقطه دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C در نظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMB} و S_{AMC} را بنویسید.
مساحت مثلث ABC را نیز وقتی پاره خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از _____ برابر _____ است.
به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعده BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازه ارتفاع وارد بر ساق است.

فعالیت

نقطه دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازه a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC، MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت $\triangle ABC$ چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$MH + MN + MG = \underline{\hspace{2cm}}$$

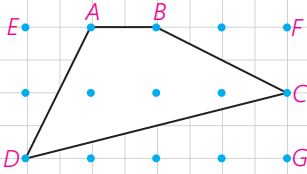


مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر _____ است.

اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله‌های نقطه M درون مثلث از سه ضلع، برابر $۲، ۴$ و ۶ باشند. اندازه ضلع مثلث را محاسبه کنید.

■ نقاط شبکه‌ای و مساحت

مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به‌طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند $ABCD$ را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.



نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی $ABCD$ یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطه مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به‌کاربردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر ۴ واحد سطح است. می‌توان نقاط شبکه‌ای را در دستگاه مختصات عمود بر هم $x'x$ و $y'y$ نیز به صورت زوج مرتب‌های (x, y) که x و y هر دو اعداد صحیح‌اند، نشان داد. x و y مختص‌های هر نقطه‌اند.

در چندضلعی‌های شبکه‌ای، تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان می‌دهند. اکنون می‌خواهیم به‌طور شهودی رابطه‌ای بین مساحت چندضلعی شبکه‌ای و نقاط مرزی و درونی شبکه‌ای نظیر آن را پیدا کنیم.

فعالیت

۱- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

۲- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه درونی می‌تواند داشته باشد؟

۳- در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است، یعنی $i = ۰$ و تعداد نقاط مرزی، $b = ۳، ۴، ۵، \dots$

جدول زیر را با محاسبه مساحت چندضلعی های شبکه ای کامل کنید.

$i = 0$, $b = 3, 4, 5$, _____

تعداد نقاط مرزی b	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$			

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه ای وجود دارد؟

$$S = \frac{b}{2} - \dots + \dots$$

۴- اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه ای $b = 3$ باشند. با توجه به شکل ها جدول زیر را کامل کنید.
(نتیجه گیری $S = \frac{b}{2} - 1 + 0$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده اید در نظر داشته باشید.)

تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{2} - 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$				

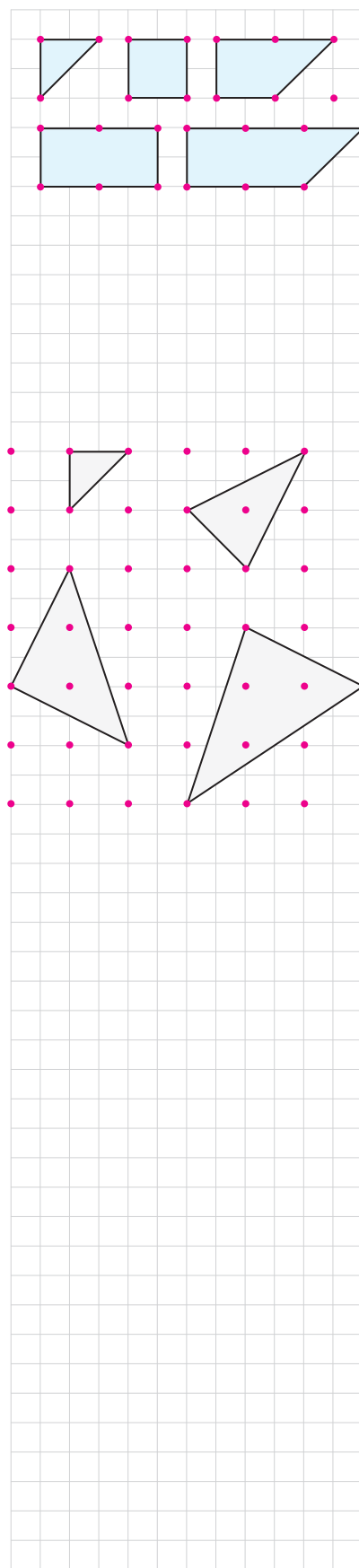
با تکمیل جدول بالا و مقایسه اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب هایی ظاهر می شوند.

$$S = \frac{b}{2} - \dots + \dots$$

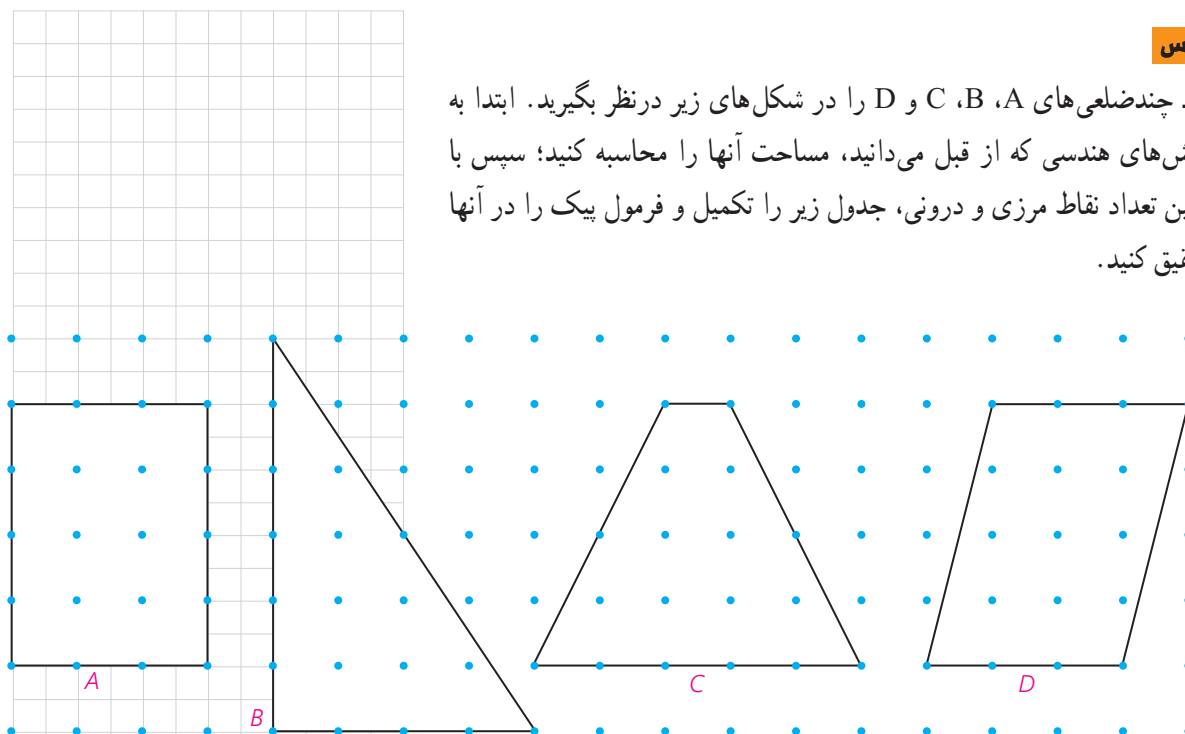
توجه داشته باشید که این فرمول را به طور شهودی پیدا کرده ایم. اثبات دقیق این فرمول در حالت کلی نیاز به مقدمات بیشتری دارد.

این فرمول به فرمول پیک معروف است که جرج الکساندر پیک (۱۹۴۳-۱۸۵۹) آن را کشف کرد و از سال ۱۹۷۰ به طور گسترده ای در کتاب های هندسه مقدماتی به کار برده شده است.

به کمک این فرمول می توانیم مساحت شکل های نامنظم هندسی را نیز به طور تقریبی پیدا کنیم.

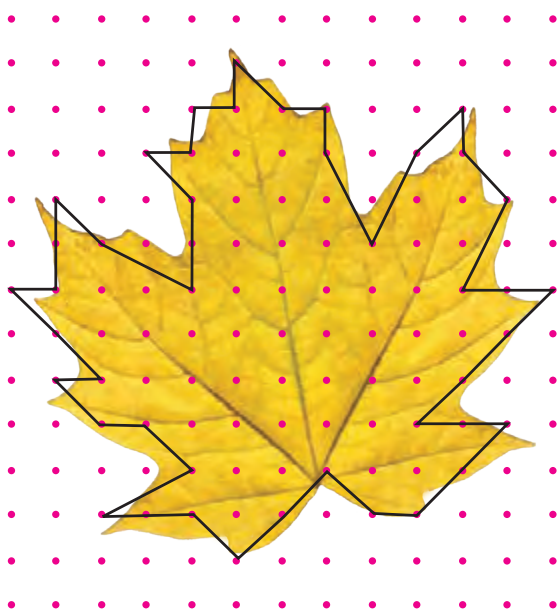


۱- چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر در نظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b				
تعداد نقاط درونی i				
مساحت				

اگر فاصله نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحه شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به‌طور تقریبی محاسبه کنید. واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.



۱- در یک لوزی اندازه هر ضلع $2\sqrt{3}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

۲- در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمود منصف قطر دیگر است.

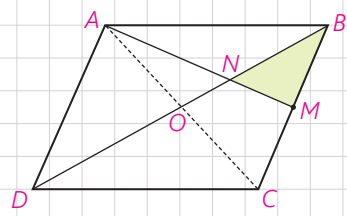
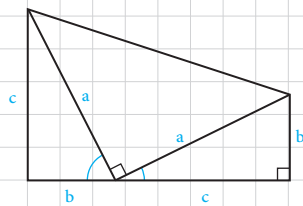
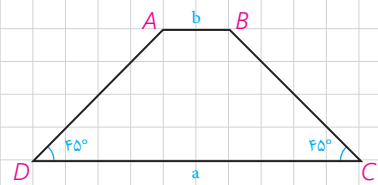
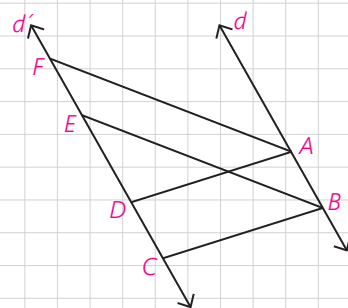
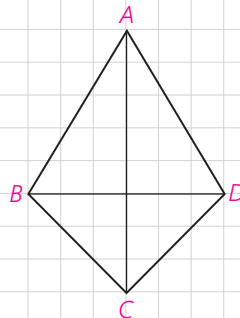
۳- در شکل دو خط d و d' موازی اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S چقدر است؟

۴- در دوزنقه شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

۵- مساحت دوزنقه مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟

۶- در متوازی الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

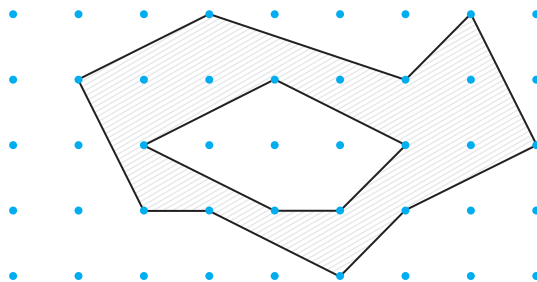
$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$





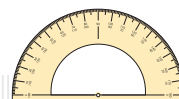
۷- در مثلث ABC ، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{MQPB} و S_{AQN} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۸- با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (راهنمایی: مساحت چند ضلعی داخلی را از مساحت چند ضلعی بیرونی کم کنید.)



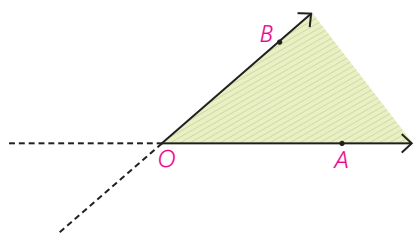
۹- یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

۱۰- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

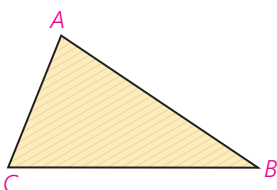


مساحت یکی از مفاهیم اساسی هندسه است.

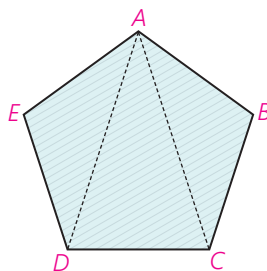
وقتی با یک زاویه هندسی $\angle AOB$ روبه‌رو هستیم که اجتماع دو نیم‌خط OA و OB است، قسمت سایه زده مطابق شکل را درون زاویه $\angle AOB$ می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر اشتراک طرفی از خط OA را که شامل B است با طرفی از خط OB که شامل A است، درون زاویه $\angle AOB$ می‌نامند.



به همین ترتیب اشتراک درون زاویه‌های مثلث را درون مثلث می‌نامند. درون مثلث و روی مثلث را ناحیه مثلثی می‌نامند.



سرانجام ناحیه چندضلعی شکلی است که بتوان آن را به‌صورت اجتماع تعداد متناهی ناحیه‌های مثلثی تبدیل کرد به‌طوری که اگر دو ناحیه مثلثی اشتراک داشته باشند، این اشتراک روی ضلعی از هر دو یا راسی از هر دو باشد. به هر ناحیه چندضلعی عددی حقیقی و مثبت نظیر می‌کنیم که مساحت آن نامیده می‌شود.



فرض کنیم A هر ناحیه چندضلعی باشد. عددی حقیقی و مثبت به A نظیر می‌کنیم که آن را مساحت A می‌نامیم و با $S(A)$ نشان می‌دهیم که شرایط زیر در آن برقرار است:

۱ $S(A) > 0$

۲ اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت‌های آنها برابرند.

۳ اگر اشتراک دو ناحیه چندضلعی فقط روی ضلع‌ها یا رأس‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشد، مساحت اجتماع آنها برابر مجموع مساحت‌های آنهاست.

۴ مساحت مستطیل با ضلع‌های به اندازه‌های a و b برابر $S = ab$ است.

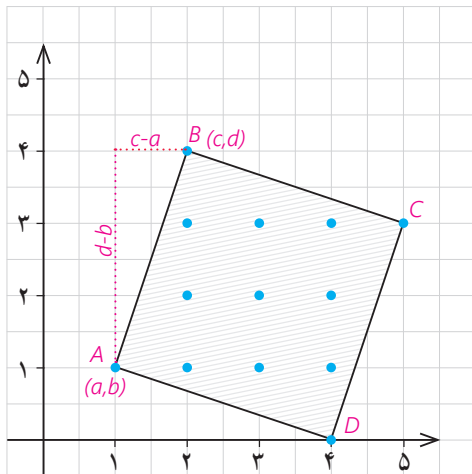
برای سادگی به جای مساحت ناحیه چندضلعی، همان مساحت چندضلعی را به کار می‌بریم.

ویژگی‌های چهارضلعی‌های مهم در یک نگاه
جدول زیر را تکمیل کنید.

ویژگی \ چهارضلعی	متوازی‌الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع	دوزنقه	دوزنقه متساوی‌الساقین
						
مساوی بودن اندازه ضلع‌ها	هر دو ضلع مقابل					
موازی بودن ضلع‌ها	هر دو ضلع مقابل					
عمود بودن ضلع‌ها	به شرطی که مستطیل یا مربع باشد					کلاً وجود ندارد
زاویه‌های با اندازه‌های برابر						
زاویه‌های مکمل						
وضعیت قطر‌ها نسبت به هم						اندازه‌های مساوی دارند

■ درباره چندضلعی‌های شبکه‌ای بیشتر بدانیم

نقطه شبکه‌ای در دستگاه محورها، نقطه‌ای به مختصات (x, y) است که x و y اعداد صحیح‌اند. بنابر فرمول پیک مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای $S = \frac{b}{4} + i - 1$ همواره عددی گویا و مثبت است. بنابراین اگر b زوج باشد، S عددی صحیح است.



در هر مربع شبکه‌ای مساحت صحیح و مثبت است، زیرا اگر دو رأس مجاور مربع باشند، (a, b) و (c, d) که a, b, c, d صحیح‌اند. حال اگر مثلث متساوی‌الاضلاع شبکه‌ای داشته باشیم، بنابر فرمول پیک مساحت آن عددی گویا و مثبت است. از طرف دیگر اگر m اندازه هر ضلع آن باشد، $S = \frac{m^2 \sqrt{3}}{4}$ مساحت آن است.

اما، $m^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$ که صحیح و مثبت است در نتیجه $\frac{m^2 \sqrt{3}}{4}$ عددی گنگ یا اصم است که متناقض با آن چیزی است که از فرمول پیک به دست می‌آید؛ بنابراین

هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود ندارد که مختصات تمام رأس‌های آن اعداد صحیح باشند.

در شکل زیر نقشه ایران را مشاهده می‌کنید. می‌توانید با انتخاب واحدهای مناسب مساحت آن را به طور تقریبی پیدا کنید.



تجسم فضایی

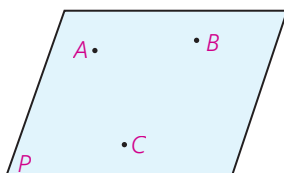


■ تصویر سمت راست، آرامگاه ابوعلی سینا، واقع در همدان است. در مورد تصویر سمت چپ چه حدسی می‌زنید؟

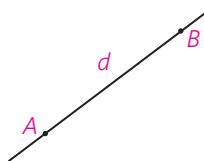


خط، نقطه و صفحه

مفاهیم نقطه، خط و صفحه از اساسی‌ترین مفاهیم در هندسه است که معمولاً برای نمایش آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم:



صفحه ABC ، BAC ، ... یا صفحه P



خط AB یا BA ، یا خط d

خط راست از هر دو طرف نامحدود است. صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامتی ندارد.

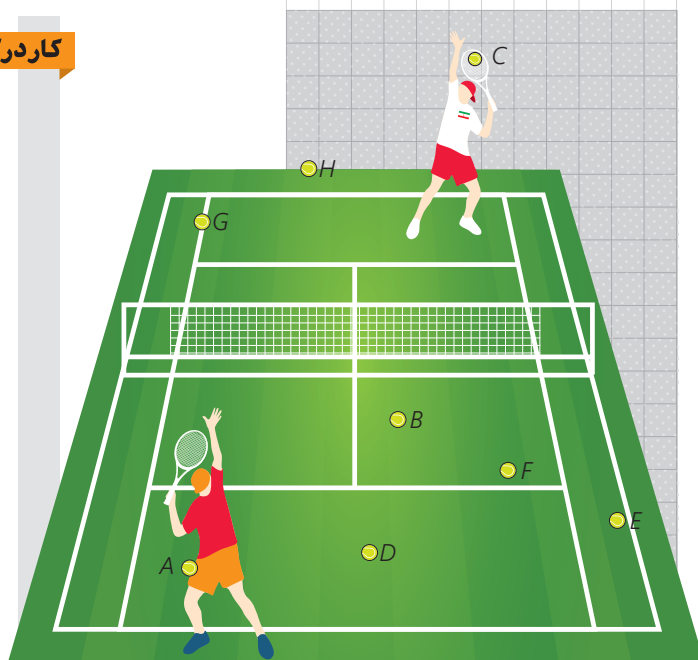
کاردکلاس

به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکن‌ها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیه توپ‌های تنیس روی زمین افتاده‌اند.

الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند.

ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه‌اند ولی هم راستا نیستند.

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند.



حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و فضا

به تصاویر روبه‌رو نگاه کنید.

دو خط در یک صفحه نسبت به هم موازی یا متقاطع‌اند. وقتی دو خط برهم منطبق می‌شوند، آنها را یک خط در نظر می‌گیریم.

فعالیت

مکعب روبه‌رو را در نظر بگیرید.

در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو در نظر گرفت؟

: HD و HG

: HG و EF

: FD و EC

: GC و EA

: AB و GD

: BC و HD

تعریف: دو خط را که نقطه اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید:

۱) اگر صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد، آن دو خط را موازی می‌نامیم.

۲) اگر هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد، آن دو خط را متناظر می‌نامیم.

دو خط در فضا نسبت به هم _____ یا _____ هستند.

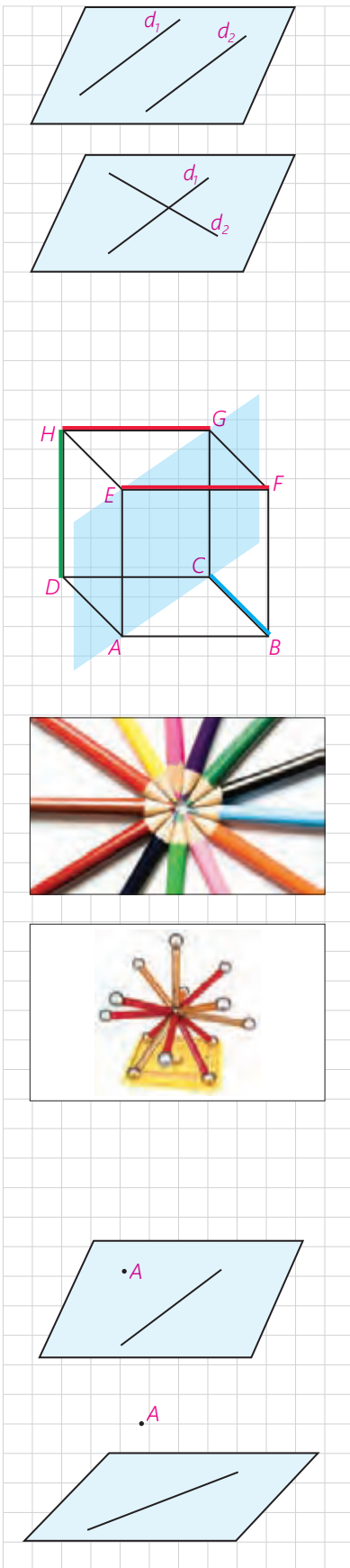
کاردرکلاس

۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید.

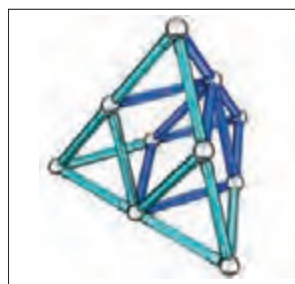
(می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

— در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟
در فضا چگونه؟

— در صفحه از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، چند خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد؟
در فضا چگونه؟



۲- در شکل‌های زیر در صورت وجود، به خطوط موازی، متقاطع و متناظر اشاره کنید.



۳- دو خط موازی رسم کنید و آنها را d_1 و d_2 بنامید.

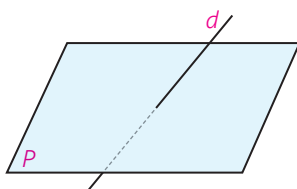
حالا خط d_3 را موازی با d_2 رسم کنید. دو خط d_1 و d_3 نسبت به هم چه وضعی دارند؟

نتیجه ۱: در یک صفحه دو خط موازی با یک خط _____.

آیا در فضا نیز این نتیجه برقرار است؟

۴- می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟



۵- خط d با صفحه P متقاطع است.

خط‌های موجود در صفحه P نسبت به خط d چه

وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟

■ حالت‌های مختلف خط و صفحه

► **مداختان را طوری در دست بگیرید که مداد یا امتداد آن، صفحه‌میز را قطع نکند.**

اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم _____ هستند.



► **نوک مداد را روی میز بگذارید. در این حالت مدادتان در یک نقطه با میز اشتراک دارد.**

اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم _____ هستند.

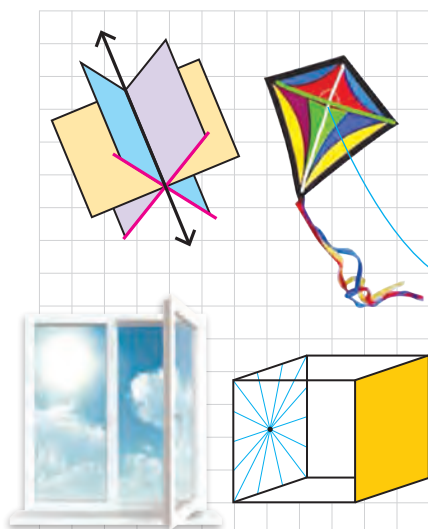


► **مداختان را روی میز قرار دهید.**

اگر خط و صفحه بی‌شمار نقطه اشتراک داشته باشند خط بر صفحه واقع است.

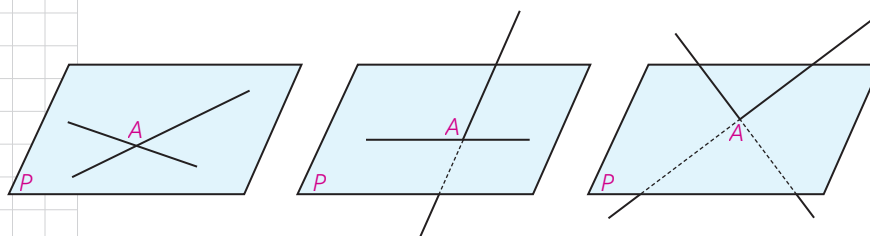


خط و صفحه در فضا نسبت به هم _____ یا _____ هستند یا خط بر صفحه _____ است.



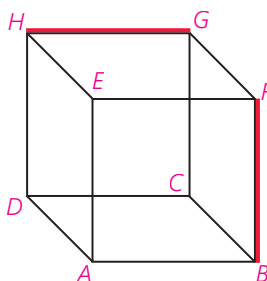
- ۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)
 - از یک خط در فضا چند صفحه می‌گذرد؟
 - از دو خط متقاطع چند صفحه می‌گذرد؟
 - از دو خط موازی چطور؟
 - از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد؟

- ۲- دو خط در نقطهٔ A متقاطع‌اند و صفحهٔ P شامل نقطهٔ A است. با توجه به شکل‌های زیر حالت‌های مختلف خطوط متقاطع و صفحهٔ P را بررسی کنید.



- ۳- دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی‌اند.
 - الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟
 - ب) اگر صفحهٔ P شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟
 - ج) اگر صفحهٔ P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

- ۴- مسئلهٔ قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متناظرند.



حالت‌های مختلف دو صفحه

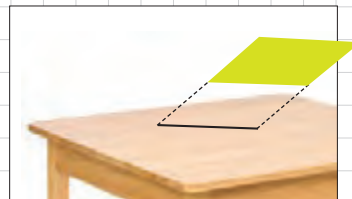
یک برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه میز را قطع نکند.

اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم هستند.



برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه میز را قطع کند. اشتراک صفحه‌ای که برگه قسمتی از آن است، با سطح میز به چه شکلی است؟

اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم هستند. خط راستی که اشتراک دو صفحه متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.



دو صفحه در فضا نسبت به هم یا هستند. وقتی دو صفحه برهم منطبق می‌شوند، آنها را یک صفحه در نظر می‌گیریم.

کاردرکلاس

به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

HG و DC چگونه؟

EF و GC چگونه؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

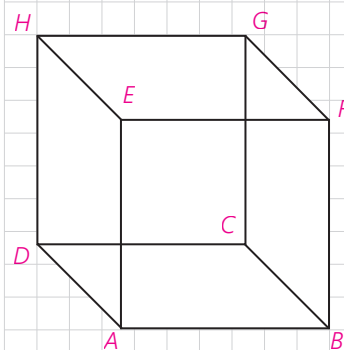
با چند خط متنافر است؟

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

با کدام متقاطع است؟

بر کدام واقع است؟

د) دو صفحه موازی و دو صفحه متقاطع نام ببرید.



نوک مداد خود را مطابق شکل به صورت قائم بر صفحه کتاب نگه دارید. در این حالت ماداتان با بقیه خطهای موجود در صفحه که از نقطه تقاطع مداد و سطح میز می گذرند، چه وضعیتی دارد؟

تعریف: فرض کنید خط l در نقطه A صفحه P را قطع می کند. خط l بر صفحه P عمود است؛ هرگاه بر تمام خطهای صفحه P که از نقطه A می گذرند، عمود باشد.

آیا اگر خطی فقط بر یکی از خطوط صفحه ای عمود باشد، می توانیم بگوییم آن خط به آن صفحه عمود است؟

می توان نشان داد که:

اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه ای، در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

تعریف: دو صفحه بر هم عمودند؛ هرگاه هر کدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.

کاردرکلاس

(۲)



(۱)



می دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی اند.

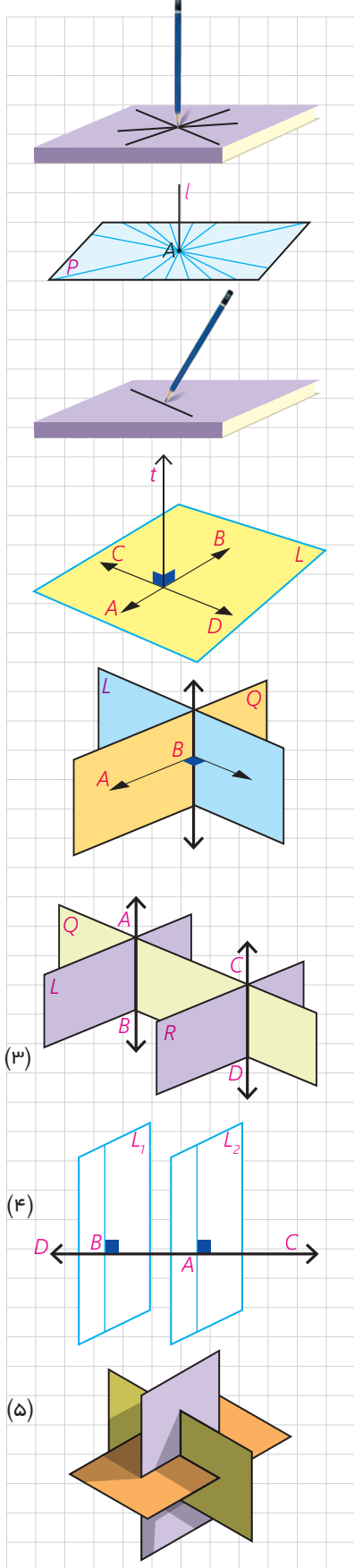
الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی اند؟

ب) آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی اند؟

ج) دو صفحه عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

ه) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.



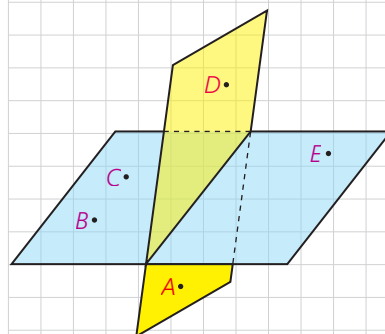
۱- با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید :

الف) چند صفحه در شکل می بینید، نام ببرید.

ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه اند.

ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.

د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟



۲- دو صفحه P_1 و P_2 را به گونه ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).

الف) اگر صفحه ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت.

ب) اگر صفحه ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می تواند داشته باشد.

۳- شکل زیر یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می دهد. وضعیت خط ها و صفحه های زیر را مشخص کنید.

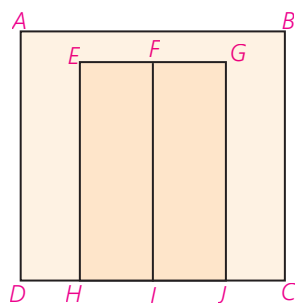
الف) وضعیت صفحات $EFIH$ و $ABCD$ و $FGJI$ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خطوط BC و FI

ج) خطوط AB و FI

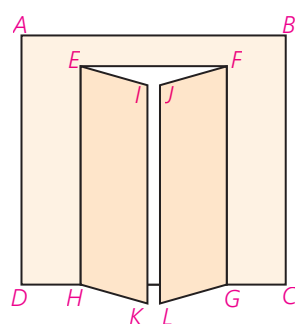
د) خطوط EF و FG

هـ) خطوط HI و FG





۴- تجسم کنید دو لنگه در هر کدام 30° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحه‌های ABCD و EIKH و خط JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

ج) خط JL و صفحه EIKH

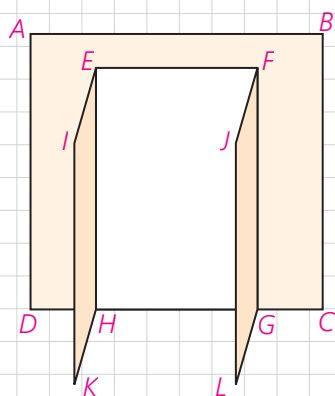
د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

ه) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ز) خطوط BC و FJ

۵- تصور کنید دو لنگه در هر کدام 90° باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحات ABCD و EIKH و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

ج) خط JL و صفحه EIKH

د) خطوط EI و FJ

ه) خطوط FJ و HK

۶- منشور سه پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

الف) سه جفت خط متمایز دو به دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به دو متناظر نام ببرید.

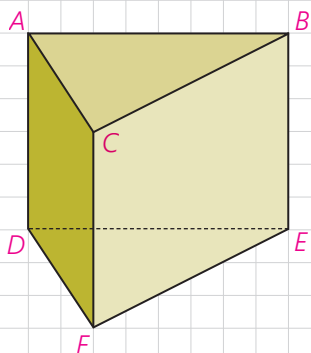
ج) سه جفت خط دو به دو متقاطع نام ببرید.

د) سه خط هم‌رس نام ببرید.

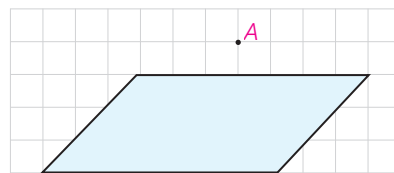
ه) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید.

و) دو صفحه موازی نام ببرید.

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید.



۷- از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟

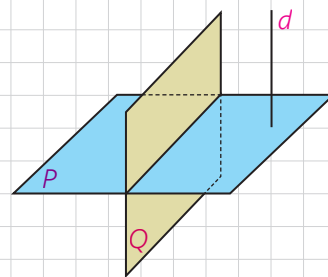


۸- از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

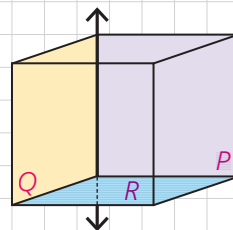
الف) خط بر صفحه عمود باشد.

ب) خط بر صفحه عمود نباشد.

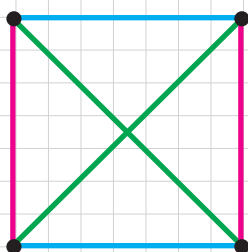
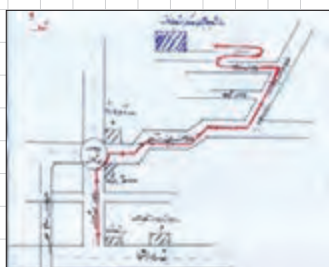
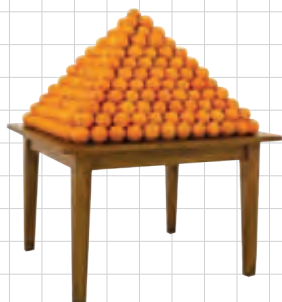
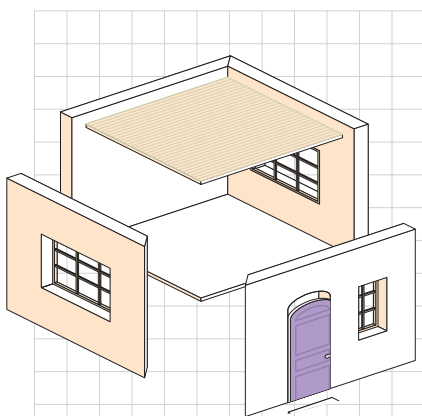
۹- دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟



۱۰- دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه R چه وضعیتی دارد؟



تفکر تجسمی



– چهره پدر یا مادر خود را در ذهن تصور کنید. چه ویژگی‌هایی دارند؟ به نظر شما اگر ده سال جوان‌تر یا ده سال پیرتر بودند به چه شکل بودند؟

– در شکل روبه‌رو چند پرتقال روی میز چیده شده است؟

– سعی کنید برای دوستان توصیف کنید که خانه‌تان به چه شکل است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانه بزرگ‌تری داشتید. در این صورت خانه جدید، چه شکلی می‌توانست داشته باشد؟

– در بسیاری از موارد مانند آنچه در تصویر می‌بینید، لازم است تصویری از مسیر حرکتمان را ترسیم کنیم. شما هم طرح فوری^۱ مسیر خانه تا مدرسه را برای دوستان رسم کنید.

– در شکل روبه‌رو چه می‌بینید؟
– اگر بدانید که این تصویر به یک جسم هندسی مربوط است که از بالا به آن نگاه شده است، چه جسم هندسی را تصور می‌کنید؟

در تمام حالت‌های بالا شما در واقع از تفکر تجسمی خود استفاده کرده‌اید.

در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند درباره موضوع مورد نظر فکر کنیم.

۱- «طرح فوری» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «کروکی» به کار می‌رود.

عکاس‌ها، نقاش‌ها، هنرمندان و بسیاری از انسان‌ها معمولاً می‌توانند متفاوت از سایرین به اطراف خود نگاه کنند. حتماً شما هم تصاویری مشابه تصاویر زیر دیده‌اید.



— تصویر روبه‌رو چه چیزی را به شما نشان می‌دهد؟

۱۲ آیا می‌توان ادعا کرد که یکی از این تصاویر نسبت به بقیه کامل‌تر یا بهتر است؟

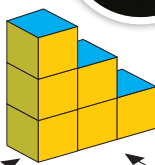
۱۲ آیا می‌توان بدون چرخاندن شکل یا تغییر زاویه دید، تمام این تصاویر را دید؟



نمای بالا



نمای چپ



نمای روبه‌رو



۱۲ آیا نمونه‌هایی شبیه به این موضوع را در زندگی واقعی دیده‌اید؟



نمای روبه‌رو



نمای چپ

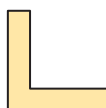


نمای بالا

تصویر زیر از نمای بالا، چپ و روبه‌رو رسم شده است.



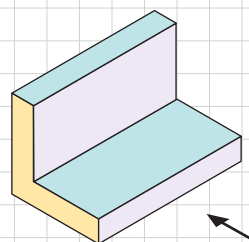
نمای روبه‌رو



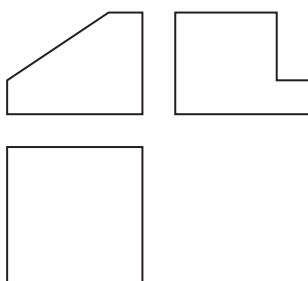
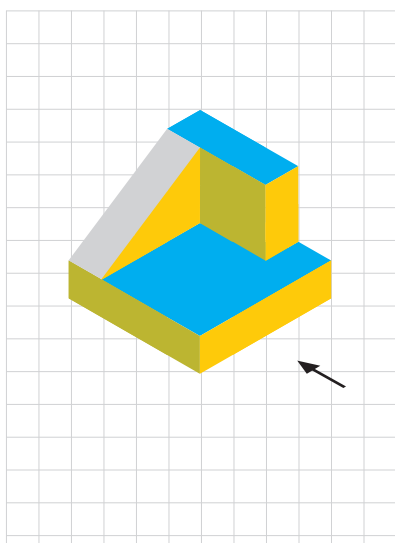
نمای چپ



نمای بالا



در رسم نماهای مختلف، لحاظ کردن ارتفاع‌های متفاوت و رسم خطوط داخلی نما، مدنظر نیست، فقط در شکل‌هایی که به صورت شطرنجی، اندازه‌های دقیق داده شده، انتظار می‌رود در رسم نماهای مختلف، خطوط شطرنجی ترسیم شود.



۱- شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

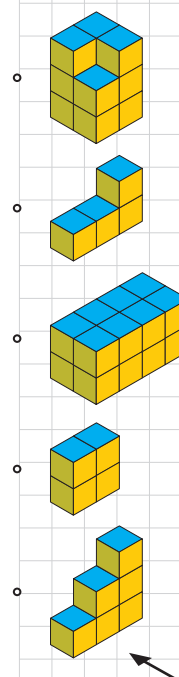
۲- سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

	نمای چپ	نمای بالا	نمای روبه‌رو

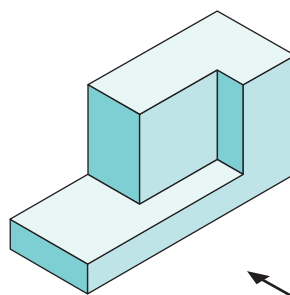
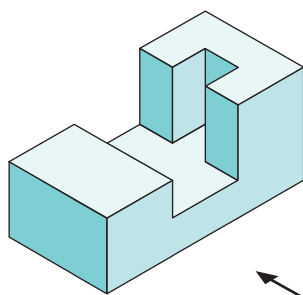
۳- دو مکعب مستطیل را روی هم قرار داده‌ایم. ابعاد مکعب مستطیل بالایی از مکعب مستطیل پایینی کمتر است. تصویری از این دو مکعب مستطیل رسم کنید که نمای روبه‌رو و نمای بالا را نشان دهد.

۱- نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.

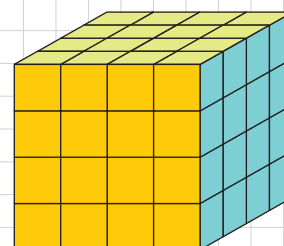
نمای بالا	نمای چپ	نمای روبه‌رو



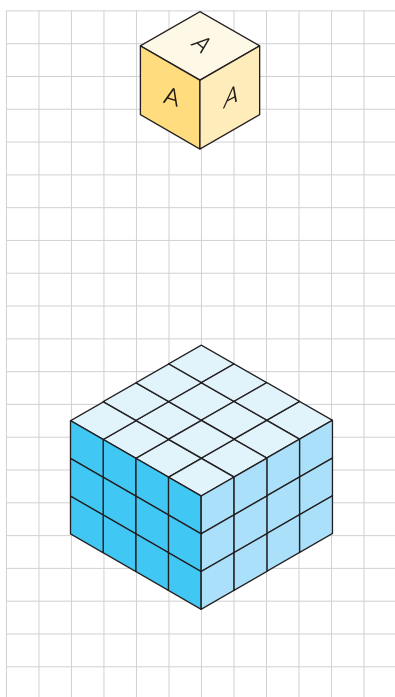
۲- در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.



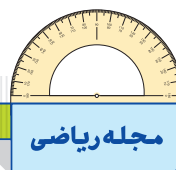
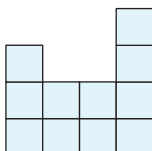
- ۳- تمام وجه‌های مکعبی را رنگ آمیزی کرده‌ایم.
- چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟
 - چند مکعب، رنگ نشده است؟
 - چند مکعب، رنگ شده است؟
 - چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟
 - چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟



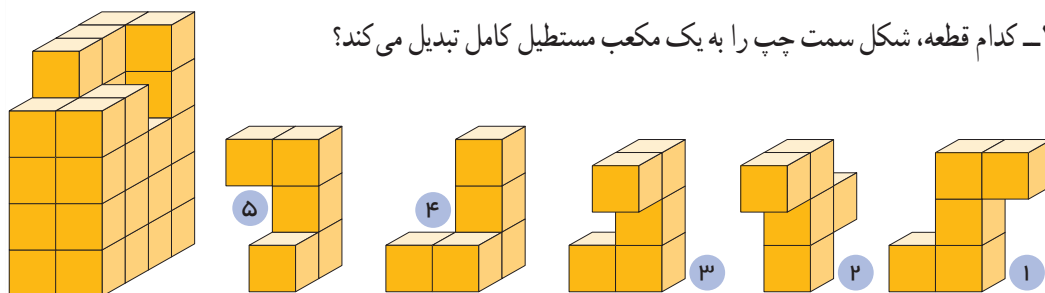
۴- روی تمام وجه‌های مکعب‌ها حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟



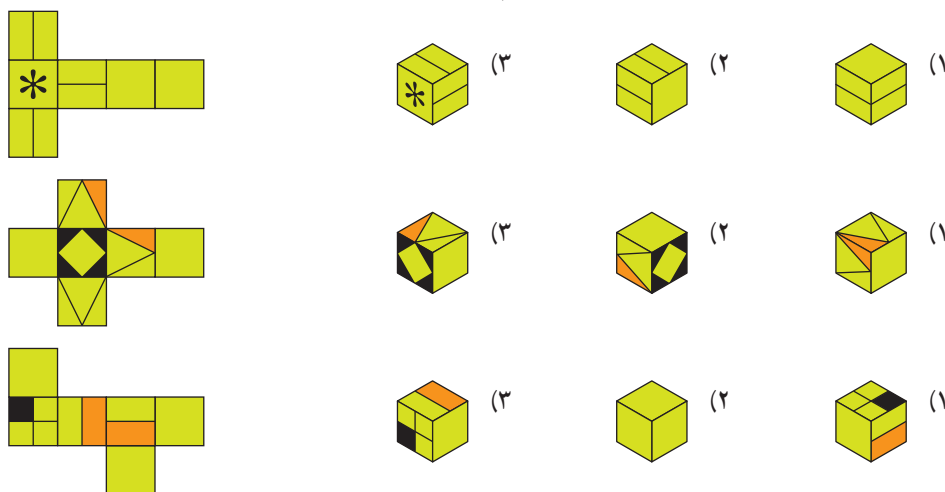
۵- شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟ حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟



۱- کدام قطعه، شکل سمت چپ را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می‌کند؟



۲- در هر شکل، مکعب گسترده‌ی سمت چپ مربوط به کدام یک از مکعب‌های سمت راست است؟



برش

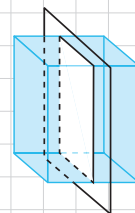
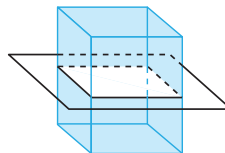
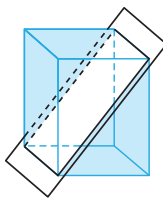
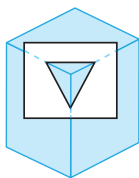
حتماً تا به حال ناچار شده‌اید که برای خوردن برخی میوه‌ها یا مواد غذایی دیگر، آنها را برش بزنید. آیا همه میوه‌ها به یک شکل برش زده می‌شوند و شکل هندسی یکسانی از برش زدن آنها به دست می‌آید؟

حال فرض کنید که می‌خواهیم یک جسم هندسی را برش بزنیم.

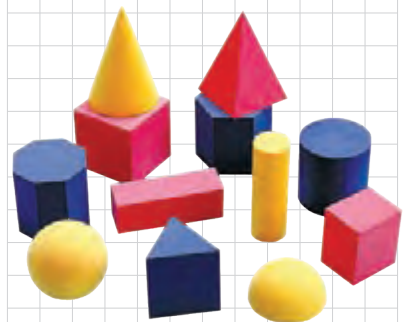
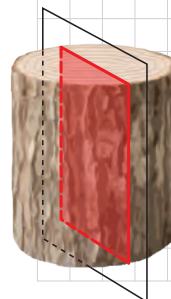
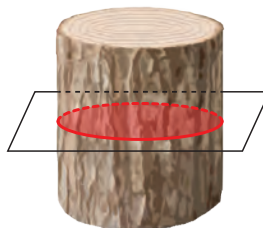
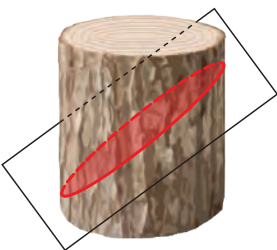
تعریف: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

فعالیت

– بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعده مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.

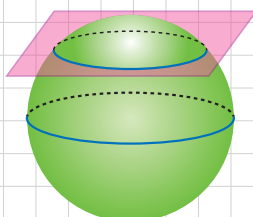
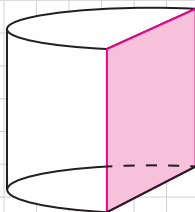
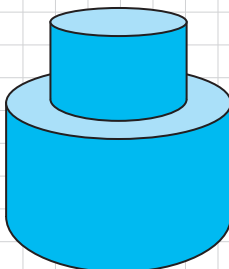
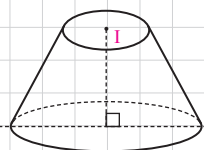
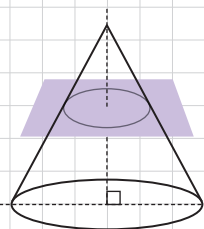


– سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحه مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟

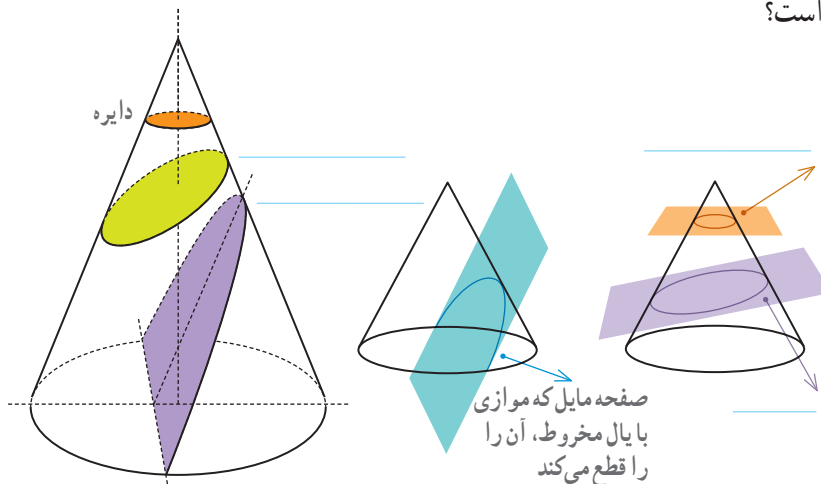


در سال‌های آینده با تعریف دقیق‌تر **بیضی** آشنا خواهید شد.

سهمی، بیضی و دایره جزء مقاطع مخروطی هستند. مقاطع مخروطی در مطالعه مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار و قمرهای مصنوعی کاربرد زیادی دارند. همین‌طور در مطالعه ساختار اتم‌ها، سامانه‌های راهنمای هواپیماها، ساختن عدسی‌ها، وسایل نوری و وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی و ساختن پل‌ها به کار می‌روند.



سطح مقطع یک مخروط قائم در برخورد با صفحه‌های افقی و مایل به چه شکل است؟



– مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعده آن برخورد داده‌ایم. این صفحه مخروط را به دو بخش تقسیم می‌کند. بخش بالایی به چه شکل است؟
بخش زیرین را **مخروط ناقص** می‌نامند.
اگر صفحه‌ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کند، سطح مقطع حاصل چیست؟

کاردرکلاس

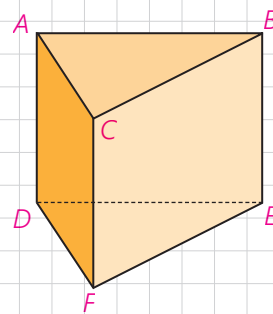
۱– دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر دو این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

۲– در شکل روبه‌رو نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحه‌ای مایلی که از قاعده استوانه عبور نکند به چه شکل است؟

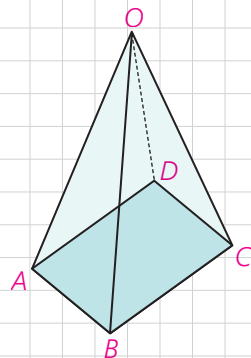
۳– سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟
در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟

۱– واژه «سامانه» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «سیستم» به کار می‌رود.

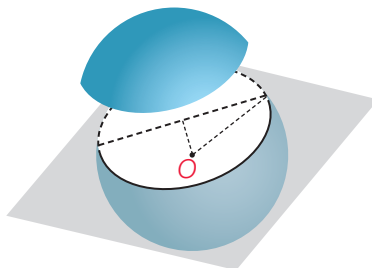
۱- فرض کنید منشور سمت راست، یک قطعه چوبی توپر باشد. این قطعه چوبی را طوری اره می‌کنیم که از سه نقطه مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟
 الف) M ، N و P وسط پاره‌های BE ، CF و AD
 ب) C ، D و E
 ج) C ، F و Q (وسط پاره خط AB)



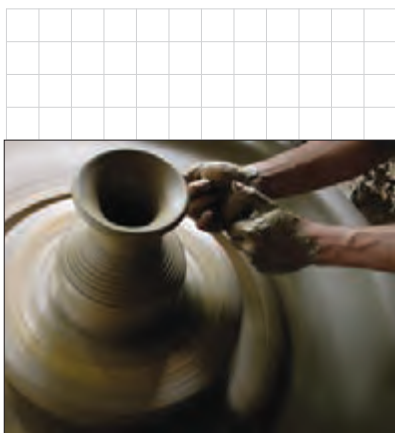
۲- قاعده هرمی، مستطیل $ABCD$ است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.
 الف) صفحه P بر ارتفاع هرم عمود باشد.
 ب) صفحه P از O بگذرد و بر قاعده هرم عمود باشد.
 ج) صفحه P از O نگذرد؛ ولی بر قاعده هرم عمود باشد.



۳- صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟



۴- دو کره با شعاع‌های r و r' یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟
 اگر همه این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟



دوران حول محور

از دوران دادن شکل‌های متفاوت هندسی، حول یک محور می‌توان جسم‌های هندسی مختلفی را تصور کرد.



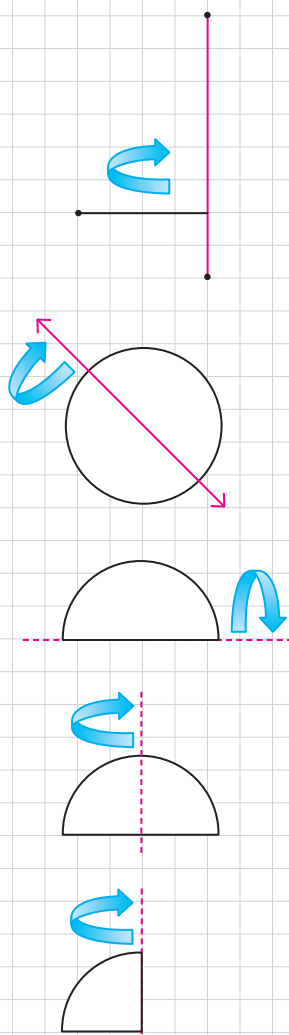
– فرض کنید دو پاره‌خط برهم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم. چه شکل هندسی‌ای ساخته می‌شود؟

– دایره‌ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم. شکل حاصل چیست؟

– یک نیم دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟

– اگر همین نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته می‌شود؟

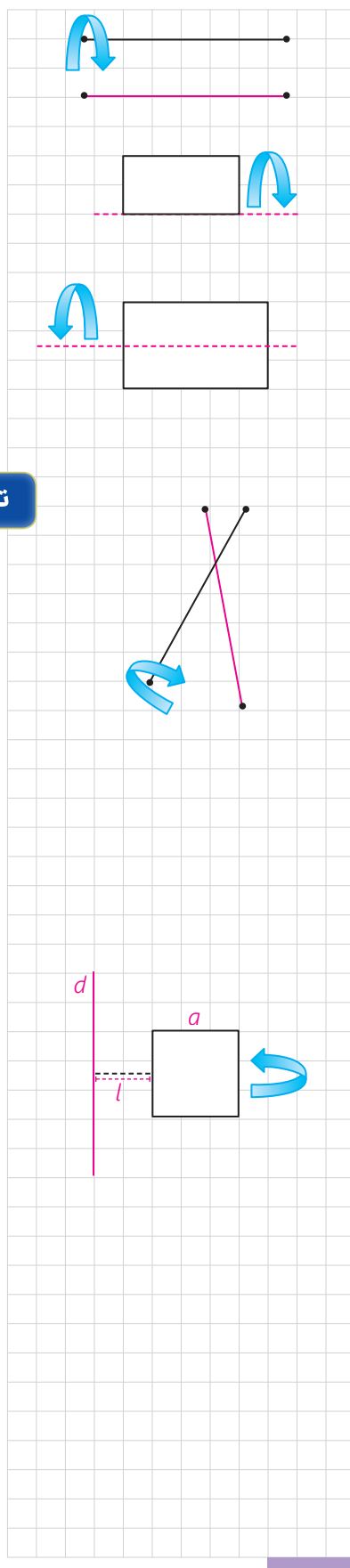
– اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟



– دو پاره خط موازی را در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟

– اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، چطور؟

– اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟



۱– دو پاره خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از پاره خط ها را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته می شود؟

۲– در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

الف) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع آن :

ب) دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه :

پ) دوران یک دوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده ها :

ت) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول قاعده آن :

۳– مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.

۴– شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.

